

**ТЕХНИЧЕСКИЙ
СПРАВОЧНИК
ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНИКА**



ТЕХНИЧЕСКИЙ СПРАВОЧНИК ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНИКА

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

А. Ф. БАРАНОВ, Д. Д. БИЗЮКИН,
М. И. ВАХНИН, Б. Н. ВЕДЕНИСОВ,
И. В. ИВЛИЕВ, В. И. ПОПОВ,
Е. Ф. РУДОЙ, Я. И. СОКОЛИНСКИЙ,
В. Н. СОЛОГУБОВ, В. А. ШИЛОВСКИЙ

Главный редактор
Е. Ф. РУДОЙ



ГОСУДАРСТВЕННОЕ ТРАНСПОРТНОЕ
ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО

Москва • 1951

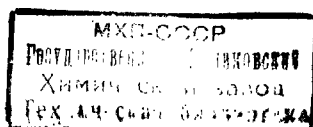
ТЕХНИЧЕСКИЙ СПРАВОЧНИК ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНИКА

Том 1

ФИЗИКО-
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ

Ответственный редактор тома
проф., докт. техн. наук
Н. И. БЕЛОКОНЬ

*



ГОСУДАРСТВЕННОЕ ТРАНСПОРТНОЕ
ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО

Москва • 1951

4371

АВТОРЫ ТОМА

И. М. ВОРОНКОВ, проф., д-р техн. наук; Б. В. КЛИМЕНКОВ, доц., канд. техн. наук; К. В. КОНСТАНТИНОВА; Н. А. КУТЫРИН, доц., канд. техн. наук; Н. В. ЛЕВИН, инж.; Г. Л. ЛУНЦ, доц., канд. физ.-мат. наук; Г. М. ПАНЧЕНКОВ, проф., д-р хим. наук; М. А. ПЕТРОВ, проф., докт. техн. наук; В. И. ЧЕРНИКИН, доц., канд. техн. наук; А. Р. ЯНПОЛЬСКИЙ, доц., канд. техн. наук.

✱

РЕЦЕНЗЕНТЫ

А. П. ЮШКЕВИЧ, проф., докт. физ.-мат. наук; А. З. РЫВКИН; К. А. СЕМЕНДЯЕВ, доц., канд. физ.-мат. наук (математика); К. Ф. ЖИГАЧ, проф., докт. хим. наук (химия); В. Г. ГОГОЛАДЗЕ, проф., докт. техн. наук; А. У. ГАЛЕЕВ, доц., канд. техн. наук (механика); И. А. ЧАРНЫЙ, проф., докт. техн. наук; Я. З. РАБИНОВИЧ, доц., канд. техн. наук (гидромеханика); И. И. МЕНЩИКОВ, доц., канд. техн. наук; М. Д. НАХОДКИН, доц. (основы электротехники); В. К. КОШКИН, проф., докт. техн. наук; В. М. ТАРЕЕВ, проф., докт. техн. наук (теплота); В. С. ЛЕВИЦКИЙ, доц., канд. техн. наук (графический материал).

✱

РЕДАКЦИЯ ТОМА:

Н. И. БЕЛОКОНЬ, М. Л. РУДОЙ, В. Я. ЧЕРНЯВСКИЙ

СОДЕРЖАНИЕ



	Стр.		Стр.
От редакционной коллегии	6	Кинематика	368
От редакции первого тома	9	Динамика	375
АЛФАВИТ ЛАТИНСКИЙ	12	Центр тяжести и моменты инерции	390
АЛФАВИТ ГРЕЧЕСКИЙ	12	Трение	398
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ	13	ГИДРОМЕХАНИКА (доц., канд. техн. наук Черников В. И.)	404
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ТАБЛИЦЫ	15	Физические свойства жидкостей	404
МАТЕМАТИКА доц., канд. физ.-мат. наук Лунц Г. Л. и доц., канд. техн. наук Янполь- ский А. Р.	91	Гидростатика	408
Арифметика и алгебра	91	Гидродинамика идеальной жидкости	413
Геометрия	108	Гидродинамика реальной (вязкой) жидкости	420
Тригонометрия	117	Движение жидкости по трубам	422
Дифференциальное исчисление	127	Расчёт трубопроводных систем	428
Интегральное исчисление	135	Местные сопротивления	432
Бесконечные ряды	156	Равномерное движение жидкости в открытых руслах	437
Дифференциальные уравнения	165	Водосливы	443
Вариационное исчисление	177	Неравномерное движение жидкости в откры- тых руслах	449
Аналитическая геометрия	179	Удар жидкости	458
Дифференциальная геометрия	194	Истечение несжимаемых жидкостей при по- стоянном уровне	461
Векторное исчисление	207	Истечение несжимаемых жидкостей при пе- ременном уровне	465
Теория функций комплексного переменного	212	Внешнее обтекание тел	467
Теория вероятностей и метод наименьших квадратов	222	Движение грунтовых вод	469
Эмпирические формулы	230	Аэро- и газодинамика	474
Приближённые вычисления	233	ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ (проф., докт. техн. наук Петров М. А.)	480
Приближённое решение алгебраических и трансцендентных уравнений	236	Магнитное поле	480
Исчисление конечных разностей и интерпо- лирование	244	Электрическое поле	486
Численные и графические методы анализа	254	Постоянный ток	490
Номография	262	Переменный ток	497
ХИМИЯ (проф., д-р хим. наук Панченков Г. М.	269	ТЕПЛОТА (доц., канд. техн. наук Кутырин Н. А.)	510
Периодическая система элементов	269	Общие тепловые свойства тел	510
Неорганическая химия (Константинова К. В.)	272	Термодинамика	527
Органическая химия	294	Газы	531
Физическая химия (Панченков Г. М. проф., докт. хим. наук и канд. хим. наук Кли- менков Б. В.)	315	Водяной пар	546
Коллоидная химия	349	Течение газов и паров по трубам, истечение из резервуаров	568
МЕХАНИКА (проф., докт. техн. наук Во- ронков И. М. и инж. Левин Н. В.)	357	Теплопередача	574
Основные определения	357	ЕДИНИЦЫ ИЗМЕРЕНИЙ	605
Статика	357	АЛФАВИТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ	615

ОТ РЕДАКЦИОННОЙ КОЛЛЕГИИ ТЕХНИЧЕСКОГО СПРАВОЧНИКА ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНИКА

Огромные изменения, происшедшие на железнодорожном транспорте за последние 15 лет со времени выхода в свет Технического справочника транспортника, настоятельно требуют издания нового справочного руководства для железнодорожников.

Сталинские пятилетки коренным образом преобразили железнодорожный транспорт СССР. Советский железнодорожный транспорт в результате оснащения новой техникой и развития стахановского движения стал передовой отраслью народного хозяйства. Это позволило транспорту в годы Великой Отечественной войны с честью выдержать нагрузку, с которой, как отметил товарищ Сталин, едва ли справился транспорт любой другой страны.

Организованный партией Ленина — Сталина после победоносного окончания Великой Отечественной войны новый мощный хозяйственный и культурный подъём позволил железнодорожному транспорту в короткие сроки не только залечить раны, нанесённые войной, но и двинуться вперёд по пути дальнейшего технического прогресса и обеспечения потребностей народного хозяйства передвижными средствами.

Превысив в 1948 г. довоенный уровень грузооборота, железнодорожный транспорт успешно выполняет послевоенный пятилетний план.

Благодаря повседневным заботам партии, советского правительства и лично товарища Сталина железные дороги оснащаются во всё возрастающих количествах новой высокопроизводительной отечественной техникой.

Подвижной состав пополняется новыми конструкциями паровозов, тепловозов, электровозов, грузовых и пассажирских вагонов. Путевое хозяйство значительно усиливается усовершенствованными механизмами.

Широко механизированы трудоёмкие работы. Растёт число механизированных сортировочных горок. Всё в больших размерах на транспорте находят применение радио, телеуправление, различные устройства, улучшающие безопасность движения поездов и увеличивающие пропускную и провозную способность железнодорожных линий.

В депо, на заводах, стройках, станциях, дистанциях растёт производственная культура, совершенствуются технологические процессы.

В Техническом справочнике железнодорожника обобщены и систематизированы важнейшие справочные данные по основным вопросам техники и экономики железнодорожного транспорта.

Коллектив авторов, рецензентов и редакторов справочника стремился создать пособие, отвечающее требованиям современного развития науки и техники в области транспорта, с учётом достижений передовых людей железнодорожного транспорта в использовании транспортной техники и организации технологического процесса. В связи с этим в Техническом справочнике железнодорожника получили широкое отражение вопросы новой техники по каждой отрасли железнодорожного хозяйства; в нём помещены также расчётные данные и технические формулы, которые могут быть использованы как производственниками, так и проектировщиками при

решении технических вопросов эксплуатации и развития железнодорожного транспорта.

Справочник рассчитан на лиц, имеющих высшее и среднее специальное образование. В связи с этим в справочнике приводятся понятия, определения и формулы, как правило, без объяснения их, за исключением особо сложных случаев. В главах, посвящённых машинам и технологии, наряду со справочными данными, приводится также описательный материал, разъясняющий схему действия машины и технологический процесс.

Сведения, которые относятся к различным отраслям железнодорожной работы, помещены в целях избежания дублирования, как правило, в одном томе, например: «Насосы», «Инженерная геология», «Электрическое освещение» и т. п.

Справочные данные по физико-математическим и общетехническим дисциплинам помещены в первых двух томах. Конкретные вопросы железнодорожного транспорта вынесены в специальные тома, например, в первом томе приведены общие тепловые свойства тел, основные законы термодинамики и теплопередачи, в III томе — строительная теплотехника, а в V томе — описание и тепловой расчёт паровой машины.

Таким образом, несмотря на специализацию, отдельные тома находятся во взаимной связи и дополняют друг друга.

Ссылки на материалы других томов и глав должны помочь читателю ориентироваться в размещении справочных материалов по томам.

Для удобства и облегчения пользования справочником в начале каждого тома дано содержание по главам, а в конце каждого тома — алфавитные указатели.

Для ориентировки в размещении материала ниже приводится перечень основных разделов каждого тома.

I том — Физико-математический. Греческий и латинский алфавиты. Математическая символика. Математические таблицы. Математика. Химия. Механика. Гидромеханика. Основы электротехники. Теплота. Единицы измерений и переводные таблицы.

II том — Технические расчёты. Сопротивление материалов. Теория упругости и пластичности. Статика сооружений. Динамика сооружений. Расчёт тонкостенных стержней. Механика грунтов. Детали машин. Сортамент и расчётные характеристики некоторых материалов. Топливо. Электрические машины. Электрическое освещение. Паровые машины. Двигатели внутреннего сгорания. Паровые турбины. Газовые турбины. Ветряные двигатели. Насосы. Холодильные установки и льдозаводы. Геодезия. Инженерная геология. Метеорология. Электрические измерения. Измерение температуры. Измерение расхода жидкости, пара и газов. Измерение давления, числа оборотов, мощности и веса.

III том — Проектирование и постройка железных дорог. Габариты железных дорог. Проектирование железных дорог. Экономические изыскания. Постройка железных дорог. Основания и фундаменты. Расчёт металлических, деревянных, бетонных, железобетонных и каменных конструкций. Здания на железнодорожном транспорте (конструктивные элементы зданий, строительные работы). Строительные механизмы и инструменты.

IV том — Путь и путевое хозяйство. Земляное полотно. Верхнее строение. Устройство рельсовой колеи. Соединение путей. Основы расчёта пути на прочность и устойчивость. Путевой инструмент. Механизация путевых работ. Текущее содержание пути. Борьба со снегом, водой и песком. Ремонт и реконструкция путей. Карьерное хозяйство.

Мостовые переходы. Опоры мостов. Деревянные, каменные, бетонные, железобетонные и металлические мосты. Постройка мостов. Определение грузоподъёмности мостов. Усиление, ремонт и переустройство мостов. Проектирование и постройка тоннелей. Метрополитены.

V том — Подвижной состав. Классификация и основные характеристики паровозов. Конструкция и тепловой расчёт паровозного котла. Паровая машина паровоза. Парораспределение. Экипаж. Тендер. Вписывание паровозов в кривые. Динамический паспорт паровоза. Паровозы узкоколейных железных дорог.

Классификация, основные характеристики и конструкции тепловозов. Тепловозные двигатели. Холодильные установки тепловозов. Конструктивное оформление передач тепловозов.

Классификация, основные характеристики вагонов. Конструкции товарных и пассажирских вагонов. Динамика вагонов. Прочность вагонов. Тормоза. Автосцепка.

Тяговые расчёты (сопротивление поезда, сила тяги, тормозная сила, уравнение движения поезда, расчёт времени хода, тормозные задачи, расход воды и топлива).

VI том — Локомотивное и вагонное хозяйство. Организация паровозного хозяйства. Водоснабжение и водоподготовка. Организация тепловозного хозяйства. Организация вагонного хозяйства. Организация производства на паровозоремонтных и вагоноремонтных заводах. Технические условия, технология и справочные данные по ремонту паровозов, тепловозов и вагонов. Технология сварки, литейного и кузнечно-прессового производства. Обработка металлов резанием. Металлорежущие станки. Металлорежущий инструмент. Допуски и посадки.

VII том — Сигнализация, централизация, блокировка и связь. Сигнализация на железнодорожном транспорте. Полуавтоматическая блокировка. Механическая централизация и станционная блокировка. Диспетчерская централизация. Автоблокировка. Электрическая централизация. Автостопы и каб-сигнализация. Оповестительная сигнализация.

Теория связи. Воздушные линии связи. Кабельные линии. Избирательная связь. Телеграф. Радио на железных дорогах. Измерения и измерительная аппаратура. Защита линий связи. Эксплуатация устройств связи.

VIII том — Электрификация железных дорог. Тяговые подстанции (тяговые трансформаторы, ртутные выпрямители, моторгенераторы, коммутационная аппаратура). Контактная сеть (опоры, схемы соединений, расчёт сети, проектирование, эксплуатация).

Основные характеристики электровозов и моторвагонных секций. Тяговые двигатели и их характеристики. Вспомогательные машины, электрическая аппаратура, аккумуляторные батареи, тормоза. Электровозное и моторвагонное депо. Ремонт электроподвижного состава.

Потребление энергии и источники энергоснабжения железных дорог. ЦЭС, ТЭЦ, электростанции узлов и депо, передвижные электростанции.

IX том — Эксплуатация железных дорог. Коммерческая эксплуатация железных дорог. Железнодорожные станции и узлы. Организация работы станций и узлов. Организация движения поездов. Планирование и регулирование движением на железнодорожном транспорте. Пассажирские перевозки. Правила технической эксплуатации и обеспечение безопасности движения поездов. Структура органов управления железнодорожным транспортом и их задачи. Координация работы железных дорог и других видов транспорта.

X том — Экономика и планирование на железнодорожном транспорте. Значение железнодорожного транспорта в системе социалистического хозяйства СССР. Производственно-финансовое планирование хозяйства социалистического транспорта. Тарифы на грузовые и пассажирские перевозки. Труд и заработная плата на железных дорогах. Бухгалтерский учёт на железнодорожном транспорте. Железнодорожная статистика.

Подробное содержание всех разделов приводится в каждом томе.

Редакционная коллегия просит всех читателей направлять свои замечания и пожелания в Трансжелдориздат для использования их в дальнейшей работе над материалами Технического справочника железнодорожника.

ОТ РЕДАКЦИИ ПЕРВОГО ТОМА

Содержание первого тома Технического справочника железнодорожника, как тома физико-математического, определяется общими задачами технических справочников и специальными требованиями последующих томов ТСЖ.

Первый том ТСЖ объединяет справочные материалы по наиболее общим разделам.

Математические таблицы даны, соответственно обычной практике технических справочников, в нижеследующем объеме: степени, корни, натуральные логарифмы, длины окружностей, площади кругов и обратные величины (табл. 1), мантиссы десятичных логарифмов (таблица 2), натуральные значения тригонометрических функций (табл. 3), характеристики дуг (табл. 4—6), специальные функции (табл. 7 и 8), важнейшие постоянные (табл. 9) и сводка расчётных характеристик плоских фигур и тел (табл. 10 и 11).

Мантиссы десятичных логарифмов (табл. 2) и натуральные значения тригонометрических функций (табл. 3) даны в расширенном объеме: шестизначные мантиссы десятичных логарифмов для аргументов от 1 до 10 000, шести- и семизначные таблицы тригонометрических функций через $1'$. Столь подробные таблицы исключают необходимость применения специальных математических справочников и позволяют осуществлять с необходимой точностью даже наиболее строгие вычисления по геодезии, механике, электротехнике и т. п.

Математика охватывает общие и специальные дисциплины математического анализа: арифметику и алгебру, геометрию, тригонометрию, дифференциальное и интегральное исчисления, ряды, дифференциальные уравнения в полных и частных производных, вариационное исчисление, аналитическую и дифференциальную геометрию, векторное исчисление, теорию функций комплексного переменного и элементы прикладного анализа; теорию вероятностей и метод наименьших квадратов, приближённые вычисления, построения эмпирических формул и номографию.

Относительно широкий состав математических дисциплин, начиная от арифметики и геометрии, обусловлен требованиями специальных разделов железнодорожной техники и преследует цели совмещения справочных материалов по математике для наиболее широкого круга специалистов и технического персонала железнодорожного транспорта.

Химия дана в объеме общих основ, неорганической, органической и физической химии, включая основы термохимии и коллоидной химии; в целях усиления прикладной роли справочных материалов по химии приведён обзор основных свойств химических элементов и важнейших соединений (кислоты и соли).

Механика изложена наиболее кратко и сжато: статика и графостатика, кинематика, динамика точек и системы; прикладные задачи механики кратко освещены лишь в части теории трения, так как специальным задачам механики (например, теории тяговых расчётов и т. п.) посвящены самостоятельные разделы последующих томов ТСЖ.

Гидромеханика объединяет справочные материалы по гидростатике, гидродинамике идеальной и вязкой жидкостей, газодинамике и прикладной гидравлике, включая задачи гидравлики трубопроводов, движения в открытых руслах, истечения жидкостей и подземной гидравлики (движение грунтовых вод); справочные материалы по гидротехнике широко иллюстрированы и, по возможности, систематизированы в форме справочных таблиц, чем обеспечено наиболее сжатое изложение теоретического и экспериментального материала.

Основы электротехники, как и механики, даны весьма сжато—магнитное поле, электрическое поле, постоянный ток, переменный ток, так как специальные вопросы электротехники подробно освещаются в соответствующих разделах ТСЖ (электротяга, связь и т. п.).

Теплота включает основы технической термодинамики и теплопередачи; справочный материал этого раздела первого тома ТСЖ дан в наиболее распространенной редакции, характерной для технических справочников.

Единицы измерений даны в точной редакции соответствующих стандартов.

Наиболее трудные разделы первого тома ТСЖ, по возможности, иллюстрированы примерами.

Первый том ТСЖ не может заменить специальных руководств и предполагает наличие необходимой подготовки у читателей; для облегчения пользования справочником в случае ведения специальных расчетов в конце каждого раздела I тома ТСЖ приведен указатель рекомендуемой литературы и важнейших первоисточников.

АЛФАВИТЫ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ
И
ТАБЛИЦЫ

ЛАТИНСКИЙ АЛФАВИТ

Печатные буквы		Название	Рукописные буквы	
прописные	строчные		прописные	строчные
A	a	а	<i>A</i>	<i>a</i>
B	b	бе	<i>B</i>	<i>b</i>
C	c	це	<i>C</i>	<i>c</i>
D	d	де	<i>D</i>	<i>d</i>
E	e	е	<i>E</i>	<i>e</i>
F	f	эф	<i>F</i>	<i>ff</i>
G	g	ге	<i>G</i>	<i>g</i>
H	h	аш	<i>H</i>	<i>h</i>
I	i	и	<i>I</i>	<i>i</i>
J	j	йот	<i>J</i>	<i>j</i>
K	k	ка	<i>K</i>	<i>k</i>
L	l	эль	<i>L</i>	<i>l</i>
M	m	эм	<i>M</i>	<i>m</i>
N	n	эн	<i>N</i>	<i>n</i>
O	o	о	<i>O</i>	<i>o</i>
P	p	пе	<i>P</i>	<i>p</i>
Q	q	ку	<i>Q</i>	<i>q</i>
R	r	эр	<i>R</i>	<i>r</i>
S	s	эс	<i>S</i>	<i>s</i>
T	t	те	<i>T</i>	<i>t</i>
U	u	у	<i>U</i>	<i>u</i>
V	v	ве	<i>V</i>	<i>v</i>
W	w	дубль-ве	<i>W</i>	<i>w</i>
X	x	икс	<i>X</i>	<i>x</i>
Y	y	игрек	<i>Y</i>	<i>y</i>
Z	z	зет	<i>Z</i>	<i>z</i>

ГРЕЧЕСКИЙ АЛФАВИТ

Печатные буквы		Название	Рукописные буквы	
прописные	строчные		прописные	строчные
Α	α	альфа	<i>A</i>	<i>α</i>
Β	β	бета	<i>B</i>	<i>β</i>
Γ	γ	гамма	<i>Γ</i>	<i>γ</i>
Δ	δ	дельта	<i>Δ</i>	<i>δ</i>
Ε	ε	эпсилон	<i>E</i>	<i>ε</i>
Ζ	ς	дзета	<i>Z</i>	<i>ζ</i>
Η	η	эта	<i>H</i>	<i>η</i>
Θ	θ	тета	<i>Θ</i>	<i>θ</i>
Ι	ι	иота	<i>I</i>	<i>ι</i>
Κ	κ	каппа	<i>K</i>	<i>κ</i>
Λ	λ	ламбда	<i>Λ</i>	<i>λ</i>
Μ	μ	ми (мю)	<i>M</i>	<i>μ</i>
Ν	ν	ни (ню)	<i>N</i>	<i>ν</i>
Ξ	ξ	кси	<i>E</i>	<i>ξ</i>
Ο	ο	омикрон	<i>O</i>	<i>ο</i>
Π	π	пи	<i>Π</i>	<i>π</i>
Ρ	ρ	ро	<i>Ρ</i>	<i>ρ</i>
Σ	σ, ς	сигма	<i>Σ</i>	<i>σ</i>
Τ	τ	тау	<i>T</i>	<i>τ</i>
Υ	υ	ипсилон	<i>Υ</i>	<i>υ</i>
Φ	φ	фи	<i>Φ</i>	<i>φ</i>
Χ	χ	хи	<i>Χ</i>	<i>χ</i>
Ψ	ψ	пси	<i>Ψ</i>	<i>ψ</i>
Ω	ω	омега	<i>Ω</i>	<i>ω</i>

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ (ОСНОВНЫЕ) ОСТ 573

(Редакция 1931 г.)

I. Обозначения чисел

В многозначном целом числе цифры разбиваются на группы по три справа налево, причём группы отделяются друг от друга промежутками; например: 1 411 312.

Десятичная дробь отделяется от целой части запятой; при отсутствии целой части на её место ставится нуль. В случае большого числа десятичных знаков они разбиваются на группы по три слева направо промежутками; например: 13,593 93.

Для обозначения обыкновенной дроби применяется горизонтальная черта; например:

$$\frac{7}{22}$$

Примечание. Для удобства печатания допускается косая черта, если это не вызывает недоразумений.

В смешанном числе правильная дробь ставится непосредственно за целой частью; например: $7\frac{2}{3}$

% — процент
‰ — промилле

Положительный характер числа знаком не отмечается, кроме тех случаев, когда это требуется отметить; в этих случаях ставится впереди знак + (плюс); например: + 5

Отрицательный характер числа обозначается поставленным впереди знаком (минус); например: — 5

Абсолютное значение числа обозначается двумя вертикальными чертами; например:

$$| - 5 |$$

II. Обозначения соотношений

= равно
≡ тождественно или тождественно равно (применяется в случае, когда желательно особо отметить тождественность обеих частей равенства)
≠ неравно
≈ приближённо равно
< меньше

> больше
≤ меньше или равно (не больше)
≥ больше или равно (не меньше)
≪ мало сравнительно с
≫ велико сравнительно с

III. Обозначения основных действий

+ (плюс) сложение
— (минус) вычитание
· или × умножение

Знак умножения обычно не ставится перед числом, обозначенным буквой, и перед скобками.

: или ——— деление
 a^m a в степени m

$\sqrt{\quad}$ квадратный корень

i квадратный корень из — 1; $i = \sqrt{-1}$

$\sqrt[m]{\quad}$ корень степени m при $m \neq 2$

\log_b логарифм при основании b .

Примечание. В тех случаях, когда нет необходимости указывать основание, соответствующий подстрочный значок при \log опускается.

\lg логарифм при основании 10 (обыкновенный или десятичный логарифм)

\ln логарифм при основании $e = 2,718\ 28\dots$ (натуральный логарифм)

Для обозначения степени логарифма показатель степени ставится при знаке логарифма,

например: $\log_b^2 a$

() круглые
[] квадратные
{ } фигурные } скобки

IV. Геометрические обозначения

⊥ перпендикулярно
∥ параллельно
≡ равно и параллельно
~ подобно
△ треугольник; например: △ ABC
∠ плоский угол; например: ∠ ABC

Примечание. В тех случаях, когда могут возникнуть недоразумения, для обозначения угла можно применять более сложный знак ∠.

Таблица 1. СТЕПЕНИ, КОРНИ, НАТУРАЛЬНЫЕ ЛОГАРИФМЫ, ДЛИНЫ
ОКРУЖНОСТЕЙ, ПЛОЩАДИ КРУГОВ И ОБРАТНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

1—50

n	n^2	n^3	\sqrt{n}	$\sqrt{10n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\ln n$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	$\frac{1000}{n}$	n
1	1	1	1,00000	3,16228	1,00000	0,00000	3,1416	0,785398	1000,000	1
2	4	8	1,41421	4,47214	1,25992	0,69315	6,2832	3,14159	500,000	2
3	9	27	1,73205	5,47723	1,44225	1,09861	9,4248	7,06858	333,333	3
4	16	64	2,00000	6,32456	1,58740	1,38629	12,566	12,5664	250,000	4
5	25	125	2,23607	7,07107	1,70998	1,60944	15,708	19,6350	200,000	5
6	36	216	2,44949	7,74597	1,81712	1,79176	18,850	28,2743	166,667	6
7	49	343	2,64575	8,36660	1,91293	1,94591	21,991	38,4845	142,857	7
8	64	512	2,82843	8,94427	2,00000	2,07944	25,133	50,2655	125,000	8
9	81	729	3,00000	9,48683	2,08008	2,19722	28,274	63,6173	111,111	9
10	100	1000	3,16228	10,0000	2,15443	2,30259	31,416	78,5398	100,000	10
11	121	1331	3,31662	10,4881	2,22398	2,39790	34,558	95,0332	90,9091	11
12	144	1728	3,46410	10,9545	2,28943	2,48491	37,699	113,097	83,3333	12
13	169	2197	3,60555	11,4018	2,35133	2,56495	40,841	132,732	76,9231	13
14	196	2744	3,74166	11,8322	2,41014	2,63906	43,982	153,938	71,4286	14
15	225	3375	3,87298	12,2474	2,46621	2,70805	47,124	176,715	66,6667	15
16	256	4096	4,00000	12,6491	2,51984	2,77259	50,265	201,062	62,5000	16
17	289	4913	4,12311	13,0384	2,57128	2,83321	53,407	226,980	58,8235	17
18	324	5832	4,24264	13,4164	2,62074	2,89037	56,549	254,469	55,5556	18
19	361	6859	4,35890	13,7840	2,66840	2,94444	59,690	283,529	52,6316	19
20	400	8000	4,47214	14,1421	2,71442	2,99573	62,832	314,159	50,0000	20
21	441	9261	4,58258	14,4914	2,75892	3,04452	65,973	346,361	47,6190	21
22	484	10648	4,69042	14,8324	2,80204	3,09104	69,115	380,133	45,4545	22
23	529	12167	4,79583	15,1658	2,84387	3,13549	72,257	415,476	43,4783	23
24	576	13824	4,89898	15,4919	2,88450	3,17805	75,398	452,389	41,6667	24
25	625	15625	5,00000	15,8114	2,92402	3,21888	78,540	490,874	40,0000	25
26	676	17576	5,09902	16,1245	2,96250	3,25810	81,681	530,929	38,4615	26
27	729	19683	5,19615	16,4317	3,00000	3,29584	84,823	572,555	37,0370	27
28	784	21952	5,29150	16,7332	3,03659	3,33220	87,965	615,752	35,7143	28
29	841	24389	5,38516	17,0294	3,07232	3,36730	91,106	660,520	34,4828	29
30	900	27000	5,47723	17,3205	3,10723	3,40120	94,248	706,858	33,3333	30
31	961	29791	5,56776	17,6068	3,14138	3,43399	97,389	754,768	32,2581	31
32	1024	32768	5,65685	17,8885	3,17480	3,46574	100,53	804,248	31,2500	32
33	1089	35937	5,74456	18,1659	3,20753	3,49651	103,67	855,299	30,3030	33
34	1156	39304	5,83095	18,4391	3,23961	3,52636	106,81	907,920	29,4118	34
35	1225	42875	5,91608	18,7083	3,27107	3,55535	109,96	962,113	28,5714	35
36	1296	46656	6,00000	18,9737	3,30193	3,58352	113,10	1017,88	27,7778	36
37	1369	50653	6,08276	19,2354	3,33222	3,61092	116,24	1075,21	27,0270	37
38	1444	54872	6,16441	19,4936	3,36198	3,63759	119,38	1134,11	26,3158	38
39	1521	59319	6,24500	19,7484	3,39121	3,66356	122,52	1194,59	25,6410	39
40	1600	64000	6,32456	20,0000	3,41995	3,68988	125,66	1256,64	25,0000	40
41	1681	68921	6,40312	20,2485	3,44822	3,71357	128,81	1320,25	24,3902	41
42	1764	74088	6,48074	20,4939	3,47603	3,73767	131,95	1385,44	23,8095	42
43	1849	79507	6,55744	20,7364	3,50340	3,76120	135,09	1452,20	23,2558	43
44	1936	85184	6,63325	20,9762	3,53035	3,78419	138,23	1520,53	22,7273	44
45	2025	91125	6,70820	21,2132	3,55689	3,80666	141,37	1590,43	22,2222	45
46	2116	97336	6,78233	21,4476	3,58305	3,82864	144,51	1661,90	21,7391	46
47	2209	103823	6,85565	21,6795	3,60883	3,85015	147,65	1734,94	21,2766	47
48	2304	110592	6,92820	21,9089	3,63424	3,87120	150,80	1809,56	20,8333	48
49	2401	117649	7,00000	22,1359	3,65931	3,89182	153,94	1885,74	20,4082	49
50	2500	125000	7,07107	22,3607	3,68404	3,91202	157,08	1963,50	20,0000	50
n	n^2	n^3	\sqrt{n}	$\sqrt{10n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\ln n$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	$\frac{1000}{n}$	n

50—100

n	n^2	n^3	\sqrt{n}	$\sqrt[3]{10n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\ln n$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	$\frac{1000}{n}$	n
50	25 00	125 000	7,07107	22,3607	3,68403	3,91202	157,08	1963,50	20,0000	50
51	26 01	132 651	7,14143	22,5832	3,70843	3,93183	160,22	2042,82	19,6078	51
52	27 04	140 608	7,21110	22,8035	3,73251	3,95124	163,36	2123,72	19,2308	52
53	28 09	148 877	7,28011	23,0217	3,75629	3,97029	166,50	2206,18	18,8679	53
54	29 16	157 464	7,34847	23,2379	3,77976	3,98898	169,65	2290,22	18,5185	54
55	30 25	166 375	7,41620	23,4521	3,80295	4,00733	172,79	2375,83	18,1818	55
56	31 36	175 616	7,48331	23,6643	3,82586	4,02535	175,93	2463,01	17,8571	56
57	32 49	185 193	7,54983	23,8747	3,84850	4,04305	179,07	2551,76	17,5439	57
58	33 64	195 112	7,61577	24,0832	3,87088	4,06044	182,21	2642,08	17,2414	58
59	34 81	205 379	7,68115	24,2899	3,89300	4,07754	185,35	2733,97	16,9492	59
60	36 00	216 000	7,74597	24,4949	3,91487	4,09434	188,50	2827,43	16,6667	60
61	37 21	226 981	7,81025	24,6982	3,93650	4,11087	191,64	2922,47	16,3934	61
62	38 44	238 328	7,87401	24,8993	3,95789	4,12713	194,78	3019,07	16,1290	62
63	39 69	250 047	7,93725	25,0993	3,97906	4,14313	197,92	3117,25	15,8730	63
64	40 96	262 144	8,00000	25,2982	4,00000	4,15888	201,06	3216,99	15,6250	64
65	42 25	274 625	8,06226	25,4951	4,01073	4,17439	204,20	3318,31	15,3846	65
66	43 56	287 496	8,12404	25,6905	4,04124	4,18965	207,35	3421,19	15,1515	66
67	44 89	300 763	8,18535	25,8844	4,06155	4,20469	210,49	3525,65	14,9254	67
68	46 24	314 432	8,24621	26,0768	4,08165	4,21951	213,63	3631,68	14,7059	68
69	47 61	328 509	8,30662	26,2679	4,10157	4,23411	216,77	3739,28	14,4928	69
70	49 00	343 000	8,36660	26,4575	4,12129	4,24850	219,91	3848,45	14,2857	70
71	50 41	357 911	8,42615	26,6458	4,14082	4,26268	223,05	3959,19	14,0845	71
72	51 84	373 248	8,48528	26,8328	4,16017	4,27667	226,19	4071,50	13,8889	72
73	53 29	389 017	8,54400	27,0185	4,17934	4,29046	229,34	4185,39	13,6986	73
74	54 76	405 224	8,60233	27,2029	4,19834	4,30407	232,48	4300,84	13,5135	74
75	56 25	421 875	8,66025	27,3861	4,21716	4,31749	235,62	4417,86	13,3333	75
76	57 76	438 976	8,71780	27,5681	4,23582	4,33073	238,76	4536,46	13,1579	76
77	59 29	456 533	8,77496	27,7489	4,25432	4,34381	241,90	4656,63	12,9870	77
78	60 84	474 552	8,83176	27,9285	4,27266	4,35671	245,04	4778,36	12,8205	78
79	62 41	493 039	8,88819	28,1069	4,29084	4,36945	248,19	4901,67	12,6582	79
80	64 00	512 000	8,94427	28,2843	4,30887	4,38203	251,33	5026,55	12,5000	80
81	65 61	531 441	9,00000	28,4605	4,32675	4,39445	254,47	5153,00	12,3457	81
82	67 24	551 368	9,05539	28,6356	4,34448	4,40672	257,61	5281,02	12,1951	82
83	68 89	571 787	9,11043	28,8097	4,36207	4,41884	260,75	5410,61	12,0482	83
84	70 56	592 704	9,16515	28,9828	4,37952	4,43082	263,89	5541,77	11,9048	84
85	72 25	614 125	9,21954	29,1548	4,39683	4,44265	267,04	5674,50	11,7647	85
86	73 96	636 056	9,27362	29,3258	4,41401	4,45435	270,18	5808,80	11,6279	86
87	75 69	658 503	9,32738	29,4958	4,43105	4,46591	273,32	5944,68	11,4943	87
88	77 44	681 472	9,38083	29,6648	4,44796	4,47734	276,46	6082,12	11,3636	88
89	79 21	704 969	9,43398	29,8329	4,46475	4,48864	279,60	6221,14	11,2360	89
90	81 00	729 000	9,48683	30,0000	4,48140	4,49981	282,74	6361,73	11,1111	90
91	82 81	753 571	9,53939	30,1662	4,49794	4,51086	285,88	6503,88	10,9890	91
92	84 64	778 688	9,59165	30,3315	4,51436	4,52179	289,03	6647,61	10,8696	92
93	86 49	804 357	9,64365	30,4959	4,53065	4,53260	292,17	6792,91	10,7527	93
94	88 36	830 584	9,69536	30,6594	4,54634	4,54329	295,31	6939,78	10,6383	94
95	90 25	857 375	9,74679	30,8221	4,56290	4,55388	298,45	7088,22	10,5263	95
96	92 16	884 736	9,79796	30,9839	4,57886	4,56435	301,59	7238,23	10,4167	96
97	94 09	912 673	9,84886	31,1448	4,59470	4,57471	304,73	7389,81	10,3093	97
98	96 04	941 192	9,89949	31,3050	4,61044	4,58497	307,88	7542,96	10,2041	98
99	98 01	970 299	9,94987	31,4643	4,62607	4,59512	311,02	7697,69	10,1010	99
100	100 00	1000 000	10,00000	31,6228	4,64159	4,60517	314,16	7853,98	10,0000	100
n	n^2	n^3	\sqrt{n}	$\sqrt[3]{10n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\ln n$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	$\frac{1000}{n}$	n

100—150

n	n^2	n^3	\sqrt{n}	$\sqrt{10n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\ln n$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	$\frac{1000}{n}$	n
100	1 00 00	1 000 000	10,0000	31,6228	4,64159	4,60517	314,16	7853,98	10,0000	100
101	1 02 01	1 030 301	10,0499	31,7805	4,65701	4,61512	317,30	8011,85	9,90099	101
102	1 04 04	1 061 208	10,0995	31,9374	4,67233	4,62497	320,44	8171,28	9,80392	102
103	1 06 09	1 092 727	10,1489	32,0936	4,68755	4,63473	323,58	8332,29	9,70874	103
104	1 08 16	1 124 864	10,1980	32,2490	4,70267	4,64439	326,73	8494,87	9,61538	104
105	1 10 25	1 157 625	10,2470	32,4037	4,71769	4,65396	329,87	8659,01	9,52381	105
106	1 12 36	1 191 016	10,2956	32,5576	4,73262	4,66344	333,01	8824,73	9,43396	106
107	1 14 49	1 225 043	10,3441	32,7109	4,74746	4,67283	336,15	8992,02	9,34579	107
108	1 16 64	1 259 712	10,3923	32,8634	4,76220	4,68213	339,29	9160,88	9,25926	108
109	1 18 81	1 295 029	10,4403	33,0151	4,77686	4,69135	342,43	9331,32	9,17431	109
110	1 21 00	1 331 000	10,4881	33,1662	4,79142	4,70048	345,58	9503,32	9,09091	110
111	1 23 21	1 367 631	10,5357	33,3167	4,80590	4,70953	348,72	9676,89	9,00901	111
112	1 25 44	1 404 928	10,5830	33,4664	4,82028	4,71850	351,86	9852,03	8,92857	112
113	1 27 69	1 442 897	10,6301	33,6155	4,83459	4,72739	355,00	10028,7	8,84956	113
114	1 29 96	1 481 544	10,6771	33,7639	4,84881	4,73620	358,14	10207,0	8,77193	114
115	1 32 25	1 520 875	10,7238	33,9117	4,86294	4,74493	361,28	10386,9	8,69565	115
116	1 34 56	1 560 896	10,7703	34,0588	4,87700	4,75359	364,42	10568,3	8,62069	116
117	1 36 89	1 601 613	10,8167	34,2053	4,89097	4,76217	367,57	10751,3	8,54701	117
118	1 39 24	1 643 032	10,8628	34,3511	4,90487	4,77068	370,71	10935,9	8,47458	118
119	1 41 61	1 685 159	10,9087	34,4964	4,91868	4,77912	373,85	11122,0	8,40336	119
120	1 44 00	1 728 000	10,9545	34,6410	4,93242	4,78749	376,99	11309,7	8,33333	120
121	1 46 41	1 771 561	11,0000	34,7851	4,94609	4,79579	380,13	11499,0	8,26446	121
122	1 48 84	1 815 848	11,0454	34,9285	4,95968	4,80402	383,27	11689,9	8,19672	122
123	1 51 29	1 860 867	11,0905	35,0714	4,97319	4,81218	386,42	11882,3	8,13008	123
124	1 53 76	1 906 624	11,1355	35,2136	4,98663	4,82028	389,56	12076,3	8,06452	124
125	1 56 25	1 953 125	11,1803	35,3553	5,00000	4,82831	392,70	12271,8	8,00000	125
126	1 58 76	2 000 376	11,2250	35,4965	5,01330	4,83628	395,84	12469,0	7,93651	126
127	1 61 29	2 048 383	11,2694	35,6371	5,02653	4,84419	398,98	12667,7	7,87402	127
128	1 63 84	2 097 152	11,3137	35,7771	5,03968	4,85203	402,12	12868,0	7,81250	128
129	1 66 41	2 146 689	11,3578	35,9166	5,05277	4,85981	405,27	13069,8	7,75194	129
130	1 69 00	2 197 000	11,4018	36,0555	5,06580	4,86753	408,41	13273,2	7,69231	130
131	1 71 61	2 248 091	11,4455	36,1939	5,07875	4,87520	411,55	13478,2	7,63359	131
132	1 74 24	2 299 968	11,4891	36,3318	5,09164	4,88280	414,69	13684,8	7,57576	132
133	1 76 89	2 352 637	11,5326	36,4692	5,10447	4,89035	417,83	13892,9	7,51880	133
134	1 79 56	2 406 104	11,5758	36,6060	5,11723	4,89784	420,97	14102,6	7,46269	134
135	1 82 25	2 460 375	11,6190	36,7423	5,12993	4,90527	424,12	14313,9	7,40741	135
136	1 84 96	2 515 456	11,6619	36,8782	5,14256	4,91265	427,26	14526,7	7,35294	136
137	1 87 69	2 571 353	11,7047	37,0135	5,15514	4,91998	430,40	14741,1	7,29927	137
138	1 90 44	2 628 072	11,7473	37,1484	5,16765	4,92725	433,54	14957,1	7,24638	138
139	1 93 21	2 685 619	11,7898	37,2827	5,18010	4,93447	436,63	15174,7	7,19424	139
140	1 96 00	2 744 000	11,8322	37,4166	5,19249	4,94164	439,82	15393,8	7,14286	140
141	1 98 81	2 803 221	11,8743	37,5500	5,20483	4,94876	442,96	15614,5	7,09220	141
142	2 01 64	2 863 288	11,9164	37,6829	5,21710	4,95583	446,11	15836,8	7,04225	142
143	2 04 49	2 924 207	11,9583	37,8153	5,22932	4,96284	449,25	16060,6	6,99301	143
144	2 07 36	2 985 984	12,0000	37,9473	5,24148	4,96981	452,39	16286,0	6,94444	144
145	2 10 25	3 048 625	12,0416	38,0789	5,25359	4,97673	455,53	16513,0	6,89655	145
146	2 13 16	3 112 136	12,0830	38,2099	5,26564	4,98361	458,67	16741,5	6,84932	146
147	2 16 09	3 176 523	12,1244	38,3406	5,27763	4,99043	461,81	16971,7	6,80272	147
148	2 19 04	3 241 792	12,1655	38,4708	5,28957	4,99721	464,96	17203,4	6,75676	148
149	2 22 01	3 307 949	12,2066	38,6005	5,30146	5,00395	468,10	17436,6	6,71141	149
150	2 25 00	3 375 000	12,2474	38,7298	5,31329	5,01064	471,24	17671,5	6,66667	150
n	n^2	n^3	\sqrt{n}	$\sqrt{10n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\ln n$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	$\frac{1000}{n}$	n

150—200

n	n^2	n^3	\sqrt{n}	$\sqrt{10n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\ln n$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	$\frac{1000}{n}$	n
150	2 25 00	3 375 000	12,2474	38,7298	5,31329	5,01064	471,24	17671,5	6,66667	150
151	2 28 01	3 442 951	12,2882	38,8587	5,32507	5,01728	474,38	17907,9	6,62252	151
152	2 31 04	3 511 808	12,3288	38,9872	5,33680	5,02388	477,52	18145,8	6,57895	152
153	2 34 09	3 581 577	12,3693	39,1152	5,34848	5,03044	480,66	18385,4	6,53595	153
154	2 37 16	3 652 264	12,4097	39,2428	5,36011	5,03695	483,81	18626,5	6,49351	154
155	2 40 25	3 723 875	12,4499	39,3700	5,37169	5,04343	486,95	18869,2	6,45161	155
156	2 43 36	3 796 416	12,4900	39,4968	5,38321	5,04986	490,09	19113,4	6,41026	156
157	2 46 49	3 869 893	12,5300	39,6232	5,39469	5,05625	493,23	19359,3	6,36943	157
158	2 49 64	3 944 312	12,5698	39,7492	5,40612	5,06260	496,37	19606,7	6,32911	158
159	2 52 81	4 019 679	12,6095	39,8748	5,41750	5,06890	499,51	19855,7	6,28931	159
160	2 56 00	4 096 000	12,6491	40,0000	5,42884	5,07517	502,65	20106,2	6,25000	160
161	2 59 21	4 173 281	12,6886	40,1248	5,44012	5,08140	505,80	20358,3	6,21118	161
162	2 62 44	4 251 528	12,7279	40,2492	5,45136	5,08760	508,94	20612,0	6,17284	162
163	2 65 69	4 330 747	12,7671	40,3733	5,46256	5,09375	512,08	20867,2	6,13497	163
164	2 68 96	4 410 944	12,8062	40,4969	5,47370	5,09987	515,22	21124,1	6,09756	164
165	2 72 25	4 492 125	12,8452	40,6202	5,48481	5,10595	518,36	21382,5	6,06061	165
166	2 75 56	4 574 296	12,8841	40,7431	5,49586	5,11199	521,50	21642,4	6,02410	166
167	2 78 89	4 657 463	12,9228	40,8656	5,50688	5,11799	524,65	21904,0	5,98802	167
168	2 82 24	4 741 632	12,9615	40,9878	5,51785	5,12396	527,79	22167,1	5,95238	168
169	2 85 61	4 826 809	13,0000	41,1096	5,52877	5,12990	530,93	22431,8	5,91716	169
170	2 89 00	4 913 000	13,0384	41,2311	5,53966	5,13580	534,07	22698,0	5,88235	170
171	2 92 41	5 000 211	13,0767	41,3521	5,55050	5,14166	537,21	22965,8	5,84795	171
172	2 95 84	5 088 448	13,1149	41,4729	5,56130	5,14749	540,35	23235,2	5,81395	172
173	2 99 29	5 177 717	13,1529	41,5933	5,57205	5,15329	543,50	23506,2	5,78035	173
174	3 02 76	5 268 024	13,1909	41,7133	5,58277	5,15906	546,64	23778,7	5,74713	174
175	3 06 25	5 359 375	13,2288	41,8330	5,59344	5,16479	549,78	24052,8	5,71429	175
176	3 09 76	5 451 776	13,2665	41,9524	5,60408	5,17048	552,92	24328,5	5,68182	176
177	3 13 29	5 545 233	13,3041	42,0714	5,61467	5,17615	556,06	24605,7	5,64972	177
178	3 16 84	5 639 752	13,3417	42,1900	5,62523	5,18178	559,20	24884,6	5,61798	178
179	3 20 41	5 735 339	13,3791	42,3084	5,63574	5,18739	562,35	25164,9	5,58659	179
180	3 24 00	5 832 000	13,4164	42,4264	5,64622	5,19296	565,49	25446,9	5,55556	180
181	3 27 61	5 929 741	13,4536	42,5441	5,65665	5,19850	568,63	25730,4	5,52486	181
182	3 31 24	6 028 568	13,4907	42,6615	5,66705	5,20401	571,77	26015,5	5,49451	182
183	3 34 89	6 128 487	13,5277	42,7785	5,67741	5,20949	574,91	26302,2	5,46448	183
184	3 38 56	6 229 504	13,5647	42,8952	5,68773	5,21494	578,05	26590,4	5,43478	184
185	3 42 25	6 331 625	13,6015	43,0116	5,69802	5,22036	581,19	26880,3	5,40541	185
186	3 45 96	6 434 856	13,6382	43,1277	5,70827	5,22575	584,34	27171,6	5,37634	186
187	3 49 69	6 539 203	13,6748	43,2435	5,71848	5,23111	587,48	27464,6	5,34759	187
188	3 53 44	6 644 672	13,7113	43,3590	5,72865	5,23644	590,62	27759,1	5,31915	188
189	3 57 21	6 751 269	13,7477	43,4741	5,73879	5,24175	593,76	28055,2	5,29101	189
190	3 61 00	6 859 000	13,7840	43,5890	5,74890	5,24702	596,90	28352,9	5,26316	190
191	3 64 81	6 967 871	13,8203	43,7035	5,75897	5,25227	600,04	28652,1	5,23560	191
192	3 68 64	7 077 888	13,8564	43,8178	5,76900	5,25750	603,19	28952,9	5,20833	192
193	3 72 49	7 189 057	13,8924	43,9318	5,77900	5,26269	606,33	29255,3	5,18135	193
194	3 76 36	7 301 384	13,9284	44,0454	5,78896	5,26786	609,47	29559,2	5,15464	194
195	3 80 25	7 414 875	13,9642	44,1588	5,79889	5,27300	612,61	29864,8	5,12821	195
196	3 84 16	7 529 536	14,0000	44,2719	5,80879	5,27811	615,75	30171,9	5,10204	196
197	3 88 09	7 645 373	14,0357	44,3847	5,81865	5,28320	618,89	30480,5	5,07614	197
198	3 92 04	7 762 392	14,0712	44,4972	5,82848	5,28827	622,04	30790,7	5,05051	198
199	3 96 01	7 880 599	14,1067	44,6094	5,83827	5,29330	625,18	31102,6	5,02513	199
200	4 00 00	8 000 000	14,1421	44,7214	5,84804	5,29832	628,32	31415,9	5,00000	200
n	n^2	n^3	\sqrt{n}	$\sqrt{10n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\ln n$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	$\frac{1000}{n}$	n

200—250

n	n^2	n^3	\sqrt{n}	$\sqrt{10n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\ln n$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	$\frac{1000}{n}$	n
200	4 00 00	8 000 000	14,1421	44,7214	5,84804	5,29832	628,32	31415,9	5,00000	200
201	4 04 01	8 120 601	14,1774	44,8330	5,85777	5,30330	631,46	31730,9	4,97512	201
202	4 08 04	8 242 408	14,2127	44,9444	5,86746	5,30827	634,60	32047,4	4,95050	202
203	4 12 09	8 365 427	14,2478	45,0555	5,87713	5,31321	637,74	32365,5	4,92611	203
204	4 16 16	8 489 664	14,2829	45,1664	5,88677	5,31812	640,88	32685,1	4,90196	204
205	4 20 25	8 615 125	14,3178	45,2769	5,89637	5,32301	644,03	33006,4	4,87805	205
206	4 24 36	8 741 816	14,3527	45,3872	5,90594	5,32788	647,17	33329,2	4,85437	206
207	4 28 49	8 869 743	14,3875	45,4973	5,91548	5,33272	650,31	33653,5	4,83092	207
208	4 32 64	8 998 912	14,4222	45,6070	5,92499	5,33754	653,45	33979,5	4,80769	208
209	4 36 81	9 129 329	14,4568	45,7165	5,93447	5,34233	656,59	34307,0	4,78469	209
210	4 41 00	9 261 000	14,4914	45,8258	5,94392	5,34711	659,73	34636,1	4,76190	210
211	4 45 21	9 393 931	14,5258	45,9347	5,95334	5,35186	662,88	34966,7	4,73934	211
212	4 49 44	9 528 128	14,5602	46,0435	5,96273	5,35659	666,02	35298,9	4,71698	212
213	4 53 69	9 663 597	14,5945	46,1519	5,97209	5,36129	669,16	35632,7	4,69484	213
214	4 57 96	9 800 344	14,6287	46,2601	5,98142	5,36598	672,30	35968,1	4,67290	214
215	4 62 25	9 938 375	14,6629	46,3681	5,99073	5,37064	675,44	36305,0	4,65116	215
216	4 66 56	10 077 696	14,6969	46,4758	6,00000	5,37528	678,58	36643,5	4,62963	216
217	4 70 89	10 218 313	14,7309	46,5833	6,00925	5,37990	681,73	36983,6	4,60829	217
218	4 75 24	10 360 232	14,7648	46,6905	6,01846	5,38450	684,87	37325,3	4,58716	218
219	4 79 61	10 503 459	14,7986	46,7974	6,02765	5,38907	688,01	37668,5	4,56621	219
220	4 84 00	10 648 000	14,8324	46,9042	6,03681	5,39363	691,15	38013,3	4,54545	220
221	4 88 41	10 793 861	14,8661	47,0106	6,04594	5,39816	694,29	38359,6	4,52489	221
222	4 92 84	10 941 048	14,8997	47,1169	6,05505	5,40268	697,43	38707,6	4,50450	222
223	4 97 29	11 089 567	14,9332	47,2229	6,06413	5,40717	700,58	39057,1	4,48430	223
224	5 01 76	11 239 424	14,9666	47,3286	6,07318	5,41165	703,72	39408,0	4,46429	224
225	5 06 25	11 390 625	15,0000	47,4342	6,08220	5,41610	706,86	39760,8	4,44444	225
226	5 10 76	11 543 176	15,0333	47,5395	6,09120	5,42053	710,00	40115,0	4,42478	226
227	5 15 29	11 697 083	15,0665	47,6445	6,10017	5,42495	713,14	40470,8	4,40529	227
228	5 19 84	11 852 352	15,0997	47,7493	6,10911	5,42935	716,28	40828,1	4,38596	228
229	5 24 41	12 008 989	15,1327	47,8539	6,11803	5,43372	719,42	41187,1	4,36681	229
230	5 29 00	12 167 000	15,1658	47,9583	6,12693	5,43808	722,57	41547,6	4,34783	230
231	5 33 61	12 326 391	15,1987	48,0625	6,13579	5,44242	725,71	41909,6	4,32900	231
232	5 38 24	12 487 168	15,2315	48,1664	6,14463	5,44674	728,85	42273,3	4,31034	232
233	5 42 89	12 649 337	15,2643	48,2701	6,15345	5,45104	731,99	42638,5	4,29185	233
234	5 47 56	12 812 904	15,2971	48,3735	6,16224	5,45532	735,13	43005,3	4,27350	234
235	5 52 25	12 977 875	15,3297	48,4768	6,17101	5,45959	738,27	43373,6	4,25532	235
236	5 56 96	13 144 256	15,3623	48,5798	6,17975	5,46383	741,42	43743,5	4,23729	236
237	5 61 69	13 312 053	15,3948	48,6826	6,18846	5,46806	744,56	44115,0	4,21941	237
238	5 66 44	13 481 272	15,4272	48,7852	6,19715	5,47227	747,70	44488,1	4,20168	238
239	5 71 21	13 651 919	15,4596	48,8876	6,20582	5,47646	750,84	44862,7	4,18410	239
240	5 76 00	13 824 000	15,4919	48,9898	6,21447	5,48064	753,98	45238,9	4,16667	240
241	5 80 81	13 997 521	15,5242	49,0918	6,22308	5,48480	757,12	45616,7	4,14938	241
242	5 85 64	14 172 488	15,5563	49,1935	6,23168	5,48894	760,27	45996,1	4,13223	242
243	5 90 49	14 348 907	15,5885	49,2950	6,24025	5,49306	763,41	46377,0	4,11523	243
244	5 95 36	14 526 784	15,6205	49,3964	6,24880	5,49717	766,55	46759,5	4,09836	244
245	6 00 25	14 706 125	15,6525	49,4975	6,25732	5,50126	769,69	47143,5	4,08163	245
246	6 05 16	14 886 936	15,6844	49,5984	6,26583	5,50533	772,83	47529,2	4,06504	246
247	6 10 09	15 069 223	15,7162	49,6991	6,27431	5,50939	775,97	47916,4	4,04858	247
248	6 15 04	15 252 992	15,7480	49,7996	6,28276	5,51343	779,11	48305,1	4,03226	248
249	6 20 01	15 438 249	15,7797	49,8999	6,29119	5,51745	782,26	48695,5	4,01606	249
250	6 25 00	15 625 000	15,8114	50,0000	6,29961	5,52146	785,40	49087,4	4,00000	250
n	n^2	n^3	\sqrt{n}	$\sqrt{10n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\ln n$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	$\frac{1000}{n}$	n

250—300

n	n^2	n^3	\sqrt{n}	$\sqrt{10n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\ln n$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	$\frac{1000}{n}$	n
250	6 25 00	15 625 000	15,8114	50,0000	6,29961	5,52146	785,40	49087,4	4,00000	250
251	6 30 01	15 813 251	15,8430	50,0999	6,30799	5,52545	788,54	49480,9	3,98406	251
252	6 35 04	16 003 008	15,8745	50,1996	6,31636	5,52943	791,68	49875,9	3,96825	252
253	6 40 09	16 194 277	15,9060	50,2991	6,32470	5,53339	794,82	50272,6	3,95257	253
254	6 45 16	16 387 064	15,9374	50,3984	6,33303	5,53733	797,96	50670,7	3,93701	254
255	6 50 25	16 581 375	15,9687	50,4975	6,34133	5,54126	801,11	51070,5	3,92157	255
256	6 55 36	16 777 216	16,0000	50,5964	6,34960	5,54518	804,25	51471,9	3,90625	256
257	6 60 49	16 974 593	16,0312	50,6952	6,35786	5,54908	807,39	51874,8	3,89105	257
258	6 65 64	17 173 512	16,0624	50,7937	6,36610	5,55296	810,53	52279,2	3,87597	258
259	6 70 81	17 373 979	16,0935	50,8920	6,37431	5,55683	813,67	52685,3	3,86100	259
260	6 76 00	17 576 000	16,1245	50,9902	6,38250	5,56068	816,81	53092,9	3,84615	260
261	6 81 21	17 779 581	16,1555	51,0882	6,39068	5,56452	819,96	53502,1	3,83142	261
262	6 86 44	17 984 728	16,1864	51,1859	6,39883	5,56834	823,10	53912,9	3,81679	262
263	6 91 69	18 191 447	16,2173	51,2835	6,40696	5,57215	826,24	54325,2	3,80228	263
264	6 96 96	18 399 744	16,2481	51,3809	6,41507	5,57595	829,38	54739,1	3,78788	264
265	7 02 25	18 609 625	16,2788	51,4782	6,42316	5,57973	832,52	55154,6	3,77358	265
266	7 07 56	18 821 096	16,3095	51,5752	6,43123	5,58350	835,66	55571,6	3,75940	266
267	7 12 89	19 034 163	16,3401	51,6720	6,43928	5,58725	838,81	55990,2	3,74532	267
268	7 18 24	19 248 832	16,3707	51,7687	6,44731	5,59099	841,95	56410,4	3,73134	268
269	7 23 61	19 465 109	16,4012	51,8652	6,45531	5,59471	845,09	56832,2	3,71747	269
270	7 29 00	19 683 000	16,4317	51,9615	6,46330	5,59842	848,23	57255,5	3,70370	270
271	7 34 41	19 902 511	16,4621	52,0577	6,47127	5,60212	851,37	57680,4	3,69004	271
272	7 39 84	20 123 648	16,4924	52,1536	6,47922	5,60580	854,51	58106,9	3,67647	272
273	7 45 29	20 346 417	16,5227	52,2494	6,48715	5,60947	857,65	58534,9	3,66300	273
274	7 50 76	20 570 824	16,5529	52,3450	6,49507	5,61313	860,80	58964,6	3,64964	274
275	7 56 25	20 796 875	16,5831	52,4404	6,50296	5,61677	863,94	59395,7	3,63636	275
276	7 61 76	21 024 576	16,6132	52,5357	6,51083	5,62040	867,08	59828,5	3,62319	276
277	7 67 29	21 253 933	16,6433	52,6308	6,51868	5,62402	870,22	60262,8	3,61011	277
278	7 72 84	21 484 952	16,6733	52,7257	6,52652	5,62762	873,36	60698,7	3,59712	278
279	7 78 41	21 717 639	16,7033	52,8205	6,53434	5,63121	876,50	61136,2	3,58423	279
280	7 84 00	21 952 000	16,7332	52,9150	6,54213	5,63479	879,65	61575,2	3,57143	280
281	7 89 61	22 188 041	16,7631	53,0094	6,54991	5,63835	882,79	62015,8	3,55872	281
282	7 95 24	22 425 768	16,7929	53,1037	6,55767	5,64191	885,93	62453,0	3,54610	282
283	8 00 89	22 665 187	16,8226	53,1977	6,56541	5,64545	889,07	62901,8	3,53357	283
284	8 06 66	22 906 304	16,8523	53,2917	6,57314	5,64897	892,21	63347,1	3,52113	284
285	8 12 25	23 149 125	16,8819	53,3854	6,58084	5,65249	895,35	63794,0	3,50877	285
286	8 17 96	23 393 656	16,9115	53,4790	6,58853	5,65599	898,50	64242,4	3,49650	286
287	8 23 69	23 639 903	16,9411	53,5724	6,59620	5,65948	901,64	64692,5	3,48432	287
288	8 29 44	23 887 872	16,9706	53,6656	6,60385	5,66296	904,78	65144,1	3,47222	288
289	8 35 21	24 137 569	17,0000	53,7587	6,61149	5,66643	907,92	65597,2	3,46021	289
290	8 41 00	24 389 000	17,0294	53,8516	6,61911	5,66988	911,06	66052,0	3,44828	290
291	8 46 81	24 642 171	17,0587	53,9444	6,62671	5,67332	914,20	66508,3	3,43643	291
292	8 52 64	24 897 088	17,0880	54,0370	6,63429	5,67675	917,35	66966,2	3,42466	292
293	8 58 49	25 153 757	17,1172	54,1295	6,64185	5,68017	920,49	67425,6	3,41297	293
294	8 64 36	25 412 184	17,1464	54,2218	6,64940	5,68358	923,63	67886,7	3,40136	294
295	8 70 25	25 672 375	17,1756	54,3139	6,65693	5,68698	926,77	68349,3	3,38983	295
296	8 76 16	25 934 336	17,2047	54,4059	6,66444	5,69036	929,91	68813,4	3,37838	296
297	8 82 09	26 198 073	17,2337	54,4977	6,67194	5,69373	933,05	69279,2	3,36700	297
298	8 88 04	26 463 592	17,2627	54,5894	6,67942	5,69709	936,19	69746,5	3,35570	298
299	8 94 01	26 730 899	17,2916	55,6809	6,68688	5,70044	939,34	70215,4	3,34448	299
300	9 00 00	27 000 000	17,3205	54,7723	6,69433	5,70378	942,48	70685,8	3,33333	300
n	n^2	n^3	\sqrt{n}	$\sqrt{10n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\ln n$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	$\frac{1000}{n}$	n

300—350

n	n^2	n^3	\sqrt{n}	$\sqrt{10n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\ln n$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	$\frac{1000}{n}$	n
300	9 00 00	27 000 000	17,3205	54,7723	6,69433	5,70378	942,48	70685,8	3,33333	300
301	9 06 01	27 270 901	17,3494	54,8635	6,70176	5,70711	945,62	71157,9	3,32226	301
302	9 12 04	27 543 608	17,3781	54,9545	6,70917	5,71043	948,76	71631,5	3,31126	302
303	9 18 09	27 818 127	17,4069	55,0454	6,71657	5,71373	951,90	72106,6	3,30033	303
304	9 24 16	28 094 464	17,4356	55,1362	6,72395	5,71703	955,04	72583,4	3,28947	304
305	9 30 25	28 372 625	17,4642	55,2268	6,73132	5,72031	958,19	73061,7	3,27869	305
306	9 36 36	28 652 616	17,4929	55,3173	6,73866	5,72359	961,33	73541,5	3,26797	306
307	9 42 49	28 934 443	17,5214	55,4076	6,74600	5,72685	964,47	74023,0	3,25733	307
308	9 48 64	29 218 112	17,5499	55,4977	6,75331	5,73010	967,61	74506,0	3,24675	308
309	9 54 81	29 503 629	17,5784	55,5878	6,76061	5,73334	970,75	74990,6	3,23625	309
310	9 61 00	29 791 000	17,6068	55,6776	6,76790	5,73657	973,89	75476,8	3,22581	310
311	9 67 21	30 080 231	17,6352	55,7674	6,77517	5,73979	977,04	75964,5	3,21543	311
312	9 73 44	30 371 328	17,6635	55,8570	6,78242	5,74300	980,18	76453,8	3,20513	312
313	9 79 69	30 664 297	17,6918	55,9464	6,78966	5,74620	983,32	76944,7	3,19489	313
314	9 85 96	30 959 144	17,7200	56,0357	6,79688	5,74939	986,46	77437,1	3,18471	314
315	9 92 25	31 255 875	17,7482	56,1249	6,80409	5,75257	989,60	77931,1	3,17460	315
316	9 98 56	31 554 496	17,7764	56,2139	6,81128	5,75574	992,74	78426,7	3,16456	316
317	10 04 89	31 855 013	17,8045	56,3028	6,81846	5,75890	995,88	78923,9	3,15457	317
318	10 11 24	32 157 432	17,8326	56,3915	6,82562	5,76205	999,03	79422,6	3,14465	318
319	10 17 61	32 461 759	17,8606	56,4801	6,83277	5,76519	1002,2	79922,9	3,13480	319
320	10 24 00	32 768 000	17,8885	56,5685	6,83990	5,76832	1005,3	80424,8	3,12500	320
321	10 30 41	33 076 161	17,9165	56,6569	6,84702	5,77144	1008,5	80928,2	3,11526	321
322	10 36 84	33 386 248	17,9444	56,7450	6,85412	5,77455	1011,6	81433,2	3,10559	322
323	10 43 29	33 698 267	17,9722	56,8331	6,86121	5,77765	1014,7	81939,8	3,09598	323
324	10 49 76	34 012 224	18,0000	56,9210	6,86829	5,78074	1017,9	82448,0	3,08642	324
325	10 56 25	34 328 125	18,0278	57,0088	6,87534	5,78383	1021,0	82957,7	3,07692	325
326	10 62 76	34 645 976	18,0555	57,0964	6,88239	5,78690	1024,2	83469,0	3,06748	326
327	10 69 29	34 965 783	18,0831	57,1839	6,88942	5,78996	1027,3	83981,8	3,05810	327
328	10 75 84	35 287 552	18,1108	57,2713	6,89643	5,79301	1030,4	84496,3	3,04878	328
329	10 82 41	35 611 289	18,1384	57,3585	6,90344	5,79606	1033,6	85012,3	3,03951	329
330	10 89 00	35 937 000	18,1659	57,4456	6,91042	5,79909	1036,7	85529,9	3,03030	330
331	10 95 61	36 264 691	18,1934	57,5326	6,91740	5,80212	1039,9	86049,0	3,02115	331
332	11 02 24	36 594 368	18,2209	57,6194	6,92436	5,80513	1043,0	86569,7	3,01205	332
333	11 08 89	36 926 037	18,2483	57,7062	6,93130	5,80814	1046,2	87092,0	3,00300	333
334	11 15 56	37 259 704	18,2757	57,7927	6,93823	5,81114	1049,3	87615,9	2,99401	334
335	11 22 25	37 595 375	18,3030	57,8792	6,94515	5,81413	1052,4	88141,3	2,98507	335
336	11 28 96	37 933 056	18,3303	57,9655	6,95205	5,81711	1055,6	88668,3	2,97619	336
337	11 35 69	38 272 753	18,3576	58,0517	6,95894	5,82008	1058,7	89196,9	2,96736	337
338	11 42 44	38 614 472	18,3848	58,1378	6,96582	5,82305	1061,9	89727,0	2,95858	338
339	11 49 21	38 958 219	18,4120	58,2237	6,97268	5,82600	1065,0	90258,7	2,94985	339
340	11 56 00	39 304 000	18,4391	58,3095	6,97953	5,82895	1068,1	90792,0	2,94118	340
341	11 62 81	39 651 821	18,4662	58,3952	6,98637	5,83188	1071,3	91326,9	2,93255	341
342	11 69 64	40 001 688	18,4932	58,4808	6,99319	5,83481	1074,4	91863,3	2,92398	342
343	11 76 49	40 353 607	18,5203	58,5662	7,00000	5,83773	1077,6	92401,3	2,91545	343
344	11 83 36	40 707 584	18,5472	58,6515	7,00680	5,84064	1080,7	92940,9	2,90698	344
345	11 90 25	41 063 625	18,5742	58,7367	7,01358	5,84354	1083,8	93482,0	2,89855	345
346	11 97 16	41 421 736	18,6011	58,8218	7,02035	5,84644	1087,0	94024,7	2,89017	346
347	12 04 09	41 781 923	18,6279	58,9067	7,02711	5,84932	1090,1	94569,0	2,88184	347
348	12 11 04	42 144 192	18,6548	58,9915	7,03384	5,85220	1093,3	95114,9	2,87356	348
349	12 18 01	42 508 549	18,6815	59,0762	7,04058	5,85507	1096,4	95662,3	2,86533	349
350	12 25 00	42 875 000	18,7083	59,1608	7,04730	5,85793	1099,6	96211,3	2,85714	350
n	n^2	n^3	\sqrt{n}	$\sqrt{10n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\ln n$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	$\frac{1000}{n}$	n

350—400

n	n^2	n^3	\sqrt{n}	$\sqrt[3]{10n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\ln n$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	$\frac{1000}{n}$	n
350	12 25 00	42 875 000	18,7083	59,1608	7,04730	5,85793	1099,6	96211,3	2,85714	350
351	12 32 01	43 243 551	18,7350	59,2453	7,05400	5,86079	1102,7	96761,8	2,84900	351
352	12 39 04	43 614 208	18,7617	59,3296	7,06070	5,86363	1105,8	97314,0	2,84091	352
353	12 46 09	43 986 977	18,7883	59,4138	7,06738	5,86647	1109,0	97867,7	2,83286	353
354	12 53 16	44 361 864	18,8149	59,4979	7,07404	5,86930	1112,1	98423,0	2,82486	354
355	12 60 25	44 738 875	18,8414	59,5819	7,08070	5,87212	1115,3	98979,8	2,81690	355
356	12 67 36	45 118 016	18,8680	59,6657	7,08734	5,87493	1118,4	99538,2	2,80899	356
357	12 74 49	45 499 293	18,8944	59,7495	7,09397	5,87774	1121,5	100098	2,80112	357
358	12 81 64	45 882 712	18,9209	59,8331	7,10059	5,88053	1124,7	100660	2,79330	358
359	12 88 81	46 268 279	18,9473	59,9166	7,10719	5,88332	1127,8	101223	2,78552	359
360	12 96 00	46 656 000	18,9737	60,0000	7,11379	5,88610	1131,0	101788	2,77778	360
361	13 03 21	47 045 881	19,0000	60,0833	7,12037	5,88888	1134,1	102354	2,77008	361
362	13 10 44	47 437 928	19,0263	60,1664	7,12694	5,89164	1137,3	102922	2,76243	362
363	13 17 69	47 832 147	19,0526	60,2495	7,13349	5,89440	1140,4	103491	2,75482	363
364	13 24 96	48 228 544	19,0788	60,3324	7,14004	5,89715	1143,5	104062	2,74725	364
365	13 32 25	48 627 125	19,1050	60,4152	7,14657	5,89990	1146,7	104635	2,73973	365
366	13 39 56	49 027 896	19,1311	60,4979	7,15309	5,90263	1149,8	105209	2,73224	366
367	13 46 89	49 430 863	19,1572	60,5805	7,15960	5,90536	1153,0	105785	2,72480	367
368	13 54 24	49 836 032	19,1833	60,6630	7,16610	5,90808	1156,1	106362	2,71739	368
369	13 61 61	50 243 409	19,2094	60,7454	7,17258	5,91080	1159,2	106941	2,71003	369
370	13 69 00	50 653 000	19,2354	60,8276	7,17905	5,91350	1162,4	107521	2,70270	370
371	13 76 41	51 064 811	19,2614	60,9098	7,18552	5,91620	1165,5	108102	2,69542	371
372	13 83 84	51 478 848	19,2873	60,9918	7,19197	5,91889	1168,7	108687	2,68817	372
373	13 91 29	51 895 117	19,3132	61,0737	7,19841	5,92158	1171,8	109272	2,68097	373
374	13 98 76	52 313 624	19,3391	61,1555	7,20483	5,92426	1175,0	109858	2,67380	374
375	14 06 25	52 734 375	19,3649	61,2372	7,21125	5,92693	1178,1	110447	2,66667	375
376	14 13 76	53 157 376	19,3907	61,3188	7,21765	5,92959	1181,2	111036	2,65957	376
377	14 21 29	53 582 633	19,4165	61,4003	7,22405	5,93225	1184,4	111628	2,65252	377
378	14 28 84	54 010 152	19,4422	61,4817	7,23043	5,93489	1187,5	112221	2,64550	378
379	14 36 41	54 439 939	19,4679	61,5630	7,23680	5,93754	1190,7	112815	2,63852	379
380	14 44 00	54 872 000	19,4936	61,6441	7,24316	5,94017	1193,8	113411	2,63158	380
381	14 51 61	55 306 341	19,5192	61,7252	7,24950	5,94280	1196,9	114009	2,62467	381
382	14 59 24	55 742 968	19,5448	61,8061	7,25584	5,94542	1200,1	114608	2,61780	382
383	14 66 89	56 181 887	19,5704	61,8870	7,26217	5,94803	1203,2	115209	2,61097	383
384	14 74 56	56 623 104	19,5959	61,9677	7,26848	5,95064	1206,4	115812	2,60417	384
385	14 82 25	57 066 625	19,6214	62,0484	7,27479	5,95324	1209,5	116416	2,59740	385
386	14 89 96	57 512 456	19,6469	62,1289	7,28108	5,95584	1212,7	117021	2,59067	386
387	14 97 69	57 960 603	19,6723	62,2093	7,28736	5,95842	1215,8	117628	2,58398	387
388	15 05 44	58 411 072	19,6977	62,2896	7,29363	5,96101	1218,9	118237	2,57732	388
389	15 13 21	58 863 869	19,7231	62,3699	7,29989	5,96358	1222,1	118847	2,57069	389
390	15 21 00	59 319 000	19,7484	62,4500	7,30614	5,96615	1225,2	119459	2,56410	390
391	15 28 81	59 776 471	19,7737	62,5300	7,31238	5,96871	1228,4	120072	2,55754	391
392	15 36 64	60 236 288	19,7990	62,6099	7,31861	5,97126	1231,5	120687	2,55102	392
393	15 44 49	60 698 457	19,8242	62,6897	7,32483	5,97381	1234,6	121304	2,54453	393
394	15 52 36	61 162 984	19,8494	62,7694	7,33104	5,97635	1237,8	121922	2,53807	394
395	15 60 25	61 629 875	19,8746	62,8490	7,33723	5,97889	1240,9	122542	2,53165	395
396	15 68 16	62 099 136	19,8997	62,9285	7,34342	5,98141	1244,1	123163	2,52525	396
397	15 76 09	62 570 773	19,9249	63,0079	7,34960	5,98394	1247,2	123786	2,51889	397
398	15 84 04	63 044 792	19,9499	63,0872	7,35576	5,98645	1250,4	124410	2,51256	398
399	15 92 01	63 521 199	19,9750	63,1664	7,36192	5,98896	1253,5	125036	2,50627	399
400	16 00 00	64 000 000	20,0000	63,2456	7,36806	5,99146	1256,6	125664	2,50000	400
n	n^2	n^3	\sqrt{n}	$\sqrt[3]{10n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\ln n$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	$\frac{1000}{n}$	n

400—450

n	n^2	n^3	\sqrt{n}	$\sqrt{10n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\ln n$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	$\frac{1000}{n}$	n
400	16 00 00	64 000 000	20,0000	63,2456	7,36806	5,99146	1256,6	125664	2,50000	400
401	16 08 01	64 481 201	20,0250	63,3246	7,37420	5,99396	1259,8	126293	2,49377	401
402	16 16 04	64 964 808	20,0499	63,4035	7,38032	5,99645	1262,9	126923	2,48756	402
403	16 24 09	65 450 827	20,0749	63,4823	7,38644	5,99894	1266,1	127556	2,48139	403
404	16 32 16	65 939 264	20,0998	63,5610	7,39254	6,00141	1269,2	128190	2,47525	404
405	16 40 25	66 430 125	20,1246	63,6396	7,39864	6,00389	1272,3	128825	2,46914	405
406	16 48 36	66 923 416	20,1494	63,7181	7,40472	6,00635	1275,5	129462	2,46305	406
407	16 56 49	67 419 143	20,1742	63,7966	7,41080	6,00881	1278,6	130100	2,45700	407
408	16 64 64	67 917 312	20,1990	63,8749	7,41686	6,01127	1281,8	130741	2,45098	408
409	16 72 81	68 417 929	20,2237	63,9531	7,42291	6,01372	1284,9	131382	2,44499	409
410	16 81 00	68 921 000	20,2485	64,0312	7,42896	6,01616	1288,1	132025	2,43902	410
411	16 89 21	69 426 531	20,2731	64,1093	7,43499	6,01859	1291,2	132670	2,43309	411
412	16 97 44	69 934 528	20,2978	64,1872	7,44102	6,02102	1294,3	133317	2,42718	412
413	17 05 69	70 444 997	20,3224	64,2651	7,44703	6,02345	1297,5	133965	2,42131	413
414	17 13 96	70 957 944	20,3470	64,3428	7,45304	6,02587	1300,6	134614	2,41546	414
415	17 22 25	71 473 375	20,3715	64,4205	7,45904	6,02828	1303,8	135265	2,40964	415
416	17 30 56	71 991 296	20,3961	64,4981	7,46502	6,03069	1306,9	135918	2,40385	416
417	17 38 89	72 511 713	20,4206	64,5755	7,47100	6,03309	1310,0	136572	2,39808	417
418	17 47 24	73 034 632	20,4450	64,6529	7,47697	6,03548	1313,2	137228	2,39234	418
419	17 55 61	73 560 059	20,4695	64,7302	7,48292	6,03787	1316,3	137885	2,38663	419
420	17 64 00	74 088 000	20,4939	64,8074	7,48887	6,04025	1319,5	138544	2,38095	420
421	17 72 41	74 618 461	20,5183	64,8845	7,49481	6,04263	1322,6	139205	2,37530	421
422	17 80 84	75 151 448	20,5426	64,9615	7,50074	6,04501	1325,8	139867	2,36967	422
423	17 89 29	75 686 967	20,5670	65,0385	7,50666	6,04737	1328,9	140531	2,36407	423
424	17 97 76	76 225 024	20,5913	65,1153	7,51257	6,04973	1332,0	141196	2,35849	424
425	18 06 25	76 765 625	20,6155	65,1920	7,51847	6,05209	1335,2	141863	2,35294	425
426	18 14 76	77 308 776	20,6398	65,2687	7,52437	6,05444	1338,3	142531	2,34742	426
427	18 23 29	77 854 483	20,6640	65,3452	7,53025	6,05678	1341,5	143201	2,34192	427
428	18 31 84	78 402 752	20,6882	65,4217	7,53612	6,05912	1344,6	143872	2,33645	428
429	18 40 41	78 953 589	20,7123	65,4981	7,54199	6,06146	1347,7	144545	2,33100	429
430	18 49 00	79 507 000	20,7364	65,5744	7,54784	6,06379	1350,9	145220	2,32558	430
431	18 57 61	80 062 991	20,7605	65,6506	7,55369	6,06611	1354,0	145896	2,32019	431
432	18 66 24	80 621 568	20,7846	65,7267	7,55953	6,06843	1357,2	146574	2,31481	432
433	18 74 89	81 182 737	20,8087	65,8027	7,56535	6,07074	1360,3	147254	2,30947	433
434	18 83 56	81 746 504	20,8327	65,8787	7,57117	6,07304	1363,5	147934	2,30415	434
435	18 92 25	82 312 875	20,8567	65,9545	7,57698	6,07535	1366,6	148617	2,29885	435
436	19 00 96	82 881 856	20,8806	66,0303	7,58279	6,07764	1369,7	149301	2,29358	436
437	19 09 69	83 453 453	20,9045	66,1060	7,58858	6,07993	1372,9	149987	2,28833	437
438	19 18 44	84 027 672	20,9284	66,1816	7,59436	6,08222	1376,0	150674	2,28311	438
439	19 27 21	84 604 519	20,9523	66,2571	7,60014	6,08450	1379,2	151363	2,27790	439
440	19 36 00	85 184 000	20,9762	66,3325	7,60590	6,08677	1382,3	152053	2,27273	440
441	19 44 81	85 766 121	21,0000	66,4078	7,61166	6,08904	1385,4	152745	2,26757	441
442	19 53 64	86 350 888	21,0238	66,4831	7,61741	6,09131	1388,6	153439	2,26244	442
443	19 62 49	86 938 307	21,0476	66,5582	7,62315	6,09357	1391,7	154134	2,25734	443
444	19 71 36	87 528 384	21,0713	66,6333	7,62888	6,09582	1394,9	154830	2,25225	444
445	19 80 25	88 121 125	21,0950	66,7083	7,63461	6,09807	1398,0	155528	2,24719	445
446	19 89 16	88 716 536	21,1187	66,7832	7,64032	6,10032	1401,2	156228	2,24215	446
447	19 98 09	89 314 623	21,1424	66,8581	7,64603	6,10256	1404,3	156930	2,23714	447
448	20 07 04	89 915 392	21,1660	66,9328	7,65172	6,10479	1407,4	157633	2,23214	448
449	20 16 01	90 518 849	21,1896	67,0075	7,65741	6,10702	1410,6	158337	2,22717	449
450	20 25 00	91 125 000	21,2132	67,0820	7,66309	6,10925	1413,7	159043	2,22222	450
n	n^2	n^3	\sqrt{n}	$\sqrt{10n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\ln n$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	$\frac{1000}{n}$	n

450—500

n	n^2	n^3	\sqrt{n}	$\sqrt{10n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\ln n$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	$\frac{1000}{n}$	n
450	20 25 00	91 125 000	21,2132	67,0820	7,66309	6,10925	1413,7	159043	2,22222	450
451	20 34 01	91 733 851	21,2368	67,1565	7,66877	6,11147	1416,9	159751	2,21729	451
452	20 43 04	92 345 408	21,2603	67,2309	7,67443	6,11368	1420,0	160460	2,21239	452
453	20 52 09	92 959 677	21,2838	67,3053	7,68009	6,11589	1423,1	161171	2,20751	453
454	20 61 16	93 576 664	21,3073	67,3795	7,68573	6,11810	1426,3	161883	2,20264	454
455	20 70 25	94 196 375	21,3307	67,4537	7,69137	6,12030	1429,4	162597	2,19780	455
456	20 79 36	94 818 816	21,3542	67,5278	7,69700	6,12249	1432,6	163313	2,19298	456
457	20 88 49	95 443 993	21,3776	67,6018	7,70262	6,12468	1435,7	164030	2,18818	457
458	20 97 64	96 071 912	21,4009	67,6757	7,70824	6,12687	1438,8	164748	2,18341	458
459	21 06 81	96 702 579	21,4243	67,7495	7,71384	6,12905	1442,0	165468	2,17865	459
460	21 16 00	97 336 000	21,4476	67,8233	7,71944	6,13123	1445,1	166190	2,17391	460
461	21 25 21	97 972 181	21,4709	67,8970	7,72503	6,13340	1448,3	166914	2,16920	461
462	21 34 44	98 611 128	21,4942	67,9706	7,73061	6,13556	1451,4	167639	2,16450	462
463	21 43 69	99 252 847	21,5174	68,0441	7,73619	6,13773	1454,6	168365	2,15983	463
464	21 52 96	99 897 344	21,5407	68,1175	7,74175	6,13988	1457,7	169093	2,15517	464
465	21 62 25	100 544 625	21,5639	68,1909	7,74731	6,14204	1460,8	169823	2,15054	465
466	21 71 56	101 194 696	21,5870	68,2642	7,75286	6,14419	1464,0	170554	2,14592	466
467	21 80 89	101 847 563	21,6102	68,3374	7,75840	6,14633	1467,1	171287	2,14133	467
468	21 90 24	102 503 232	21,6333	68,4105	7,76394	6,14847	1470,3	172021	2,13675	468
469	21 99 61	103 161 709	21,6564	68,4836	7,76946	6,15060	1473,4	172757	2,13220	469
470	22 09 00	103 823 000	21,6795	68,5565	7,77498	6,15273	1476,5	173494	2,12766	470
471	22 18 41	104 487 111	21,7025	68,6294	7,78049	6,15486	1479,7	174234	2,12314	471
472	22 27 84	105 154 048	21,7256	68,7023	7,78599	6,15698	1482,8	174974	2,11864	472
473	22 37 29	105 823 817	21,7486	68,7750	7,79149	6,15910	1486,0	175716	2,11416	473
474	22 46 76	106 496 424	21,7715	68,8477	7,79697	6,16121	1489,1	176460	2,10970	474
475	22 56 25	107 171 875	21,7945	68,9202	7,80245	6,16331	1492,3	177205	2,10526	475
476	22 65 76	107 850 176	21,8174	68,9928	7,80793	6,16542	1495,4	177952	2,10084	476
477	22 75 29	108 531 333	21,8403	69,0652	7,81339	6,16752	1498,5	178701	2,09644	477
478	22 84 84	109 215 352	21,8632	69,1375	7,81885	6,16961	1501,7	179451	2,09205	478
479	22 94 41	109 902 239	21,8861	69,2098	7,82429	6,17170	1504,8	180203	2,08763	479
480	23 04 00	110 592 000	21,9089	69,2820	7,82974	6,17379	1508,0	180956	2,08333	480
481	23 13 61	111 284 641	21,9317	69,3542	7,83517	6,17587	1511,1	181711	2,07900	481
482	23 23 24	111 980 168	21,9545	69,4262	7,84059	6,17794	1514,2	182467	2,07469	482
483	23 32 89	112 678 587	21,9773	69,4982	7,84601	6,18002	1517,4	183225	2,07039	483
484	23 42 56	113 379 904	22,0000	69,5701	7,85142	6,18208	1520,5	183984	2,06612	484
485	23 52 25	114 084 125	22,0227	69,6419	7,85683	6,18415	1523,7	184745	2,06186	485
486	23 61 96	114 791 256	22,0454	69,7137	7,86222	6,18621	1526,8	185508	2,05761	486
487	23 71 69	115 501 303	22,0681	69,7854	7,86761	6,18826	1530,0	186272	2,05339	487
488	23 81 44	116 214 272	22,0907	69,8570	7,87299	6,19032	1533,1	187038	2,04918	488
489	23 91 21	116 930 169	22,1133	69,9285	7,87837	6,19236	1536,2	187805	2,04499	489
490	24 01 00	117 649 000	22,1359	70,0000	7,88374	6,19441	1539,4	188574	2,04082	490
491	24 10 81	118 370 771	22,1585	70,0714	7,88909	6,19644	1542,5	189345	2,03666	491
492	24 20 64	119 095 488	22,1811	70,1427	7,89445	6,19848	1545,7	190117	2,03252	492
493	24 30 49	119 823 157	22,2036	70,2140	7,89979	6,20051	1548,8	190890	2,02840	493
494	24 40 36	120 553 784	22,2261	70,2851	7,90513	6,20254	1551,9	191665	2,02429	494
495	24 50 25	121 287 375	22,2486	70,3562	7,91046	6,20456	1555,1	192442	2,02020	495
496	24 60 16	122 023 936	22,2711	70,4273	7,91578	6,20658	1558,2	193221	2,01613	496
497	24 70 09	122 763 473	22,2935	70,4982	7,92110	6,20859	1561,4	194000	2,01207	497
498	24 80 04	123 505 992	22,3159	70,5691	7,92641	6,21060	1564,5	194782	2,00803	498
499	24 90 01	124 251 499	22,3383	70,6399	7,93171	6,21261	1567,7	195565	2,00401	499
500	25 00 00	125 000 000	22,3607	70,7107	7,93701	6,21461	1570,8	196350	2,00000	500
n	n^2	n^3	\sqrt{n}	$\sqrt{10n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\ln n$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	$\frac{1000}{n}$	n

500—550

n	n^2	n^3	\sqrt{n}	$\sqrt{10n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\ln n$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	$\frac{1000}{n}$	n
500	25 00 00	125 000 000	22,3607	70,7107	7,93701	6,21461	1570,8	196350	2,00000	500
501	25 10 01	125 751 501	22,3830	70,7814	7,94229	6,21661	1573,9	197136	1,99601	501
502	25 20 04	126 506 008	22,4054	70,8520	7,94757	6,21860	1577,1	197923	1,99203	502
503	25 30 09	127 263 527	22,4277	70,9225	7,95285	6,22059	1580,2	198713	1,98807	503
504	25 40 16	128 024 064	22,4499	70,9930	7,95811	6,22258	1583,4	199504	1,98413	504
505	25 50 25	128 787 625	22,4722	71,0634	7,96337	6,22456	1586,5	200296	1,98020	505
506	25 60 36	129 554 216	22,4944	71,1337	7,96863	6,22654	1589,6	201090	1,97628	506
507	25 70 49	130 323 843	22,5167	71,2039	7,97387	6,22851	1592,8	201886	1,97239	507
508	25 80 64	131 096 512	22,5389	71,2741	7,97911	6,23048	1595,9	202683	1,96850	508
509	25 90 81	131 872 229	22,5610	71,3442	7,98434	6,23245	1599,1	203482	1,96464	509
510	26 01 00	132 651 000	22,5832	71,4143	7,98957	6,23441	1602,2	204282	1,96078	510
511	26 11 21	133 432 831	22,6053	71,4843	7,99479	6,23637	1605,4	205084	1,95695	511
512	26 21 44	134 217 728	22,6274	71,5542	8,00000	6,23832	1608,5	205887	1,95312	512
513	26 31 69	135 005 697	22,6495	71,6240	8,00520	6,24028	1611,6	206692	1,94932	513
514	26 41 96	135 796 744	22,6716	71,6938	8,01040	6,24222	1614,8	207499	1,94553	514
515	26 52 25	136 590 875	22,6936	71,7635	8,01559	6,24417	1617,9	208307	1,94175	515
516	26 62 56	137 388 096	22,7156	71,8331	8,02078	6,24611	1621,1	209117	1,93798	516
517	26 72 89	138 188 413	22,7376	71,9027	8,02596	6,24804	1624,2	209928	1,93424	517
518	26 83 24	138 991 832	22,7596	71,9722	8,03113	6,24998	1627,3	210741	1,93050	518
519	26 93 61	139 798 359	22,7816	72,0417	8,03629	6,25190	1630,5	211556	1,92678	519
520	27 04 00	140 608 000	22,8035	72,1110	8,04145	6,25383	1633,6	212372	1,92308	520
521	27 14 41	141 420 761	22,8254	72,1803	8,04660	6,25575	1636,8	213189	1,91939	521
522	27 24 84	142 236 648	22,8473	72,2496	8,05175	6,25767	1639,9	214008	1,91571	522
523	27 35 29	143 055 667	22,8692	72,3187	8,05689	6,25958	1643,1	214829	1,91205	523
524	27 45 76	143 877 824	22,8910	72,3878	8,06202	6,26149	1646,2	215651	1,90840	524
525	27 56 25	144 703 125	22,9129	72,4569	8,06714	6,26340	1649,3	216475	1,90476	525
526	27 66 76	145 531 576	22,9347	72,5259	8,07226	6,26530	1652,5	217301	1,90114	526
527	27 77 29	146 363 183	22,9565	72,5948	8,07737	6,26720	1655,6	218128	1,89753	527
528	27 87 84	147 197 952	22,9783	72,6636	8,08248	6,26910	1658,8	218956	1,89394	528
529	27 98 41	148 035 889	23,0000	72,7324	8,08758	6,27099	1661,9	219787	1,89036	529
530	28 09 00	148 877 000	23,0217	72,8011	8,09267	6,27288	1665,0	220618	1,88679	530
531	28 19 61	149 721 291	23,0434	72,8697	8,09776	6,27476	1668,2	221452	1,88324	531
532	28 30 24	150 568 768	23,0651	72,9383	8,10284	6,27664	1671,3	222287	1,87970	532
533	28 40 89	151 419 437	23,0868	73,0068	8,10791	6,27852	1674,5	223123	1,87617	533
534	28 51 56	152 273 304	23,1084	73,0753	8,11298	6,28040	1677,6	223961	1,87266	534
535	28 62 25	153 130 375	23,1301	73,1437	8,11804	6,28227	1680,8	224802	1,86916	535
536	28 72 96	153 990 656	23,1517	73,2120	8,12310	6,28413	1683,9	225642	1,86567	536
537	28 83 69	154 854 153	23,1733	73,2803	8,12814	6,28600	1687,0	226484	1,86220	537
538	28 94 44	155 720 872	23,1948	73,3485	8,13319	6,28786	1690,2	227329	1,85874	538
539	29 05 21	156 590 819	23,2164	73,4166	8,13822	6,28972	1693,3	228175	1,85529	539
540	29 16 00	157 464 000	23,2379	73,4847	8,14325	6,29157	1696,5	229022	1,85185	540
541	29 26 81	158 340 421	23,2594	73,5527	8,14828	6,29342	1699,6	229871	1,84843	541
542	29 37 64	159 220 088	23,2809	73,6206	8,15329	6,29527	1702,7	230722	1,84502	542
543	29 48 49	160 103 007	23,3024	73,6885	8,15831	6,29711	1705,9	231574	1,84162	543
544	29 59 36	160 989 184	23,3238	73,7564	8,16331	6,29895	1709,0	232428	1,83824	544
545	29 70 25	161 878 625	23,3452	73,8241	8,16831	6,30079	1712,2	233283	1,83486	545
546	29 81 16	162 771 336	23,3666	73,8918	8,17330	6,30262	1715,3	234140	1,83150	546
547	29 92 09	163 667 323	23,3880	73,9594	8,17829	6,30445	1718,5	234998	1,82815	547
548	30 03 04	164 566 592	23,4094	74,0270	8,18327	6,30628	1721,6	235858	1,82482	548
549	30 14 01	165 469 149	23,4307	74,0945	8,18824	6,30810	1724,7	236720	1,82149	549
550	30 25 00	166 375 000	23,4521	74,1620	8,19321	6,30992	1727,9	237583	1,81818	550
n	n^2	n^3	\sqrt{n}	$\sqrt{10n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\ln n$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	$\frac{1000}{n}$	n

550—600

n	n^2	n^3	\sqrt{n}	$\sqrt{10n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\ln n$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	$\frac{1000}{n}$	n
550	30 25 00	166 375 000	23,4521	74,1620	8,19321	6,30992	1727,9	237583	1,81818	550
551	30 36 01	167 284 151	23,4734	74,2294	8,19818	6,31173	1731,0	238448	1,81488	551
552	30 47 04	168 196 508	23,4947	74,2967	8,20313	6,31355	1734,2	239314	1,81159	552
553	30 58 09	169 112 377	23,5160	74,3640	8,20808	6,31536	1737,3	240182	1,80832	553
554	30 69 16	170 031 464	23,5372	74,4312	8,21303	6,31716	1740,4	241051	1,80505	554
555	30 80 25	170 953 875	23,5584	74,4983	8,21797	6,31897	1743,6	241922	1,80180	555
556	30 91 36	171 879 616	23,5797	74,5654	8,22290	6,32077	1746,7	242795	1,79856	556
557	31 02 49	172 808 693	23,6008	74,6324	8,22783	6,32257	1749,9	243669	1,79533	557
558	31 13 64	173 741 112	23,6220	74,6994	8,23275	6,32436	1753,0	244545	1,79211	558
559	31 24 81	174 676 879	23,6432	74,7663	8,23766	6,32615	1756,2	245422	1,78891	559
560	31 36 00	175 616 000	23,6643	74,8331	8,24257	6,32794	1759,3	246301	1,78571	560
561	31 47 21	176 558 481	23,6854	74,8999	8,24747	6,32972	1762,4	247181	1,78253	561
562	31 58 44	177 504 328	23,7065	74,9667	8,25237	6,33150	1765,6	248063	1,77936	562
563	31 69 69	178 453 547	23,7276	75,0333	8,25726	6,33328	1768,7	248947	1,77620	563
564	31 80 96	179 406 144	23,7487	75,0999	8,26215	6,33505	1771,9	249832	1,77305	564
565	31 92 25	180 362 125	23,7697	75,1665	8,26703	6,33683	1775,0	250719	1,76991	565
566	32 03 56	181 321 496	23,7908	75,2330	8,27190	6,33859	1778,1	251607	1,76678	566
567	32 14 89	182 284 263	23,8118	75,2994	8,27677	6,34036	1781,3	252497	1,76367	567
568	32 26 24	183 250 432	23,8328	75,3658	8,28164	6,34212	1784,4	253388	1,76056	568
569	32 37 61	184 220 009	23,8537	75,4321	8,28649	6,34388	1787,6	254281	1,75747	569
570	32 49 00	185 193 000	23,8747	75,4983	8,29134	6,34564	1790,7	255176	1,75439	570
571	32 60 41	186 169 411	23,8956	75,5645	8,29619	6,34739	1793,8	256072	1,75131	571
572	32 71 84	187 149 248	23,9165	75,6307	8,30103	6,34914	1797,0	256970	1,74825	572
573	32 83 29	188 132 517	23,9374	75,6968	8,30587	6,35089	1800,1	257869	1,74520	573
574	32 94 76	189 119 224	23,9583	75,7628	8,31069	6,35263	1803,3	258770	1,74216	574
575	33 06 25	190 109 375	23,9792	75,8288	8,31552	6,35437	1806,4	259672	1,73913	575
576	33 17 76	191 102 976	24,0000	75,8947	8,32034	6,35611	1809,6	260576	1,73611	576
577	33 29 29	192 100 033	24,0208	75,9605	8,32515	6,35784	1812,7	261482	1,73310	577
578	33 40 84	193 100 552	24,0416	76,0263	8,32995	6,35957	1815,8	262389	1,73010	578
579	33 52 41	194 104 539	24,0624	76,0920	8,33476	6,36130	1819,0	263298	1,72712	579
580	33 64 00	195 112 000	24,0832	76,1577	8,33955	6,36303	1822,1	264208	1,72414	580
581	33 75 61	196 122 941	24,1039	76,2234	8,34434	6,36475	1825,3	265120	1,72117	581
582	33 87 24	197 137 368	24,1247	76,2889	8,34913	6,36647	1828,4	266033	1,71821	582
583	33 98 89	198 155 287	24,1454	76,3544	8,35390	6,36819	1831,6	266948	1,71527	583
584	34 10 56	199 176 704	24,1661	76,4199	8,35868	6,36990	1834,7	267865	1,71233	584
585	34 22 25	200 201 625	24,1868	76,4853	8,36345	6,37161	1837,8	268783	1,70940	585
586	34 33 96	201 230 056	24,2074	76,5506	8,36821	6,37332	1841,0	269703	1,70648	586
587	34 45 69	202 262 003	24,2281	76,6159	8,37297	6,37502	1844,1	270624	1,70358	587
588	34 57 44	203 297 472	24,2487	76,6812	8,37772	6,37673	1847,3	271547	1,70068	588
589	34 69 21	204 336 469	24,2693	76,7463	8,38247	6,37843	1850,4	272471	1,69779	589
590	34 81 00	205 379 000	24,2899	76,8115	8,38721	6,38012	1853,5	273397	1,69492	590
591	34 92 81	206 425 071	24,3105	76,8765	8,39194	6,38182	1856,7	274325	1,69205	591
592	35 04 64	207 474 688	24,3311	76,9415	8,39667	6,38351	1859,8	275254	1,68919	592
593	35 16 49	208 527 857	24,3516	77,0065	8,40140	6,38519	1863,0	276184	1,68634	593
594	35 28 36	209 584 584	24,3721	77,0714	8,40612	6,38688	1866,1	277117	1,68350	594
595	35 40 25	210 644 875	24,3926	77,1362	8,41083	6,38856	1869,2	278051	1,68067	595
596	35 52 16	211 708 736	24,4131	77,2010	8,41554	6,39024	1872,4	278986	1,67785	596
597	35 64 09	212 776 173	24,4336	77,2658	8,42025	6,39192	1875,5	279923	1,67504	597
598	35 76 04	213 847 192	24,4540	77,3305	8,42494	6,39359	1878,7	280862	1,67224	598
599	36 88 01	214 921 799	24,4745	77,3951	8,42964	6,39526	1881,8	281802	1,66945	599
600	36 00 00	216 000 000	24,4949	77,4597	8,43433	6,39693	1885,0	282743	1,66667	600
n	n^2	n^3	\sqrt{n}	$\sqrt{10n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\ln n$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	$\frac{1000}{n}$	n

600 — 650

n	n^2	n^3	\sqrt{n}	$\sqrt{10n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\ln n$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	$\frac{1000}{n}$	n
600	36 00 00	216 000 000	24,4949	77,4597	8,43433	6,39693	1885,0	282743	1,66667	600
601	36 12 01	217 081 801	24,5153	77,5242	8,43901	6,39859	1888,1	283687	1,66389	601
602	36 24 04	218 167 208	24,5357	77,5887	8,44369	6,40026	1891,2	284631	1,66113	602
603	36 36 09	219 256 227	24,5561	77,6531	8,44836	6,40192	1894,4	285578	1,65837	603
604	36 48 16	220 348 864	24,5764	77,7174	8,45303	6,40357	1897,5	286526	1,65563	604
605	36 60 25	221 445 125	24,5967	77,7817	8,45769	6,40523	1900,7	287475	1,65289	605
606	36 72 36	222 545 016	24,6171	77,8460	8,46235	6,40688	1903,8	288426	1,65017	606
607	36 84 49	223 648 543	24,6374	77,9102	8,46700	6,40853	1906,9	289379	1,64745	607
608	36 96 64	224 755 712	24,6577	77,9744	8,47165	6,41017	1910,1	290333	1,64474	608
609	37 08 81	225 866 529	24,6779	78,0385	8,47629	6,41182	1913,2	291289	1,64204	609
610	37 21 00	226 981 000	24,6982	78,1025	8,48093	6,41346	1916,4	292247	1,63934	610
611	37 33 21	228 099 131	24,7184	78,1665	8,48556	6,41510	1919,5	293206	1,63666	611
612	37 45 44	229 220 928	24,7386	78,2304	8,49018	6,41673	1922,7	294166	1,63399	612
613	37 57 69	230 346 397	24,7588	78,2943	8,49481	6,41836	1925,8	295128	1,63132	613
614	37 69 96	231 475 544	24,7790	78,3582	8,49942	6,41999	1928,9	296092	1,62866	614
615	37 82 25	232 608 375	24,7992	78,4219	8,50404	6,42162	1932,1	297057	1,62602	615
616	37 94 56	233 744 896	24,8193	78,4857	8,50864	6,42325	1935,2	298024	1,62338	616
617	38 06 89	234 885 113	24,8395	78,5493	8,51324	6,42487	1938,4	298992	1,62075	617
618	38 19 24	236 029 032	24,8596	78,6130	8,51784	6,42649	1941,5	299962	1,61812	618
619	38 31 61	237 176 659	24,8797	78,6766	8,52243	6,42811	1944,6	300934	1,61551	619
620	38 44 00	238 328 000	24,8998	78,7401	8,52702	6,42972	1947,8	301907	1,61290	620
621	38 56 41	239 483 061	24,9199	78,8036	8,53160	6,43133	1950,9	302882	1,61031	621
622	38 68 84	240 641 848	24,9399	78,8670	8,53618	6,43294	1954,1	303858	1,60772	622
623	38 81 29	241 804 367	24,9600	78,9303	8,54075	6,43455	1957,2	304836	1,60514	623
624	38 93 76	242 970 624	24,9800	78,9937	8,54532	6,43615	1960,4	305815	1,60256	624
625	39 06 25	244 140 625	25,0000	79,0569	8,54988	6,43775	1963,5	306796	1,60000	625
626	39 18 76	245 314 376	25,0200	79,1202	8,55444	6,43935	1966,6	307779	1,59744	626
627	39 31 29	246 491 883	25,0400	79,1833	8,55899	6,44095	1969,8	308763	1,59490	627
628	39 43 84	247 673 152	25,0599	79,2465	8,56354	6,44254	1972,9	309748	1,59236	628
629	39 56 41	248 858 189	25,0799	79,3095	8,56808	6,44413	1976,1	310736	1,58983	629
630	39 69 00	250 047 000	25,0998	79,3725	8,57262	6,44572	1979,2	311725	1,58730	630
631	39 81 61	251 239 591	25,1197	79,4355	8,57715	6,44731	1982,3	312715	1,58479	631
632	39 94 24	252 435 968	25,1396	79,4984	8,58168	6,44889	1985,5	313707	1,58228	632
633	40 06 89	253 636 137	25,1595	79,5613	8,58620	6,45047	1988,6	314700	1,57978	633
634	40 19 56	254 840 104	25,1794	78,6241	8,59072	6,45205	1991,8	315696	1,57729	634
635	40 32 25	256 047 875	25,1992	78,6869	8,59524	6,45362	1994,9	316692	1,57480	635
636	40 44 96	257 259 456	25,2190	79,7496	8,59975	6,45520	1998,1	317690	1,57233	636
637	40 57 69	258 474 853	25,2389	79,8123	8,60425	6,45677	2001,2	318690	1,56986	637
638	40 70 44	259 694 072	25,2587	79,8749	8,60875	6,45834	2004,3	319692	1,56740	638
639	40 83 21	260 917 119	25,2784	79,9375	8,61325	6,45990	2007,5	320695	1,56495	639
640	40 96 00	262 144 000	25,2982	80,0000	8,61774	6,46147	2010,6	321699	1,56250	640
641	41 08 81	263 374 721	25,3180	80,0625	8,62222	6,46303	2013,8	322705	1,56006	641
642	41 21 64	264 609 288	25,3377	80,1249	8,62671	6,46459	2016,9	323713	1,55763	642
643	41 34 49	265 847 707	25,3574	80,1873	8,63118	6,46614	2020,0	324722	1,55521	643
644	41 47 36	267 089 984	25,3772	80,2496	8,63566	6,46770	2023,2	325733	1,55280	644
645	41 60 25	268 336 125	25,3969	80,3119	8,64012	6,46925	2026,3	326745	1,55039	645
646	41 73 16	269 586 136	25,4165	80,3741	8,64459	6,47080	2029,5	327759	1,54799	646
647	41 86 09	270 840 023	25,4362	80,4363	8,64904	6,47235	2032,6	328775	1,54560	647
648	41 99 04	272 097 792	25,4558	80,4984	8,65350	6,47389	2035,8	329792	1,54321	648
649	42 12 01	273 359 449	25,4755	80,5605	8,65795	6,47543	2038,9	330810	1,54083	649
650	42 25 00	274 625 000	25,4951	80,6226	8,66239	6,47697	2042,0	331831	1,53846	650

n	n^2	n^3	\sqrt{n}	$\sqrt{10n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\ln n$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	$\frac{1000}{n}$	n
-----	-------	-------	------------	--------------	---------------	---------	---------	---------------------	------------------	-----

650 — 700

n	n^2	n^3	\sqrt{n}	$\sqrt{10n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\ln n$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	$\frac{1000}{n}$	n
650	42 25 00	274 625 000	25,4951	80,6226	8,66239	6,47697	2042,0	331831	1,53846	650
651	42 38 01	275 894 451	25,5147	80,6846	8,66683	6,47851	2045,2	332853	1,53610	651
652	42 51 04	277 167 808	25,5343	80,7465	8,67127	6,48004	2048,3	333876	1,53374	652
653	42 64 09	278 445 077	25,5539	80,8084	8,67570	6,48158	2051,5	334901	1,53139	653
654	42 77 16	279 726 264	25,5734	80,8703	8,68012	6,48311	2054,6	335927	1,52905	654
655	42 90 25	281 011 375	25,5930	80,9321	8,68455	6,48464	2057,7	336955	1,52672	655
656	43 03 36	282 300 416	25,6125	80,9938	8,68896	6,48616	2060,9	337985	1,52439	656
657	43 16 49	283 593 393	25,6320	81,0555	8,69338	6,48768	2064,0	339016	1,52207	657
658	43 29 64	284 890 312	25,6515	81,1172	8,69778	6,48920	2067,2	340049	1,51976	658
659	43 42 81	286 191 179	25,6710	81,1788	8,70219	6,49072	2070,3	341084	1,51745	659
660	43 56 00	287 496 000	25,6905	81,2404	8,70659	6,49224	2073,5	342119	1,51515	660
661	43 69 21	288 804 781	25,7099	81,3019	8,71098	6,49375	2076,6	343157	1,51286	661
662	43 82 44	290 117 528	25,7294	81,3634	8,71537	6,49527	2079,7	344196	1,51057	662
663	43 95 69	291 434 247	25,7488	81,4248	8,71976	6,49677	2082,9	345237	1,50830	663
664	44 08 96	292 754 944	25,7682	81,4862	8,72414	6,49828	2086,0	346279	1,50602	664
665	44 22 25	294 079 625	25,7876	81,5475	8,72852	6,49979	2089,2	347323	1,50376	665
666	44 35 56	295 408 296	25,8070	81,6088	8,73289	6,50129	2092,3	348368	1,50150	666
667	44 48 89	296 740 963	25,8263	81,6701	8,73726	6,50279	2095,4	349415	1,49925	667
668	44 62 24	298 077 632	25,8457	81,7313	8,74162	6,50429	2098,6	350464	1,49701	668
669	44 75 61	299 418 309	25,8650	81,7924	8,74598	6,50578	2101,7	351514	1,49477	669
670	44 89 00	300 763 000	25,8844	81,8535	8,75034	6,50728	2104,9	352565	1,49254	670
671	45 02 41	302 111 711	25,9037	81,9146	8,75469	6,50877	2108,0	353618	1,49031	671
672	45 15 84	303 464 448	25,9230	81,9756	8,75904	6,51026	2111,2	354673	1,48810	672
673	45 29 29	304 821 217	25,9422	82,0366	8,76338	6,51175	2114,3	355730	1,48588	673
674	45 42 76	306 182 024	25,9615	82,0975	8,76772	6,51323	2117,4	356788	1,48368	674
675	45 56 25	307 546 875	25,9808	82,1584	8,77205	6,51471	2120,6	357847	1,48148	675
676	45 69 76	308 915 776	26,0000	82,2192	8,77638	6,51619	2123,7	358908	1,47929	676
677	45 83 29	310 288 733	26,0192	82,2800	8,78071	6,51767	2126,9	359971	1,47710	677
678	45 96 84	311 665 752	26,0384	82,3408	8,78503	6,51915	2130,0	361035	1,47493	678
679	46 10 41	313 046 839	26,0576	82,4015	8,78935	6,52062	2133,1	362101	1,47275	679
680	46 24 00	314 432 000	26,0768	82,4621	8,79366	6,52209	2136,3	363168	1,47059	680
681	46 37 61	315 821 241	26,0960	82,5227	8,79797	6,52356	2139,4	364237	1,46843	681
682	46 51 24	317 214 568	26,1151	82,5833	8,80227	6,52503	2142,6	365308	1,46628	682
683	46 64 89	318 611 987	26,1343	82,6438	8,80657	6,52649	2145,7	366380	1,46413	683
684	46 78 56	320 013 504	26,1534	82,7043	8,81087	6,52796	2148,8	367453	1,46199	684
685	46 92 25	321 419 125	26,1725	82,7647	8,81516	6,52942	2152,0	368528	1,45985	685
686	47 05 96	322 828 856	26,1916	82,8251	8,81945	6,53088	2155,1	369605	1,45773	686
687	47 19 69	324 242 703	26,2107	82,8855	8,82373	6,53233	2158,3	370684	1,45560	687
688	47 33 44	325 660 672	26,2298	82,9458	8,82801	6,53379	2161,4	371764	1,45349	688
689	47 47 21	327 082 769	26,2488	83,0060	8,83228	6,53524	2164,6	372845	1,45138	689
690	47 61 00	328 509 000	26,2679	83,0662	8,83656	6,53669	2167,7	373928	1,44928	690
691	47 74 81	329 939 371	26,2869	83,1264	8,84082	6,53814	2170,8	375013	1,44718	691
692	47 88 64	331 373 888	26,3059	83,1865	8,84509	6,53959	2174,0	376099	1,44509	692
693	48 02 49	332 812 557	26,3249	83,2466	8,84934	6,54103	2177,1	377187	1,44300	693
694	48 16 36	334 255 384	26,3439	83,3067	8,85360	6,54247	2180,3	378276	1,44092	694
695	48 30 25	335 702 375	26,3629	83,3667	8,85785	6,54391	2183,4	379367	1,43885	695
696	48 44 16	337 153 536	26,3818	83,4266	8,86210	6,54535	2186,5	380459	1,43678	696
697	48 58 09	338 608 873	26,4008	83,4865	8,86634	6,54679	2189,7	381553	1,43472	697
698	48 72 04	340 068 392	26,4197	83,5464	8,87058	6,54822	2192,8	382649	1,43266	698
699	48 86 01	341 532 099	26,4386	83,6062	8,87481	6,54965	2196,0	383746	1,43062	699
700	49 00 00	343 000 000	26,4575	83,6660	8,87904	6,55108	2199,1	384845	1,42857	700
n	n^2	n^3	\sqrt{n}	$\sqrt{10n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\ln n$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	$\frac{1000}{n}$	n

700 — 750

n	n^2	n^3	\sqrt{n}	$\sqrt{10n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\ln n$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	$\frac{1000}{n}$	n
700	49 00 00	343 000 000	26,4575	83,6660	8,87904	6,55108	2199,1	384845	1,42857	700
701	49 14 01	344 472 101	26,4764	83,7257	8,88327	6,55291	2202,3	385945	1,42653	701
702	49 28 04	345 948 408	26,4953	83,7854	8,88749	6,55393	2205,4	387047	1,42450	702
703	49 42 09	347 428 927	26,5141	83,8451	8,89171	6,55536	2208,5	388151	1,42248	703
704	49 56 16	348 913 664	26,5330	83,9047	8,89592	6,55678	2211,7	389256	1,42045	704
705	49 70 25	350 402 625	26,5518	83,9643	8,90013	6,55820	2214,7	390363	1,41844	705
706	49 84 36	351 895 816	26,5707	84,0238	8,90434	6,55962	2218,0	391471	1,41643	706
707	49 98 49	353 393 243	26,5895	84,0833	8,90854	6,56103	2221,1	392580	1,41443	707
708	50 12 64	354 894 912	26,6083	84,1427	8,91274	6,56244	2224,2	393692	1,41243	708
709	50 26 81	356 400 829	26,6271	84,2021	8,91693	6,56386	2227,4	394805	1,41044	709
710	50 41 00	357 911 000	26,6458	84,2615	8,92112	6,56526	2230,5	395919	1,40845	710
711	50 55 21	359 425 431	26,6646	84,3208	8,92531	6,56667	2233,7	397035	1,40647	711
712	50 69 44	360 944 128	26,6833	84,3801	8,92949	6,56808	2236,8	398153	1,40449	712
713	50 83 69	362 467 097	26,7021	84,4393	8,93367	6,56948	2240,0	399272	1,40252	713
714	50 97 96	363 994 344	26,7208	84,4985	8,93784	6,57088	2243,1	400393	1,40056	714
715	51 12 25	365 525 875	26,7395	84,5577	8,94201	6,57228	2246,2	401515	1,39860	715
716	51 26 56	367 061 696	26,7582	84,6168	8,94618	6,57368	2249,4	402639	1,39665	716
717	51 40 89	368 601 813	26,7769	84,6759	8,95034	6,57508	2252,5	403765	1,39470	717
718	51 55 24	370 146 232	26,7955	84,7349	8,95450	6,57647	2255,7	404892	1,39276	718
719	51 69 61	371 694 959	26,8142	84,7939	8,95866	6,57786	2258,8	406020	1,39082	719
720	51 84 00	373 248 000	26,8328	84,8528	8,96281	6,57925	2261,9	407150	1,38889	720
721	51 98 41	374 805 361	26,8514	84,9117	8,96696	6,58064	2265,1	408282	1,38696	721
722	52 12 84	376 367 048	26,8701	84,9706	8,97110	6,58203	2268,2	409415	1,38504	722
723	52 27 29	377 933 067	26,8887	85,0294	8,97524	6,58341	2271,4	410550	1,38313	723
724	52 41 76	379 503 424	26,9072	85,0882	8,97938	6,58479	2274,5	411687	1,38122	724
725	52 56 25	381 078 125	26,9258	85,1469	8,98351	6,58617	2277,7	412825	1,37931	725
726	52 70 76	382 657 176	26,9444	85,2056	8,98764	6,58755	2280,8	413965	1,37741	726
727	52 85 29	384 240 583	26,9629	85,2643	8,99176	6,58893	2283,9	415106	1,37552	727
728	52 99 84	385 828 352	26,9815	85,3229	8,99588	6,59030	2287,1	416248	1,37363	728
729	53 14 41	387 420 489	27,0000	85,3815	9,00000	6,59167	2290,2	417393	1,37174	729
730	53 29 00	389 017 000	27,0185	85,4400	9,00411	6,59304	2293,4	418539	1,36986	730
731	53 43 61	390 617 891	27,0370	85,4985	9,00822	6,59441	2296,5	419686	1,36799	731
732	53 58 24	392 223 168	27,0555	85,5570	9,01233	6,59578	2299,6	420835	1,36612	732
733	53 72 89	393 832 837	27,0740	85,6154	9,01643	6,59715	2302,8	421986	1,36426	733
734	53 87 56	395 446 904	27,0924	85,6738	9,02053	6,59851	2305,9	423138	1,36240	734
735	54 02 25	397 065 375	27,1109	85,7321	9,02462	6,59987	2309,1	424293	1,36054	735
736	54 16 96	398 688 256	27,1293	85,7904	9,02871	6,60123	2312,2	425447	1,35870	736
737	54 31 69	400 315 553	27,1477	85,8487	9,03280	6,60259	2315,4	426604	1,35685	737
738	54 46 44	401 947 272	27,1662	85,9069	9,03689	6,60394	2318,5	427762	1,35501	738
739	54 61 21	403 583 419	27,1846	85,9651	9,04097	6,60530	2321,6	428922	1,35318	739
740	54 76 00	405 224 000	27,2029	86,0233	9,04504	6,60665	2324,8	430084	1,35135	740
741	54 90 81	406 869 021	27,2213	86,0814	9,04911	6,60800	2327,9	431247	1,34953	741
742	55 05 64	408 518 488	27,2397	86,1394	9,05318	6,60935	2331,1	432412	1,34771	742
743	55 20 49	410 172 407	27,2580	86,1974	9,05725	6,61070	2334,2	433578	1,34590	743
744	55 35 36	411 830 784	27,2764	86,2554	9,06131	6,61204	2337,3	434746	1,34409	744
745	55 50 25	413 493 625	27,2947	86,3134	9,06537	6,61338	2340,5	435916	1,34228	745
746	55 65 16	415 160 936	27,3130	86,3713	9,06942	6,61473	2343,6	437087	1,34048	746
747	55 80 09	416 832 723	27,3313	86,4292	9,07347	6,61607	2346,8	438259	1,33869	747
748	55 95 04	418 508 992	27,3496	86,4870	9,07752	6,61740	2349,9	439433	1,33690	748
749	56 10 01	420 189 749	27,3679	86,5448	9,08156	6,61874	2353,1	440609	1,33511	749
750	56 25 00	421 875 000	27,3861	86,6025	9,08560	6,62007	2356,2	441786	1,33333	750
n	n^2	n^3	\sqrt{n}	$\sqrt{10n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\ln n$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	$\frac{1000}{n}$	n

750 — 800

n	n^2	n^3	\sqrt{n}	$\sqrt{10n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\ln n$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	$\frac{1000}{n}$	$\frac{1}{n}$
750	56 25 00	421 875 000	27,3861	86,6025	9,08560	6,62007	2356,2	441 786	1,33333	750
751	56 40 01	423 564 751	27,4044	86,6603	9,08964	6,62141	2359,3	442 965	1,33156	751
752	56 55 04	425 259 008	27,4226	86,7179	9,09367	6,62274	2362,5	444 146	1,32979	752
753	56 70 09	426 957 777	27,4408	86,7756	9,09770	6,62407	2365,6	445 328	1,32802	753
754	56 85 16	428 661 064	27,4591	86,8332	9,10173	6,62539	2368,8	446 511	1,32626	754
755	57 00 25	430 368 875	27,4773	86,8907	9,10575	6,62672	2371,9	447 697	1,32450	755
756	57 15 36	432 081 216	27,4955	86,9483	9,10977	6,62804	2375,0	448 883	1,32275	756
757	57 30 49	433 798 093	27,5136	87,0057	9,11378	6,62936	2378,2	450 072	1,32100	757
758	57 45 64	435 519 512	27,5318	87,0632	9,11779	6,63068	2381,3	451 262	1,31926	758
759	57 60 81	437 245 479	27,5500	87,1206	9,12180	6,63200	2384,5	452 453	1,31752	759
760	57 76 00	438 976 000	27,5681	87,1780	9,12581	6,63332	2387,6	453 646	1,31579	760
761	57 91 21	440 711 081	27,5862	87,2353	9,12981	6,63463	2390,8	454 841	1,31406	761
762	58 06 44	442 450 728	27,6043	87,2926	9,13380	6,63595	2393,9	456 037	1,31234	762
763	58 21 69	444 194 947	27,6225	87,3499	9,13780	6,63726	2397,0	457 234	1,31062	763
764	58 36 96	445 943 744	27,6405	87,4071	9,14179	6,63857	2400,2	458 434	1,30890	764
765	58 52 25	447 697 125	27,6586	87,4643	9,14577	6,63988	2403,3	459 635	1,30719	765
766	58 67 56	449 455 096	27,6767	87,5214	9,14976	6,64118	2406,5	460 837	1,30548	766
767	58 82 89	451 217 663	27,6948	87,5785	9,15374	6,64249	2409,6	462 041	1,30378	767
768	58 98 24	452 984 832	27,7128	87,6356	9,15771	6,64379	2412,7	463 247	1,30208	768
769	59 13 61	454 756 609	27,7308	87,6926	9,16169	6,64509	2415,9	464 454	1,30039	769
770	59 29 00	456 533 000	27,7489	87,7496	9,16566	6,64639	2419,0	465 663	1,29870	770
771	59 44 41	458 314 011	27,7669	87,8066	9,16962	6,64769	2422,2	466 873	1,29702	771
772	59 59 84	460 099 648	27,7849	87,8635	9,17359	6,64898	2425,3	468 085	1,29534	772
773	59 75 29	461 889 917	27,8029	87,9204	9,17754	6,65028	2428,5	469 298	1,29366	773
774	59 90 76	463 684 824	27,8209	87,9773	9,18150	6,65157	2431,6	470 513	1,29199	774
775	60 06 25	465 484 375	27,8388	88,0341	9,18545	6,65286	2434,7	471 730	1,29032	775
776	60 21 76	467 288 576	27,8568	88,0909	9,18940	6,65415	2437,9	472 948	1,28866	776
777	60 37 29	469 097 433	27,8747	88,1476	9,19335	6,65544	2441,0	474 168	1,28700	777
778	60 52 84	470 910 952	27,8927	88,2043	9,19729	6,65673	2444,2	475 389	1,28535	778
779	60 68 41	472 729 139	27,9106	88,2610	9,20123	6,65801	2447,3	476 612	1,28370	779
780	60 84 00	474 552 000	27,9285	88,3176	9,20516	6,65929	2450,4	477 836	1,28205	780
781	60 99 61	476 379 541	27,9464	88,3742	9,20910	6,66058	2453,6	479 062	1,28041	781
782	61 15 24	478 211 768	27,9643	88,4308	9,21303	6,66185	2456,7	480 290	1,27877	782
783	61 30 89	480 048 687	27,9821	88,4873	9,21695	6,66313	2459,9	481 519	1,27714	783
784	61 46 56	481 890 304	28,0000	88,5438	9,22087	6,66441	2463,0	482 750	1,27551	784
785	61 62 25	483 736 625	28,0179	88,6002	9,22479	6,66568	2466,2	483 982	1,27389	785
786	61 77 96	485 587 656	28,0357	88,6566	9,22871	6,66696	2469,3	485 216	1,27226	786
787	61 93 69	487 443 403	28,0535	88,7130	9,23262	6,66823	2472,4	486 451	1,27065	787
788	62 09 44	489 303 872	28,0713	88,7694	9,23653	6,66950	2475,6	487 688	1,26904	788
789	62 25 21	491 169 069	28,0891	88,8257	9,24043	6,67077	2478,7	488 927	1,26743	789
790	62 41 00	493 039 000	28,1069	88,8819	9,24434	6,67203	2481,9	490 167	1,26582	790
791	62 56 81	494 913 671	28,1247	88,9382	9,24823	6,67330	2485,0	491 409	1,26422	791
792	62 72 64	496 793 088	28,1425	88,9944	9,25213	6,67456	2488,1	492 652	1,26262	792
793	62 88 49	498 677 257	28,1603	89,0505	9,25602	6,67582	2491,3	493 897	1,26103	793
794	63 04 36	500 566 184	28,1780	89,1067	9,25991	6,67708	2494,4	495 143	1,25945	794
795	63 20 25	502 459 875	28,1957	89,1628	9,26380	6,67834	2497,6	496 391	1,25786	795
796	63 36 16	504 358 336	28,2135	89,2188	9,26768	6,67960	2500,7	497 641	1,25628	796
797	63 52 09	506 261 573	28,2312	89,2749	9,27156	6,68085	2503,8	498 892	1,25471	797
798	63 68 04	508 169 592	28,2489	89,3308	9,27544	6,68211	2507,0	500 145	1,25313	798
799	63 84 01	510 082 399	28,2666	89,3868	9,27931	6,68336	2510,1	501 399	1,25156	799
800	64 00 00	512 000 000	28,2843	89,4427	9,28318	6,68461	2513,3	502 655	1,25000	800
n	n^2	n^3	\sqrt{n}	$\sqrt{10n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\ln n$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	$\frac{1000}{n}$	$\frac{1}{n}$

800 — 850

n	n^2	n^3	\sqrt{n}	$\sqrt{10n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\ln n$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	$\frac{1000}{n}$	n
800	64 00 00	512 000 000	28,2843	89,4427	9,28318	6,68461	2513,3	502655	1,25000	800
801	64 16 01	513 922 401	28,3019	89,4986	9,28704	6,68586	2516,4	503912	1,24844	801
802	64 32 04	515 849 608	28,3196	89,5545	9,29091	6,68711	2519,6	505171	1,24688	802
803	64 48 09	517 781 627	28,3373	89,6103	9,29477	6,68835	2522,7	506432	1,24533	803
804	64 64 16	519 718 464	28,3549	89,6660	9,29862	6,68960	2525,8	507694	1,24378	804
805	64 80 25	521 660 125	28,3725	89,7218	9,30248	6,69084	2529,0	508958	1,24224	805
806	64 96 36	523 606 616	28,3901	89,7775	9,30633	6,69208	2532,1	510223	1,24069	806
807	65 12 49	525 557 943	28,4077	89,8332	9,31018	6,69332	2535,3	511490	1,23916	807
808	65 28 64	527 514 112	28,4253	89,8888	9,31402	6,69456	2538,4	512758	1,23762	808
809	65 44 81	529 475 129	28,4429	89,9444	9,31786	6,69580	2541,5	514028	1,23609	809
810	65 61 00	531 441 000	28,4605	90,0000	9,32170	6,69703	2544,7	515300	1,23457	810
811	65 77 21	533 411 731	28,4781	90,0555	9,32553	6,69827	2547,8	516573	1,23305	811
812	65 93 44	535 387 328	28,4956	90,1110	9,32936	6,69950	2551,0	517848	1,23153	812
813	66 09 69	537 367 797	28,5132	90,1665	9,33319	6,70073	2554,1	519124	1,23001	813
814	66 25 96	539 353 144	28,5307	90,2219	9,33702	6,70196	2557,3	520402	1,22850	814
815	66 42 25	541 343 375	28,5482	90,2774	9,34084	6,70319	2560,4	521681	1,22699	815
816	66 58 56	543 338 496	28,5657	90,3327	9,34466	6,70441	2563,5	522962	1,22549	816
817	66 74 89	545 338 513	28,5832	90,3881	9,34847	6,70564	2566,7	524245	1,22399	817
818	66 91 24	547 343 432	28,6007	90,4434	9,35229	6,70686	2569,8	525529	1,22249	818
819	67 07 61	549 353 259	28,6182	90,4986	9,35610	6,70808	2573,0	526814	1,22100	819
820	67 24 00	551 368 000	28,6356	90,5539	9,35990	6,70930	2576,1	528102	1,21951	820
821	67 40 41	553 387 661	28,6531	90,6090	9,36370	6,71052	2579,2	529391	1,21803	821
822	67 56 84	555 412 248	28,6705	90,6642	9,36751	6,71174	2582,4	530681	1,21655	822
823	67 73 29	557 441 767	28,6880	90,7193	9,37130	6,71296	2585,5	531973	1,21507	823
824	67 89 76	559 476 224	28,7054	90,7744	9,37510	6,71417	2588,7	533267	1,21359	824
825	68 06 25	561 515 625	28,7228	90,8295	9,37889	6,71538	2591,8	534562	1,21212	825
826	68 22 76	563 559 976	28,7402	90,8845	9,38268	6,71659	2595,0	535858	1,21065	826
827	68 39 29	565 609 283	28,7576	90,9395	9,38646	6,71780	2598,1	537157	1,20919	827
828	68 55 84	567 663 552	28,7750	90,9945	9,39024	6,71901	2601,2	538456	1,20773	828
829	68 72 41	569 722 789	28,7924	91,0494	9,39402	6,72022	2604,4	539758	1,20627	829
830	68 89 00	571 787 000	28,8097	91,1043	9,39780	6,72143	2607,5	541061	1,20482	830
831	69 05 61	573 856 191	28,8271	91,1592	9,40157	6,72263	2610,7	542365	1,20337	831
832	69 22 24	575 930 368	28,8444	91,2140	9,40534	6,72383	2613,8	543671	1,20192	832
833	69 38 89	578 009 537	28,8617	91,2688	9,40911	6,72503	2616,9	544979	1,20048	833
834	69 55 56	580 093 704	28,8791	91,3236	9,41287	6,72623	2620,1	546288	1,19904	834
835	69 72 25	582 182 875	28,8964	91,3783	9,41663	6,72743	2623,2	547599	1,19760	835
836	69 88 96	584 277 056	28,9137	91,4330	9,42039	6,72863	2626,4	548912	1,19617	836
837	70 05 69	586 376 253	28,9310	91,4877	9,42414	6,72982	2629,5	550226	1,19474	837
838	70 22 44	588 480 472	28,9482	91,5423	9,42789	6,73102	2632,7	551541	1,19332	838
839	70 39 21	590 589 719	28,9655	91,5969	9,43164	6,73221	2635,8	552858	1,19190	839
840	70 56 00	592 704 000	28,9828	91,6515	9,43539	6,73340	2638,9	554177	1,19048	840
841	70 72 81	594 823 321	29,0000	91,7061	9,43913	6,73459	2642,1	555497	1,18906	841
842	70 89 64	596 947 688	29,0172	91,7606	9,44287	6,73578	2645,2	556819	1,18765	842
843	71 06 49	599 077 107	29,0345	91,8150	9,44661	6,73697	2648,4	558142	1,18624	843
844	71 23 36	601 211 584	29,0517	91,8695	9,45034	6,73815	2651,5	559467	1,18483	844
845	71 40 25	603 351 125	29,0689	91,9239	9,45407	6,73934	2654,6	560794	1,18343	845
846	71 57 16	605 495 736	29,0861	91,9783	9,45780	6,74052	2657,8	562122	1,18203	846
847	71 74 09	607 645 423	29,1033	92,0326	9,46152	6,74170	2660,9	563452	1,18064	847
848	71 91 04	609 800 192	29,1204	92,0869	9,46525	6,74288	2664,1	564783	1,17925	848
849	72 08 01	611 960 049	29,1376	92,1412	9,46897	6,74406	2667,2	566116	1,17786	849
850	72 25 00	614 125 000	29,1548	92,1954	9,47268	6,74524	2670,4	567450	1,17647	850
n	n^2	n^3	\sqrt{n}	$\sqrt{10n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\ln n$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	$\frac{1000}{n}$	n

850 — 900

n	n^2	n^3	\sqrt{n}	$\sqrt{10n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\ln n$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	$\frac{1000}{n}$	n
850	72 25 00	614 125 000	29,1548	92,1954	9,47268	6,74524	2670,4	567450	1,17647	850
851	72 42 01	616 295 051	29,1719	92,2497	9,47640	6,74641	2673,5	568786	1,17509	851
852	72 59 04	618 470 208	29,1890	92,3038	9,48011	6,74759	2676,6	570124	1,17371	852
853	72 76 09	620 650 477	29,2062	92,3580	9,48381	6,74876	2679,8	571463	1,17233	853
854	72 93 16	622 835 864	29,2233	92,4121	9,48752	6,74993	2682,9	572803	1,17096	854
855	73 10 25	625 026 375	29,2404	92,4662	9,49122	6,75110	2686,1	574146	1,16959	855
856	73 27 36	627 222 016	29,2575	92,5203	9,49492	6,75227	2689,2	575490	1,16822	856
857	73 44 49	629 422 793	29,2746	92,5743	9,49861	6,75344	2692,3	576835	1,16686	857
858	73 61 64	631 628 712	29,2916	92,6283	9,50231	6,75460	2695,5	578182	1,16550	858
859	73 78 81	633 839 779	29,3087	92,6823	9,50600	6,75577	2698,6	579530	1,16414	859
860	73 96 00	636 056 000	29,3258	92,7362	9,50969	6,75693	2701,8	580880	1,16279	860
861	74 13 21	638 277 381	29,3428	92,7901	9,51337	6,75809	2704,9	582232	1,16144	861
862	74 30 44	640 503 928	29,3598	92,8440	9,51705	6,75926	2708,1	583585	1,16009	862
863	74 47 69	642 735 647	29,3769	92,8978	9,52073	6,76041	2711,2	584940	1,15875	863
864	74 64 96	644 972 544	29,3939	92,9516	9,52441	6,76157	2714,3	586297	1,15741	864
865	74 82 25	647 214 625	29,4109	93,0054	9,52808	6,76273	2717,5	587655	1,15607	865
866	74 99 56	649 461 896	29,4279	93,0591	9,53175	6,76388	2720,6	589014	1,15473	866
867	75 16 89	651 714 363	29,4449	93,1128	9,53542	6,76504	2723,8	590375	1,15340	867
868	75 34 24	653 972 032	29,4618	93,1665	9,53908	6,76619	2726,9	591738	1,15207	868
869	75 51 61	656 234 909	29,4788	93,2202	9,54274	6,76734	2730,0	593102	1,15075	869
870	75 69 00	658 503 000	29,4958	93,2738	9,54640	6,76849	2733,2	594468	1,14943	870
871	75 86 41	660 776 311	29,5127	93,3274	9,55006	6,76964	2736,3	595835	1,14811	871
872	76 03 84	663 054 848	29,5296	93,3809	9,55371	6,77079	2739,5	597204	1,14679	872
873	76 21 29	665 338 617	29,5466	93,4345	9,55736	6,77194	2742,6	598575	1,14548	873
874	76 38 76	667 627 624	29,5635	93,4880	9,56101	6,77308	2745,8	599947	1,14416	874
875	76 56 25	669 921 875	29,5804	93,5414	9,56466	6,77422	2748,9	601320	1,14286	875
876	76 73 76	672 221 376	29,5973	93,5949	9,56830	6,77537	2752,0	602696	1,14155	876
877	76 91 29	674 526 133	29,6142	93,6483	9,57194	6,77651	2755,2	604073	1,14025	877
878	77 08 84	676 836 152	29,6311	93,7017	9,57557	6,77765	2758,3	605451	1,13895	878
879	77 26 41	679 151 439	29,6479	93,7550	9,57921	6,77878	2761,5	606831	1,13766	879
880	77 44 00	681 472 000	29,6648	93,8083	9,58284	6,77992	2764,6	608212	1,13636	880
881	77 61 61	683 797 841	29,6816	93,8616	9,58647	6,78106	2767,7	609595	1,13507	881
882	77 79 24	686 128 968	29,6985	93,9149	9,59009	6,78219	2770,9	610980	1,13379	882
883	77 96 89	688 465 387	29,7153	93,9681	9,59372	6,78333	2774,0	612366	1,13250	883
884	78 14 56	690 807 104	29,7321	94,0213	9,59734	6,78446	2777,2	613754	1,13122	884
885	78 32 25	693 154 125	29,7489	94,0744	9,60095	6,78559	2780,3	615143	1,12994	885
886	78 49 96	695 506 456	29,7658	94,1276	9,60457	6,78672	2783,5	616534	1,12867	886
887	78 67 69	697 864 103	29,7825	94,1807	9,60818	6,78784	2786,6	617927	1,12740	887
888	78 85 44	700 227 072	29,7993	94,2338	9,61179	6,78897	2789,7	619321	1,12613	888
889	79 03 21	702 595 369	29,8161	94,2868	9,61540	6,79010	2792,9	620717	1,12486	889
890	79 21 00	704 969 000	29,8329	94,3398	9,61900	6,79122	2796,0	622114	1,12360	890
891	79 38 81	707 347 971	29,8496	94,3928	9,62260	6,79234	2799,2	623513	1,12233	891
892	79 56 64	709 732 288	29,8664	94,4458	9,62620	6,79347	2802,3	624913	1,12108	892
893	79 74 49	712 121 957	29,8831	94,4987	9,62980	6,79459	2805,4	626315	1,11982	893
894	79 92 36	714 516 984	29,8998	94,5516	9,63339	6,79571	2808,6	627718	1,11857	894
895	80 10 25	716 917 375	29,9166	94,6044	9,63698	6,79682	2811,7	629124	1,11732	895
896	80 28 16	719 323 136	29,9333	94,6573	9,64057	6,79794	2814,9	630530	1,11607	896
897	80 46 09	721 734 273	29,9500	94,7101	9,64415	6,79906	2818,0	631938	1,11483	897
898	80 64 04	724 150 792	29,9666	94,7629	9,64774	6,80017	2821,2	633348	1,11359	898
899	80 82 01	726 572 699	29,9833	94,8156	9,65132	6,80128	2824,3	634760	1,11235	899
900	81 00 00	729 000 000	30,0000	94,8683	9,65489	6,80239	2827,4	636173	1,11111	900
n	n^2	n^3	\sqrt{n}	$\sqrt{10n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\ln n$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	$\frac{1000}{n}$	n

900 — 950

n	n^2	n^3	\sqrt{n}	$\sqrt{10n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\ln n$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	$\frac{1000}{n}$	n
900	81 00 00	729 000 000	30,0000	94,8683	9,65489	6,80239	2827,4	636173	1,11111	900
901	81 18 01	731 432 701	30,0167	94,9210	9,65847	6,80351	2830,6	637587	1,10988	901
902	81 36 04	733 870 808	30,0333	94,9737	9,66204	6,80461	2833,7	639003	1,10865	902
903	81 54 09	736 314 327	30,0500	95,0263	9,66561	6,80572	2836,9	640421	1,10742	903
904	81 72 16	738 763 264	30,0666	95,0789	9,66918	6,80683	2840,0	641840	1,10619	904
905	81 90 25	741 217 625	30,0832	95,1315	9,67274	6,80793	2843,1	643261	1,10497	905
906	82 08 36	743 677 416	30,0998	95,1840	9,67630	6,80904	2846,3	644683	1,10375	906
907	82 26 49	746 142 643	30,1164	95,2365	9,67986	6,81014	2849,4	646107	1,10254	907
908	82 44 64	748 613 312	30,1330	95,2890	9,68342	6,81124	2852,6	647533	1,10132	908
909	82 62 81	751 089 429	30,1496	95,3415	9,68697	6,81235	2855,7	648960	1,10011	909
910	82 81 00	753 571 000	30,1662	95,3939	9,69052	6,81344	2858,8	650388	1,09890	910
911	82 99 21	756 058 031	30,1828	95,4463	9,69407	6,81454	2862,0	651818	1,09769	911
912	83 17 44	758 550 528	30,1993	95,4987	9,69762	6,81564	2865,1	653250	1,09649	912
913	83 35 69	761 048 497	30,2159	95,5510	9,70116	6,81674	2868,3	654684	1,09529	913
914	83 53 96	763 551 944	30,2324	95,6033	9,70470	6,81783	2871,4	656118	1,09409	914
915	83 72 25	766 060 875	30,2490	95,6556	9,70824	6,81892	2874,6	657555	1,09290	915
916	83 90 56	768 575 296	30,2655	95,7079	9,71177	6,82002	2877,7	658993	1,09170	916
917	84 08 89	771 095 213	30,2820	95,7601	9,71531	6,82111	2880,8	660433	1,09051	917
918	84 27 24	773 620 632	30,2985	95,8123	9,71884	6,82220	2884,0	661874	1,08932	918
919	84 45 61	776 151 559	30,3150	95,8645	9,72236	6,82329	2887,1	663317	1,08814	919
920	84 64 00	778 688 000	30,3315	95,9166	9,72589	6,82437	2890,3	664761	1,08696	920
921	84 82 41	781 229 961	30,3480	95,9687	9,72941	6,82546	2893,4	666207	1,08578	921
922	85 00 84	783 777 448	30,3645	96,0208	9,73293	6,82655	2896,5	667654	1,08460	922
923	85 19 29	786 330 467	30,3809	96,0729	9,73645	6,82763	2899,7	669103	1,08342	923
924	85 37 76	788 889 024	30,3974	96,1249	9,73996	6,82871	2902,8	670554	1,08225	924
925	85 56 25	791 453 125	30,4138	96,1769	9,74348	6,82979	2906,0	672006	1,08108	925
926	85 74 76	794 022 776	30,4302	96,2289	9,74699	6,83087	2909,1	673460	1,07991	926
927	85 93 29	796 597 983	30,4467	96,2808	9,75049	6,83195	2912,3	674915	1,07875	927
928	86 11 84	799 178 752	30,4631	96,3328	9,75400	6,83303	2915,4	676372	1,07759	928
929	86 30 41	801 765 089	30,4795	96,3846	9,75750	6,83411	2918,5	677831	1,07643	929
930	86 49 00	804 357 000	30,4959	96,4365	9,76100	6,83518	2921,7	679291	1,07527	930
931	86 67 61	806 954 491	30,5123	96,4883	9,76450	6,83626	2924,8	680752	1,07411	931
932	86 86 24	809 557 568	30,5287	96,5401	9,76799	6,83733	2928,0	682216	1,07296	932
933	87 04 89	812 166 237	30,5450	96,5919	9,77148	6,83841	2931,1	683680	1,07181	933
934	87 23 56	814 780 504	30,5614	96,6437	9,77497	6,83948	2934,2	685147	1,07066	934
935	87 42 25	817 400 375	30,5778	96,6954	9,77846	6,84055	2937,4	686615	1,06952	935
936	87 60 96	820 025 856	30,5941	96,7471	9,78195	6,84162	2940,5	688084	1,06838	936
937	87 79 69	822 656 953	30,6105	96,7988	9,78543	6,84268	2943,7	689555	1,06724	937
938	87 98 44	825 293 672	30,6268	96,8504	9,78891	6,84375	2946,8	691028	1,06610	938
939	88 17 21	827 936 019	30,6431	96,9020	9,79239	6,84482	2950,0	692502	1,06496	939
940	88 36 00	830 584 000	30,6594	96,9536	9,79586	6,84588	2953,1	693978	1,06383	940
941	88 54 81	833 237 621	30,6757	97,0052	9,79933	6,84694	2956,2	695455	1,06270	941
942	88 73 64	835 896 888	30,6920	97,0567	9,80280	6,84801	2959,4	696934	1,06157	942
943	88 92 49	838 561 807	30,7083	97,1082	9,80627	6,84907	2962,5	698415	1,06045	943
944	89 11 36	841 232 384	30,7246	97,1597	9,80974	6,85013	2965,7	699897	1,05932	944
945	89 30 25	843 908 625	30,7409	97,2111	9,81320	6,85118	2968,8	701380	1,05820	945
946	89 49 16	846 590 536	30,7571	97,2625	9,81666	6,85224	2971,9	702865	1,05708	946
947	89 68 09	849 278 123	30,7734	97,3139	9,82012	6,85330	2975,1	704352	1,05597	947
948	89 87 04	851 971 392	30,7896	97,3653	9,82357	6,85435	2978,2	705840	1,05485	948
949	90 06 01	854 670 349	30,8058	97,4166	9,82703	6,85541	2981,4	707330	1,05374	949
950	90 25 00	857 375 000	30,8221	97,4679	9,83048	6,85646	2984,5	708822	1,05263	950
n	n^2	n^3	\sqrt{n}	$\sqrt{10n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\ln n$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	$\frac{1000}{n}$	n

950 — 1000

n	n^2	n^3	\sqrt{n}	$\sqrt{10n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\ln n$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	$\frac{1000}{n}$	n
950	90 25 00	857 375 000	30,8221	97,4679	9,83048	6,85646	2984,5	708822	1,05263	950
951	90 44 01	860 085 351	30,8383	97,5192	9,83392	6,85751	2987,7	710315	1,05152	951
952	90 63 04	862 801 408	30,8545	97,5705	9,83737	6,85857	2990,8	711809	1,05042	952
953	90 82 09	865 523 177	30,8707	97,6217	9,84081	6,85961	2993,9	713306	1,04932	953
954	91 01 16	868 250 664	30,8869	97,6729	9,84425	6,86066	2997,1	714803	1,04822	954
955	91 20 25	870 983 875	30,9031	97,7241	9,84769	6,86171	3000,2	716303	1,04712	955
956	91 39 36	873 722 816	30,9192	97,7753	9,85113	6,86276	3003,4	717804	1,04603	956
957	91 58 49	876 467 493	30,9354	97,8264	9,85456	6,86380	3006,5	719306	1,04493	957
958	91 77 64	879 217 912	30,9516	97,8775	9,85799	6,86485	3009,6	720810	1,04384	958
959	91 96 81	881 974 079	30,9677	97,9285	9,86142	6,86589	3012,8	722316	1,04275	959
960	92 16 00	884 736 000	30,9839	97,9796	9,86485	6,86693	3015,9	723823	1,04167	960
961	92 35 21	887 503 681	31,0000	98,0306	9,86827	6,86797	3019,1	725332	1,04058	961
962	92 54 44	890 277 128	31,0161	98,0816	9,87169	6,86901	3022,2	726842	1,03950	962
963	92 73 69	893 056 347	31,0322	98,1326	9,87511	6,87005	3025,4	728354	1,03842	963
964	92 92 96	895 841 344	31,0483	98,1835	9,87853	6,87109	3028,5	729867	1,03734	964
965	93 12 25	898 632 125	31,0644	98,2344	9,88195	6,87213	3031,6	731382	1,03627	965
966	93 31 56	901 428 696	31,0805	98,2853	9,88536	6,87316	3034,8	732899	1,03520	966
967	93 50 89	904 231 063	31,0966	98,3362	9,88877	6,87420	3037,9	734417	1,03413	967
968	93 70 24	907 039 232	31,1127	98,3870	9,89217	6,87523	3041,1	735937	1,03306	968
969	93 89 61	909 853 209	31,1288	98,4378	9,89558	6,87626	3044,2	737458	1,03199	969
970	94 09 00	912 673 000	31,1448	98,4886	9,89898	6,87730	3047,3	738981	1,03093	970
971	94 28 41	915 498 611	31,1609	98,5393	9,90238	6,87833	3050,5	740506	1,02987	971
972	94 47 84	918 330 048	31,1769	98,5901	9,90578	6,87936	3053,6	742032	1,02881	972
973	94 67 29	921 167 317	31,1929	98,6408	9,90918	6,88038	3056,8	743559	1,02775	973
974	94 86 76	924 010 424	31,2090	98,6914	9,91257	6,88141	3059,9	745088	1,02669	974
975	95 06 25	926 859 375	31,2250	98,7421	9,91596	6,88244	3063,1	746619	1,02564	975
976	95 25 76	929 714 176	31,2410	98,7927	9,91935	6,88346	3066,2	748151	1,02459	976
977	95 45 29	932 574 833	31,2570	98,8433	9,92274	6,88449	3069,3	749685	1,02354	977
978	95 64 84	935 441 352	31,2730	98,8939	9,92612	6,88551	3072,5	751221	1,02249	978
979	95 84 41	938 313 739	31,2890	98,9444	9,92950	6,88653	3075,6	752758	1,02145	979
980	96 04 00	941 192 000	31,3050	98,9949	9,93288	6,88755	3078,8	754296	1,02041	980
981	96 23 61	944 076 141	31,3209	99,0454	9,93626	6,88857	3081,9	755837	1,01937	981
982	96 43 24	946 966 168	31,3369	99,0959	9,93964	6,88959	3085,0	757378	1,01833	982
983	96 62 89	949 862 087	31,3528	99,1464	9,94301	6,89061	3088,2	758922	1,01729	983
984	96 82 56	952 763 904	31,3688	99,1968	9,94638	6,89163	3091,3	760466	1,01626	984
985	97 02 25	955 671 625	31,3847	99,2472	9,94975	6,89264	3094,5	762013	1,01523	985
986	97 21 96	958 585 256	31,4006	99,2975	9,95311	6,89366	3097,6	763561	1,01420	986
987	97 41 69	961 504 803	31,4166	99,3479	9,95648	6,89467	3100,8	765111	1,01317	987
988	97 61 44	964 430 272	31,4325	99,3982	9,95984	6,89568	3103,9	766662	1,01215	988
989	97 81 21	967 361 669	31,4484	99,4485	9,96320	6,89669	3107,0	768214	1,01112	989
990	98 01 00	970 299 000	31,4643	99,4987	9,96655	6,89770	3110,2	769769	1,01010	990
991	98 20 81	973 242 271	31,4802	99,5490	9,96991	6,89871	3113,3	771325	1,00908	991
992	98 40 64	976 191 488	31,4960	99,5992	9,97326	6,89972	3116,5	772882	1,00806	992
993	98 60 49	979 146 657	31,5119	99,6494	9,97661	6,90073	3119,6	774441	1,00705	993
994	98 80 36	982 107 784	31,5278	99,6995	9,97996	6,90174	3122,7	776002	1,00604	994
995	99 00 25	985 074 875	31,5436	99,7497	9,98331	6,90274	3125,9	777564	1,00503	995
996	99 20 16	988 047 936	31,5595	99,7998	9,98665	6,90375	3129,0	779128	1,00402	996
997	99 40 09	991 026 973	31,5753	99,8499	9,98999	6,90475	3132,2	780693	1,00301	997
998	99 60 04	994 011 992	31,5911	99,9000	9,99333	6,90575	3135,3	782260	1,00200	998
999	99 80 01	997 002 999	31,6070	99,9500	9,99667	6,90675	3138,5	783828	1,00100	999
1000	1 00 00 00	1 000 000 000	31,6228	100,0000	10,00000	6,90776	3141,6	785398	1,00000	1000
n	n^2	n^3	\sqrt{n}	$\sqrt{10n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\ln n$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	$\frac{1000}{n}$	n

Таблица 2. МАНТИССЫ ДЕСЯТИЧНЫХ ЛОГАРИФМОВ ЦЕЛЫХ ЧИСЕЛ ОТ 1 ДО 1000

Для отыскания логарифма четырёхзначного числа следует, не обращая внимания на положение запятой, отыскать по таблицам мантиссу и прибавить к ней характеристику. Характеристика логарифма числа, большего единицы, меньше числа знаков перед запятой на одну единицу; если же число меньше единицы, то характеристика его логарифма равна числу нулей, предшествующих первой значащей цифре (включая и нуль, стоящий перед запятой) со знаком минус (стр. 107).

Так, например:

$$\lg 110,1 = 2 + 0,041\,787 = 2,041\,787;$$

$$\lg 0,01101 = -2 + 0,041\,787 = \bar{2},041\,787 = -1,958\,213.$$

Пользование таблицами логарифмов для вычислений основано на том, что переход от чисел к их логарифмам понижает порядок алгебраических действий (стр. 107), а именно:

$$\lg(a^n) = n \lg a; \lg \sqrt[n]{a} = \frac{1}{n} \lg a;$$

$$\lg(ab) = \lg a + \lg b; \lg \frac{a}{b} = \lg a - \lg b.$$

Если логарифм числа известен, то само число определяется следующим образом: в таблицах отыскивается мантисса, ближайшая к данной, по ней определяется число, которому она соответствует, и в найденном числе ставится запятая так, чтобы число знаков перед запятой было на единицу больше характеристики, если она положительна; если же она отрицательна, то слева приписывается соответствующее количество нулей.

Для отыскания логарифма пятизначного числа и для отыскания числа с пятью значащими цифрами по данному его логарифму в конце каждой страницы даны поправки, основанные на линейной интерполяции (стр. 248). Вычисление логарифма пятизначного числа производится по следующей схеме: находится мантисса логарифма по первым четырём знакам данного числа, вычисляется так называемая табличная разность между этой мантиссой и следующей за ней в таблице и отыскивается

поправка, соответствующая при найденной табличной разности пятому знаку данного числа; прибавив эту поправку к ранее найденной мантиссе, получим искомую мантиссу пятизначного числа.

Пример. Найти мантиссу $\lg 72017$.

Мантисса $\lg 7201$ равна $857\,393$, следующая за ней мантисса 857453 , табличная разность $857453 - 857393 = 60$. Для табличной разности 60 поправка на последний знак данного числа (7) равна 42 и искомая мантисса $857393 + 42 = 857435$.

Если по данной мантиссе логарифма требуется найти число с пятью значащими цифрами, то отыскивают сначала в таблице ближайшую мантиссу, меньшую данной, по ней определяют первые четыре знака искомого числа, далее вычисляют табличную разность между этой мантиссой и следующей за ней, а также разность (поправку) между данной мантиссой и той, которой мы воспользовались для определения первых четырёх знаков искомого числа. Найдя в таблице поправку для вычисленной табличной разности поправку, ближайшую к найденной, слева читаем пятую цифру искомого числа.

Пример. Найти число, если мантисса его логарифма равна $857\,410$.

Найденная по таблицам ближайшая, меньшая данной, мантисса $857\,393$ соответствует числу 7201. Табличная разность $857\,453 - 857\,393 = 60$. Поправка $857\,410 - 857\,393 = 17$. В таблице поправка для табличной разности 60 поправка, ближайшая к найденной (18), соответствует числу 3, которое и является пятой цифрой искомого числа 72013.

На первых страницах по техническим причинам даны поправки не для всех табличных разностей; здесь следует при вычислении поправок пользоваться ближайшей табличной разностью; нужно, однако, иметь в виду, что за шестой знак мантиссы вычисляемого логарифма при этом ручаться нельзя.

Для вычисления мантисс логарифмов шестизначных чисел следует пользоваться более точными интерполяционными формулами (стр. 246).

1 — 99

N	lg	N	lg	N	lg	N	lg	N	lg	N	lg
0	—	17	23 04 49	34	53 14 79	51	70 75 70	68	83 25 09	84	92 42 79
1	00 00 00	18	25 52 73	35	54 40 68	52	71 60 03	69	83 88 49	85	92 94 19
2	30 10 30	19	27 87 54	36	55 63 03	53	72 42 76	70	84 50 98	86	93 44 98
3	47 71 21	20	30 10 30	37	56 82 02	54	73 23 94	71	85 12 58	87	93 95 19
4	60 20 60	21	32 22 19	38	57 97 84	55	74 03 63	72	85 73 32	88	94 44 83
5	69 89 70	22	34 24 23	39	59 10 65	56	74 81 88	73	86 33 23	89	94 93 90
6	77 81 51	23	36 17 28	40	60 20 60	57	75 58 75	74	86 92 32	90	95 42 43
7	84 50 98	24	38 02 11	41	61 27 84	58	76 34 28	75	87 50 61	91	95 90 41
8	90 30 90	25	39 79 40	42	62 32 49	59	77 08 52	76	88 08 14	92	96 37 88
9	95 42 43	26	41 49 73	43	63 34 68	60	77 81 51	77	88 64 91	93	96 84 83
10	00 00 00	27	43 13 64	44	64 34 53	61	78 53 30	78	89 20 95	94	97 31 28
11	04 13 93	28	44 71 58	45	65 32 13	62	79 23 92	79	89 76 27	95	97 77 24
12	07 91 81	29	46 23 98	46	66 27 58	63	79 93 41	80	90 30 90	96	98 22 71
13	11 39 43	30	47 71 21	47	67 20 98	64	80 61 80	81	90 84 85	97	98 67 72
14	14 61 28	31	49 13 62	48	68 12 41	65	81 29 13	82	91 38 14	98	99 12 26
15	17 60 91	32	50 51 50	49	69 01 96	66	81 95 44	83	91 90 78	99	99 56 35
16	20 41 20	33	51 85 14	50	69 89 70	67	82 60 75				
N	lg	N	lg	N	lg	N	lg	N	lg	N	lg

100—150

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
100	00 00 00	04 34	08 68	13 01	17 34	21 66	25 98	30 29	34 61	38 91
101	43 21	47 51	51 81	56 09	60 38	64 66	68 94	73 21	77 48	81 74
102	86 00	90 26	94 51	98 76	*03 00	*07 24	*11 47	*15 70	*19 93	*24 15
103	01 28 37	32 59	36 80	41 00	45 21	49 40	53 60	57 79	61 97	66 16
104	70 33	74 51	78 68	82 84	87 00	91 16	95 32	99 47	*03 61	*07 75
105	02 11 89	16 03	20 16	24 28	28 41	32 52	36 64	40 75	44 86	48 96
106	53 06	57 15	61 25	65 33	69 42	73 50	77 57	81 64	85 71	89 78
107	93 84	97 89	*01 95	*06 00	*10 04	*14 08	*18 12	*22 16	*26 19	*30 21
108	03 34 24	38 26	42 27	46 28	50 29	54 30	58 30	62 30	66 29	70 28
109	74 26	78 25	82 23	86 20	90 17	94 14	98 11	*02 07	*06 02	*09 98
110	04 13 93	17 87	21 82	25 76	29 69	33 62	37 55	41 48	45 40	49 32
111	53 23	57 14	61 05	64 95	68 85	72 75	76 64	80 53	84 42	88 30
112	92 18	96 06	99 93	*03 80	*07 66	*11 53	*15 38	*19 24	*23 09	*26 94
113	05 30 78	34 63	38 46	42 30	46 13	49 96	53 78	57 60	61 42	65 24
114	69 05	72 86	76 66	80 46	84 26	88 05	91 85	95 63	99 42	*03 20
115	06 06 98	10 75	14 52	18 29	22 06	25 82	29 58	33 33	37 09	40 83
116	44 58	48 32	52 06	55 80	59 53	63 26	66 99	70 71	74 43	78 15
117	81 86	85 57	89 28	92 98	96 68	*00 38	*04 07	*07 76	*11 45	*15 14
118	07 18 82	22 50	26 17	29 85	33 52	37 18	40 85	44 51	48 16	51 82
119	55 47	59 12	62 76	66 40	70 04	73 68	77 31	80 94	84 57	88 19
120	91 81	95 43	99 04	*02 66	*06 26	*09 87	*13 47	*17 07	*20 67	*24 26
121	08 27 85	31 44	35 03	38 61	42 19	45 76	49 34	52 91	56 47	60 04
122	63 60	67 16	70 71	74 26	77 81	81 36	84 90	88 45	91 98	95 52
123	99 05	*02 58	*06 11	*09 63	*13 15	*16 67	*20 18	*23 70	*27 21	*30 71
124	09 34 22	37 72	41 22	44 71	48 20	51 69	55 18	58 66	62 15	65 62
125	69 10	72 57	76 04	79 51	82 98	86 44	89 90	93 35	96 81	*00 26
126	10 03 71	07 15	10 59	14 03	17 47	20 91	24 34	27 77	31 19	34 62
127	38 04	41 46	44 87	48 28	51 69	55 10	58 51	61 91	65 31	68 71
128	72 10	75 49	78 88	82 27	85 65	89 03	92 41	95 79	99 16	*02 53
129	11 05 90	09 26	12 63	15 99	19 34	22 70	26 05	29 40	32 75	36 09
130	39 43	42 77	46 11	49 44	52 78	56 11	59 43	62 76	66 08	69 40
131	72 71	76 03	79 34	82 65	85 95	89 26	92 56	95 86	99 15	*02 45
132	12 05 74	09 03	12 31	15 60	18 88	22 16	25 44	28 71	31 98	35 25
133	38 52	41 78	45 04	48 30	51 56	54 81	58 06	61 31	64 56	67 81
134	71 05	74 29	77 53	80 76	83 99	87 22	90 45	93 68	96 90	*00 12
135	13 03 34	06 55	09 77	12 98	16 19	19 39	22 60	25 80	29 00	32 19
136	35 39	38 58	41 77	44 96	48 14	51 33	54 51	57 69	60 86	64 03
137	67 21	70 37	73 54	76 71	79 87	83 03	86 18	89 34	92 49	95 64
138	98 79	*01 94	*05 08	*08 22	*11 36	*14 50	*17 63	*20 76	*23 89	*27 02
139	14 30 15	33 27	36 39	39 51	42 63	45 74	48 85	51 96	55 07	58 18
140	61 28	64 38	67 48	70 58	73 67	76 76	79 85	82 94	86 03	89 11
141	92 19	95 27	98 35	*01 42	*04 49	*07 56	*10 63	*13 70	*16 76	*19 82
142	15 22 88	25 94	29 00	32 05	35 10	38 15	41 20	44 24	47 28	50 32
143	53 36	56 40	59 43	62 46	65 49	68 52	71 54	74 57	77 59	80 61
144	83 62	86 64	89 65	92 66	95 67	98 68	*01 68	*04 69	*07 69	*10 68
145	16 13 68	16 67	19 67	22 66	25 64	28 63	31 61	34 60	37 58	40 55
146	43 53	46 50	49 47	52 44	55 41	58 38	61 34	64 30	67 26	70 22
147	73 17	76 13	79 08	82 03	84 97	87 92	90 86	93 80	96 74	99 68
148	17 02 62	05 55	08 48	11 41	14 34	17 26	20 19	23 11	26 03	28 95
149	31 86	34 78	37 69	40 60	43 51	46 41	49 32	52 22	55 12	58 02
150	60 91	63 81	66 70	69 59	72 48	75 36	78 25	81 13	84 01	86 89

P.P.	430	420	410	400	390	380	370	360	350	340	330	320	310	300	290
1	43,0	42,0	41,0	40,0	39,0	38,0	37,0	36,0	35,0	34,0	33,0	32,0	31,0	30,0	29,0
2	86,0	84,0	82,0	80,0	78,0	76,0	74,0	72,0	70,0	68,0	66,0	64,0	62,0	60,0	58,0
3	129,0	126,0	123,0	120,0	117,0	114,0	111,0	108,0	105,0	102,0	99,0	96,0	93,0	90,0	87,0
4	172,0	168,0	164,0	160,0	156,0	152,0	148,0	144,0	140,0	136,0	132,0	128,0	124,0	120,0	116,0
5	215,0	210,0	205,0	200,0	195,0	190,0	185,0	180,0	175,0	170,0	165,0	160,0	155,0	150,0	145,0
6	258,0	252,0	246,0	240,0	234,0	228,0	222,0	216,0	210,0	204,0	198,0	192,0	186,0	180,0	174,0
7	301,0	294,0	287,0	280,0	273,0	266,0	259,0	252,0	245,0	238,0	231,0	224,0	217,0	210,0	203,0
8	344,0	336,0	328,0	320,0	312,0	304,0	296,0	288,0	280,0	272,0	264,0	256,0	248,0	240,0	232,0
9	387,0	378,0	369,0	360,0	351,0	342,0	333,0	324,0	315,0	306,0	297,0	288,0	279,0	270,0	261,0

151—200

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
151	17 89 77	92 64	95 52	98 39	*01 26	*04 13	*06 99	*09 86	*12 72	*15 58
152	18 18 44	21 29	24 15	27 00	29 85	32 70	35 55	38 39	41 23	44 07
153	46 91	49 75	52 59	55 42	58 25	61 08	63 91	66 74	69 56	72 39
154	75 21	78 03	80 84	83 66	86 47	89 28	92 09	94 90	97 71	*00 51
155	19 03 32	06 12	08 92	11 71	14 51	17 30	20 10	22 89	25 67	28 46
156	31 25	34 03	36 81	39 59	42 37	45 14	47 92	50 69	53 46	56 23
157	59 00	61 76	64 53	67 29	70 05	72 81	75 56	78 32	81 07	83 82
158	86 57	89 32	92 06	94 81	97 55	*00 29	*03 03	*05 77	*08 50	*11 24
159	20 13 97	16 70	19 43	22 16	24 88	27 61	30 33	33 05	35 77	38 48
160	41 20	43 91	46 63	49 34	52 04	54 75	57 46	60 16	62 86	65 56
161	68 26	70 96	73 65	76 34	79 04	81 73	84 41	87 10	89 79	92 47
162	95 15	97 83	*00 51	*03 19	*05 86	*08 53	*11 21	*13 88	*16 54	*19 21
163	21 21 88	24 54	27 20	29 86	32 52	35 18	37 83	40 49	43 14	45 79
164	48 44	51 09	53 73	56 38	59 02	61 66	64 30	66 94	69 57	72 21
165	74 84	77 47	80 10	82 73	85 36	87 98	90 60	93 23	95 85	98 46
166	22 01 08	03 70	06 31	08 92	11 53	14 14	16 75	19 36	21 96	24 56
167	27 16	29 76	32 36	34 96	37 55	40 15	42 74	45 33	47 92	50 51
168	53 09	55 68	58 26	60 84	63 42	66 00	68 58	71 15	73 72	76 30
169	78 87	81 44	84 00	86 57	89 13	91 70	94 26	96 82	99 38	*01 93
170	23 04 49	07 04	09 60	12 15	14 70	17 24	19 79	22 34	24 88	27 42
171	29 96	32 50	35 04	37 57	40 11	42 64	45 17	47 70	50 23	52 76
172	55 28	57 81	60 33	62 85	65 37	67 89	70 41	72 92	75 44	77 95
173	80 46	82 97	85 48	87 99	90 49	92 99	95 50	98 00	*00 50	*03 00
174	24 05 49	07 99	10 48	12 97	15 46	17 95	20 44	22 93	25 41	27 90
175	30 38	32 86	35 34	37 82	40 30	42 77	45 25	47 72	50 19	52 66
176	55 13	57 59	60 06	62 52	64 99	67 45	69 91	72 37	74 82	77 28
177	79 73	82 19	84 64	87 09	89 54	91 98	94 43	96 87	99 32	*01 76
178	25 04 20	06 64	09 08	11 51	13 95	16 38	18 81	21 25	23 68	26 10
179	28 53	30 96	33 38	35 80	38 22	40 64	43 06	45 48	47 90	50 31
180	52 73	55 14	57 55	59 96	62 37	64 77	67 18	69 58	71 98	74 39
181	76 79	79 18	81 58	83 98	86 37	88 77	91 16	93 55	95 94	98 33
182	26 00 71	03 10	05 48	07 87	10 25	12 63	15 01	17 39	19 76	22 14
183	24 51	26 88	29 25	31 62	33 99	36 36	38 73	41 09	43 46	45 82
184	48 18	50 54	52 90	55 25	57 61	59 96	62 32	64 67	67 02	69 37
185	71 72	74 06	76 41	78 75	81 10	83 44	85 78	88 12	90 46	92 79
186	95 13	97 46	99 80	*02 13	*04 46	*06 79	*09 12	*11 44	*13 77	*16 09
187	27 18 42	20 74	23 06	25 38	27 70	30 01	32 33	34 64	36 96	39 27
188	41 58	43 89	46 20	48 50	50 81	53 11	55 42	57 72	60 02	62 32
189	64 62	66 92	69 21	71 51	73 80	76 09	78 38	80 67	82 96	85 25
190	87 54	89 82	92 11	94 39	96 67	98 95	*01 23	*03 51	*05 78	*08 06
191	28 10 33	12 61	14 88	17 15	19 42	21 69	23 96	26 22	28 49	30 75
192	33 01	35 27	37 53	39 79	42 05	44 31	46 56	48 82	51 07	53 32
193	55 57	57 82	60 07	62 32	64 56	66 81	69 05	71 30	73 54	75 78
194	78 02	80 26	82 49	84 73	86 96	89 20	91 43	93 66	95 89	98 12
195	29 00 35	02 57	04 80	07 02	09 25	11 47	13 69	15 91	18 13	20 34
196	22 56	24 78	26 99	29 20	31 41	33 63	35 84	38 04	40 25	42 46
197	44 66	46 87	49 07	51 27	53 47	55 67	57 87	60 07	62 26	64 46
198	66 65	68 84	71 04	73 23	75 42	77 61	79 79	81 98	84 16	86 35
199	88 53	90 71	92 89	95 07	97 25	99 43	*01 61	*03 78	*05 95	*08 13
200	30 10 30	12 47	14 64	16 81	18 98	21 14	23 31	25 47	27 64	29 80

P. P.	290	285	280	275	270	265	260	255	250	245	240	235	230	225	220	215
1	29,0	28,5	28,0	27,5	27,0	26,5	26,0	25,5	25,0	24,5	24,0	23,5	23,0	22,5	22,0	21,5
2	58,0	57,0	56,0	55,0	54,0	53,0	52,0	51,0	50,0	49,0	48,0	47,0	46,0	45,0	44,0	43,0
3	87,0	85,5	84,0	82,5	81,0	79,5	78,0	76,5	75,0	73,5	72,0	70,5	69,0	67,5	66,0	64,5
4	116,0	114,0	112,0	110,0	108,0	106,0	104,0	102,0	100,0	98,0	96,0	94,0	92,0	90,0	88,0	86,0
5	145,0	142,5	140,0	137,5	135,0	132,5	130,0	127,5	125,0	122,5	120,0	117,5	115,0	112,5	110,0	107,5
6	174,0	171,0	168,0	165,0	162,0	159,0	156,0	153,0	150,0	147,0	144,0	141,0	138,0	135,0	132,0	129,0
7	203,0	199,5	196,0	192,5	189,0	185,5	182,0	178,5	175,0	171,5	168,0	164,5	161,0	157,5	154,0	150,5
8	232,0	228,0	224,0	220,0	216,0	212,0	208,0	204,0	200,0	196,0	192,0	188,0	184,0	180,0	176,0	172,0
9	261,0	256,5	252,0	247,5	243,0	238,5	234,0	229,5	225,0	220,5	216,0	211,5	207,0	202,5	198,0	193,5

201—250

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
201	30 31 96	34 12	36 28	38 44	40 59	42 75	44 91	47 06	49 21	51 36
202	53 51	55 66	57 81	59 96	62 11	64 25	66 39	68 54	70 68	72 82
203	74 96	77 10	79 24	81 37	83 51	85 64	87 78	89 91	92 04	94 17
204	96 30	98 43	*00 56	*02 68	*04 81	*06 93	*09 06	*11 18	*13 30	*15 42
205	31 17 54	19 66	21 77	23 89	26 00	28 12	30 23	32 34	34 45	36 56
206	38 67	40 78	42 89	44 99	47 10	49 20	51 30	53 40	55 51	57 60
207	59 70	61 80	63 90	65 99	68 09	70 18	72 27	74 36	76 46	78 54
208	80 63	82 72	84 81	86 89	88 98	91 06	93 14	95 22	97 30	99 38
209	32 01 46	03 54	05 62	07 69	09 77	11 84	13 91	15 98	18 05	20 12
210	22 19	24 26	26 33	28 39	30 46	32 52	34 58	36 65	38 71	40 77
211	42 82	44 88	46 94	48 99	51 05	53 10	55 16	57 21	59 26	61 31
212	63 36	65 41	67 45	69 50	71 55	73 59	75 63	77 67	79 72	81 76
213	83 80	85 83	87 87	89 91	91 94	93 98	96 01	98 05	*00 08	*02 11
214	33 04 14	06 17	08 19	10 22	12 25	14 27	16 30	18 32	20 34	22 36
215	24 38	26 40	28 42	30 44	32 46	34 47	36 49	38 50	40 51	42 53
216	44 54	46 55	48 56	50 57	52 57	54 58	56 58	58 59	60 59	62 60
217	64 60	66 60	68 60	70 60	72 60	74 59	76 59	78 58	80 58	82 57
218	84 56	86 56	88 55	90 54	92 53	94 51	96 50	98 49	*00 47	*02 46
219	34 04 44	06 42	08 41	10 39	12 37	14 35	16 32	18 30	20 28	22 25
220	24 23	26 20	28 17	30 14	32 12	34 09	36 06	38 02	39 99	41 96
221	43 92	45 89	47 85	49 81	51 78	53 74	55 70	57 66	59 62	61 57
222	63 53	65 49	67 44	69 39	71 35	73 30	75 25	77 20	79 15	81 10
223	83 05	85 00	86 94	88 89	90 83	92 78	94 72	96 66	98 60	*00 54
224	35 02 48	04 42	06 36	08 29	10 23	12 16	14 10	16 03	17 96	19 89
225	21 83	23 75	25 68	27 61	29 54	31 47	33 39	35 32	37 24	39 16
226	41 08	43 01	44 93	46 85	48 76	50 68	52 60	54 52	56 43	58 34
227	60 26	62 17	64 08	65 99	67 90	69 81	71 72	73 63	75 54	77 44
228	79 35	81 25	83 16	85 06	86 96	88 86	90 76	92 66	94 56	96 46
229	98 35	*00 25	*02 15	*04 04	*05 93	*07 83	*09 72	*11 61	*13 50	*15 39
230	36 17 28	19 17	21 05	22 94	24 82	26 71	28 59	30 48	32 36	34 24
231	36 12	38 00	39 88	41 76	43 63	45 51	47 39	49 26	51 13	53 01
232	54 88	56 75	58 62	60 49	62 36	64 23	66 10	67 96	69 83	71 69
233	73 56	75 42	77 29	79 15	81 01	82 87	84 73	86 59	88 45	90 30
234	92 16	94 01	95 87	97 72	99 58	*01 43	*03 28	*05 13	*06 98	*08 83
235	37 10 68	12 53	14 37	16 22	18 06	19 91	21 75	23 60	25 44	27 28
236	29 12	30 96	32 80	34 64	36 47	38 31	40 15	41 98	43 82	45 65
237	47 48	49 32	51 15	52 98	54 81	56 64	58 46	60 29	62 12	63 94
238	65 77	67 59	69 42	71 24	73 06	74 88	76 70	78 52	80 34	82 16
239	83 98	85 80	87 61	89 43	91 24	93 06	94 87	96 68	98 49	*00 30
240	38 02 11	03 92	05 73	07 54	09 34	11 15	12 96	14 76	16 56	18 37
241	20 17	21 97	23 77	25 57	27 37	29 17	30 97	32 77	34 56	36 36
242	38 15	39 95	41 74	43 53	45 33	47 12	48 91	50 70	52 49	54 28
243	56 06	57 85	59 64	61 42	63 21	64 99	66 77	68 56	70 34	72 12
244	73 90	75 68	77 46	79 23	81 01	82 79	84 56	86 34	88 11	89 89
245	91 66	93 43	95 20	96 98	98 75	*00 51	*02 28	*04 05	*05 82	*07 59
246	39 09 35	11 12	12 88	14 64	16 41	18 17	19 93	21 69	23 45	25 21
247	26 97	28 73	30 48	32 24	34 00	35 75	37 51	39 26	41 01	42 77
248	44 52	46 27	48 02	49 77	51 52	53 26	55 01	56 76	58 50	60 25
249	61 99	63 74	65 48	67 22	68 96	70 71	72 45	74 19	75 92	77 66
250	79 40	81 14	82 87	84 61	86 34	88 08	89 81	91 54	93 28	95 01

P. P.	215	210	205	200	195	190	185	180	178	176	174	172	170
1	21,5	21,0	20,5	20,0	19,5	19,0	18,5	18,0	17,8	17,6	17,4	17,2	17,0
2	43,0	42,0	41,0	40,0	39,0	38,0	37,0	36,0	35,6	35,2	34,8	34,4	34,0
3	64,5	63,0	61,5	60,0	58,5	57,0	55,5	54,0	53,4	52,8	52,2	51,6	51,0
4	86,0	84,0	82,0	80,0	78,0	76,0	74,0	72,0	71,2	70,4	69,6	68,8	68,0
5	107,5	105,0	102,5	100,0	97,5	95,0	92,5	90,0	89,0	88,0	87,0	86,0	85,0
6	129,0	126,0	123,0	120,0	117,0	114,0	111,0	108,0	106,8	105,6	104,4	103,2	102,0
7	150,5	147,0	143,5	140,0	136,5	133,0	129,5	126,0	124,6	123,2	121,8	120,4	119,0
8	172,0	168,0	164,0	160,0	156,0	152,0	148,0	144,0	142,4	140,8	139,2	137,6	136,0
9	193,5	189,0	184,5	180,0	175,5	171,0	166,5	162,0	160,2	158,4	156,6	154,8	153,0

251—300

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
251	39 96 74	98 47	*00 20	*01 92	*03 65	*05 38	*07 11	*08 83	*10 56	*12 28
252	40 14 01	15 73	17 45	19 17	20 89	22 61	24 33	26 05	27 77	29 49
253	31 21	32 92	34 64	36 35	38 07	39 78	41 49	43 20	44 92	46 63
254	48 34	50 05	51 76	53 46	55 17	56 88	58 58	60 29	61 99	63 70
255	65 40	67 10	68 81	70 51	72 21	73 91	75 61	77 31	79 01	80 70
256	82 40	84 10	85 79	87 49	89 18	90 87	92 57	94 26	95 95	97 64
257	99 33	*01 02	*02 71	*04 40	*06 09	*07 77	*09 46	*11 14	*12 83	*14 51
258	41 16 20	17 88	19 56	21 24	22 93	24 61	26 29	27 96	29 64	31 32
259	33 00	34 67	36 35	38 03	39 70	41 37	43 05	44 72	46 39	48 06
260	49 73	51 40	53 07	54 74	56 41	58 08	59 74	61 41	63 08	64 74
261	66 41	68 07	69 73	71 39	73 06	74 72	76 38	78 04	79 70	81 35
262	83 01	84 67	86 33	87 98	89 64	91 29	92 95	94 60	96 25	97 91
263	99 56	*01 21	*02 86	*04 51	*06 16	*07 81	*09 45	*11 10	*12 75	*14 39
264	42 16 04	17 68	19 33	20 97	22 61	24 26	25 90	27 54	29 18	30 82
265	32 46	34 10	35 74	37 37	39 01	40 65	42 28	43 92	45 55	47 18
266	48 82	50 45	52 08	53 71	55 34	56 97	58 60	60 23	61 86	63 49
267	65 11	66 74	68 36	69 99	71 61	73 24	74 86	76 48	78 11	79 73
268	81 35	82 97	84 59	86 21	87 83	89 44	91 06	92 68	94 29	95 91
269	97 52	99 14	*00 75	*02 36	*03 98	*05 59	*07 20	*08 81	*10 42	*12 03
270	43 13 64	15 25	16 85	18 46	20 07	21 67	23 28	24 88	26 49	28 09
271	29 69	31 30	32 90	34 50	36 10	37 70	39 30	40 90	42 49	44 09
272	45 69	47 29	48 88	50 48	52 07	53 67	55 26	56 85	58 44	60 04
273	61 63	63 22	64 81	66 40	67 99	69 57	71 16	72 75	74 33	75 92
274	77 51	79 09	80 67	82 26	83 84	85 42	87 01	88 59	90 17	91 75
275	93 33	94 91	96 48	98 06	99 64	*01 22	*02 79	*04 37	*05 94	*07 52
276	44 09 09	10 66	12 24	13 81	15 38	16 95	18 52	20 09	21 66	23 23
277	24 80	26 37	27 93	29 50	31 06	32 63	34 19	35 76	37 32	38 89
278	40 45	42 01	43 57	45 13	46 69	48 25	49 81	51 37	52 93	54 49
279	56 04	57 60	59 15	60 71	62 26	63 82	65 37	66 92	68 48	70 03
280	71 58	73 13	74 68	76 23	77 78	79 33	80 88	82 42	83 97	85 52
281	87 06	88 61	90 15	91 70	93 24	94 78	96 33	97 87	99 41	*00 95
282	45 02 49	04 03	05 57	07 11	08 65	10 18	11 72	13 26	14 79	16 33
283	17 86	19 40	20 93	22 47	24 00	25 53	27 06	28 59	30 12	31 65
284	33 18	34 71	36 24	37 77	39 30	40 82	42 35	43 87	45 40	46 92
285	48 45	49 97	51 50	53 02	54 54	56 06	57 58	59 10	60 62	62 14
286	63 66	65 18	66 70	68 21	69 73	71 25	72 76	74 28	75 79	77 31
287	78 82	80 33	81 84	83 36	84 87	86 38	87 89	89 40	90 91	92 42
288	93 92	95 43	96 94	98 45	99 95	*01 46	*02 96	*04 47	*05 97	*07 48
289	46 08 98	10 48	11 98	13 48	14 99	16 49	17 99	19 48	20 98	22 48
290	23 98	25 48	26 97	28 47	29 97	31 46	32 96	34 45	35 94	37 44
291	38 93	40 42	41 91	43 40	44 90	46 39	47 88	49 36	50 85	52 34
292	53 83	55 32	56 80	58 29	59 77	61 26	62 74	64 23	65 71	67 19
293	68 68	70 16	71 64	73 12	74 60	76 08	77 56	79 04	80 52	82 00
294	83 47	84 95	86 43	87 90	89 38	90 85	92 33	93 80	95 27	96 75
295	98 22	99 69	*01 16	*02 63	*04 10	*05 57	*07 04	*08 51	*09 98	*11 45
296	47 12 92	14 38	15 85	17 32	18 78	20 25	21 71	23 18	24 64	26 10
297	27 56	29 03	30 49	31 95	33 41	34 87	36 33	37 79	39 25	40 71
298	42 16	43 62	45 08	46 53	47 99	49 44	50 90	52 35	53 81	55 26
299	56 71	58 16	59 62	61 07	62 52	63 97	65 42	66 87	68 32	69 76
300	71 21	72 66	74 11	75 55	77 00	78 44	79 89	81 33	82 78	84 22

P. P.	174	172	170	168	166	164	162	160	158	156	154	152	150	148	146	144
1	17,4	17,2	17,0	16,8	16,6	16,4	16,2	16,0	15,8	15,6	15,4	15,2	15,0	14,8	14,6	14,4
2	34,8	34,4	34,0	33,6	33,2	32,8	32,4	32,0	31,6	31,2	30,8	30,4	30,0	29,6	29,2	28,8
3	52,2	51,6	51,0	50,4	49,8	49,2	48,6	48,0	47,4	46,8	46,2	45,6	45,0	44,4	43,8	43,2
4	69,6	68,8	68,0	67,2	66,4	65,6	64,8	64,0	63,2	62,4	61,6	60,8	60,0	59,2	58,4	57,6
5	87,0	86,0	85,0	84,0	83,0	82,0	81,0	80,0	79,0	78,0	77,0	76,0	75,0	74,0	73,0	72,0
6	104,4	103,2	102,0	100,8	99,6	98,4	97,2	96,0	94,8	93,6	92,4	91,2	90,0	88,8	87,6	86,4
7	121,8	120,4	119,0	117,6	116,2	114,8	113,4	112,0	110,6	109,2	107,8	106,4	105,0	103,6	102,2	100,8
8	139,2	137,6	136,0	134,4	132,8	131,2	129,6	128,0	126,4	124,8	123,2	121,6	120,0	118,4	116,8	115,2
9	156,6	154,8	153,0	151,2	149,4	147,6	145,8	144,0	142,2	140,4	138,6	136,8	135,0	133,2	131,4	129,6

301—350

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
301	47 85 66	87 11	88 55	89 99	91 43	92 87	94 31	95 75	97 19	98 63
302	48 00 07	01 51	02 94	04 38	05 82	07 25	08 69	10 12	11 56	12 99
303	14 43	15 86	17 29	18 72	20 16	21 59	23 02	24 45	25 88	27 31
304	28 74	30 16	31 59	33 02	34 45	35 87	37 30	38 72	40 15	41 57
305	43 00	44 42	45 85	47 27	48 69	50 11	51 53	52 95	54 37	55 79
306	57 21	58 63	60 05	61 47	62 89	64 39	65 72	67 14	68 55	69 97
307	71 38	72 80	74 21	75 63	77 04	78 45	79 86	81 27	82 69	84 10
308	85 51	86 92	88 33	89 74	91 14	92 55	93 96	95 37	96 77	98 18
309	99 58	*00 99	*02 39	*03 80	*05 20	*06 61	*08 01	*09 41	*10 81	*12 22
310	49 13 62	15 02	16 42	17 82	19 22	20 62	22 01	23 41	24 81	26 21
311	27 60	29 00	30 40	31 79	33 19	34 58	35 97	37 37	38 76	40 15
312	41 55	42 94	44 33	45 72	47 11	48 50	49 89	51 28	52 67	54 06
313	55 44	56 83	58 22	59 60	60 99	62 38	63 76	65 15	66 53	67 91
314	69 30	70 68	72 06	73 44	74 83	76 21	77 59	78 97	80 35	81 73
315	83 11	84 48	85 86	87 24	88 62	89 99	91 37	92 75	94 12	95 50
316	96 87	98 24	99 62	*00 99	*02 36	*03 74	*05 11	*06 48	*07 85	*09 22
317	50 10 59	11 96	13 33	14 70	16 07	17 44	18 80	20 17	21 54	22 91
318	24 27	25 64	27 00	28 37	29 73	31 09	32 46	33 82	35 18	36 55
319	37 91	39 27	40 63	41 99	43 35	44 71	46 07	47 43	48 78	50 14
320	51 50	52 86	54 21	55 57	56 93	58 28	59 64	60 99	62 34	63 70
321	65 05	66 40	67 76	69 11	70 46	71 81	73 16	74 51	75 86	77 21
322	78 56	79 91	81 26	82 60	83 95	85 30	86 64	87 99	89 34	90 68
323	92 03	93 37	94 71	96 06	97 40	98 74	*00 09	*01 43	*02 77	*04 11
324	51 05 45	06 79	08 13	09 47	10 81	12 15	13 49	14 82	16 16	17 50
325	18 83	20 17	21 51	22 84	24 18	25 51	26 84	28 18	29 51	30 84
326	32 18	33 51	34 84	36 17	37 50	38 83	40 16	41 49	42 82	44 15
327	45 48	46 81	48 13	49 46	50 79	52 11	53 44	54 76	56 09	57 41
328	58 74	60 06	61 39	62 71	64 03	65 35	66 68	68 00	69 32	70 64
329	71 96	73 28	74 60	75 92	77 24	78 55	79 87	81 19	82 51	83 82
330	85 14	86 46	87 77	89 09	90 40	91 71	93 03	94 34	95 66	96 97
331	98 28	99 59	*00 90	*02 21	*03 53	*04 84	*06 15	*07 45	*08 76	*10 07
332	52 11 38	12 69	14 00	15 30	16 61	17 92	19 22	20 53	21 83	23 14
333	24 44	25 75	27 05	28 35	29 66	30 96	32 26	33 56	34 86	36 16
334	37 46	38 76	40 06	41 36	42 66	43 96	45 26	46 56	47 85	49 15
335	50 45	51 74	53 04	54 34	55 63	56 93	58 22	59 51	60 81	62 10
336	63 39	64 69	65 98	67 27	68 56	69 85	71 14	72 43	73 72	75 01
337	76 30	77 59	78 88	80 16	81 45	82 74	84 02	85 31	86 60	87 88
338	89 17	90 45	91 74	93 02	94 30	95 59	96 87	98 15	99 43	*00 72
339	53 02 00	03 28	04 56	05 84	07 12	08 40	09 68	10 96	12 23	13 51
340	14 79	16 07	17 34	18 62	19 90	21 17	22 45	23 72	25 00	26 27
341	27 54	28 82	30 09	31 36	32 64	33 91	35 18	36 45	37 72	38 99
342	40 26	41 53	42 80	44 07	45 34	46 61	47 87	49 14	50 41	51 67
343	52 94	54 21	55 47	56 74	58 00	59 27	60 53	61 80	63 06	64 32
344	65 58	66 85	68 11	69 37	70 63	71 89	73 15	74 41	75 67	76 93
345	78 19	79 45	80 71	81 97	83 22	84 48	85 74	86 99	88 25	89 51
346	90 76	92 02	93 27	94 52	95 78	97 03	98 29	99 54	*00 79	*02 04
347	54 03 29	04 55	05 80	07 05	08 30	09 55	10 80	12 05	13 30	14 54
348	15 79	17 04	18 29	19 53	20 78	22 03	23 27	24 52	25 76	27 01
349	28 25	29 50	30 74	31 99	33 23	34 47	35 71	36 96	38 20	39 44
350	40 68	41 92	43 16	44 40	45 64	46 88	48 12	49 36	50 60	51 83

P. P.	146	144	142	140	138	136	134	132	130	129	128	127	126	125	124	123
1	14,6	14,4	14,2	14,0	13,8	13,6	13,4	13,2	13,0	12,9	12,8	12,7	12,6	12,5	12,4	12,3
2	29,2	28,8	28,4	28,0	27,6	27,2	26,8	26,4	26,0	25,8	25,6	25,4	25,2	25,0	24,8	24,6
3	43,8	43,2	42,6	42,0	41,4	40,8	40,2	39,6	39,0	38,7	38,4	38,1	37,8	37,5	37,2	36,9
4	58,4	57,6	56,8	56,0	55,2	54,4	53,6	52,8	52,0	51,6	51,2	50,8	50,4	50,0	49,6	49,2
5	73,0	72,0	71,0	70,0	69,0	68,0	67,0	66,0	65,0	64,5	64,0	63,5	63,0	62,5	62,0	61,5
6	87,6	86,4	85,2	84,0	82,8	81,6	80,4	79,2	78,8	77,4	76,8	76,2	75,6	75,0	74,4	73,8
7	102,2	100,8	99,4	98,0	96,6	95,2	93,8	92,4	91,0	90,3	89,6	88,9	88,2	87,5	86,8	86,1
8	116,8	115,2	113,6	112,0	110,4	108,8	107,2	105,6	104,0	103,2	102,4	101,6	100,8	100,0	99,2	98,4
9	131,4	129,6	127,8	126,0	124,2	122,4	120,6	118,8	117,0	116,1	115,2	114,3	113,4	112,5	111,6	110,7

351—400

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
351	54 53 07	54 31	55 55	56 78	58 02	59 25	60 49	61 72	62 96	64 19
352	05 43	66 66	67 89	69 13	70 36	71 59	72 82	74 05	75 29	76 52
353	77 75	78 98	80 21	81 44	82 67	83 89	85 12	86 35	87 58	88 81
354	90 03	91 26	92 49	93 71	94 94	96 16	97 39	98 61	99 84	*01 06
355	55 02 28	03 51	04 73	05 95	07 17	08 40	09 62	10 84	12 06	13 28
356	14 50	15 72	16 94	18 16	19 38	20 60	21 81	23 03	24 25	25 47
357	26 68	27 90	29 11	30 33	31 55	32 76	33 98	35 19	36 40	37 62
358	38 83	40 04	41 26	42 47	43 68	44 89	46 10	47 31	48 52	49 73
359	50 94	52 15	53 36	54 57	55 78	56 99	58 20	59 40	60 61	61 82
360	63 03	64 23	65 44	66 64	67 85	69 05	70 26	71 46	72 67	73 87
361	75 07	76 27	77 48	78 68	79 88	81 08	82 28	83 49	84 69	85 89
362	87 09	88 29	89 48	90 68	91 88	93 08	94 28	95 48	96 67	97 87
363	99 07	*00 26	*01 46	*02 65	*03 85	*05 04	*06 24	*07 43	*08 63	*09 82
364	56 11 01	12 21	13 40	14 59	15 78	16 98	18 17	19 36	20 55	21 74
365	22 93	24 12	25 31	26 50	27 69	28 87	30 06	31 25	32 44	33 62
366	34 81	36 00	37 18	38 37	39 55	40 74	41 92	43 11	44 29	45 48
367	46 66	47 84	49 03	50 21	51 39	52 57	53 76	54 94	56 12	57 30
368	58 48	59 66	60 84	62 02	63 20	64 37	65 55	66 73	67 91	69 09
369	70 26	71 44	72 62	73 79	74 97	76 14	77 32	78 49	79 67	80 84
370	82 02	83 19	84 36	85 54	86 71	87 88	89 05	90 23	91 40	92 57
371	93 74	94 91	96 08	97 25	98 42	99 59	*00 76	*01 93	*03 09	*04 26
372	57 05 43	06 60	07 76	08 93	10 10	11 26	12 43	13 59	14 76	15 92
373	17 09	18 25	19 42	20 58	21 74	22 91	24 07	25 23	26 39	27 55
374	28 72	29 88	31 04	32 20	33 36	34 52	35 68	36 84	38 00	39 15
375	40 31	41 47	42 63	43 79	44 94	46 10	47 26	48 41	49 57	50 72
376	51 88	53 03	54 19	55 34	56 50	57 65	58 80	59 96	61 11	62 26
377	63 41	64 57	65 72	66 87	68 02	69 17	70 32	71 47	72 62	73 77
378	74 92	76 07	77 22	78 36	79 51	80 66	81 81	82 95	84 10	85 25
379	86 39	87 54	88 68	89 83	90 97	92 12	93 26	94 41	95 55	96 69
380	97 84	98 98	*00 12	*01 26	*02 41	*03 55	*04 69	*05 83	*06 97	*08 11
381	58 09 25	10 39	11 53	12 67	13 81	14 95	16 08	17 22	18 36	19 50
382	20 63	21 77	22 91	24 04	25 18	26 31	27 45	28 58	29 72	30 85
383	31 99	33 12	34 26	35 39	36 52	37 65	38 79	39 92	41 05	42 18
384	43 31	44 44	45 57	46 70	47 83	48 96	50 09	51 22	52 35	53 48
385	54 61	55 74	56 86	57 99	59 12	60 24	61 37	62 50	63 62	64 75
386	65 87	67 00	68 12	69 25	70 37	71 49	72 62	73 74	74 86	75 99
387	77 11	78 23	79 35	80 47	81 60	82 72	83 84	84 96	86 08	87 20
388	88 32	89 44	90 56	91 67	92 79	93 91	95 03	96 15	97 26	98 38
389	99 50	*00 61	*01 73	*02 84	*03 96	*05 07	*06 19	*07 30	*08 42	*09 53
390	59 10 65	11 76	12 87	13 99	15 10	16 21	17 32	18 43	19 55	20 66
391	21 77	22 88	23 99	25 10	26 21	27 32	28 43	29 54	30 64	31 75
392	32 86	33 97	35 08	36 18	37 29	38 40	39 50	40 61	41 71	42 82
393	43 93	45 03	46 14	47 24	48 34	49 45	50 55	51 65	52 76	53 86
394	54 96	56 06	57 17	58 27	59 37	60 47	61 57	62 67	63 77	64 87
395	65 97	67 07	68 17	69 27	70 37	71 46	72 56	73 66	74 76	75 86
396	76 95	78 05	79 14	80 24	81 34	82 43	83 53	84 62	85 72	86 81
397	87 91	89 00	90 09	91 19	92 28	93 37	94 46	95 56	96 65	97 74
398	98 83	99 92	*01 01	*02 10	*03 19	*04 28	*05 37	*06 46	*07 55	*08 64
399	60 09 73	10 82	11 91	12 99	14 08	15 17	16 25	17 34	18 43	19 51
400	20 60	21 69	22 77	23 86	24 94	26 03	27 11	28 19	29 28	30 36

P.P.	124	123	122	121	120	119	118	117	116	115	114	113	112	111	110	109	108
1	12,4	12,3	12,2	12,1	12,0	11,9	11,8	11,7	11,6	11,5	11,4	11,3	11,2	11,1	11,0	10,9	10,8
2	24,8	24,6	24,4	24,2	24,0	23,8	23,6	23,4	23,2	23,0	22,8	22,6	22,4	22,2	22,0	21,8	21,6
3	37,2	36,9	36,6	36,3	36,0	35,7	35,4	35,1	34,8	34,5	34,2	33,9	33,6	33,3	33,0	32,7	32,4
4	49,6	49,2	48,8	48,4	48,0	47,6	47,2	46,8	46,4	46,0	45,6	45,2	44,8	44,4	44,0	43,6	43,2
5	62,0	61,5	61,0	60,5	60,0	59,5	59,0	58,5	58,0	57,5	57,0	56,5	56,0	55,5	55,0	54,5	54,0
6	74,4	73,8	73,2	72,6	72,0	71,4	70,8	70,2	69,6	69,0	68,4	67,8	67,2	66,6	66,0	65,4	64,8
7	86,8	86,1	85,4	84,7	84,0	83,3	82,6	81,9	81,2	80,5	79,8	79,1	78,4	77,7	77,0	76,3	75,6
8	99,2	98,4	97,6	96,8	96,0	95,2	94,4	93,6	92,8	92,0	91,2	90,4	89,6	88,8	88,0	87,2	86,4
9	111,6	110,7	109,8	108,9	108,0	107,1	106,2	105,3	104,4	103,5	102,6	101,7	100,8	99,9	99,0	98,1	97,2

401—450

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
401	60 31 44	32 53	33 61	34 69	35 77	36 86	37 94	39 02	40 10	41 18
402	42 26	43 34	44 42	45 50	46 58	47 66	48 74	49 82	50 89	51 97
403	53 05	54 13	55 21	56 28	57 36	58 44	59 51	60 59	61 66	62 74
404	63 81	64 89	65 96	67 04	68 11	69 19	70 26	71 33	72 41	73 48
405	74 55	75 62	76 69	77 77	78 84	79 91	80 98	82 05	83 12	84 19
406	85 26	86 33	87 40	88 47	89 54	90 61	91 67	92 74	93 81	94 88
407	95 94	97 01	98 08	99 14	*00 21	*01 28	*02 34	*03 41	*04 47	*05 54
408	61 06 60	07 67	08 73	09 79	10 86	11 92	12 98	14 05	15 11	16 17
409	17 23	18 29	19 36	20 42	21 48	22 54	23 60	24 66	25 72	26 78
410	27 84	28 90	29 96	31 02	32 07	33 13	34 19	35 25	36 30	37 36
411	38 42	39 47	40 53	41 59	42 64	43 70	44 75	45 81	46 86	47 92
412	48 97	50 03	51 08	52 13	53 19	54 24	55 29	56 34	57 40	58 45
413	59 50	60 55	61 60	62 65	63 70	64 76	65 81	66 86	67 90	68 95
414	70 00	71 05	72 10	73 15	74 20	75 25	76 29	77 34	78 39	79 43
415	80 48	81 53	82 57	83 62	84 66	85 71	86 76	87 80	88 84	89 89
416	90 93	91 98	93 02	94 06	95 11	96 15	97 19	98 24	99 28	*00 32
417	62 01 36	02 40	03 44	04 48	05 52	06 56	07 60	08 64	09 68	10 72
418	11 76	12 80	13 84	14 88	15 92	16 95	17 99	19 03	20 07	21 10
419	22 14	23 18	24 21	25 25	26 28	27 32	28 35	29 39	30 42	31 46
420	32 49	33 53	34 56	35 59	36 63	37 66	38 69	39 73	40 76	41 79
421	42 82	43 85	44 88	45 91	46 95	47 98	49 01	50 04	51 07	52 10
422	53 12	54 15	55 18	56 21	57 24	58 27	59 29	60 32	61 35	62 38
423	63 40	64 43	65 46	66 48	67 51	68 53	69 56	70 58	71 61	72 63
424	73 66	74 68	75 71	76 73	77 75	78 78	79 80	80 82	81 85	82 87
425	83 89	84 91	85 93	86 95	87 97	89 00	90 02	91 04	92 06	93 08
426	94 10	95 12	96 13	97 15	98 17	99 19	*00 21	*01 23	*02 24	*03 26
427	63 04 28	05 30	06 31	07 33	08 35	09 36	10 38	11 39	12 41	13 42
428	14 44	15 45	16 47	17 48	18 49	19 51	20 52	21 53	22 55	23 56
429	24 57	25 59	26 60	27 61	28 62	29 63	30 64	31 65	32 66	33 67
430	34 68	35 69	36 70	37 71	38 72	39 73	40 74	41 75	42 76	43 76
431	44 77	45 78	46 79	47 79	48 80	49 81	50 81	51 82	52 83	53 83
432	54 84	55 84	56 85	57 85	58 86	59 86	60 87	61 87	62 87	63 88
433	64 88	65 88	66 88	67 89	68 89	69 89	70 89	71 89	72 90	73 90
434	74 90	75 90	76 90	77 90	78 90	79 90	80 90	81 90	82 90	83 89
435	84 89	85 89	86 89	87 89	88 88	89 88	90 88	91 88	92 87	93 87
436	94 86	95 86	96 86	97 85	98 85	99 84	*00 84	*01 83	*02 83	*03 82
437	64 04 81	05 81	06 80	07 79	08 79	09 78	10 77	11 77	12 76	13 75
438	14 74	15 73	16 72	17 71	18 71	19 70	20 69	21 68	22 67	23 66
439	24 65	25 63	26 62	27 61	28 60	29 59	30 58	31 56	32 55	33 54
440	34 53	35 51	36 50	37 49	38 47	39 46	40 44	41 43	42 42	43 40
441	44 39	45 37	46 36	47 34	48 32	49 31	50 29	51 27	52 26	53 24
442	54 22	55 21	56 19	57 17	58 15	59 13	60 11	61 10	62 08	63 06
443	64 04	65 02	66 00	66 98	67 96	68 94	69 92	70 89	71 87	72 85
444	73 83	74 81	75 79	76 76	77 74	78 72	79 69	80 67	81 65	82 62
445	83 60	84 58	85 55	86 53	87 50	88 48	89 45	90 43	91 40	92 37
446	93 35	94 32	95 30	96 27	97 24	98 21	99 19	*00 16	*01 13	*02 10
447	65 03 08	04 05	05 02	05 99	06 96	07 93	08 90	09 87	10 84	11 81
448	12 78	13 75	14 72	15 69	16 66	17 62	18 59	19 56	20 53	21 50
449	22 46	23 43	24 40	25 36	26 33	27 30	28 26	29 23	30 19	31 16
450	32 13	33 09	34 05	35 02	35 98	36 95	37 91	38 88	39 84	40 80

P. P.	109	108	107	106	105	104	103	102	101	100	99	98	97	96
1	10,9	10,8	10,7	10,6	10,5	10,4	10,3	10,2	10,1	10,0	9,9	9,8	9,7	9,6
2	21,8	21,6	21,4	21,2	21,0	20,8	20,6	20,4	20,2	20,0	19,8	19,6	19,4	19,2
3	32,7	32,4	32,1	31,8	31,5	31,2	30,9	30,6	30,3	30,0	29,7	29,4	29,1	28,8
4	43,6	43,2	42,8	42,4	42,0	41,6	41,2	40,8	40,4	40,0	39,6	39,2	38,8	38,4
5	54,5	54,0	53,5	53,0	52,5	52,0	51,5	51,0	50,5	50,0	49,5	49,0	48,5	48,0
6	65,4	64,8	64,2	63,6	63,0	62,4	61,8	61,2	60,6	60,0	59,4	58,8	58,2	57,6
7	76,3	75,6	74,9	74,2	73,5	72,8	72,1	71,4	70,7	70,0	69,3	68,6	67,9	67,2
8	87,2	86,4	85,6	84,8	84,0	83,2	82,4	81,6	80,8	80,0	79,2	78,4	77,6	76,8
9	98,1	97,2	96,3	95,4	94,5	93,6	92,7	91,8	90,9	90,0	89,1	88,2	87,3	86,4

451—500

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
451	65 41 77	42 73	43 69	44 65	45 62	46 58	47 54	48 50	49 46	50 42
452	51 38	52 35	53 31	54 27	55 23	56 19	57 15	58 10	59 06	60 02
453	60 98	61 94	62 90	63 86	64 82	65 77	66 73	67 69	68 64	69 60
454	70 56	71 52	72 47	73 43	74 38	75 34	76 29	77 25	78 20	79 16
455	80 11	81 07	82 02	82 98	83 93	84 88	85 84	86 79	87 74	88 70
456	89 65	90 60	91 55	92 50	93 46	94 41	95 36	96 31	97 26	98 21
457	99 16	*00 11	*01 06	*02 01	*02 96	*03 91	*04 86	*05 81	*06 76	*07 71
458	66 08 65	09 60	10 55	11 50	12 45	13 39	14 34	15 29	16 23	17 18
459	18 13	19 07	20 02	20 96	21 91	22 86	23 80	24 75	25 69	26 63
460	27 58	28 52	29 47	30 41	31 35	32 30	33 24	34 18	35 12	36 07
461	37 01	37 95	38 89	39 83	40 78	41 72	42 66	43 60	44 54	45 48
462	46 42	47 36	48 30	49 24	50 18	51 12	52 06	52 99	53 93	54 87
463	55 81	56 75	57 69	58 62	59 56	60 50	61 43	62 37	63 31	64 24
464	65 18	66 12	67 05	67 99	68 92	69 86	70 79	71 73	72 66	73 60
465	74 53	75 46	76 40	77 33	78 26	79 20	80 13	81 06	81 99	82 93
466	83 86	84 79	85 72	86 65	87 59	88 52	89 45	90 38	91 31	92 24
467	93 17	94 10	95 03	95 96	96 89	97 82	98 75	99 67	*00 60	*01 53
468	67 02 46	03 39	04 31	05 24	06 17	07 10	08 02	08 95	09 88	10 80
469	11 73	12 65	13 58	14 51	15 43	16 36	17 28	18 21	19 13	20 05
470	20 98	21 90	22 83	23 75	24 67	25 60	26 52	27 44	28 36	29 29
471	30 21	31 13	32 05	32 97	33 90	34 82	35 74	36 66	37 58	38 50
472	39 42	40 34	41 26	42 18	43 10	44 02	44 94	45 86	46 77	47 69
473	48 61	49 53	50 45	51 37	52 28	53 20	54 12	55 03	55 95	56 87
474	57 78	58 70	59 62	60 53	61 45	62 36	63 28	64 19	65 11	66 02
475	66 94	67 85	68 76	69 68	70 59	71 51	72 42	73 33	74 24	75 16
476	76 07	76 98	77 89	78 81	79 72	80 63	81 54	82 45	83 36	84 27
477	85 18	86 09	87 00	87 91	88 82	89 73	90 64	91 55	92 46	93 37
478	94 28	95 19	96 10	97 00	97 91	98 82	99 73	*00 63	*01 54	*02 45
479	68 03 36	04 26	05 17	06 07	06 98	07 89	08 79	09 70	10 60	11 51
480	12 41	13 32	14 22	15 13	16 03	16 93	17 84	18 74	19 64	20 55
481	21 45	22 35	23 26	24 16	25 06	25 96	26 86	27 77	28 67	29 57
482	30 47	31 37	32 27	33 17	34 07	34 97	35 87	36 77	37 67	38 57
483	39 47	40 37	41 27	42 17	43 07	43 96	44 86	45 76	46 66	47 56
484	48 45	49 35	50 25	51 14	52 04	52 94	53 83	54 73	55 63	56 52
485	57 42	58 31	59 21	60 10	61 00	61 89	62 79	63 68	64 58	65 47
486	66 36	67 26	68 15	69 04	69 94	70 83	71 72	72 61	73 51	74 40
487	75 29	76 18	77 07	77 96	78 86	79 75	80 64	81 53	82 42	83 31
488	84 20	85 09	85 98	86 87	87 76	88 65	89 53	90 42	91 31	92 20
489	93 09	93 98	94 86	95 75	96 64	97 53	98 41	99 30	*00 19	*01 07
490	69 01 96	02 85	03 73	04 62	05 50	06 39	07 28	08 16	09 05	09 93
491	10 81	11 70	12 58	13 47	14 35	15 24	16 12	17 00	17 89	18 77
492	19 65	20 53	21 42	22 30	23 18	24 06	24 94	25 83	26 71	27 59
493	28 47	29 35	30 23	31 11	31 99	32 87	33 75	34 63	35 51	36 39
494	37 27	38 15	39 03	39 91	40 78	41 66	42 54	43 42	44 30	45 17
495	46 05	46 93	47 81	48 68	49 56	50 44	51 31	52 19	53 07	53 94
496	54 82	55 69	56 57	57 44	58 32	59 19	60 07	60 94	61 82	62 69
497	63 56	64 44	65 31	66 18	67 06	67 93	68 80	69 68	70 55	71 42
498	72 29	73 17	74 04	74 91	75 78	76 65	77 52	78 39	79 26	80 14
499	81 01	81 88	82 75	83 62	84 49	85 35	86 22	87 09	87 96	88 83
500	89 70	90 57	91 44	92 31	93 17	94 04	94 91	95 78	96 64	97 51

P.P.	96	95	94	93	92	91	90	89	88	87	86
1	9,6	9,5	9,4	9,3	9,2	9,1	9,0	8,9	8,8	8,7	8,6
2	19,2	19,0	18,8	18,6	18,4	18,2	18,0	17,8	17,6	17,4	17,2
3	28,8	28,5	28,2	27,9	27,6	27,3	27,0	26,7	26,4	26,1	25,8
4	38,4	38,0	37,6	37,2	36,8	36,4	36,0	35,6	35,2	34,8	34,4
5	48,0	47,5	47,0	46,5	46,0	45,5	45,0	44,5	44,0	43,5	43,0
6	57,6	57,0	56,4	55,8	55,2	54,6	54,0	53,4	52,8	52,2	51,6
7	67,2	66,5	65,8	65,1	64,4	63,7	63,0	62,3	61,6	60,9	60,2
8	76,8	76,0	75,2	74,4	73,6	72,8	72,0	71,2	70,4	69,6	68,8
9	86,4	85,5	84,6	83,7	82,8	81,9	81,0	80,1	79,2	78,3	77,4

501—550

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
501	69 98 38	99 24	*00 11	*00 98	*01 84	*02 71	*03 58	*04 44	*05 31	*06 17
502	70 07 04	07 90	08 77	09 63	10 50	11 36	12 22	13 09	13 95	14 82
503	15 68	16 54	17 41	18 27	19 13	19 99	20 86	21 72	22 58	23 44
504	24 31	25 17	26 03	26 89	27 75	28 61	29 47	30 33	31 19	32 05
505	32 91	33 77	34 63	35 49	36 35	37 21	38 07	38 93	39 79	40 65
506	41 51	42 36	43 22	44 08	44 94	45 79	46 65	47 51	48 37	49 22
507	50 08	50 94	51 79	52 65	53 50	54 36	55 22	56 07	56 93	57 78
508	58 64	59 49	60 35	61 20	62 06	62 91	63 76	64 62	65 47	66 32
509	67 18	68 03	68 88	69 74	70 59	71 44	72 29	73 15	74 00	74 85
510	75 70	76 55	77 40	78 26	79 11	79 96	80 81	81 66	82 51	83 36
511	84 21	85 06	85 91	86 76	87 61	88 46	89 31	90 15	91 00	91 85
512	92 70	93 55	94 40	95 24	96 09	96 94	97 79	98 63	99 48	*00 33
513	71 01 17	02 02	02 87	03 71	04 56	05 40	06 25	07 10	07 94	08 79
514	09 63	10 48	11 32	12 17	13 01	13 85	14 70	15 54	16 39	17 23
515	18 07	18 92	19 76	20 60	21 44	22 29	23 13	23 97	24 81	25 66
516	26 50	27 34	28 18	29 02	29 86	30 70	31 54	32 38	33 23	34 07
517	34 91	35 75	36 59	37 42	38 26	39 10	39 94	40 78	41 62	42 46
518	43 30	44 14	44 97	45 81	46 65	47 49	48 33	49 16	50 00	50 84
519	51 67	52 51	53 35	54 18	55 02	55 86	56 69	57 53	58 36	59 20
520	60 03	60 87	61 70	62 54	63 37	64 21	65 04	65 88	66 71	67 54
521	68 38	69 21	70 04	70 88	71 71	72 54	73 38	74 21	75 04	75 87
522	76 71	77 54	78 37	79 20	80 03	80 86	81 69	82 53	83 36	84 19
523	85 02	85 85	86 68	87 51	88 34	89 17	90 00	90 83	91 65	92 48
524	93 31	94 14	94 97	95 80	96 63	97 45	98 28	99 11	99 94	*00 77
525	72 01 59	02 42	03 25	04 07	04 90	05 73	06 55	07 38	08 21	09 03
526	09 86	10 68	11 51	12 33	13 16	13 98	14 81	15 63	16 46	17 28
527	18 11	18 93	19 75	20 58	21 40	22 22	23 05	23 87	24 69	25 52
528	26 34	27 16	27 98	28 81	29 63	30 45	31 27	32 09	32 91	33 74
529	34 56	35 38	36 20	37 02	37 84	38 66	39 48	40 30	41 12	41 94
530	42 76	43 58	44 40	45 22	46 04	46 85	47 67	48 49	49 31	50 13
531	50 95	51 76	52 58	53 40	54 22	55 03	55 85	56 67	57 48	58 30
532	59 12	59 93	60 75	61 56	62 38	63 20	64 01	64 83	65 64	66 46
533	67 27	68 09	68 90	69 72	70 53	71 34	72 16	72 97	73 79	74 60
534	75 41	76 23	77 04	77 85	78 66	79 48	80 29	81 10	81 91	82 73
535	83 54	84 35	85 16	85 97	86 78	87 59	88 41	89 22	90 03	90 84
536	91 65	92 46	93 27	94 08	94 89	95 70	96 51	97 32	98 13	98 93
537	99 74	*00 55	*01 36	*02 17	*02 98	*03 78	*04 59	*05 40	*06 21	*07 02
538	73 07 82	08 63	09 44	10 24	11 05	11 86	12 66	13 47	14 28	15 08
539	15 89	16 69	17 50	18 30	19 11	19 91	20 72	21 52	22 33	23 13
540	23 94	24 74	25 55	26 35	27 15	27 96	28 76	29 56	30 37	31 17
541	31 97	32 78	33 58	34 38	35 18	35 98	36 79	37 59	38 39	39 19
542	39 99	40 79	41 60	42 40	43 20	44 00	44 80	45 60	46 40	47 20
543	48 00	48 80	49 60	50 40	51 20	52 00	52 79	53 59	54 39	55 19
544	55 99	56 79	57 59	58 38	59 18	59 98	60 78	61 57	62 37	63 17
545	63 97	64 76	65 56	66 35	67 15	67 95	68 74	69 54	70 34	71 13
546	71 93	72 72	73 52	74 31	75 11	75 90	76 70	77 49	78 29	79 08
547	79 87	80 67	81 46	82 25	83 05	83 84	84 63	85 43	86 22	87 01
548	87 81	88 60	89 39	90 18	90 97	91 77	92 56	93 35	94 14	94 93
549	95 72	96 51	97 31	98 10	98 89	99 68	*00 47	*01 26	*02 05	*02 84
550	74 03 63	04 42	05 21	06 00	06 78	07 57	08 36	09 15	09 94	10 73
P.P.	87	86	85	84	83	82	81	80	79	78
1	8,7	8,6	8,5	8,4	8,3	8,2	8,1	8,0	7,9	7,8
2	17,4	17,2	17,0	16,8	16,6	16,4	16,2	16,0	15,8	15,6
3	26,1	25,8	25,5	25,2	24,9	24,6	24,3	24,0	23,7	23,4
4	34,8	34,4	34,0	33,6	33,2	32,8	32,4	32,0	31,6	31,2
5	43,5	43,0	42,5	42,0	41,5	41,0	40,5	40,0	39,5	39,0
6	52,2	51,6	51,0	50,4	49,8	49,2	48,6	48,0	47,4	46,8
7	60,9	60,2	59,5	58,8	58,1	57,4	56,7	56,0	55,3	54,6
8	69,6	68,8	68,0	67,2	66,4	65,6	64,8	64,0	63,2	62,4
9	78,3	77,4	76,5	75,6	74,7	73,8	72,9	72,0	71,1	70,2

551—600

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
551	74 11 52	12 30	13 09	13 88	14 67	15 46	16 24	17 03	17 82	18 60
552	19 39	20 18	20 96	21 75	22 54	23 32	24 11	24 89	25 68	26 47
553	27 25	28 04	28 82	29 61	30 39	31 18	31 96	32 75	33 53	34 31
554	35 10	35 88	36 67	37 45	38 23	39 02	39 80	40 58	41 36	42 15
555	42 93	43 71	44 49	45 28	46 06	46 84	47 62	48 40	49 19	49 97
556	50 75	51 53	52 31	53 09	53 87	54 65	55 43	56 21	56 99	57 77
557	58 55	59 33	60 11	60 89	61 67	62 45	63 23	64 01	64 79	65 56
558	66 34	67 12	67 90	68 68	69 45	70 23	71 01	71 79	72 56	73 34
559	74 12	74 89	75 67	76 45	77 22	78 00	78 78	79 55	80 33	81 10
560	81 88	82 66	83 43	84 21	84 98	85 76	86 53	87 31	88 08	88 85
561	89 63	90 40	91 18	91 95	92 72	93 50	94 27	95 04	95 82	96 59
562	97 36	98 14	98 91	99 68	*00 45	*01 23	*02 00	*02 77	*03 54	*04 31
563	75 05 08	05 86	06 63	07 40	08 17	08 94	09 71	10 48	11 25	12 02
564	12 79	13 56	14 33	15 10	15 87	16 64	17 41	18 18	18 95	19 72
565	20 48	21 25	22 02	22 79	23 56	24 33	25 09	25 86	26 63	27 40
566	28 16	28 93	29 70	30 47	31 23	32 00	32 77	33 53	34 30	35 06
567	35 83	36 60	37 36	38 13	38 89	39 66	40 42	41 19	41 95	42 72
568	43 48	44 25	45 01	45 78	46 54	47 30	48 07	48 83	49 60	50 36
569	51 12	51 89	52 65	53 41	54 17	54 94	55 70	56 46	57 22	57 99
570	58 75	59 51	60 27	61 03	61 80	62 56	63 32	64 08	64 84	65 60
571	66 36	67 12	67 88	68 64	69 40	70 16	70 92	71 68	72 44	73 20
572	73 96	74 72	75 48	76 24	77 00	77 75	78 51	79 27	80 03	80 79
573	81 55	82 30	83 06	83 82	84 58	85 33	86 09	86 85	87 61	88 36
574	89 12	89 88	90 63	91 39	92 14	92 90	93 66	94 41	95 17	95 92
575	96 68	97 43	98 19	98 94	99 70	*00 45	*01 21	*01 96	*02 72	*03 47
576	76 04 22	04 98	05 73	06 49	07 24	07 99	08 75	09 50	10 25	11 01
577	11 76	12 51	13 26	14 02	14 77	15 52	16 27	17 02	17 78	18 53
578	19 28	20 03	20 78	21 53	22 28	23 03	23 78	24 53	25 29	26 04
579	26 79	27 54	28 29	29 04	29 78	30 53	31 28	32 03	32 78	33 53
580	34 28	35 03	35 78	36 53	37 27	38 02	38 77	39 52	40 27	41 01
581	41 76	42 51	43 26	44 00	44 75	45 50	46 24	46 99	47 74	48 48
582	49 23	49 98	50 72	51 47	52 21	52 96	53 70	54 45	55 20	55 94
583	56 69	57 43	58 18	58 92	59 66	60 41	61 15	61 90	62 64	63 38
584	64 13	64 87	65 62	66 36	67 10	67 85	68 59	69 33	70 07	70 82
585	71 56	72 30	73 04	73 79	74 53	75 27	76 01	76 75	77 49	78 23
586	78 98	79 72	80 46	81 20	81 94	82 68	83 42	84 16	84 90	85 64
587	86 38	87 12	87 86	88 60	89 34	90 08	90 82	91 56	92 30	93 03
588	93 77	94 51	95 25	95 99	96 73	97 46	98 20	98 94	99 68	*00 42
589	77 01 15	01 89	02 63	03 36	04 10	04 84	05 57	06 31	07 05	07 78
590	08 52	09 26	09 99	10 73	11 46	12 20	12 93	13 67	14 40	15 14
591	15 87	16 61	17 34	18 08	18 81	19 55	20 28	21 02	21 75	22 48
592	23 22	23 95	24 68	25 42	26 15	26 88	27 62	28 35	29 08	29 81
593	30 55	31 28	32 01	32 74	33 48	34 21	34 94	35 67	36 40	37 13
594	37 86	38 60	39 33	40 06	40 79	41 52	42 25	42 98	43 71	44 44
595	45 17	45 90	46 63	47 36	48 09	48 82	49 55	50 28	51 00	51 73
596	52 46	53 19	53 92	54 65	55 38	56 10	56 83	57 56	58 29	59 02
597	59 74	60 47	61 20	61 93	62 65	63 38	64 11	64 83	65 56	66 29
598	67 01	67 74	68 46	69 19	69 92	70 64	71 37	72 09	72 82	73 54
599	74 27	74 99	75 72	76 44	77 17	77 89	78 62	79 34	80 06	80 79
600	81 51	82 24	82 96	83 68	84 41	85 13	85 85	86 58	87 30	88 02
P.P.	79	78	77	76	75	74	73	72		
1	7,9	7,8	7,7	7,6	7,5	7,4	7,3	7,2		
2	15,8	15,6	15,4	15,2	15,0	14,8	14,6	14,4		
3	23,7	23,4	23,1	22,8	22,5	22,2	21,9	21,6		
4	31,6	31,2	30,8	30,4	30,0	29,6	29,2	28,8		
5	39,5	39,0	38,5	38,0	37,5	37,0	36,5	36,0		
6	47,4	46,8	46,2	45,6	45,0	44,4	43,8	43,2		
7	55,3	54,6	53,9	53,2	52,5	51,8	51,1	50,4		
8	63,2	62,4	61,6	60,8	60,0	59,2	58,4	57,6		
9	71,1	70,2	69,3	68,4	67,5	66,6	65,7	64,8		

601—650

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
601	77 88 74	89 47	90 19	90 91	91 63	92 36	93 08	93 80	94 52	95 24
602	95 96	96 69	97 41	98 13	98 85	99 57	*00 29	*01 01	*01 73	*02 45
603	78 03 17	03 89	04 61	05 33	06 05	06 77	07 49	08 21	08 93	09 65
604	10 37	11 09	11 81	12 53	13 24	13 96	14 68	15 40	16 12	16 84
605	17 55	18 27	18 99	19 71	20 42	21 14	21 86	22 58	23 29	24 01
606	24 73	25 44	26 16	26 88	27 59	28 31	29 02	29 74	30 46	31 17
607	31 89	32 60	33 32	34 03	34 75	35 46	36 18	36 89	37 61	38 32
608	39 04	39 75	40 46	41 18	41 89	42 61	43 32	44 03	44 75	45 46
609	46 17	46 89	47 60	48 31	49 02	49 74	50 45	51 16	51 87	52 59
610	53 30	54 01	54 72	55 43	56 15	56 86	57 57	58 28	58 99	59 70
611	60 41	61 12	61 83	62 54	63 25	63 96	64 67	65 38	66 09	66 80
612	67 51	68 22	68 93	69 64	70 35	71 06	71 77	72 48	73 19	73 90
613	74 60	75 31	76 02	76 73	77 44	78 15	78 85	79 56	80 27	80 98
614	81 68	82 39	83 10	83 81	84 51	85 22	85 93	86 63	87 34	88 04
615	88 75	89 46	90 16	90 87	91 57	92 28	92 99	93 69	94 40	95 10
616	95 81	96 51	97 22	97 92	98 63	99 33	*00 04	*00 74	*01 44	*02 15
617	79 02 85	03 56	04 26	04 96	05 67	06 37	07 07	07 78	08 48	09 18
618	09 88	10 59	11 29	11 99	12 69	13 40	14 10	14 80	15 50	16 20
619	16 91	17 61	18 31	19 01	19 71	20 41	21 11	21 81	22 52	23 22
620	23 92	24 62	25 32	26 02	26 72	27 42	28 12	28 82	29 52	30 22
621	30 92	31 62	32 31	33 01	33 71	34 41	35 11	35 81	36 51	37 21
622	37 90	38 60	39 30	40 00	40 70	41 39	42 09	42 79	43 49	44 18
623	44 88	45 58	46 27	46 97	47 67	48 36	49 06	49 76	50 45	51 15
624	51 85	52 54	53 24	53 93	54 63	55 32	56 02	56 72	57 41	58 11
625	58 80	59 49	60 19	60 88	61 58	62 27	62 97	63 66	64 36	65 05
626	65 74	66 44	67 13	67 82	68 52	69 21	69 90	70 60	71 29	71 98
627	72 68	73 37	74 06	74 75	75 45	76 14	76 83	77 52	78 21	78 90
628	79 60	80 29	80 98	81 67	82 36	83 05	83 74	84 43	85 13	85 82
629	86 51	87 20	87 89	88 58	89 27	89 96	90 65	91 34	92 03	92 72
630	93 41	94 09	94 78	95 47	96 16	96 85	97 54	98 23	98 92	99 61
631	80 00 29	00 98	01 67	02 36	03 05	03 73	04 42	05 11	05 80	06 48
632	07 17	07 86	08 54	09 23	09 92	10 61	11 29	11 98	12 66	13 35
633	14 04	14 72	15 41	16 09	16 78	17 47	18 15	18 84	19 52	20 21
634	20 89	21 58	22 26	22 95	23 63	24 32	25 00	25 68	26 37	27 05
635	27 74	28 42	29 10	29 79	30 47	31 16	31 84	32 52	33 21	33 89
636	34 57	35 25	35 94	36 62	37 30	37 98	38 67	39 35	40 03	40 71
637	41 39	42 08	42 76	43 44	44 12	44 80	45 48	46 16	46 85	47 53
638	48 21	48 89	49 57	50 25	50 93	51 61	52 29	52 97	53 65	54 33
639	55 01	55 69	56 37	57 05	57 73	58 41	59 08	59 76	60 44	61 12
640	61 80	62 48	63 16	63 84	64 51	65 19	65 87	66 55	67 23	67 90
641	68 58	69 26	69 94	70 61	71 29	71 97	72 64	73 32	74 00	74 67
642	75 35	76 03	76 70	77 38	78 06	78 73	79 41	80 08	80 76	81 43
643	82 11	82 79	83 46	84 14	84 81	85 49	86 16	86 84	87 51	88 18
644	88 86	89 53	90 21	90 88	91 56	92 23	92 90	93 58	94 25	94 92
645	95 60	96 27	96 94	97 62	98 29	98 96	99 64	*00 31	*00 98	*01 65
646	81 02 33	03 00	03 67	04 34	05 01	05 69	06 36	07 03	07 70	08 37
647	09 04	09 71	10 39	11 06	11 73	12 40	13 07	13 74	14 41	15 08
648	15 75	16 42	17 09	17 76	18 43	19 10	19 77	20 44	21 11	21 78
649	22 45	23 12	23 79	24 45	25 12	25 79	26 46	27 13	27 80	28 47
650	29 13	29 80	30 47	31 14	31 81	32 47	33 14	33 81	34 48	35 14
P.P.	73	72	71	70	69	68	67	66		
1	7,3	7,2	7,1	7,0	6,9	6,8	6,7	6,6		
2	14,6	14,4	14,2	14,0	13,8	13,6	13,4	13,2		
3	21,9	21,6	21,3	21,0	20,7	20,4	20,1	19,8		
4	29,2	28,8	28,4	28,0	27,6	27,2	26,8	26,4		
5	36,5	36,0	35,5	35,0	34,5	34,0	33,5	33,0		
6	43,8	43,2	42,6	42,0	41,4	40,8	40,2	39,6		
7	51,1	50,4	49,7	49,0	48,3	47,6	46,9	46,2		
8	58,4	57,6	56,8	56,0	55,2	54,4	53,6	52,8		
9	65,7	64,8	63,9	63,0	62,1	61,2	60,3	59,4		

651—700

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
651	81 35 81	36 48	37 14	37 81	38 48	39 14	39 81	40 48	41 14	41 81
652	42 48	43 14	43 81	44 47	45 14	45 81	46 47	47 14	47 80	48 47
653	49 13	49 80	50 46	51 13	51 79	52 46	53 12	53 78	54 45	55 11
654	55 78	56 44	57 11	57 77	58 43	59 10	59 76	60 42	61 09	61 75
655	62 41	63 08	63 74	64 40	65 06	65 73	66 39	67 05	67 71	68 38
656	69 04	69 70	70 36	71 02	71 69	72 35	73 01	73 67	74 33	74 99
657	75 65	76 31	76 98	77 64	78 30	78 96	79 62	80 28	80 94	81 60
658	82 26	82 92	83 58	84 24	84 90	85 56	86 22	86 88	87 54	88 20
659	88 85	89 51	90 17	90 83	91 49	92 15	92 81	93 46	94 12	94 78
660	95 44	96 10	96 76	97 41	98 07	98 73	99 39	*00 04	*00 70	*01 36
661	82 02 01	02 67	03 33	03 99	04 64	05 30	05 95	06 61	07 27	07 92
662	08 58	09 24	09 89	10 55	11 20	11 86	12 51	13 17	13 82	14 48
663	15 14	15 79	16 45	17 10	17 75	18 41	19 06	19 72	20 37	21 03
664	21 68	22 33	22 99	23 64	24 30	24 95	25 60	26 26	26 91	27 56
665	28 22	28 87	29 52	30 18	30 83	31 48	32 13	32 79	33 44	34 09
666	34 74	35 39	36 05	36 70	37 35	38 00	38 65	39 30	39 96	40 61
667	41 26	41 91	42 56	43 21	43 86	44 51	45 16	45 81	46 46	47 11
668	47 76	48 41	49 06	49 71	50 36	51 01	51 66	52 31	52 96	53 61
669	54 26	54 91	55 56	56 21	56 86	57 51	58 15	58 80	59 45	60 10
670	60 75	61 40	62 04	62 69	63 34	63 99	64 64	65 28	65 93	66 58
671	67 23	67 87	68 52	69 17	69 81	70 46	71 11	71 75	72 40	73 05
672	73 69	74 34	74 99	75 63	76 28	76 92	77 57	78 21	78 86	79 51
673	80 15	80 80	81 44	82 09	82 73	83 38	84 02	84 67	85 31	85 95
674	86 60	87 24	87 89	88 53	89 18	89 82	90 46	91 11	91 75	92 39
675	93 04	93 68	94 32	94 97	95 61	96 25	96 90	97 54	98 18	98 82
676	99 47	*00 11	*00 75	*01 39	*02 04	*02 68	*03 32	*03 96	*04 60	*05 25
677	83 05 89	06 53	07 17	07 81	08 45	09 09	09 73	10 37	11 02	11 66
678	12 30	12 94	13 58	14 22	14 86	15 50	16 14	16 78	17 42	18 06
679	18 70	19 34	19 98	20 62	21 26	21 89	22 53	23 17	23 81	24 45
680	25 09	25 73	26 37	27 00	27 64	28 28	28 92	29 56	30 20	30 83
681	31 47	32 11	32 75	33 38	34 02	34 66	35 30	35 93	36 57	37 21
682	37 84	38 48	39 12	39 75	40 39	41 03	41 66	42 30	42 94	43 57
683	44 21	44 84	45 48	46 11	46 75	47 39	48 02	48 66	49 29	49 93
684	50 56	51 20	51 83	52 47	53 10	53 73	54 37	55 00	55 64	56 27
685	56 91	57 54	58 17	58 81	59 44	60 07	60 71	61 34	61 97	62 61
686	63 24	63 87	64 51	65 14	65 77	66 41	67 04	67 67	68 30	68 94
687	69 57	70 20	70 83	71 46	72 10	72 73	73 36	73 99	74 62	75 25
688	75 88	76 52	77 15	77 78	78 41	79 04	79 67	80 30	80 93	81 56
689	82 19	82 82	83 45	84 08	84 71	85 34	85 97	86 60	87 23	87 86
690	88 49	89 12	89 75	90 38	91 01	91 64	92 27	92 89	93 52	94 15
691	94 78	95 41	96 04	96 67	97 29	97 92	98 55	99 18	99 81	*00 43
692	84 01 06	01 69	02 32	02 94	03 57	04 20	04 82	05 45	06 08	06 71
693	07 33	07 96	08 59	09 21	09 84	10 46	11 09	11 72	12 34	12 97
694	13 59	14 22	14 85	15 47	16 10	16 72	17 35	17 97	18 60	19 22
695	19 85	20 47	21 10	21 72	22 35	22 97	23 60	24 22	24 84	25 47
696	26 09	26 72	27 34	27 96	28 59	29 21	29 83	30 46	31 08	31 70
697	32 33	32 95	33 57	34 20	34 82	35 44	36 06	36 69	37 31	37 93
698	38 55	39 18	39 80	40 42	41 04	41 66	42 29	42 91	43 53	44 15
699	44 77	45 39	46 01	46 64	47 26	47 88	48 50	49 12	49 74	50 36
700	50 98	51 60	52 22	52 84	53 46	54 08	54 70	55 32	55 94	56 56

P.P.	67	66	65	64	63	62
1	6,7	6,6	6,5	6,4	6,3	6,2
2	13,4	13,2	13,0	12,8	12,6	12,4
3	20,1	19,8	19,5	19,2	18,9	18,6
4	26,8	26,4	26,0	25,6	25,2	24,8
5	33,5	33,0	32,5	32,0	31,5	31,0
6	40,2	39,6	39,0	38,4	37,8	37,2
7	46,9	46,2	45,5	44,8	44,1	43,4
8	53,6	52,8	52,0	51,2	50,4	49,6
9	60,3	59,4	58,5	57,6	56,7	55,8

701—750

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
701	84 57 18	57 80	58 42	59 04	59 66	60 28	60 90	61 51	62 13	62 75
702	63 37	63 99	64 61	65 23	65 85	66 46	67 08	67 70	68 32	68 94
703	69 55	70 17	70 79	71 41	72 02	72 64	73 26	73 88	74 49	75 11
704	75 73	76 34	76 96	77 58	78 19	78 81	79 43	80 04	80 66	81 28
705	81 89	82 51	83 12	83 74	84 35	84 97	85 59	86 20	86 82	87 43
706	88 05	88 66	89 28	89 89	90 51	91 12	91 74	92 35	92 97	93 58
707	94 19	94 81	95 42	96 04	96 65	97 26	97 88	98 49	99 11	99 72
708	85 00 33	00 95	01 56	02 17	02 79	03 40	04 01	04 62	05 24	05 85
709	06 46	07 07	07 69	08 30	08 91	09 52	10 14	10 75	11 36	11 97
710	12 58	13 20	13 81	14 42	15 03	15 64	16 25	16 86	17 47	18 09
711	18 70	19 31	19 92	20 53	21 14	21 75	22 36	22 97	23 58	24 19
712	24 80	25 41	26 02	26 63	27 24	27 85	28 46	29 07	29 68	30 29
713	30 90	31 50	32 11	32 72	33 33	33 94	34 55	35 16	35 77	36 37
714	36 98	37 59	38 20	38 81	39 41	40 02	40 63	41 24	41 85	42 45
715	43 06	43 67	44 28	44 88	45 49	46 10	46 70	47 31	47 92	48 52
716	49 13	49 74	50 34	50 95	51 56	52 16	52 77	53 37	53 98	54 59
717	55 19	55 80	56 40	57 01	57 61	58 22	58 82	59 43	60 03	60 64
718	61 24	61 85	62 45	63 06	63 66	64 27	64 87	65 48	66 08	66 68
719	67 29	67 89	68 50	69 10	69 70	70 31	70 91	71 52	72 12	72 72
720	73 32	73 93	74 53	75 13	75 74	76 34	76 94	77 55	78 15	78 75
721	79 35	79 95	80 56	81 16	81 76	82 36	82 97	83 57	84 17	84 77
722	85 37	85 97	86 57	87 18	87 78	88 38	88 98	89 58	90 18	90 78
723	91 38	91 98	92 58	93 18	93 79	94 39	94 99	95 59	96 19	96 79
724	97 39	97 99	98 59	99 18	99 78	*00 38	*00 98	*01 58	*02 18	*02 78
725	86 03 38	03 98	04 58	05 18	05 78	06 37	06 97	07 57	08 17	08 77
726	09 37	09 96	10 56	11 16	11 76	12 36	12 95	13 55	14 15	14 75
727	15 34	15 94	16 54	17 14	17 73	18 33	18 93	19 52	20 12	20 72
728	21 31	21 91	22 51	23 10	23 70	24 30	24 89	25 49	26 08	26 68
729	27 28	27 87	28 47	29 06	29 66	30 25	30 85	31 44	32 04	32 63
730	33 23	33 82	34 42	35 01	35 61	36 20	36 80	37 39	37 99	38 58
731	39 17	39 77	40 36	40 96	41 55	42 14	42 74	43 33	43 92	44 52
732	45 11	45 70	46 30	46 89	47 48	48 08	48 67	49 26	49 85	50 45
733	51 04	51 63	52 22	52 82	53 41	54 00	54 59	55 19	55 78	56 37
734	56 96	57 55	58 14	58 74	59 33	59 92	60 51	61 10	61 69	62 28
735	62 87	63 46	64 05	64 65	65 24	65 83	66 42	67 01	67 60	68 19
736	68 78	69 37	69 96	70 55	71 14	71 73	72 32	72 91	73 50	74 09
737	74 67	75 26	75 85	76 44	77 03	77 62	78 21	78 80	79 39	79 98
738	80 56	81 15	81 74	82 33	82 92	83 50	84 09	84 68	85 27	85 86
739	86 44	87 03	87 62	88 21	88 79	89 38	89 97	90 56	91 14	91 73
740	92 32	92 90	93 49	94 08	94 66	95 25	95 84	96 42	97 01	97 60
741	98 18	98 77	99 35	99 94	*00 53	*01 11	*01 70	*02 28	*02 87	*03 45
742	87 04 04	04 62	05 21	05 79	06 38	06 96	07 55	08 13	08 72	09 30
743	09 89	10 47	11 06	11 64	12 23	12 81	13 39	13 98	14 56	15 15
744	15 73	16 31	16 90	17 48	18 06	18 65	19 23	19 81	20 40	20 98
745	21 56	22 15	22 73	23 31	23 89	24 48	25 06	25 64	26 22	26 81
746	27 39	27 97	28 55	29 13	29 72	30 30	30 88	31 46	32 04	32 62
747	33 21	33 79	34 37	34 95	35 53	36 11	36 69	37 27	37 85	38 44
748	39 02	39 60	40 18	40 76	41 34	41 92	42 50	43 08	43 66	44 24
749	44 82	45 40	45 98	46 56	47 14	47 72	48 30	48 88	49 45	50 03
750	50 61	51 19	51 77	52 35	52 93	53 51	54 09	54 66	55 24	55 82
P. P.	62	61	60	59	58	57				
1	6,2	6,1	6,0	5,9	5,8	5,7				
2	12,4	12,2	12,0	11,8	11,6	11,4				
3	18,6	18,3	18,0	17,7	17,4	17,1				
4	24,8	24,4	24,0	23,6	23,2	22,8				
5	31,0	30,5	30,0	29,5	29,0	28,5				
6	37,2	36,6	36,0	35,4	34,8	34,2				
7	43,4	42,7	42,0	41,3	40,6	39,9				
8	49,6	48,8	48,0	47,2	46,4	45,6				
9	55,8	54,9	54,0	53,1	52,2	51,3				

751—800

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
751	87 56 40	56 98	57 56	58 13	58 71	59 29	59 87	60 45	61 02	61 60
752	62 18	62 76	63 33	63 91	64 49	65 07	65 64	66 22	66 80	67 37
753	67 95	68 53	69 10	69 68	70 26	70 83	71 41	71 99	72 56	73 14
754	73 71	74 29	74 87	75 44	76 02	76 59	77 17	77 74	78 32	78 89
755	79 47	80 04	80 62	81 19	81 77	82 34	82 92	83 49	84 07	84 64
756	85 22	85 79	86 37	86 94	87 52	88 09	88 66	89 24	89 81	90 39
757	90 96	91 53	92 11	92 68	93 25	93 83	94 40	94 97	95 55	96 12
758	96 69	97 26	97 84	98 41	98 98	99 56	*00 13	*00 70	*01 27	*01 85
759	88 02 42	02 99	03 56	04 13	04 71	05 28	05 85	06 42	06 99	07 56
760	08 14	08 71	09 28	09 85	10 42	10 99	11 56	12 13	12 71	13 28
761	13 85	14 42	14 99	15 56	16 13	16 70	17 27	17 84	18 41	18 98
762	19 55	20 12	20 69	21 26	21 83	22 40	22 97	23 54	24 11	24 68
763	25 25	25 81	26 38	26 95	27 52	28 09	28 66	29 23	29 80	30 37
764	30 93	31 50	32 07	32 64	33 21	33 77	34 34	34 91	35 48	36 05
765	36 61	37 18	37 75	38 32	38 88	39 45	40 02	40 59	41 15	41 72
766	42 29	42 85	43 42	43 99	44 55	45 12	45 69	46 25	46 82	47 39
767	47 95	48 52	49 09	49 65	50 22	50 78	51 35	51 92	52 48	53 05
768	53 61	54 18	54 74	55 31	55 87	56 44	57 00	57 57	58 13	58 70
769	59 26	59 83	60 39	60 96	61 52	62 09	62 65	63 21	63 78	64 34
770	64 91	65 47	66 04	66 60	67 16	67 73	68 29	68 85	69 42	69 98
771	70 54	71 11	71 67	72 23	72 80	73 36	73 92	74 49	75 05	75 61
772	76 17	76 74	77 30	77 86	78 42	78 98	79 55	80 11	80 67	81 23
773	81 79	82 36	82 92	83 48	84 04	84 60	85 16	85 73	86 29	86 85
774	87 41	87 97	88 53	89 09	89 65	90 21	90 77	91 34	91 90	92 46
775	93 02	93 58	94 14	94 70	95 26	95 82	96 38	96 94	97 50	98 06
776	98 62	99 18	99 74	*00 30	*00 86	*01 41	*01 97	*02 53	*03 09	*03 65
777	89 04 21	04 77	05 33	05 89	06 45	07 00	07 56	08 12	08 68	09 24
778	09 80	10 35	10 91	11 47	12 03	12 59	13 14	13 70	14 26	14 82
779	15 37	15 93	16 49	17 05	17 60	18 16	18 72	19 28	19 83	20 39
780	20 95	21 50	22 06	22 62	23 17	23 73	24 29	24 84	25 40	25 95
781	26 51	27 07	27 62	28 18	28 73	29 29	29 85	30 40	30 96	31 51
782	32 07	32 62	33 18	33 73	34 29	34 84	35 40	35 95	36 51	37 06
783	37 62	38 17	38 73	39 28	39 84	40 39	40 94	41 50	42 05	42 61
784	43 16	43 71	44 27	44 82	45 38	45 93	46 48	47 04	47 59	48 14
785	48 70	49 25	49 80	50 36	50 91	51 46	52 01	52 57	53 12	53 67
786	54 23	54 78	55 33	55 88	56 44	56 99	57 54	58 09	58 64	59 20
787	59 75	60 30	60 85	61 40	61 95	62 51	63 06	63 61	64 16	64 71
788	65 26	65 81	66 36	66 92	67 47	68 02	68 57	69 12	69 67	70 22
789	70 77	71 32	71 87	72 42	72 97	73 52	74 07	74 62	75 17	75 72
790	76 27	76 82	77 37	77 92	78 47	79 02	79 57	80 12	80 67	81 22
791	81 76	82 31	82 86	83 41	83 96	84 51	85 06	85 61	86 15	86 70
792	87 25	87 80	88 35	88 90	89 44	89 99	90 54	91 09	91 64	92 18
793	92 73	93 28	93 83	94 37	94 92	95 47	96 02	96 56	97 11	97 66
794	98 21	98 75	99 30	99 85	*00 39	*00 94	*01 49	*02 03	*02 58	*03 12
795	90 03 67	04 22	04 76	05 31	05 86	06 40	06 95	07 49	08 04	08 59
796	09 13	09 68	10 22	10 77	11 31	11 86	12 40	12 95	13 49	14 04
797	14 58	15 13	15 67	16 22	16 76	17 31	17 85	18 40	18 94	19 48
798	20 03	20 57	21 12	21 66	22 21	22 75	23 29	23 84	24 38	24 92
799	25 47	26 01	26 55	27 10	27 64	28 18	28 73	29 27	29 81	30 36
800	30 90	31 44	31 99	32 53	33 07	33 61	34 16	34 70	35 24	35 78

P. P.	58	57	56	55	54
1	5,8	5,7	5,6	5,5	5,4
2	11,6	11,4	11,2	11,0	10,8
3	17,4	17,1	16,8	16,5	16,2
4	23,2	22,8	22,4	22,0	21,6
5	29,0	28,5	28,0	27,5	27,0
6	34,8	34,2	33,6	33,0	32,4
7	40,6	39,9	39,2	38,5	37,8
8	46,4	45,6	44,8	44,0	43,2
9	52,2	51,3	50,4	49,5	48,6

801—850

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
801	90 36 33	36 87	37 41	37 95	38 49	39 04	39 58	40 12	40 66	41 20
802	41 74	42 29	42 83	43 37	43 91	44 45	44 99	45 53	46 07	46 61
803	47 16	47 70	48 24	48 78	49 32	49 86	50 40	50 94	51 48	52 02
804	52 56	53 10	53 64	54 18	54 72	55 26	55 80	56 34	56 88	57 42
805	57 96	58 50	59 04	59 58	60 12	60 66	61 19	61 73	62 27	62 81
806	63 35	63 89	64 43	64 97	65 51	66 04	66 58	67 12	67 66	68 20
807	68 74	69 27	69 81	70 35	70 89	71 43	71 96	72 50	73 04	73 58
808	74 11	74 65	75 19	75 73	76 26	76 80	77 34	77 87	78 41	78 95
809	79 49	80 02	80 56	81 10	81 63	82 17	82 70	83 24	83 78	84 31
810	84 85	85 39	85 92	86 46	86 99	87 53	88 07	88 60	89 14	89 67
811	90 21	90 74	91 28	91 81	92 35	92 89	93 42	93 96	94 49	95 03
812	95 56	96 10	96 63	97 16	97 70	98 23	98 77	99 30	99 84	*00 37
813	91 00 91	01 44	01 97	02 51	03 04	03 58	04 11	04 64	05 18	05 71
814	06 24	06 78	07 31	07 84	08 38	08 91	09 44	09 98	10 51	11 04
815	11 58	12 11	12 64	13 17	13 71	14 24	14 77	15 30	15 84	16 37
816	16 90	17 43	17 97	18 50	19 03	19 56	20 09	20 63	21 16	21 69
817	22 22	22 75	23 28	23 81	24 35	24 88	25 41	25 94	26 47	27 00
818	27 53	28 06	28 59	29 13	29 66	30 19	30 72	31 25	31 78	32 31
819	32 84	33 37	33 90	34 43	34 96	35 49	36 02	36 55	37 08	37 61
820	38 14	38 67	39 20	39 73	40 26	40 79	41 32	41 84	42 37	42 90
821	43 43	43 96	44 49	45 02	45 55	46 08	46 60	47 13	47 66	48 19
822	48 72	49 25	49 77	50 30	50 83	51 36	51 89	52 41	52 94	53 47
823	54 00	54 53	55 05	55 58	56 11	56 64	57 16	57 69	58 22	58 75
824	59 27	59 80	60 33	60 85	61 38	61 91	62 43	62 96	63 49	64 01
825	64 54	65 07	65 59	66 12	66 64	67 17	67 70	68 22	68 75	69 27
826	69 80	70 33	70 85	71 38	71 90	72 43	72 95	73 48	74 00	74 53
827	75 06	75 58	76 11	76 63	77 16	77 68	78 20	78 73	79 25	79 78
828	80 30	80 83	81 35	81 88	82 40	82 93	83 45	83 97	84 50	85 02
829	85 55	86 07	86 59	87 12	87 64	88 16	88 69	89 21	89 73	90 26
830	90 78	91 30	91 83	92 35	92 87	93 40	93 92	94 44	94 96	95 49
831	96 01	96 53	97 06	97 58	98 10	98 62	99 14	99 67	*00 19	*00 71
832	92 01 23	01 76	02 28	02 80	03 32	03 84	04 36	04 89	05 41	05 93
833	06 45	06 97	07 49	08 01	08 53	09 06	09 58	10 10	10 62	11 14
834	11 66	12 18	12 70	13 22	13 74	14 26	14 78	15 30	15 82	16 34
835	16 86	17 38	17 90	18 42	18 94	19 46	19 98	20 50	21 02	21 54
836	22 06	22 58	23 10	23 62	24 14	24 66	25 18	25 70	26 22	26 74
837	27 25	27 77	28 29	28 81	29 33	29 85	30 37	30 89	31 40	31 92
838	32 44	32 96	33 48	33 99	34 51	35 03	35 55	36 07	36 58	37 10
839	37 62	38 14	38 65	39 17	39 69	40 21	40 72	41 24	41 76	42 28
840	42 79	43 31	43 83	44 34	44 86	45 38	45 89	46 41	46 93	47 44
841	47 96	48 48	48 99	49 51	50 03	50 54	51 06	51 57	52 09	52 61
842	53 12	53 64	54 15	54 67	55 18	55 70	56 21	56 73	57 25	57 76
843	58 28	58 79	59 31	59 82	60 34	60 85	61 37	61 88	62 40	62 91
844	63 42	63 94	64 45	64 97	65 48	66 00	66 51	67 02	67 54	68 05
845	68 57	69 08	69 59	70 11	70 62	71 14	71 65	72 16	72 68	73 19
846	73 70	74 22	74 73	75 24	75 76	76 27	76 78	77 30	77 81	78 32
847	78 83	79 35	79 86	80 37	80 88	81 40	81 91	82 42	82 93	83 45
848	83 96	84 47	84 98	85 49	86 01	86 52	87 03	87 54	88 05	88 57
849	89 08	89 59	90 10	90 61	91 12	91 63	92 15	92 66	93 17	93 68
850	94 19	94 70	95 21	95 72	96 23	96 74	97 25	97 76	98 27	98 79

P. P.	55	54	53	52	51
1	5,5	5,4	5,3	5,2	5,1
2	11,0	10,8	10,6	10,4	10,2
3	16,5	16,2	15,9	15,6	15,3
4	22,0	21,6	21,2	20,8	20,4
5	27,5	27,0	26,5	26,0	25,5
6	33,0	32,4	31,8	31,2	30,6
7	38,5	37,8	37,1	36,4	35,7
8	44,0	43,2	42,4	41,6	40,8
9	49,5	48,6	47,7	46,8	45,9

851—900

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
851	92 99 30	99 81	*00 32	*00 83	*01 34	*01 85	*02 36	*02 87	*03 38	*03 89
852	93 04 40	04 91	05 42	05 92	06 43	06 94	07 45	07 96	08 47	08 98
853	09 49	10 00	10 51	11 02	11 53	12 04	12 54	13 05	13 56	14 07
854	14 58	15 09	15 60	16 10	16 61	17 12	17 63	18 14	18 65	19 15
855	19 66	20 17	20 68	21 18	21 69	22 20	22 71	23 22	23 72	24 23
856	24 74	25 24	25 75	26 26	26 77	27 27	27 78	28 29	28 79	29 30
857	29 81	30 31	30 82	31 33	31 83	32 34	32 85	33 35	33 86	34 37
858	34 87	35 38	35 89	36 39	36 90	37 40	37 91	38 41	38 92	39 43
859	39 93	40 44	40 94	41 45	41 95	42 46	42 96	43 47	43 97	44 48
860	44 98	45 49	45 99	46 50	47 00	47 51	48 01	48 52	49 02	49 53
861	50 03	50 54	51 04	51 54	52 05	52 55	53 06	53 56	54 06	54 57
862	55 07	55 58	56 08	56 58	57 09	57 59	58 09	58 60	59 10	59 60
863	60 11	60 61	61 11	61 62	62 12	62 62	63 13	63 63	64 13	64 63
864	65 14	65 64	66 14	66 65	67 15	67 65	68 15	68 65	69 16	69 66
865	70 16	70 66	71 17	71 67	72 17	72 67	73 17	73 67	74 18	74 68
866	75 18	75 68	76 18	76 68	77 18	77 69	78 19	78 69	79 19	79 69
867	80 19	80 69	81 19	81 69	82 19	82 69	83 20	83 70	84 20	84 70
868	85 20	85 70	86 20	86 70	87 20	87 70	88 20	88 70	89 20	89 70
869	90 20	90 70	91 20	91 70	92 20	92 70	93 20	93 69	94 19	94 69
870	95 19	95 69	96 19	96 69	97 19	97 69	98 19	98 69	99 18	99 68
871	94 00 18	00 68	01 18	01 68	02 18	02 67	03 17	03 67	04 17	04 67
872	05 16	05 66	06 16	06 66	07 16	07 65	08 15	08 65	09 15	09 64
873	10 14	10 64	11 14	11 63	12 13	12 63	13 13	13 62	14 12	14 62
874	15 11	15 61	16 11	16 60	17 10	17 60	18 09	18 59	19 09	19 58
875	20 08	20 58	21 07	21 57	22 07	22 56	23 06	23 55	24 05	24 55
876	25 04	25 54	26 03	26 53	27 02	27 52	28 01	28 51	29 01	29 50
877	30 00	30 49	30 99	31 48	31 98	32 47	32 97	33 46	33 96	34 45
878	34 95	35 44	35 93	36 43	36 92	37 42	37 91	38 41	38 90	39 39
879	39 89	40 38	40 88	41 37	41 86	42 36	42 85	43 35	43 84	44 33
880	44 83	45 32	45 81	46 31	46 80	47 29	47 79	48 28	48 77	49 27
881	49 76	50 25	50 74	51 24	51 73	52 22	52 72	53 21	53 70	54 19
882	54 69	55 18	55 67	56 16	56 65	57 15	57 64	58 13	58 62	59 12
883	59 61	60 10	60 59	61 08	61 57	62 07	62 56	63 05	63 54	64 03
884	64 52	65 01	65 51	66 00	66 49	66 98	67 47	67 96	68 45	68 94
885	69 43	69 92	70 41	70 90	71 40	71 89	72 38	72 87	73 36	73 85
886	74 34	74 83	75 32	75 81	76 30	76 79	77 28	77 77	78 26	78 75
887	79 24	79 73	80 22	80 70	81 19	81 68	82 17	82 66	83 15	83 64
888	84 13	84 62	85 11	85 60	86 09	86 57	87 06	87 55	88 04	88 53
889	89 02	89 51	89 99	90 48	90 97	91 46	91 95	92 44	92 92	93 41
890	93 90	94 39	94 88	95 36	95 85	96 34	96 83	97 31	97 80	98 29
891	98 78	99 26	99 75	*00 24	*00 73	*01 21	*01 70	*02 19	*02 67	*03 16
892	95 03 65	04 14	04 62	05 11	05 60	06 08	06 57	07 06	07 54	08 03
893	08 51	09 00	09 49	09 97	10 46	10 95	11 43	11 92	12 40	12 89
894	13 38	13 86	14 35	14 83	15 32	15 80	16 29	16 77	17 26	17 75
895	18 23	18 72	19 20	19 69	20 17	20 66	21 14	21 63	22 11	22 60
896	23 08	23 56	24 05	24 53	25 02	25 50	25 99	26 47	26 96	27 44
897	27 92	28 41	28 89	29 38	29 86	30 34	30 83	31 31	31 80	32 28
898	32 76	33 25	33 73	34 21	34 70	35 18	35 66	36 15	36 63	37 11
899	37 60	38 08	38 56	39 05	39 53	40 01	40 49	40 98	41 46	41 94
900	42 43	42 91	43 39	43 87	44 35	44 84	45 32	45 80	46 28	46 77

P. P.	52	51	50	49	48
1	5,2	5,1	5,0	4,9	4,8
2	10,4	10,2	10,0	9,8	9,6
3	15,6	15,3	15,0	14,7	14,4
4	20,8	20,4	20,0	19,6	19,2
5	26,0	25,5	25,0	24,5	24,0
6	31,2	30,6	30,0	29,4	28,8
7	36,4	35,7	35,0	34,3	33,6
8	41,6	40,8	40,0	39,2	38,4
9	46,8	45,9	45,0	44,1	43,2

901—950

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
901	95 47 25	47 73	48 21	48 69	49 18	49 66	50 14	50 62	51 10	51 58
902	52 07	52 55	53 03	53 51	53 99	54 47	54 95	55 43	55 92	56 40
903	56 88	57 36	57 84	58 32	58 80	59 28	59 76	60 24	60 72	61 20
904	61 68	62 16	62 65	63 13	63 61	64 09	64 57	65 05	65 53	66 01
905	66 49	66 97	67 45	67 93	68 40	68 88	69 36	69 84	70 32	70 80
906	71 28	71 76	72 24	72 72	73 20	73 68	74 16	74 64	75 12	75 59
907	76 07	76 55	77 03	77 51	77 99	78 47	78 94	79 42	79 90	80 38
908	80 86	81 34	81 81	82 29	82 77	83 25	83 73	84 21	84 68	85 16
909	85 64	86 12	86 59	87 07	87 55	88 03	88 50	88 98	89 46	89 94
910	90 41	90 89	91 37	91 85	92 32	92 80	93 28	93 75	94 23	94 71
911	95 18	95 66	96 14	96 61	97 09	97 57	98 04	98 52	99 00	99 47
912	99 95	*00 42	*00 90	*01 38	*01 85	*02 33	*02 80	*03 28	*03 76	*04 23
913	96 04 71	05 18	05 66	06 13	06 61	07 09	07 56	08 04	08 51	08 99
914	09 46	09 94	10 41	10 89	11 36	11 84	12 31	12 79	13 26	13 74
915	14 21	14 69	15 16	15 63	16 11	16 58	17 06	17 53	18 01	18 48
916	18 95	19 43	19 90	20 38	20 85	21 32	21 80	22 27	22 75	23 22
917	23 69	24 17	24 64	25 11	25 59	26 06	26 53	27 01	27 48	27 95
918	28 43	28 90	29 37	29 85	30 32	30 79	31 26	31 74	32 21	32 68
919	33 16	33 63	34 10	34 57	35 04	35 52	35 99	36 46	36 93	37 41
920	37 88	38 35	38 82	39 29	39 77	40 24	40 71	41 18	41 65	42 12
921	42 60	43 07	43 54	44 01	44 48	44 95	45 42	45 90	46 37	46 84
922	47 31	47 78	48 25	48 72	49 19	49 66	50 13	50 61	51 08	51 55
923	52 02	52 49	52 96	53 43	53 90	54 37	54 84	55 31	55 78	56 25
924	56 72	57 19	57 66	58 13	58 60	59 07	59 54	60 01	60 48	60 95
925	61 42	61 89	62 36	62 83	63 29	63 76	64 23	64 70	65 17	65 64
926	66 11	66 58	67 05	67 52	67 99	68 45	68 92	69 39	69 86	70 33
927	70 80	71 27	71 73	72 20	72 67	73 14	73 61	74 08	74 54	75 01
928	75 48	75 95	76 42	76 88	77 35	77 82	78 29	78 75	79 22	79 69
929	80 16	80 62	81 09	81 56	82 03	82 49	82 96	83 43	83 90	84 36
930	84 83	85 30	85 76	86 23	86 70	87 16	87 63	88 10	88 56	89 03
931	89 50	89 96	90 43	90 90	91 36	91 83	92 29	92 76	93 23	93 69
932	94 16	94 63	95 09	95 56	96 02	96 49	96 95	97 42	97 89	98 35
933	98 82	99 28	99 75	*00 21	*00 68	*01 14	*01 61	*02 07	*02 54	*03 00
934	97 03 47	03 93	04 40	04 86	05 33	05 79	06 26	06 72	07 19	07 65
935	08 12	08 58	09 04	09 51	09 97	10 44	10 90	11 37	11 83	12 29
936	12 76	13 22	13 69	14 15	14 61	15 08	15 54	16 01	16 47	16 93
937	17 40	17 86	18 32	18 79	19 25	19 71	20 18	20 64	21 10	21 57
938	22 03	22 49	22 95	23 42	23 88	24 34	24 81	25 27	25 73	26 19
939	26 66	27 12	27 58	28 04	28 51	28 97	29 43	29 89	30 35	30 82
940	31 28	31 74	32 20	32 66	33 13	33 59	34 05	34 51	34 97	35 43
941	35 90	36 36	36 82	37 28	37 74	38 20	38 66	39 13	39 59	40 05
942	40 51	40 97	41 43	41 89	42 35	42 81	43 27	43 74	44 20	44 66
943	45 12	45 58	46 04	46 50	46 96	47 42	47 88	48 34	48 80	49 26
944	49 72	50 18	50 64	51 10	51 56	52 02	52 48	52 94	53 40	53 86
945	54 32	54 78	55 24	55 70	56 16	56 62	57 07	57 53	57 99	58 45
946	58 91	59 37	59 83	60 29	60 75	61 21	61 67	62 12	62 58	63 04
947	63 50	63 96	64 42	64 88	65 33	65 79	66 25	66 71	67 17	67 63
948	68 08	68 54	69 00	69 46	69 92	70 37	70 83	71 29	71 75	72 20
949	72 66	73 12	73 58	74 03	74 49	74 95	75 41	75 86	76 32	76 78
950	77 24	77 69	78 15	78 61	79 06	79 52	79 98	80 43	80 89	81 35

P. P.	49	48	47	46	45
1	4, 9	4, 8	4, 7	4, 6	4, 5
2	9, 8	9, 6	9, 4	9, 2	9, 0
3	14, 7	14, 4	14, 1	13, 8	13, 5
4	19, 6	19, 2	18, 8	18, 4	18, 0
5	24, 5	24, 0	23, 5	23, 0	22, 5
6	29, 4	28, 8	28, 2	27, 6	27, 0
7	34, 3	33, 6	32, 9	32, 2	31, 5
8	39, 2	38, 4	37, 6	36, 8	36, 0
9	44, 1	43, 2	42, 3	41, 4	40, 5

951—1000

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
951	97 81 81	82 26	82 72	83 17	83 63	84 09	84 54	85 00	85 46	85 91
952	86 37	86 83	87 28	87 74	88 19	88 65	89 11	89 56	90 02	90 47
953	90 93	91 38	91 84	92 30	92 75	93 21	93 66	94 12	94 57	95 03
954	95 48	95 94	96 39	96 85	97 30	97 76	98 21	98 67	99 12	99 58
955	98 00 03	00 49	00 94	01 40	01 85	02 31	02 76	03 22	03 67	04 12
956	04 58	05 03	05 49	05 94	06 40	06 85	07 30	07 76	08 21	08 67
957	09 12	09 57	10 03	10 48	10 93	11 39	11 84	12 29	12 75	13 20
958	13 66	14 11	14 56	15 01	15 47	15 92	16 37	16 83	17 28	17 73
959	18 19	18 64	19 09	19 54	20 00	20 45	20 90	21 35	21 81	22 26
960	22 71	23 16	23 62	24 07	24 52	24 97	25 43	25 88	26 33	26 78
961	27 23	27 69	28 14	28 59	29 04	29 49	29 94	30 40	30 85	31 30
962	31 75	32 20	32 65	33 10	33 56	34 01	34 46	34 91	35 36	35 81
963	36 26	36 71	37 16	37 62	38 07	38 52	38 97	39 42	39 87	40 32
964	40 77	41 22	41 67	42 12	42 57	43 02	43 47	43 92	44 37	44 82
965	45 27	45 72	46 17	46 62	47 07	47 52	47 97	48 42	48 87	49 32
966	49 77	50 22	50 67	51 12	51 57	52 02	52 47	52 92	53 37	53 82
967	54 26	54 71	55 16	55 61	56 06	56 51	56 96	57 41	57 86	58 30
968	58 75	59 20	59 65	60 10	60 55	61 00	61 44	61 89	62 34	62 79
969	63 24	63 69	64 13	64 58	65 03	65 48	65 93	66 37	66 82	67 27
970	67 72	68 17	68 61	69 06	69 51	69 96	70 40	70 85	71 30	71 75
971	72 19	72 64	73 09	73 53	73 98	74 43	74 88	75 32	75 77	76 22
972	76 66	77 11	77 56	78 00	78 45	78 90	79 34	79 79	80 24	80 68
973	81 13	81 57	82 02	82 47	82 91	83 36	83 81	84 25	84 70	85 14
974	85 59	86 04	86 48	86 93	87 37	87 82	88 26	88 71	89 16	89 60
975	90 05	90 49	90 94	91 38	91 83	92 27	92 72	93 16	93 61	94 05
976	94 50	94 94	95 39	95 83	96 28	96 72	97 17	97 61	98 06	98 50
977	98 95	99 39	99 83	*00 28	*00 72	*01 17	*01 61	*02 06	*02 50	*02 94
978	99 03 39	03 83	04 28	04 72	05 16	05 61	06 05	06 50	06 94	07 38
979	07 83	08 27	08 71	09 16	09 60	10 04	10 49	10 93	11 37	11 82
980	12 26	12 70	13 15	13 59	14 03	14 48	14 92	15 36	15 80	16 25
981	16 69	17 13	17 58	18 02	18 46	18 90	19 35	19 79	20 23	20 67
982	21 11	21 56	22 00	22 44	22 88	23 33	23 77	24 21	24 65	25 09
983	25 54	25 98	26 42	26 86	27 30	27 74	28 19	28 63	29 07	29 51
984	29 95	30 39	30 83	31 27	31 72	32 16	32 60	33 04	33 48	33 92
985	34 36	34 80	35 24	35 68	36 13	36 57	37 01	37 45	37 89	38 33
986	38 77	39 21	39 65	40 09	40 53	40 97	41 41	41 85	42 29	42 73
987	43 17	43 61	44 05	44 49	44 93	45 37	45 81	46 25	46 69	47 13
988	47 57	48 01	48 45	48 89	49 33	49 77	50 21	50 65	51 08	51 52
989	51 96	52 40	52 84	53 28	53 72	54 16	54 60	55 04	55 47	55 91
990	56 35	56 79	57 23	57 67	58 11	58 54	58 98	59 42	59 86	60 30
991	60 74	61 17	61 61	62 05	62 49	62 93	63 37	63 80	64 24	64 68
992	65 12	65 55	65 99	66 43	66 87	67 31	67 74	68 18	68 62	69 06
993	69 49	69 93	70 37	70 80	71 24	71 68	72 12	72 55	72 99	73 43
994	73 86	74 30	74 74	75 17	75 61	76 05	76 48	76 92	77 36	77 79
995	78 23	78 67	79 10	79 54	79 98	80 41	80 85	81 29	81 72	82 16
996	82 59	83 03	83 47	83 90	84 34	84 77	85 21	85 64	86 08	86 52
997	86 95	87 39	87 82	88 26	88 69	89 13	89 56	90 00	90 43	90 87
998	91 31	91 74	92 18	92 61	93 05	93 48	93 92	94 35	94 79	95 22
999	95 65	96 09	96 52	96 96	97 39	97 83	98 26	98 70	99 13	99 57
1 000	00 00 00	00 43	00 87	01 30	01 74	02 17	02 60	03 04	03 47	03 91

P. P.	46	45	44	43
1	4, 6	4, 5	4, 4	4, 3
2	9, 2	9, 0	8, 8	8, 6
3	13, 8	13, 5	13, 2	12, 9
4	18, 4	18, 0	17, 6	17, 2
5	23, 0	22, 5	22, 0	21, 6
6	27, 6	27, 0	26, 4	25, 8
7	32, 2	31, 5	30, 8	30, 1
8	36, 8	36, 0	35, 2	34, 4
9	41, 4	40, 5	39, 6	38, 7

Таблица 3. НАТУРАЛЬНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

0°

1°

'	sin	tg	ctg	cos	'	'	sin	tg	ctg	cos	'
0	0,0000000	0,000000	∞	1,000000	60	0	0,0174524	0,017455	57,28996	0,9998477	60
1	0,0002909	0,000291	3437,747	1,000000	59	1	0,0177432	0,017746	56,35059	0,9998426	59
2	0,0005818	0,000582	1718,873	0,9999998	58	2	0,0180341	0,018037	55,44152	0,9998374	58
3	0,0008727	0,000873	1145,916	0,9999996	57	3	0,0183249	0,018328	54,56130	0,9998321	57
4	0,0011636	0,001164	859,4363	0,9999993	56	4	0,0186158	0,018619	53,70859	0,9998267	56
5	0,0014544	0,001454	687,5489	0,9999989	55	5	0,0189066	0,018910	52,88211	0,9998213	55
6	0,0017453	0,001745	572,9572	0,9999985	54	6	0,0191974	0,019201	52,08067	0,9998157	54
7	0,0020362	0,002036	491,1060	0,9999979	53	7	0,0194883	0,019492	51,30316	0,9998101	53
8	0,0023271	0,002327	429,7176	0,9999973	52	8	0,0197791	0,019783	50,54851	0,9998044	52
9	0,0026180	0,002618	381,9710	0,9999966	51	9	0,0200699	0,020074	49,81573	0,9997986	51
10	0,0029089	0,002909	343,7737	0,9999958	50	10	0,0203608	0,020365	49,10388	0,9997927	50
11	0,0031998	0,003200	312,5214	0,9999949	49	11	0,0206516	0,020656	48,41208	0,9997867	49
12	0,0034907	0,003491	286,4777	0,9999939	48	12	0,0209424	0,020947	47,73950	0,9997807	48
13	0,0037815	0,003782	264,4408	0,9999928	47	13	0,0212332	0,021238	47,08534	0,9997745	47
14	0,0040724	0,004072	245,5520	0,9999917	46	14	0,0215241	0,021529	46,44886	0,9997683	46
15	0,0043633	0,004363	229,1817	0,9999905	45	15	0,0218149	0,021820	45,82935	0,9997620	45
16	0,0046542	0,004654	214,8576	0,9999892	44	16	0,0221057	0,022111	45,22614	0,9997556	44
17	0,0049451	0,004945	202,2187	0,9999878	43	17	0,0223965	0,022402	44,63860	0,9997492	43
18	0,0052360	0,005236	190,9842	0,9999863	42	18	0,0226873	0,022693	44,06611	0,9997426	42
19	0,0055268	0,005527	180,9322	0,9999847	41	19	0,0229781	0,022984	43,50812	0,9997360	41
20	0,0058177	0,005818	171,8854	0,9999831	40	20	0,0232690	0,023275	42,96408	0,9997292	40
21	0,0061086	0,006109	163,7002	0,9999813	39	21	0,0235598	0,023566	42,43346	0,9997224	39
22	0,0063995	0,006400	156,2591	0,9999795	38	22	0,0238506	0,023857	41,91579	0,9997155	38
23	0,0066904	0,006691	149,4650	0,9999776	37	23	0,0241414	0,024148	41,41059	0,9997086	37
24	0,0069813	0,006981	143,2371	0,9999756	36	24	0,0244322	0,024439	40,91741	0,9997015	36
25	0,0072721	0,007272	137,5074	0,9999736	35	25	0,0247230	0,024731	40,43584	0,9996943	35
26	0,0075630	0,007563	132,2185	0,9999714	34	26	0,0250138	0,025022	39,96546	0,9996871	34
27	0,0078539	0,007854	127,3213	0,9999692	33	27	0,0253046	0,025313	39,50589	0,9996798	33
28	0,0081448	0,008145	122,7740	0,9999668	32	28	0,0255954	0,025604	39,05677	0,9996724	32
29	0,0084357	0,008436	118,5402	0,9999644	31	29	0,0258862	0,025895	38,61774	0,9996649	31
30	0,0087265	0,008727	114,5887	0,9999619	30	30	0,0261769	0,026186	38,18846	0,9996573	30
31	0,0090174	0,009018	110,8921	0,9999593	29	31	0,0264677	0,026477	37,76861	0,9996497	29
32	0,0093083	0,009309	107,4265	0,9999567	28	32	0,0267585	0,026768	37,35789	0,9996419	28
33	0,0095992	0,009601	104,1709	0,9999539	27	33	0,0270493	0,027059	36,95600	0,9996341	27
34	0,0098900	0,009891	101,1069	0,9999511	26	34	0,0273401	0,027350	36,56266	0,9996262	26
35	0,0101809	0,010181	98,21794	0,9999482	25	35	0,0276309	0,027641	36,17760	0,9996182	25
36	0,0104718	0,010472	95,48948	0,9999452	24	36	0,0279216	0,027933	35,80055	0,9996101	24
37	0,0107627	0,010763	92,90849	0,9999421	23	37	0,0282124	0,028224	35,43128	0,9996020	23
38	0,0110535	0,011054	90,46334	0,9999389	22	38	0,0285032	0,028515	35,06955	0,9995937	22
39	0,0113444	0,011345	88,14357	0,9999357	21	39	0,0287940	0,028806	34,71511	0,9995854	21
40	0,0116353	0,011636	85,93979	0,9999323	20	40	0,0290847	0,029097	34,36777	0,9995770	20
41	0,0119261	0,011927	83,84351	0,9999289	19	41	0,0293755	0,029388	34,02730	0,9995684	19
42	0,0122170	0,012218	81,84704	0,9999254	18	42	0,0296662	0,029679	33,69351	0,9995599	18
43	0,0125079	0,012509	79,94343	0,9999218	17	43	0,0299570	0,029970	33,36619	0,9995512	17
44	0,0127987	0,012800	78,12634	0,9999181	16	44	0,0302478	0,030262	33,04517	0,9995424	16
45	0,0130896	0,013091	76,39001	0,9999143	15	45	0,0305385	0,030553	32,73026	0,9995336	15
46	0,0133805	0,013382	74,72917	0,9999105	14	46	0,0308293	0,030844	32,42129	0,9995247	14
47	0,0136713	0,013673	73,13899	0,9999065	13	47	0,0311200	0,031135	32,11810	0,9995157	13
48	0,0139622	0,013964	71,61507	0,9999025	12	48	0,0314108	0,031426	31,82052	0,9995066	12
49	0,0142530	0,014254	70,15335	0,9998984	11	49	0,0317015	0,031717	31,52839	0,9994974	11
50	0,0145439	0,014545	68,75009	0,9998942	10	50	0,0319922	0,032009	31,24158	0,9994881	10
51	0,0148348	0,014836	67,40185	0,9998900	9	51	0,0322830	0,032300	30,95993	0,9994788	9
52	0,0151256	0,015127	66,10547	0,9998856	8	52	0,0325737	0,032591	30,68331	0,9994693	8
53	0,0154165	0,015418	64,85801	0,9998812	7	53	0,0328644	0,032882	30,41158	0,9994598	7
54	0,0157073	0,015709	63,65674	0,9998766	6	54	0,0331552	0,033173	30,14462	0,9994502	6
55	0,0159982	0,016000	62,49915	0,9998720	5	55	0,0334459	0,033465	29,88230	0,9994405	5
56	0,0162890	0,016291	61,38291	0,9998673	4	56	0,0337366	0,033756	29,62450	0,9994308	4
57	0,0165799	0,016582	60,30582	0,9998625	3	57	0,0340274	0,034047	29,37111	0,9994209	3
58	0,0168707	0,016873	59,26587	0,9998577	2	58	0,0343181	0,034338	29,12200	0,9994110	2
59	0,0171616	0,017164	58,26117	0,9998527	1	59	0,0346088	0,034630	28,87709	0,9994009	1

89°

88°

2°

3°

'	sin	tg	ctg	cos	'	'	sin	tg	ctg	cos	'
0	0,0348995	0,034921	28,63625	0,9993908	60	0	0,0523360	0,052408	19,08114	0,9986295	60
1	0,0351902	0,035212	28,39940	0,9993806	59	1	0,0526264	0,052699	18,97552	0,9986143	59
2	0,0354809	0,035503	28,16642	0,9993704	58	2	0,0529169	0,052991	18,87107	0,9985989	58
3	0,0357716	0,035795	27,93723	0,9993600	57	3	0,0532074	0,053283	18,76775	0,9985835	57
4	0,0360623	0,036086	27,71174	0,9993495	56	4	0,0534979	0,053575	18,66556	0,9985680	56
5	0,0363530	0,036377	27,48985	0,9993390	55	5	0,0537883	0,053866	18,56447	0,9985524	55
6	0,0366437	0,036668	27,27149	0,9993284	54	6	0,0540788	0,054158	18,46447	0,9985367	54
7	0,0369344	0,036960	27,05656	0,9993177	53	7	0,0543693	0,054450	18,36554	0,9985209	53
8	0,0372251	0,037251	26,84498	0,9993069	52	8	0,0546597	0,054742	18,26765	0,9985050	52
9	0,0375158	0,037542	26,63669	0,9992960	51	9	0,0549502	0,055033	18,17081	0,9984891	51
10	0,0378065	0,037834	26,43160	0,9992851	50	10	0,0552406	0,055325	18,07498	0,9984731	50
11	0,0380971	0,038125	26,22964	0,9992740	49	11	0,0555311	0,055617	17,98015	0,9984570	49
12	0,0383878	0,038416	26,03074	0,9992629	48	12	0,0558215	0,055909	17,88631	0,9984408	48
13	0,0386785	0,038707	25,83482	0,9992517	47	13	0,0561119	0,056200	17,79344	0,9984245	47
14	0,0389692	0,038999	25,64183	0,9992404	46	14	0,0564024	0,056492	17,70153	0,9984081	46
15	0,0392598	0,039290	25,45170	0,9992290	45	15	0,0566928	0,056784	17,61056	0,9983917	45
16	0,0395505	0,039581	25,26436	0,9992176	44	16	0,0569832	0,057076	17,52052	0,9983751	44
17	0,0398411	0,039873	25,07976	0,9992060	43	17	0,0572736	0,057368	17,43139	0,9983585	43
18	0,0401318	0,040164	24,89783	0,9991944	42	18	0,0575640	0,057660	17,34315	0,9983418	42
19	0,0404224	0,040456	24,71851	0,9991827	41	19	0,0578544	0,057951	17,25581	0,9983250	41
20	0,0407131	0,040747	24,54176	0,9991709	40	20	0,0581448	0,058243	17,16934	0,9983082	40
21	0,0410037	0,041038	24,36751	0,9991590	39	21	0,0584352	0,058535	17,08372	0,9982912	39
22	0,0412944	0,041330	24,19571	0,9991470	38	22	0,0587256	0,058827	16,99896	0,9982742	38
23	0,0415850	0,041621	24,02632	0,9991350	37	23	0,0590160	0,059119	16,91503	0,9982570	37
24	0,0418757	0,041912	23,85928	0,9991228	36	24	0,0593064	0,059411	16,83191	0,9982398	36
25	0,0421663	0,042204	23,69454	0,9991106	35	25	0,0595967	0,059703	16,74961	0,9982225	35
26	0,0424569	0,042495	23,53205	0,9990983	34	26	0,0598871	0,059995	16,66811	0,9982052	34
27	0,0427475	0,042787	23,37178	0,9990859	33	27	0,0601775	0,060287	16,58740	0,9981877	33
28	0,0430382	0,043078	23,21367	0,9990734	32	28	0,0604678	0,060579	16,50746	0,9981701	32
29	0,0433288	0,043370	23,05768	0,9990609	31	29	0,0607582	0,060871	16,42828	0,9981525	31
30	0,0436194	0,043661	22,90377	0,9990482	30	30	0,0610485	0,061163	16,34986	0,9981348	30
31	0,0439100	0,043952	22,75189	0,9990355	29	31	0,0613389	0,061455	16,27217	0,9981170	29
32	0,0442006	0,044244	22,60201	0,9990227	28	32	0,0616292	0,061747	16,19523	0,9980991	28
33	0,0444912	0,044535	22,45410	0,9990098	27	33	0,0619196	0,062039	16,11900	0,9980811	27
34	0,0447818	0,044827	22,30810	0,9989968	26	34	0,0622099	0,062331	16,04348	0,9980631	26
35	0,0450724	0,045118	22,16398	0,9989837	25	35	0,0625002	0,062623	15,96867	0,9980450	25
36	0,0453630	0,045410	22,02171	0,9989706	24	36	0,0627905	0,062915	15,89454	0,9980267	24
37	0,0456536	0,045701	21,88125	0,9989573	23	37	0,0630808	0,063207	15,82110	0,9980084	23
38	0,0459442	0,045993	21,74257	0,9989440	22	38	0,0633711	0,063499	15,74834	0,9979900	22
39	0,0462347	0,046284	21,60563	0,9989306	21	39	0,0636614	0,063791	15,67623	0,9979716	21
40	0,0465253	0,046576	21,47040	0,9989171	20	40	0,0639517	0,064083	15,60478	0,9979530	20
41	0,0468159	0,046867	21,33685	0,9989035	19	41	0,0642420	0,064375	15,53398	0,9979343	19
42	0,0471065	0,047159	21,20495	0,9988899	18	42	0,0645323	0,064667	15,46381	0,9979156	18
43	0,0473970	0,047450	21,07466	0,9988761	17	43	0,0648226	0,064959	15,39428	0,9978968	17
44	0,0476876	0,047742	20,94597	0,9988623	16	44	0,0651129	0,065251	15,32536	0,9978779	16
45	0,0479781	0,048033	20,81883	0,9988484	15	45	0,0654031	0,065543	15,25705	0,9978589	15
46	0,0482687	0,048325	20,69322	0,9988344	14	46	0,0656934	0,065836	15,18935	0,9978399	14
47	0,0485592	0,048617	20,56911	0,9988203	13	47	0,0659836	0,066128	15,12224	0,9978207	13
48	0,0488498	0,048908	20,44649	0,9988061	12	48	0,0662739	0,066420	15,05572	0,9978015	12
49	0,0491403	0,049200	20,32531	0,9987919	11	49	0,0665641	0,066712	14,98978	0,9977821	11
50	0,0494308	0,049491	20,20555	0,9987775	10	50	0,0668544	0,067004	14,92442	0,9977627	10
51	0,0497214	0,049783	20,08720	0,9987631	9	51	0,0671446	0,067296	14,85962	0,9977433	9
52	0,0500119	0,050075	19,97022	0,9987486	8	52	0,0674349	0,067589	14,79537	0,9977237	8
53	0,0503024	0,050366	19,85459	0,9987340	7	53	0,0677251	0,067881	14,73168	0,9977040	7
54	0,0505929	0,050658	19,74029	0,9987194	6	54	0,0680153	0,068173	14,66853	0,9976843	6
55	0,0508835	0,050949	19,62730	0,9987046	5	55	0,0683055	0,068465	14,60592	0,9976645	5
56	0,0511740	0,051241	19,51558	0,9986898	4	56	0,0685957	0,068758	14,54383	0,9976445	4
57	0,0514645	0,051533	19,40513	0,9986748	3	57	0,0688859	0,069050	14,48227	0,9976245	3
58	0,0517550	0,051824	19,29592	0,9986598	2	58	0,0691761	0,069342	14,42123	0,9976045	2
59	0,0520455	0,052116	19,18793	0,9986447	1	59	0,0694663	0,069635	14,36070	0,9975843	1
'	cos	ctg	tg	sin	'	'	cos	ctg	tg	sin	'

87°

86°

4°

5°

	sin	tg	ctg	cos			sin	tg	ctg	cos	
0	0,0697565	0,069927	14,30067	0,9975641	60	0	0,0871557	0,087489	11,43005	0,9961947	60
1	0,0700467	0,070219	14,24113	0,9975437	59	1	0,0874455	0,087782	11,39188	0,9961693	59
2	0,0703368	0,070511	14,18209	0,9975233	58	2	0,0877353	0,088075	11,35397	0,9961438	58
3	0,0706270	0,070804	14,12354	0,9975028	57	3	0,0880251	0,088368	11,31630	0,9961183	57
4	0,0709171	0,071096	14,06546	0,9974822	56	4	0,0883148	0,088661	11,27889	0,9960926	56
5	0,0712073	0,071389	14,00786	0,9974615	55	5	0,0886046	0,088954	11,24171	0,9960669	55
6	0,0714974	0,071681	13,95072	0,9974408	54	6	0,0888943	0,089248	11,20478	0,9960411	54
7	0,0717876	0,071973	13,89405	0,9974199	53	7	0,0891840	0,089541	11,16809	0,9960152	53
8	0,0720777	0,072266	13,83783	0,9973990	52	8	0,0894738	0,089834	11,13164	0,9959892	52
9	0,0723678	0,072558	13,78206	0,9973780	51	9	0,0897635	0,090127	11,09542	0,9959631	51
10	0,0726580	0,072851	13,72674	0,9973569	50	10	0,0900532	0,090421	11,05943	0,9959370	50
11	0,0729481	0,073143	13,67186	0,9973357	49	11	0,0903429	0,090714	11,02368	0,9959107	49
12	0,0732382	0,073435	13,61741	0,9973145	48	12	0,0906326	0,091007	10,98815	0,9958844	48
13	0,0735283	0,073728	13,56339	0,9972931	47	13	0,0909223	0,091300	10,95285	0,9958580	47
14	0,0738184	0,074020	13,50980	0,9972717	46	14	0,0912119	0,091594	10,91777	0,9958315	46
15	0,0741085	0,074313	13,45663	0,9972502	45	15	0,0915016	0,091887	10,88292	0,9958049	45
16	0,0743986	0,074605	13,40387	0,9972286	44	16	0,0917913	0,092180	10,84892	0,9957783	44
17	0,0746887	0,074898	13,35152	0,9972069	43	17	0,0920809	0,092474	10,81387	0,9957515	43
18	0,0749787	0,075190	13,29957	0,9971851	42	18	0,0923706	0,092767	10,77967	0,9957247	42
19	0,0752688	0,075483	13,24803	0,9971633	41	19	0,0926602	0,093061	10,74569	0,9956978	41
20	0,0755589	0,075775	13,19688	0,9971413	40	20	0,0929499	0,093354	10,71191	0,9956708	40
21	0,0758489	0,076068	13,14613	0,9971193	39	21	0,0932395	0,093647	10,67835	0,9956437	39
22	0,0761390	0,076361	13,09576	0,9970972	38	22	0,0935291	0,093941	10,64499	0,9956165	38
23	0,0764290	0,076653	13,04577	0,9970750	37	23	0,0938187	0,094234	10,61184	0,9955893	37
24	0,0767190	0,076946	12,99616	0,9970528	36	24	0,0941083	0,094528	10,57890	0,9955620	36
25	0,0770091	0,077238	12,94692	0,9970304	35	25	0,0943979	0,094821	10,54615	0,9955345	35
26	0,0772991	0,077531	12,89806	0,9970080	34	26	0,0946875	0,095115	10,51361	0,9955070	34
27	0,0775891	0,077824	12,84956	0,9969854	33	27	0,0949771	0,095408	10,48126	0,9954795	33
28	0,0778791	0,078116	12,80142	0,9969628	32	28	0,0952666	0,095702	10,44911	0,9954518	32
29	0,0781691	0,078409	12,75363	0,9969401	31	29	0,0955562	0,095995	10,41716	0,9954240	31
30	0,0784591	0,078702	12,70620	0,9969173	30	30	0,0958458	0,096289	10,38540	0,9953962	30
31	0,0787491	0,078994	12,65912	0,9968945	29	31	0,0961353	0,096583	10,35383	0,9953683	29
32	0,0790391	0,079287	12,61239	0,9968715	28	32	0,0964248	0,096876	10,32245	0,9953403	28
33	0,0793290	0,079580	12,56600	0,9968485	27	33	0,0967144	0,097170	10,29126	0,9953122	27
34	0,0796190	0,079873	12,51994	0,9968254	26	34	0,0970039	0,097464	10,26025	0,9952840	26
35	0,0799090	0,080165	12,47422	0,9968022	25	35	0,0972934	0,097757	10,22943	0,9952557	25
36	0,0801989	0,080458	12,42883	0,9967789	24	36	0,0975829	0,098051	10,19879	0,9952274	24
37	0,0804889	0,080751	12,38377	0,9967555	23	37	0,0978724	0,098345	10,16833	0,9951990	23
38	0,0807788	0,081044	12,33903	0,9967321	22	38	0,0981619	0,098638	10,13805	0,9951705	22
39	0,0810687	0,081336	12,29461	0,9967085	21	39	0,0984514	0,098932	10,10795	0,9951419	21
40	0,0813587	0,081629	12,25051	0,9966849	20	40	0,0987408	0,099226	10,07803	0,9951132	20
41	0,0816486	0,081922	12,20672	0,9966612	19	41	0,0990303	0,099519	10,04828	0,9950844	19
42	0,0819385	0,082215	12,16324	0,9966374	18	42	0,0993197	0,099813	10,01871	0,9950556	18
43	0,0822284	0,082508	12,12006	0,9966135	17	43	0,0996092	0,100107	9,989305	0,9950266	17
44	0,0825183	0,082801	12,07719	0,9965895	16	44	0,0998986	0,100401	9,960072	0,9949976	16
45	0,0828082	0,083094	12,03462	0,9965655	15	45	0,1001881	0,100695	9,931009	0,9949685	15
46	0,0830981	0,083386	11,99235	0,9965414	14	46	0,1004775	0,100989	9,902112	0,9949393	14
47	0,0833880	0,083679	11,95037	0,9965172	13	47	0,1007669	0,101282	9,873382	0,9949101	13
48	0,0836778	0,083972	11,90868	0,9964929	12	48	0,1010563	0,101576	9,844817	0,9948807	12
49	0,0839677	0,084265	11,86728	0,9964685	11	49	0,1013457	0,101870	9,816414	0,9948513	11
50	0,0842576	0,084558	11,82617	0,9964440	10	50	0,1016351	0,102164	9,788173	0,9948217	10
51	0,0845474	0,084851	11,78533	0,9964195	9	51	0,1019245	0,102458	9,760093	0,9947921	9
52	0,0848373	0,085144	11,74478	0,9963948	8	52	0,1022138	0,102752	9,732171	0,9947625	8
53	0,0851271	0,085437	11,70450	0,9963701	7	53	0,1025032	0,103046	9,704407	0,9947327	7
54	0,0854169	0,085730	11,66450	0,9963453	6	54	0,1027925	0,103340	9,676800	0,9947028	6
55	0,0857067	0,086023	11,62476	0,9963204	5	55	0,1030819	0,103634	9,649347	0,9946729	5
56	0,0859966	0,086316	11,58529	0,9962954	4	56	0,1033712	0,103928	9,622049	0,9946428	4
57	0,0862864	0,086609	11,54609	0,9962704	3	57	0,1036605	0,104222	9,594902	0,9946127	3
58	0,0865762	0,086902	11,50715	0,9962452	2	58	0,1039499	0,104516	9,567907	0,9945825	2
59	0,0868660	0,087196	11,46847	0,9962200	1	59	0,1042392	0,104810	9,541061	0,9945523	1
	cos	ctg	tg	sin			cos	ctg	tg	sin	

85°

84°

6°

7°

	sin	tg	ctg	cos			sin	tg	ctg	cos	
0	0,1045285	0,105104	9,514364	0,9945219	60	0	0,1218693	0,122785	8,144346	0,9925462	60
1	0,1048178	0,105398	9,487815	0,9944914	59	1	0,1221581	0,123080	8,124807	0,9925107	59
2	0,1051070	0,105692	9,461412	0,9944609	58	2	0,1224468	0,123375	8,105360	0,9924751	58
3	0,1053963	0,105987	9,435153	0,9944303	57	3	0,1227355	0,123670	8,086004	0,9924394	57
4	0,1056856	0,106281	9,409038	0,9943996	56	4	0,1230241	0,123966	8,066739	0,9924037	56
5	0,1059748	0,106575	9,383066	0,9943688	55	5	0,1233128	0,124261	8,047565	0,9923679	55
6	0,1062641	0,106869	9,357235	0,9943379	54	6	0,1236015	0,124557	8,028480	0,9923319	54
7	0,1065533	0,107163	9,331545	0,9943070	53	7	0,1238901	0,124852	8,009483	0,9922959	53
8	0,1068425	0,107458	9,305994	0,9942760	52	8	0,1241788	0,125147	7,990576	0,9922599	52
9	0,1071318	0,107752	9,280580	0,9942448	51	9	0,1244674	0,125443	7,971755	0,9922237	51
10	0,1074210	0,108046	9,255303	0,9942136	50	10	0,1247560	0,125738	7,953022	0,9921874	50
11	0,1077102	0,108340	9,230163	0,9941823	49	11	0,1250446	0,126034	7,934376	0,9921511	49
12	0,1079994	0,108635	9,205156	0,9941510	48	12	0,1253332	0,126329	7,915815	0,9921147	48
13	0,1082885	0,108929	9,180284	0,9941195	47	13	0,1256218	0,126625	7,897240	0,9920782	47
14	0,1085777	0,109223	9,155544	0,9940880	46	14	0,1259104	0,126920	7,878649	0,9920416	46
15	0,1088669	0,109518	9,130935	0,9940563	45	15	0,1261990	0,127216	7,860042	0,9920049	45
16	0,1091560	0,109812	9,106456	0,9940246	44	16	0,1264875	0,127512	7,842419	0,9919682	44
17	0,1094452	0,110107	9,082107	0,9939928	43	17	0,1267761	0,127807	7,824279	0,9919314	43
18	0,1097343	0,110401	9,057887	0,9939610	42	18	0,1270646	0,128103	7,806221	0,9918944	42
19	0,1100234	0,110695	9,033793	0,9939290	41	19	0,1273531	0,128399	7,788245	0,9918574	41
20	0,1103126	0,110990	9,009826	0,9938969	40	20	0,1276416	0,128694	7,770351	0,9918204	40
21	0,1106017	0,111284	8,985984	0,9938648	39	21	0,1279302	0,128990	7,752537	0,9917832	39
22	0,1108908	0,111579	8,962267	0,9938326	38	22	0,1282186	0,129286	7,734803	0,9917459	38
23	0,1111799	0,111873	8,938673	0,9938003	37	23	0,1285071	0,129582	7,717149	0,9917086	37
24	0,1114689	0,112168	8,915201	0,9937679	36	24	0,1287956	0,129877	7,699573	0,9916712	36
25	0,1117580	0,112463	8,891850	0,9937355	35	25	0,1290841	0,130173	7,682077	0,9916337	35
26	0,1120471	0,112757	8,868621	0,9937029	34	26	0,1293725	0,130469	7,664658	0,9915961	34
27	0,1123361	0,113052	8,845510	0,9936703	33	27	0,1296609	0,130765	7,647317	0,9915584	33
28	0,1126252	0,113346	8,822519	0,9936375	32	28	0,1299494	0,131061	7,630053	0,9915206	32
29	0,1129142	0,113641	8,799645	0,9936047	31	29	0,1302378	0,131357	7,612866	0,9914828	31
30	0,1132032	0,113936	8,776887	0,9935719	30	30	0,1305262	0,131652	7,595754	0,9914449	30
31	0,1134922	0,114230	8,754246	0,9935389	29	31	0,1308146	0,131948	7,578718	0,9914069	29
32	0,1137812	0,114525	8,731720	0,9935058	28	32	0,1311030	0,132244	7,561757	0,9913688	28
33	0,1140702	0,114820	8,709308	0,9934727	27	33	0,1313913	0,132540	7,544870	0,9913306	27
34	0,1143592	0,115114	8,687009	0,9934395	26	34	0,1316797	0,132836	7,528057	0,9912923	26
35	0,1146482	0,115409	8,664822	0,9934062	25	35	0,1319681	0,133132	7,511318	0,9912540	25
36	0,1149372	0,115704	8,642747	0,9933728	24	36	0,1322564	0,133428	7,494651	0,9912155	24
37	0,1152261	0,115999	8,620783	0,9933393	23	37	0,1325447	0,133725	7,478058	0,9911770	23
38	0,1155151	0,116294	8,598929	0,9933057	22	38	0,1328330	0,134021	7,461536	0,9911384	22
39	0,1158040	0,116588	8,577184	0,9932721	21	39	0,1331213	0,134317	7,445085	0,9910997	21
40	0,1160929	0,116883	8,555547	0,9932384	20	40	0,1334096	0,134613	7,428706	0,9910610	20
41	0,1163818	0,117178	8,534017	0,9932045	19	41	0,1336979	0,134909	7,412398	0,9910221	19
42	0,1166707	0,117473	8,512594	0,9931706	18	42	0,1339862	0,135205	7,396159	0,9909832	18
43	0,1169596	0,117768	8,491277	0,9931367	17	43	0,1342744	0,135502	7,379991	0,9909442	17
44	0,1172485	0,118063	8,470065	0,9931026	16	44	0,1345627	0,135798	7,363892	0,9909051	16
45	0,1175374	0,118358	8,448957	0,9930685	15	45	0,1348509	0,136094	7,347861	0,9908659	15
46	0,1178263	0,118653	8,427953	0,9930342	14	46	0,1351392	0,136390	7,331899	0,9908266	14
47	0,1181151	0,118948	8,407051	0,9929999	13	47	0,1354274	0,136687	7,316005	0,9907873	13
48	0,1184040	0,119243	8,386252	0,9929655	12	48	0,1357156	0,136983	7,300178	0,9907478	12
49	0,1186928	0,119538	8,365554	0,9929310	11	49	0,1360038	0,137279	7,284418	0,9907083	11
50	0,1189816	0,119833	8,344956	0,9928965	10	50	0,1362919	0,137576	7,268725	0,9906687	10
51	0,1192704	0,120128	8,324458	0,9928618	9	51	0,1365801	0,137872	7,253099	0,9906290	9
52	0,1195593	0,120423	8,304059	0,9928271	8	52	0,1368683	0,138169	7,237538	0,9905893	8
53	0,1198481	0,120718	8,283758	0,9927922	7	53	0,1371564	0,138465	7,222042	0,9905494	7
54	0,1201368	0,121013	8,263555	0,9927573	6	54	0,1374445	0,138761	7,206612	0,9905095	6
55	0,1204256	0,121308	8,243448	0,9927224	5	55	0,1377327	0,139053	7,191246	0,9904694	5
56	0,1207144	0,121604	8,223438	0,9926873	4	56	0,1380208	0,139354	7,175944	0,9904293	4
57	0,1210031	0,121899	8,203524	0,9926521	3	57	0,1383089	0,139651	7,160706	0,9903891	3
58	0,1212919	0,122194	8,183704	0,9926169	2	58	0,1385970	0,139948	7,145531	0,9903489	2
59	0,1215806	0,122489	8,163979	0,9925816	1	59	0,1388850	0,140244	7,130419	0,9903085	1

	cos	ctg	tg	sin			cos	ctg	tg	sin	
--	-----	-----	----	-----	--	--	-----	-----	----	-----	--

83°

82°

8°

9°

	sin	tg	ctg	cos			sin	tg	ctg	cos	
0	0,1391731	0,140541	7,115370	0,9902681	60	0	0,1564345	0,158384	6,313751	0,9876883	60
1	0,1394612	0,140837	7,100383	0,9902275	59	1	0,1567218	0,158683	6,301887	0,9876428	59
2	0,1397492	0,141134	7,085457	0,9901869	58	2	0,1570091	0,158981	6,290065	0,9875972	58
3	0,1400372	0,141431	7,070593	0,9901462	57	3	0,1572963	0,159279	6,278287	0,9875514	57
4	0,1403252	0,141728	7,055790	0,9901055	56	4	0,1575836	0,159577	6,266551	0,9875057	56
5	0,1406132	0,142024	7,041048	0,9900646	55	5	0,1578708	0,159876	6,254859	0,9874598	55
6	0,1409012	0,142321	7,026366	0,9900237	54	6	0,1581581	0,160174	6,243209	0,9874138	54
7	0,1411892	0,142618	7,011744	0,9899826	53	7	0,1584453	0,160472	6,231601	0,9873678	53
8	0,1414772	0,142915	6,997182	0,9899415	52	8	0,1587325	0,160771	6,220035	0,9873216	52
9	0,1417651	0,143212	6,982678	0,9899003	51	9	0,1590197	0,161069	6,208511	0,9872754	51
10	0,1420531	0,143508	6,968233	0,9898590	50	10	0,1593069	0,161368	6,197028	0,9872291	50
11	0,1423410	0,143805	6,953847	0,9898177	49	11	0,1595940	0,161666	6,185587	0,9871827	49
12	0,1426289	0,144102	6,939519	0,9897762	48	12	0,1598812	0,161965	6,174186	0,9871363	48
13	0,1429168	0,144399	6,925249	0,9897347	47	13	0,1601683	0,162263	6,162827	0,9870897	47
14	0,1432047	0,144696	6,911036	0,9896931	46	14	0,1604555	0,162562	6,151508	0,9870431	46
15	0,1434926	0,144993	6,896880	0,9896514	45	15	0,1607426	0,162860	6,140230	0,9869964	45
16	0,1437805	0,145290	6,882781	0,9896096	44	16	0,1610297	0,163159	6,128992	0,9869496	44
17	0,1440684	0,145587	6,868738	0,9895677	43	17	0,1613167	0,163458	6,117794	0,9869027	43
18	0,1443562	0,145884	6,854751	0,9895258	42	18	0,1616038	0,163756	6,106636	0,9868557	42
19	0,1446440	0,146181	6,840820	0,9894838	41	19	0,1618909	0,164055	6,095517	0,9868087	41
20	0,1449319	0,146478	6,826944	0,9894416	40	20	0,1621779	0,164354	6,084438	0,9867615	40
21	0,1452197	0,146776	6,813123	0,9893994	39	21	0,1624650	0,164652	6,073398	0,9867143	39
22	0,1455075	0,147073	6,799356	0,9893572	38	22	0,1627520	0,164951	6,062397	0,9866670	38
23	0,1457953	0,147370	6,785645	0,9893148	37	23	0,1630390	0,165250	6,051434	0,9866196	37
24	0,1460830	0,147667	6,771987	0,9892723	36	24	0,1633260	0,165549	6,040510	0,9865722	36
25	0,1463708	0,147964	6,758383	0,9892298	35	25	0,1636129	0,165848	6,029625	0,9865246	35
26	0,1466585	0,148262	6,744832	0,9891872	34	26	0,1638999	0,166147	6,018777	0,9864770	34
27	0,1469463	0,148559	6,731334	0,9891445	33	27	0,1641868	0,166446	6,007968	0,9864293	33
28	0,1472340	0,148856	6,717889	0,9891017	32	28	0,1644738	0,166745	5,997196	0,9863815	32
29	0,1475217	0,149154	6,704497	0,9890588	31	29	0,1647607	0,167044	5,986461	0,9863336	31
30	0,1478094	0,149451	6,691156	0,9890159	30	30	0,1650476	0,167343	5,975764	0,9862856	30
31	0,1480971	0,149748	6,677868	0,9889728	29	31	0,1653345	0,167642	5,965104	0,9862375	29
32	0,1483848	0,150046	6,664631	0,9889297	28	32	0,1656214	0,167941	5,954481	0,9861894	28
33	0,1486724	0,150343	6,651445	0,9888865	27	33	0,1659082	0,168240	5,943895	0,9861412	27
34	0,1489601	0,150641	6,638310	0,9888432	26	34	0,1661951	0,168539	5,933345	0,9860929	26
35	0,1492477	0,150938	6,625226	0,9887998	25	35	0,1664819	0,168838	5,922832	0,9860445	25
36	0,1495353	0,151236	6,612192	0,9887564	24	36	0,1667687	0,169137	5,912355	0,9859960	24
37	0,1498230	0,151533	6,599208	0,9887128	23	37	0,1670556	0,169437	5,901914	0,9859475	23
38	0,1501106	0,151831	6,586274	0,9886692	22	38	0,1673423	0,169736	5,891508	0,9858988	22
39	0,1503981	0,152129	6,573389	0,9886255	21	39	0,1676291	0,170035	5,881139	0,9858501	21
40	0,1506857	0,152426	6,560554	0,9885817	20	40	0,1679159	0,170334	5,870804	0,9858013	20
41	0,1509733	0,152724	6,547767	0,9885378	19	41	0,1682026	0,170634	5,860505	0,9857524	19
42	0,1512608	0,153022	6,535029	0,9884939	18	42	0,1684894	0,170933	5,850241	0,9857035	18
43	0,1515484	0,153319	6,522340	0,9884498	17	43	0,1687761	0,171233	5,840012	0,9856544	17
44	0,1518359	0,153617	6,509698	0,9884057	16	44	0,1690628	0,171532	5,829817	0,9856053	16
45	0,1521234	0,153915	6,497104	0,9883615	15	45	0,1693495	0,171831	5,819657	0,9855561	15
46	0,1524109	0,154213	6,484558	0,9883172	14	46	0,1696362	0,172131	5,809531	0,9855068	14
47	0,1526984	0,154510	6,472059	0,9882728	13	47	0,1699228	0,172430	5,799440	0,9854574	13
48	0,1529858	0,154808	6,459607	0,9882284	12	48	0,1702095	0,172730	5,789382	0,9854079	12
49	0,1532733	0,155106	6,447202	0,9881838	11	49	0,1704961	0,173030	5,779359	0,9853583	11
50	0,1535607	0,155404	6,434843	0,9881392	10	50	0,1707828	0,173329	5,769369	0,9853087	10
51	0,1538482	0,155702	6,422530	0,9880945	9	51	0,1710694	0,173629	5,759412	0,9852590	9
52	0,1541356	0,156000	6,410263	0,9880497	8	52	0,1713560	0,173929	5,749489	0,9852092	8
53	0,1544230	0,156298	6,398042	0,9880048	7	53	0,1716425	0,174228	5,739599	0,9851593	7
54	0,1547104	0,156596	6,385866	0,9879599	6	54	0,1719291	0,174528	5,729742	0,9851093	6
55	0,1549978	0,156894	6,373736	0,9879148	5	55	0,1722156	0,174828	5,719917	0,9850593	5
56	0,1552851	0,157192	6,361650	0,9878697	4	56	0,1725022	0,175127	5,710126	0,9850091	4
57	0,1555725	0,157490	6,349609	0,9878245	3	57	0,1727887	0,175427	5,700366	0,9849589	3
58	0,1558598	0,157788	6,337613	0,9877792	2	58	0,1730752	0,175727	5,690639	0,9849086	2
59	0,1561472	0,158086	6,325660	0,9877338	1	59	0,1733617	0,176027	5,680945	0,9848582	1

81°

80°

10°

11°

	sin	tg	ctg	cos			sin	tg	ctg	cos	
0	0,1736482	0,176327	5,671282	0,9848078	60	0	0,1908090	0,194380	5,144554	0,9816272	60
1	0,1739346	0,176627	5,661651	0,9847572	59	1	0,1910945	0,194682	5,136576	0,9815716	59
2	0,1742211	0,176927	5,652052	0,9847066	58	2	0,1913801	0,194984	5,128622	0,9815160	58
3	0,1745075	0,177227	5,642484	0,9846558	57	3	0,1916656	0,195286	5,120692	0,9814603	57
4	0,1747939	0,177527	5,632947	0,9846050	56	4	0,1919510	0,195588	5,112785	0,9814045	56
5	0,1750803	0,177827	5,623442	0,9845542	55	5	0,1922365	0,195890	5,104902	0,9813486	55
6	0,1753667	0,178127	5,613968	0,9845032	54	6	0,1925220	0,196192	5,097043	0,9812927	54
7	0,1756531	0,178427	5,604525	0,9844521	53	7	0,1928074	0,196494	5,089206	0,9812366	53
8	0,1759395	0,178727	5,595112	0,9844010	52	8	0,1930928	0,196796	5,081393	0,9811805	52
9	0,1762258	0,179028	5,585730	0,9843498	51	9	0,1933782	0,197099	5,073602	0,9811243	51
10	0,1765121	0,179328	5,576379	0,9842985	50	10	0,1936636	0,197401	5,065835	0,9810680	50
11	0,1767984	0,179628	5,567057	0,9842471	49	11	0,1939490	0,197703	5,058091	0,9810116	49
12	0,1770847	0,179928	5,557766	0,9841956	48	12	0,1942344	0,198005	5,050369	0,9809552	48
13	0,1773710	0,180229	5,548505	0,9841441	47	13	0,1945197	0,198308	5,042670	0,9808986	47
14	0,1776573	0,180529	5,539274	0,9840924	46	14	0,1948050	0,198610	5,034993	0,9808420	46
15	0,1779435	0,180829	5,530072	0,9840407	45	15	0,1950903	0,198912	5,027339	0,9807853	45
16	0,1782298	0,181130	5,520900	0,9839889	44	16	0,1953756	0,199215	5,019708	0,9807285	44
17	0,1785160	0,181430	5,511758	0,9839370	43	17	0,1956609	0,199517	5,012093	0,9806716	43
18	0,1788022	0,181731	5,502645	0,9838850	42	18	0,1959461	0,199820	5,004511	0,9806147	42
19	0,1790884	0,182031	5,493560	0,9838330	41	19	0,1962314	0,200122	4,996946	0,9805576	41
20	0,1793746	0,182332	5,484505	0,9837808	40	20	0,1965166	0,200425	4,989403	0,9805005	40
21	0,1796607	0,182632	5,475479	0,9837286	39	21	0,1968018	0,200727	4,981881	0,9804433	39
22	0,1799469	0,182933	5,466481	0,9836763	38	22	0,1970870	0,201030	4,974382	0,9803860	38
23	0,1802330	0,183234	5,457512	0,9836239	37	23	0,1973722	0,201333	4,966904	0,9803286	37
24	0,1805191	0,183534	5,448571	0,9835715	36	24	0,1976573	0,201635	4,959447	0,9802712	36
25	0,1808052	0,183835	5,439659	0,9835189	35	25	0,1979425	0,201938	4,952012	0,9802136	35
26	0,1810913	0,184136	5,430775	0,9834663	34	26	0,1982276	0,202241	4,944599	0,9801560	34
27	0,1813774	0,184437	5,421919	0,9834136	33	27	0,1985127	0,202544	4,937207	0,9800983	33
28	0,1816635	0,184737	5,413091	0,9833608	32	28	0,1987978	0,202847	4,929836	0,9800405	32
29	0,1819495	0,185038	5,404290	0,9833079	31	29	0,1990829	0,203149	4,922486	0,9799827	31
30	0,1822355	0,185339	5,395517	0,9832549	30	30	0,1993679	0,203452	4,915157	0,9799247	30
31	0,1825215	0,185640	5,386772	0,9832019	29	31	0,1996530	0,203755	4,907849	0,9798667	29
32	0,1828075	0,185941	5,378054	0,9831487	28	32	0,1999380	0,204058	4,900562	0,9798086	28
33	0,1830935	0,186242	5,369363	0,9830955	27	33	0,2002230	0,204361	4,893296	0,9797504	27
34	0,1833795	0,186543	5,360699	0,9830422	26	34	0,2005080	0,204664	4,886050	0,9796921	26
35	0,1836654	0,186844	5,352063	0,9829888	25	35	0,2007930	0,204967	4,878825	0,9796337	25
36	0,1839514	0,187145	5,343453	0,9829353	24	36	0,2010779	0,205271	4,871620	0,9795752	24
37	0,1842373	0,187446	5,334870	0,9828818	23	37	0,2013629	0,205571	4,864436	0,9795167	23
38	0,1845232	0,187747	5,326313	0,9828282	22	38	0,2016478	0,205877	4,857272	0,9794581	22
39	0,1848091	0,188048	5,317783	0,9827744	21	39	0,2019327	0,206180	4,850128	0,9793994	21
40	0,1850949	0,188349	5,309279	0,9827206	20	40	0,2022176	0,206483	4,843004	0,9793406	20
41	0,1853808	0,188651	5,300802	0,9826668	19	41	0,2025024	0,206787	4,835901	0,9792818	19
42	0,1856666	0,188952	5,292350	0,9826128	18	42	0,2027873	0,207090	4,828817	0,9792228	18
43	0,1859524	0,189253	5,283925	0,9825587	17	43	0,2030721	0,207393	4,821754	0,9791638	17
44	0,1862382	0,189555	5,275525	0,9825046	16	44	0,2033569	0,207697	4,814710	0,9791047	16
45	0,1865240	0,189856	5,267152	0,9824504	15	45	0,2036418	0,208000	4,807685	0,9790455	15
46	0,1868098	0,190157	5,258803	0,9823961	14	46	0,2039265	0,208304	4,800681	0,9789862	14
47	0,1870956	0,190459	5,250481	0,9823417	13	47	0,2042113	0,208607	4,793696	0,9789268	13
48	0,1873813	0,190760	5,242184	0,9822873	12	48	0,2044961	0,208911	4,786730	0,9788674	12
49	0,1876670	0,191062	5,233912	0,9822327	11	49	0,2047808	0,209214	4,779784	0,9788079	11
50	0,1879528	0,191363	5,225665	0,9821781	10	50	0,2050655	0,209518	4,772857	0,9787483	10
51	0,1882385	0,191665	5,217443	0,9821234	9	51	0,2053502	0,209822	4,765949	0,9786886	9
52	0,1885241	0,191966	5,209246	0,9820686	8	52	0,2056349	0,210126	4,759060	0,9786288	8
53	0,1888098	0,192268	5,201074	0,9820137	7	53	0,2059195	0,210429	4,752191	0,9785689	7
54	0,1890954	0,192570	5,192926	0,9819587	6	54	0,2062042	0,210733	4,745340	0,9785090	6
55	0,1893811	0,192871	5,184803	0,9819037	5	55	0,2064888	0,211037	4,738508	0,9784490	5
56	0,1896667	0,193173	5,176705	0,9818485	4	56	0,2067734	0,211341	4,731695	0,9783889	4
57	0,1899523	0,193475	5,168631	0,9817933	3	57	0,2070580	0,211645	4,724901	0,9783287	3
58	0,1902379	0,193777	5,160581	0,9817380	2	58	0,2073426	0,211949	4,718126	0,9782684	2
59	0,1905234	0,194078	5,152556	0,9816826	1	59	0,2076272	0,212253	4,711369	0,9782080	1
	cos	ctg	tg	sin			cos	ctg	tg	sin	

79°

78°

12°

13°

'	sin	tg	ctg	cos	'	'	sin	tg	ctg	cos	'
0	0,2079117	0,212557	4,704630	0,9781476	60	0	0,2249511	0,230868	4,331476	0,9743701	60
1	0,2081962	0,212861	4,697910	0,9780871	59	1	0,2252345	0,231175	4,325735	0,9743046	59
2	0,2084807	0,213165	4,691208	0,9780265	58	2	0,2255179	0,231481	4,320008	0,9742390	58
3	0,2087652	0,213469	4,684525	0,9779658	57	3	0,2258013	0,231788	4,314295	0,9741734	57
4	0,2090497	0,213773	4,677859	0,9779050	56	4	0,2260846	0,232094	4,308597	0,9741077	56
5	0,2093341	0,214077	4,671212	0,9778442	55	5	0,2263680	0,232401	4,302914	0,9740419	55
6	0,2096186	0,214381	4,664583	0,9777832	54	6	0,2266513	0,232707	4,297244	0,9739760	54
7	0,2099030	0,214686	4,657972	0,9777222	53	7	0,2269346	0,233014	4,291588	0,9739100	53
8	0,2101874	0,214990	4,651379	0,9776611	52	8	0,2272179	0,233321	4,285947	0,9738439	52
9	0,2104718	0,215294	4,644803	0,9775999	51	9	0,2275012	0,233627	4,280320	0,9737778	51
10	0,2107561	0,215599	4,638246	0,9775387	50	10	0,2277844	0,233934	4,274707	0,9737116	50
11	0,2110405	0,215903	4,631706	0,9774773	49	11	0,2280677	0,234241	4,269107	0,9736453	49
12	0,2113248	0,216208	4,625183	0,9774159	48	12	0,2283509	0,234548	4,263522	0,9735789	48
13	0,2116091	0,216512	4,618678	0,9773544	47	13	0,2286341	0,234855	4,257950	0,9735124	47
14	0,2118934	0,216817	4,612191	0,9772928	46	14	0,2289172	0,235162	4,252392	0,9734459	46
15	0,2121777	0,217121	4,605721	0,9772311	45	15	0,2292004	0,235469	4,246848	0,9733793	45
16	0,2124619	0,217426	4,599268	0,9771693	44	16	0,2294835	0,235776	4,241318	0,9733125	44
17	0,2127462	0,217731	4,592832	0,9771075	43	17	0,2297666	0,236083	4,235801	0,9732458	43
18	0,2130304	0,218035	4,586414	0,9770456	42	18	0,2300497	0,236390	4,230298	0,9731789	42
19	0,2133146	0,218340	4,580013	0,9769836	41	19	0,2303328	0,236697	4,224808	0,9731119	41
20	0,2135988	0,218645	4,573629	0,9769215	40	20	0,2306159	0,237004	4,219332	0,9730449	40
21	0,2138829	0,218950	4,567261	0,9768593	39	21	0,2308989	0,237312	4,213869	0,9729777	39
22	0,2141671	0,219254	4,560911	0,9767970	38	22	0,2311819	0,237619	4,208420	0,9729105	38
23	0,2144512	0,219559	4,554578	0,9767347	37	23	0,2314649	0,237926	4,202983	0,9728432	37
24	0,2147353	0,219864	4,548261	0,9766723	36	24	0,2317479	0,238234	4,197561	0,9727759	36
25	0,2150194	0,220169	4,541961	0,9766098	35	25	0,2320309	0,238541	4,192151	0,9727084	35
26	0,2153035	0,220474	4,535677	0,9765472	34	26	0,2323138	0,238848	4,186755	0,9726409	34
27	0,2155876	0,220779	4,529410	0,9764845	33	27	0,2325967	0,239156	4,181371	0,9725733	33
28	0,2158716	0,221084	4,523160	0,9764218	32	28	0,2328796	0,239464	4,176001	0,9725056	32
29	0,2161556	0,221389	4,516926	0,9763589	31	29	0,2331625	0,239771	4,170644	0,9724378	31
30	0,2164396	0,221695	4,510708	0,9762960	30	30	0,2334454	0,240079	4,165300	0,9723699	30
31	0,2167236	0,222000	4,504507	0,9762330	29	31	0,2337282	0,240386	4,159968	0,9723020	29
32	0,2170076	0,222305	4,498322	0,9761699	28	32	0,2340110	0,240694	4,154650	0,9722339	28
33	0,2172915	0,222610	4,492153	0,9761068	27	33	0,2342938	0,241002	4,149345	0,9721658	27
34	0,2175754	0,222916	4,486000	0,9760435	26	34	0,2345766	0,241310	4,144032	0,9720976	26
35	0,2178593	0,223221	4,479864	0,9759802	25	35	0,2348594	0,241618	4,138772	0,9720294	25
36	0,2181432	0,223526	4,473743	0,9759168	24	36	0,2351421	0,241925	4,133505	0,9719610	24
37	0,2184271	0,223832	4,467638	0,9758533	23	37	0,2354248	0,242233	4,128250	0,9718926	23
38	0,2187110	0,224137	4,461549	0,9757897	22	38	0,2357075	0,242541	4,123008	0,9718240	22
39	0,2189948	0,224443	4,455476	0,9757260	21	39	0,2359902	0,242849	4,117778	0,9717554	21
40	0,2192786	0,224748	4,449418	0,9756623	20	40	0,2362729	0,243157	4,112561	0,9716867	20
41	0,2195624	0,225054	4,443376	0,9755985	19	41	0,2365555	0,243466	4,107357	0,9716180	19
42	0,2198462	0,225360	4,437350	0,9755345	18	42	0,2368381	0,243774	4,102165	0,9715491	18
43	0,2201300	0,225665	4,431339	0,9754706	17	43	0,2371207	0,244082	4,096985	0,9714802	17
44	0,2204137	0,225971	4,425344	0,9754065	16	44	0,2374033	0,244390	4,091818	0,9714112	16
45	0,2206974	0,226277	4,419364	0,9753423	15	45	0,2376859	0,244698	4,086663	0,9713421	15
46	0,2209811	0,226583	4,413400	0,9752781	14	46	0,2379684	0,245007	4,081520	0,9712729	14
47	0,2212648	0,226889	4,407450	0,9752138	13	47	0,2382510	0,245315	4,076389	0,9712036	13
48	0,2215485	0,227194	4,401516	0,9751494	12	48	0,2385335	0,245624	4,071271	0,9711343	12
49	0,2218321	0,227500	4,395598	0,9750849	11	49	0,2388159	0,245932	4,066164	0,9710649	11
50	0,2221158	0,227806	4,389694	0,9750203	10	50	0,2390984	0,246241	4,061070	0,9709953	10
51	0,2223994	0,228112	4,383805	0,9749556	9	51	0,2393808	0,246549	4,055988	0,9709258	9
52	0,2226830	0,228418	4,377932	0,9748909	8	52	0,2396633	0,246858	4,050917	0,9708561	8
53	0,2229666	0,228724	4,372073	0,9748261	7	53	0,2399457	0,247166	4,045859	0,9707863	7
54	0,2232501	0,229031	4,366229	0,9747612	6	54	0,2402280	0,247475	4,040812	0,9707165	6
55	0,2235337	0,229337	4,360400	0,9746962	5	55	0,2405104	0,247784	4,035778	0,9706466	5
56	0,2238172	0,229643	4,354586	0,9746311	4	56	0,2407927	0,248092	4,030755	0,9705766	4
57	0,2241007	0,229949	4,348787	0,9745660	3	57	0,2410751	0,248401	4,025744	0,9705065	3
58	0,2243842	0,230255	4,343002	0,9745008	2	58	0,2413574	0,248710	4,020745	0,9704363	2
59	0,2246676	0,230562	4,337232	0,9744355	1	59	0,2416396	0,249019	4,015757	0,9703661	1
'	cos	ctg	tg	sin	'	'	cos	ctg	tg	sin	'

77°

76°

14°

15°

'	sin	tg	ctg	cos	'	'	sin	tg	ctg	cos	'
0	0,2419219	0,249328	4,010781	0,9702957	60	0	0,2588190	0,267949	3,732051	0,9659258	60
1	0,2422041	0,249637	4,005816	0,9702253	59	1	0,2591000	0,268261	3,727713	0,9658505	59
2	0,2424863	0,249946	4,000864	0,9701548	58	2	0,2593810	0,268573	3,723385	0,9657751	58
3	0,2427685	0,250255	3,995922	0,9700842	57	3	0,2596619	0,268885	3,719066	0,9656996	57
4	0,2430507	0,250564	3,990992	0,9700136	56	4	0,2599428	0,269197	3,714756	0,9656240	56
5	0,2433329	0,250873	3,986074	0,9699428	55	5	0,2602237	0,269509	3,710456	0,9655484	55
6	0,2436150	0,251183	3,981167	0,9698720	54	6	0,2605045	0,269821	3,706165	0,9654726	54
7	0,2438971	0,251492	3,976271	0,9698011	53	7	0,2607853	0,270133	3,701883	0,9653968	53
8	0,2441792	0,251801	3,971387	0,9697301	52	8	0,2610662	0,270445	3,697610	0,9653209	52
9	0,2444613	0,252111	3,966514	0,9696591	51	9	0,2613469	0,270757	3,693347	0,9652449	51
10	0,2447433	0,252420	3,961652	0,9695879	50	10	0,2616277	0,271069	3,689093	0,9651689	50
11	0,2450254	0,252729	3,956801	0,9695167	49	11	0,2619085	0,271382	3,684847	0,9650927	49
12	0,2453074	0,253039	3,951961	0,9694453	48	12	0,2621892	0,271694	3,680611	0,9650165	48
13	0,2455894	0,253348	3,947133	0,9693740	47	13	0,2624699	0,272006	3,676384	0,9649402	47
14	0,2458713	0,253658	3,942316	0,9693025	46	14	0,2627506	0,272319	3,672166	0,9648638	46
15	0,2461533	0,253968	3,937509	0,9692309	45	15	0,2630312	0,272631	3,667957	0,9647873	45
16	0,2464352	0,254277	3,932714	0,9691593	44	16	0,2633118	0,272944	3,663757	0,9647108	44
17	0,2467171	0,254587	3,927930	0,9690875	43	17	0,2635925	0,273256	3,659566	0,9646341	43
18	0,2469990	0,254897	3,923156	0,9690157	42	18	0,2638730	0,273569	3,655384	0,9645574	42
19	0,2472809	0,255207	3,918394	0,9689438	41	19	0,2641536	0,273882	3,651211	0,9644806	41
20	0,2475627	0,255516	3,913642	0,9688719	40	20	0,2644342	0,274194	3,647047	0,9644037	40
21	0,2478445	0,255826	3,908901	0,9687998	39	21	0,2647147	0,274507	3,642891	0,9643268	39
22	0,2481263	0,256136	3,904171	0,9687277	38	22	0,2649952	0,274820	3,638744	0,9642497	38
23	0,2484081	0,256446	3,899452	0,9686555	37	23	0,2652757	0,275133	3,634606	0,9641726	37
24	0,2486899	0,256756	3,894743	0,9685832	36	24	0,2655561	0,275446	3,630477	0,9640954	36
25	0,2489716	0,257066	3,890045	0,9685108	35	25	0,2658366	0,275759	3,626357	0,9640181	35
26	0,2492533	0,257377	3,885357	0,9684383	34	26	0,2661170	0,276072	3,622245	0,9639407	34
27	0,2495350	0,257687	3,880680	0,9683658	33	27	0,2663973	0,276385	3,618141	0,9638633	33
28	0,2498167	0,257997	3,876014	0,9682931	32	28	0,2666777	0,276698	3,614047	0,9637858	32
29	0,2500984	0,258307	3,871358	0,9682204	31	29	0,2669581	0,277011	3,609961	0,9637081	31
30	0,2503800	0,258618	3,866713	0,9681476	30	30	0,2672384	0,277325	3,605883	0,9636305	30
31	0,2506616	0,258928	3,862078	0,9680748	29	31	0,2675187	0,277638	3,601815	0,9635527	29
32	0,2509432	0,259238	3,857454	0,9680018	28	32	0,2677989	0,277951	3,597754	0,9634748	28
33	0,2512248	0,259549	3,852840	0,9679288	27	33	0,2680792	0,278265	3,593702	0,9633969	27
34	0,2515063	0,259859	3,848236	0,9678557	26	34	0,2683594	0,278578	3,589659	0,9633189	26
35	0,2517879	0,260170	3,843642	0,9677825	25	35	0,2686396	0,278891	3,585624	0,9632408	25
36	0,2520694	0,260480	3,839059	0,9677092	24	36	0,2689198	0,279205	3,581597	0,9631626	24
37	0,2523508	0,260791	3,834486	0,9676358	23	37	0,2692000	0,279519	3,577579	0,9630843	23
38	0,2526323	0,261102	3,829923	0,9675624	22	38	0,2694801	0,279832	3,573570	0,9630060	22
39	0,2529137	0,261413	3,825371	0,9674888	21	39	0,2697602	0,280146	3,569568	0,9629275	21
40	0,2531952	0,261723	3,820828	0,9674152	20	40	0,2700403	0,280460	3,565575	0,9628490	20
41	0,2534766	0,262034	3,816296	0,9673415	19	41	0,2703204	0,280773	3,561590	0,9627704	19
42	0,2537579	0,262345	3,811773	0,9672678	18	42	0,2706004	0,281087	3,557613	0,9626917	18
43	0,2540393	0,262656	3,807261	0,9671939	17	43	0,2708805	0,281401	3,553645	0,9626130	17
44	0,2543206	0,262967	3,802758	0,9671200	16	44	0,2711605	0,281715	3,549685	0,9625342	16
45	0,2546019	0,263278	3,798266	0,9670459	15	45	0,2714404	0,282029	3,545732	0,9624552	15
46	0,2548832	0,263589	3,793783	0,9669718	14	46	0,2717204	0,282343	3,541789	0,9623762	14
47	0,2551645	0,263900	3,789311	0,9668977	13	47	0,2720003	0,282657	3,537853	0,9622972	13
48	0,2554458	0,264211	3,784848	0,9668234	12	48	0,2722802	0,282971	3,533925	0,9622180	12
49	0,2557270	0,264523	3,780395	0,9667490	11	49	0,2725601	0,283286	3,530005	0,9621387	11
50	0,2560082	0,264834	3,775952	0,9666746	10	50	0,2728400	0,283600	3,526094	0,9620594	10
51	0,2562894	0,265145	3,771518	0,9666001	9	51	0,2731198	0,283914	3,522190	0,9619800	9
52	0,2565705	0,265457	3,767095	0,9665255	8	52	0,2733997	0,284229	3,518295	0,9619005	8
53	0,2568517	0,265768	3,762681	0,9664508	7	53	0,2736794	0,284543	3,514407	0,9618210	7
54	0,2571328	0,266079	3,758276	0,9663761	6	54	0,2739592	0,284857	3,510527	0,9617413	6
55	0,2574139	0,266391	3,753881	0,9663012	5	55	0,2742390	0,285172	3,506655	0,9616616	5
56	0,2576950	0,266702	3,749496	0,9662263	4	56	0,2745187	0,285487	3,502792	0,9615818	4
57	0,2579760	0,267014	3,745121	0,9661513	3	57	0,2747984	0,285801	3,498936	0,9615019	3
58	0,2582570	0,267326	3,740755	0,9660762	2	58	0,2750781	0,286116	3,495087	0,9614219	2
59	0,2585381	0,267637	3,736398	0,9660011	1	59	0,2753577	0,286431	3,491247	0,9613418	1
'	cos	ctg	tg	sin	'	'	cos	ctg	tg	sin	'

75°

74°

16°

17°

	sin	tg	ctg	cos			sin	tg	ctg	cos	
0	0,2756374	0,286745	3,487414	0,9612617	60	0	0,2923717	0,305731	3,270853	0,9563048	60
1	0,2759170	0,287060	3,483590	0,9611815	59	1	0,2926499	0,306049	3,267453	0,9562197	59
2	0,2761965	0,287375	3,479773	0,9611012	58	2	0,2929280	0,306367	3,264060	0,9561345	58
3	0,2764761	0,287690	3,475963	0,9610208	57	3	0,2932061	0,306685	3,260673	0,9560492	57
4	0,2767556	0,288005	3,472162	0,9609403	56	4	0,2934842	0,307003	3,257292	0,9559639	56
5	0,2770352	0,288320	3,468368	0,9608598	55	5	0,2937623	0,307322	3,253918	0,9558785	55
6	0,2773147	0,288635	3,464581	0,9607792	54	6	0,2940403	0,307640	3,250551	0,9557930	54
7	0,2775941	0,288950	3,460803	0,9606984	53	7	0,2943183	0,307959	3,247189	0,9557074	53
8	0,2778736	0,289266	3,457031	0,9606177	52	8	0,2945963	0,308277	3,243835	0,9556218	52
9	0,2781530	0,289581	3,453268	0,9605368	51	9	0,2948743	0,308596	3,240486	0,9555361	51
10	0,2784324	0,289896	3,449512	0,9604558	50	10	0,2951522	0,308914	3,237144	0,9554502	50
11	0,2787118	0,290211	3,445763	0,9603748	49	11	0,2954302	0,309233	3,233808	0,9553643	49
12	0,2789911	0,290527	3,442023	0,9602937	48	12	0,2957081	0,309552	3,230478	0,9552784	48
13	0,2792704	0,290842	3,438289	0,9602125	47	13	0,2959859	0,309870	3,227155	0,9551923	47
14	0,2795497	0,291158	3,434563	0,9601312	46	14	0,2962638	0,310189	3,223837	0,9551062	46
15	0,2798290	0,291473	3,430845	0,9600499	45	15	0,2965416	0,310508	3,220526	0,9550199	45
16	0,2801083	0,291789	3,427133	0,9599684	44	16	0,2968194	0,310827	3,217221	0,9549336	44
17	0,2803875	0,292105	3,423430	0,9598869	43	17	0,2970971	0,311146	3,213923	0,9548473	43
18	0,2806667	0,292420	3,419733	0,9598053	42	18	0,2973749	0,311465	3,210630	0,9547608	42
19	0,2809459	0,292736	3,416044	0,9597236	41	19	0,2976526	0,311784	3,207344	0,9546743	41
20	0,2812251	0,293052	3,412363	0,9596418	40	20	0,2979303	0,312104	3,204064	0,9545876	40
21	0,2815042	0,293368	3,408688	0,9595600	39	21	0,2982079	0,312423	3,200790	0,9545009	39
22	0,2817833	0,293684	3,405021	0,9594781	38	22	0,2984856	0,312742	3,197522	0,9544141	38
23	0,2820624	0,294000	3,401361	0,9593961	37	23	0,2987632	0,313062	3,194260	0,9543273	37
24	0,2823415	0,294316	3,397708	0,9593140	36	24	0,2990408	0,313381	3,191004	0,9542403	36
25	0,2826205	0,294632	3,394063	0,9592318	35	25	0,2993184	0,313700	3,187754	0,9541533	35
26	0,2828995	0,294948	3,390425	0,9591496	34	26	0,2995959	0,314020	3,184510	0,9540662	34
27	0,2831785	0,295265	3,386794	0,9590672	33	27	0,2998734	0,314340	3,181272	0,9539790	33
28	0,2834575	0,295581	3,383170	0,9589848	32	28	0,3001509	0,314659	3,178041	0,9538917	32
29	0,2837364	0,295897	3,379553	0,9589023	31	29	0,3004284	0,314979	3,174815	0,9538044	31
30	0,2840153	0,296213	3,375943	0,9588197	30	30	0,3007058	0,315299	3,171595	0,9537170	30
31	0,2842942	0,296530	3,372341	0,9587371	29	31	0,3009832	0,315619	3,168381	0,9536294	29
32	0,2845731	0,296846	3,368745	0,9586543	28	32	0,3012606	0,315939	3,165173	0,9535418	28
33	0,2848520	0,297163	3,365157	0,9585715	27	33	0,3015380	0,316258	3,161971	0,9534542	27
34	0,2851308	0,297480	3,361575	0,9584886	26	34	0,3018153	0,316578	3,158774	0,9533664	26
35	0,2854096	0,297796	3,358001	0,9584056	25	35	0,3020926	0,316899	3,155584	0,9532786	25
36	0,2856884	0,298113	3,354433	0,9583226	24	36	0,3023699	0,317219	3,152399	0,9531907	24
37	0,2859671	0,298430	3,350873	0,9582394	23	37	0,3026471	0,317539	3,149221	0,9531027	23
38	0,2862458	0,298747	3,347319	0,9581562	22	38	0,3029244	0,317859	3,146048	0,9530146	22
39	0,2865246	0,299063	3,343772	0,9580729	21	39	0,3032016	0,318179	3,142881	0,9529264	21
40	0,2868032	0,299380	3,340233	0,9579895	20	40	0,3034788	0,318500	3,139719	0,9528382	20
41	0,2870819	0,299697	3,336700	0,9579060	19	41	0,3037559	0,318820	3,136564	0,9527499	19
42	0,2873605	0,300014	3,333174	0,9578225	18	42	0,3040331	0,319141	3,133414	0,9526615	18
43	0,2876391	0,300331	3,329654	0,9577389	17	43	0,3043102	0,319461	3,130270	0,9525730	17
44	0,2879177	0,300649	3,326142	0,9576552	16	44	0,3045872	0,319782	3,127132	0,9524844	16
45	0,2881963	0,300966	3,322636	0,9575714	15	45	0,3048643	0,320103	3,123999	0,9523958	15
46	0,2884748	0,301283	3,319137	0,9574875	14	46	0,3051413	0,320423	3,120872	0,9523071	14
47	0,2887533	0,301600	3,315645	0,9574035	13	47	0,3054183	0,320744	3,117751	0,9522183	13
48	0,2890318	0,301918	3,312160	0,9573195	12	48	0,3056953	0,321065	3,114635	0,9521294	12
49	0,2893103	0,302235	3,308681	0,9572354	11	49	0,3059723	0,321386	3,111525	0,9520404	11
50	0,2895887	0,302553	3,305209	0,9571512	10	50	0,3062492	0,321707	3,108421	0,9519514	10
51	0,2898671	0,302870	3,301744	0,9570669	9	51	0,3065261	0,322028	3,105322	0,9518623	9
52	0,2901455	0,303188	3,298285	0,9569825	8	52	0,3068030	0,322349	3,102229	0,9517731	8
53	0,2904239	0,303506	3,294833	0,9568981	7	53	0,3070798	0,322670	3,099142	0,9516838	7
54	0,2907022	0,303823	3,291388	0,9568136	6	54	0,3073566	0,322991	3,096060	0,9515944	6
55	0,2909805	0,304141	3,287949	0,9567290	5	55	0,3076334	0,323312	3,092983	0,9515050	5
56	0,2912588	0,304459	3,284516	0,9566443	4	56	0,3079102	0,323634	3,089912	0,9514154	4
57	0,2915371	0,304777	3,281091	0,9565595	3	57	0,3081869	0,323955	3,086847	0,9513258	3
58	0,2918153	0,305095	3,277671	0,9564747	2	58	0,3084636	0,324277	3,083787	0,9512361	2
59	0,2920935	0,305413	3,274259	0,9563898	1	59	0,3087403	0,324598	3,080732	0,9511464	1
	cos	ctg	tg	sin			cos	ctg	tg	sin	

73°

72°

18°

19°

	sin	tg	ctg	cos			sin	tg	ctg	cos	
0	0,3090170	0,324920	3,077683	0,9510565	60	0	0,3255632	0,344328	2,904211	0,9455186	60
1	0,3092936	0,325241	3,074640	0,9509666	59	1	0,3258432	0,344653	2,901469	0,9454238	59
2	0,3095702	0,325563	3,071602	0,9508766	58	2	0,3261182	0,344978	2,898731	0,9453290	58
3	0,3098468	0,325885	3,068569	0,9507865	57	3	0,3263932	0,345304	2,895999	0,9452341	57
4	0,3101234	0,326207	3,065542	0,9506963	56	4	0,3266681	0,345630	2,893270	0,9451391	56
5	0,3103999	0,326528	3,062520	0,9506061	55	5	0,3269430	0,345955	2,890547	0,9450441	55
6	0,3106764	0,326850	3,059504	0,9505157	54	6	0,3272179	0,346281	2,887828	0,9449489	54
7	0,3109529	0,327172	3,056493	0,9504253	53	7	0,3274928	0,346607	2,885113	0,9448537	53
8	0,3112294	0,327494	3,053487	0,9503348	52	8	0,3277676	0,346933	2,882403	0,9447584	52
9	0,3115058	0,327817	3,050487	0,9502443	51	9	0,3280424	0,347259	2,879698	0,9446630	51
10	0,3117822	0,328139	3,047491	0,9501536	50	10	0,3283172	0,347585	2,876997	0,9445675	50
11	0,3120586	0,328461	3,044502	0,9500629	49	11	0,3285919	0,347911	2,874301	0,9444720	49
12	0,3123349	0,328783	3,041517	0,9499721	48	12	0,3288666	0,348237	2,871609	0,9443764	48
13	0,3126112	0,329106	3,038538	0,9498812	47	13	0,3291413	0,348563	2,868921	0,9442807	47
14	0,3128875	0,329428	3,035554	0,9497902	46	14	0,3294160	0,348889	2,866239	0,9441849	46
15	0,3131638	0,329751	3,032595	0,9496991	45	15	0,3296906	0,349216	2,863560	0,9440890	45
16	0,3134400	0,330073	3,029632	0,9496080	44	16	0,3299653	0,349542	2,860886	0,9439931	44
17	0,3137163	0,330396	3,026674	0,9495168	43	17	0,3302398	0,349868	2,858217	0,9438971	43
18	0,3139925	0,330718	3,023721	0,9494255	42	18	0,3305144	0,350195	2,855552	0,9438010	42
19	0,3142686	0,331041	3,020773	0,9493341	41	19	0,3307889	0,350522	2,852891	0,9437048	41
20	0,3145448	0,331364	3,017830	0,9492426	40	20	0,3310634	0,350848	2,850235	0,9436085	40
21	0,3148209	0,331687	3,014893	0,9491511	39	21	0,3313379	0,351175	2,847583	0,9435122	39
22	0,3150969	0,332010	3,011960	0,9490595	38	22	0,3316123	0,351502	2,844936	0,9434157	38
23	0,3153730	0,332333	3,009033	0,9489678	37	23	0,3318867	0,351829	2,842293	0,9433192	37
24	0,3156490	0,332656	3,006111	0,9488760	36	24	0,3321611	0,352156	2,839654	0,9432227	36
25	0,3159250	0,332979	3,003194	0,9487842	35	25	0,3324355	0,352483	2,837020	0,9431260	35
26	0,3162010	0,333302	3,000282	0,9486922	34	26	0,3327098	0,352810	2,834390	0,9430293	34
27	0,3164770	0,333625	2,997375	0,9486002	33	27	0,3329841	0,353137	2,831764	0,9429324	33
28	0,3167529	0,333949	2,994473	0,9485081	32	28	0,3332584	0,353464	2,829143	0,9428355	32
29	0,3170288	0,334272	2,991577	0,9484159	31	29	0,3335326	0,353791	2,826526	0,9427386	31
30	0,3173047	0,334595	2,988685	0,9483237	30	30	0,3338069	0,354119	2,823913	0,9426415	30
31	0,3175805	0,334919	2,985798	0,9482313	29	31	0,3340810	0,354446	2,821304	0,9425444	29
32	0,3178563	0,335242	2,982917	0,9481389	28	32	0,3343552	0,354773	2,818700	0,9424471	28
33	0,3181321	0,335566	2,980040	0,9480464	27	33	0,3346293	0,355101	2,816100	0,9423498	27
34	0,3184079	0,335890	2,977168	0,9479538	26	34	0,3349034	0,355429	2,813505	0,9422525	26
35	0,3186836	0,336213	2,974302	0,9478612	25	35	0,3351775	0,355756	2,810913	0,9421550	25
36	0,3189593	0,336537	2,971440	0,9477684	24	36	0,3354516	0,356084	2,808326	0,9420575	24
37	0,3192350	0,336861	2,968583	0,9476756	23	37	0,3357256	0,356412	2,805743	0,9419598	23
38	0,3195106	0,337185	2,965731	0,9475827	22	38	0,3359996	0,356740	2,803165	0,9418621	22
39	0,3197863	0,337509	2,962884	0,9474897	21	39	0,3362735	0,357068	2,800590	0,9417644	21
40	0,3200619	0,337833	2,960042	0,9473966	20	40	0,3365475	0,357396	2,798020	0,9416665	20
41	0,3203374	0,338157	2,957205	0,9473035	19	41	0,3368214	0,357724	2,795454	0,9415686	19
42	0,3206130	0,338481	2,954373	0,9472103	18	42	0,3370953	0,358052	2,792892	0,9414705	18
43	0,3208885	0,338806	2,951545	0,9471170	17	43	0,3373691	0,358380	2,790334	0,9413724	17
44	0,3211640	0,339130	2,948723	0,9470236	16	44	0,3376429	0,358708	2,787780	0,9412743	16
45	0,3214395	0,339454	2,945905	0,9469301	15	45	0,3379167	0,359037	2,785231	0,9411760	15
46	0,3217149	0,339779	2,943092	0,9468366	14	46	0,3381905	0,359365	2,782685	0,9410777	14
47	0,3219903	0,340103	2,940284	0,9467430	13	47	0,3384642	0,359694	2,780144	0,9409793	13
48	0,3222657	0,340428	2,937481	0,9466493	12	48	0,3387379	0,360022	2,777607	0,9408808	12
49	0,3225411	0,340752	2,934682	0,9465555	11	49	0,3390116	0,360351	2,775074	0,9407822	11
50	0,3228164	0,341077	2,931888	0,9464616	10	50	0,3392852	0,360679	2,772545	0,9406835	10
51	0,3230917	0,341402	2,929099	0,9463677	9	51	0,3395589	0,361008	2,770020	0,9405848	9
52	0,3233670	0,341727	2,926315	0,9462736	8	52	0,3398325	0,361337	2,767499	0,9404860	8
53	0,3236422	0,342052	2,923536	0,9461795	7	53	0,3401060	0,361666	2,764982	0,9403871	7
54	0,3239174	0,342377	2,920761	0,9460854	6	54	0,3403796	0,361995	2,762469	0,9402881	6
55	0,3241926	0,342702	2,917991	0,9459911	5	55	0,3406531	0,362324	2,759961	0,9401891	5
56	0,3244678	0,343027	2,915226	0,9458968	4	56	0,3409265	0,362653	2,757456	0,9400899	4
57	0,3247429	0,343352	2,912465	0,9458023	3	57	0,3412000	0,362982	2,754955	0,9399907	3
58	0,3250180	0,343677	2,909709	0,9457078	2	58	0,3414734	0,363312	2,752459	0,9398914	2
59	0,3252931	0,344002	2,906958	0,9456132	1	59	0,3417468	0,363641	2,749966	0,9397921	1
	cos	ctg	tg	sin			cos	ctg	tg	sin	

4*

71°

70°

20°

21°

	sin	tg	ctg	cos			sin	tg	ctg	cos	
0	0,3420201	0,363970	2,747477	0,9396926	60	0	0,3583679	0,383864	2,605089	0,9335804	60
1	0,3422935	0,364300	2,744993	0,9395931	59	1	0,3586395	0,384198	2,602826	0,9334761	59
2	0,3425668	0,364629	2,742512	0,9394935	58	2	0,3589110	0,384532	2,600566	0,9333718	58
3	0,3428400	0,364959	2,740035	0,9393938	57	3	0,3591825	0,384866	2,598309	0,9332673	57
4	0,3431133	0,365288	2,737562	0,9392940	56	4	0,3594540	0,385200	2,596056	0,9331628	56
5	0,3433865	0,365618	2,735093	0,9391942	55	5	0,3597254	0,385534	2,593807	0,9330582	55
6	0,3436597	0,365948	2,732628	0,9390943	54	6	0,3599968	0,385868	2,591561	0,9329535	54
7	0,3439329	0,366278	2,730167	0,9389943	53	7	0,3602682	0,386202	2,589318	0,9328488	53
8	0,3442060	0,366608	2,727710	0,9388942	52	8	0,3605395	0,386536	2,587078	0,9327439	52
9	0,3444791	0,366938	2,725257	0,9387940	51	9	0,3608108	0,386871	2,584842	0,9326390	51
10	0,3447521	0,367268	2,722808	0,9386938	50	10	0,3610821	0,387205	2,582609	0,9325340	50
11	0,3450252	0,367598	2,720362	0,9385934	49	11	0,3613534	0,387540	2,580380	0,9324290	49
12	0,3452982	0,367928	2,717920	0,9384930	48	12	0,3616246	0,387874	2,578154	0,9323238	48
13	0,3455712	0,368259	2,715483	0,9383925	47	13	0,3618958	0,388209	2,575931	0,9322186	47
14	0,3458441	0,368589	2,713049	0,9382920	46	14	0,3621669	0,388544	2,573712	0,9321133	46
15	0,3461171	0,368919	2,710619	0,9381913	45	15	0,3624380	0,388879	2,571496	0,9320079	45
16	0,3463900	0,369250	2,708192	0,9380906	44	16	0,3627091	0,389214	2,569283	0,9319024	44
17	0,3466628	0,369581	2,705770	0,9379898	43	17	0,3629802	0,389549	2,567073	0,9317969	43
18	0,3469357	0,369911	2,703351	0,9378889	42	18	0,3632512	0,389884	2,564867	0,9316912	42
19	0,3472085	0,370242	2,700936	0,9377880	41	19	0,3635222	0,390219	2,562664	0,9315855	41
20	0,3474812	0,370573	2,698525	0,9376869	40	20	0,3637932	0,390554	2,560465	0,9314797	40
21	0,3477540	0,370904	2,696118	0,9375858	39	21	0,3640641	0,390889	2,558269	0,9313739	39
22	0,3480267	0,371235	2,693715	0,9374846	38	22	0,3643351	0,391225	2,556076	0,9312679	38
23	0,3482994	0,371566	2,691315	0,9373833	37	23	0,3646059	0,391560	2,553886	0,9311619	37
24	0,3485720	0,371897	2,688919	0,9372820	36	24	0,3648768	0,391896	2,551699	0,9310558	36
25	0,3488447	0,372228	2,686527	0,9371806	35	25	0,3651476	0,392231	2,549516	0,9309496	35
26	0,3491173	0,372559	2,684138	0,9370790	34	26	0,3654184	0,392567	2,547336	0,9308434	34
27	0,3493898	0,372890	2,681753	0,9369774	33	27	0,3656891	0,392903	2,545159	0,9307370	33
28	0,3496624	0,373222	2,679372	0,9368758	32	28	0,3659599	0,393239	2,542985	0,9306306	32
29	0,3499349	0,373553	2,676995	0,9367740	31	29	0,3662306	0,393574	2,540815	0,9305241	31
30	0,3502074	0,373885	2,674621	0,9366722	30	30	0,3665012	0,393910	2,538648	0,9304176	30
31	0,3504798	0,374216	2,672252	0,9365703	29	31	0,3667719	0,394247	2,536484	0,9303109	29
32	0,3507523	0,374548	2,669885	0,9364683	28	32	0,3670425	0,394583	2,534323	0,9302042	28
33	0,3510246	0,374880	2,667523	0,9363662	27	33	0,3673130	0,394919	2,532165	0,9300974	27
34	0,3512970	0,375211	2,665164	0,9362641	26	34	0,3675836	0,395255	2,530011	0,9299905	26
35	0,3515693	0,375543	2,662808	0,9361618	25	35	0,3678541	0,395592	2,527860	0,9298835	25
36	0,3518416	0,375875	2,660457	0,9360595	24	36	0,3681246	0,395928	2,525712	0,9297765	24
37	0,3521139	0,376207	2,658109	0,9359571	23	37	0,3683950	0,396265	2,523567	0,9296694	23
38	0,3523862	0,376539	2,655764	0,9358547	22	38	0,3686654	0,396601	2,521425	0,9295622	22
39	0,3526584	0,376872	2,653424	0,9357521	21	39	0,3689358	0,396938	2,519286	0,9294549	21
40	0,3529306	0,377204	2,651087	0,9356495	20	40	0,3692061	0,397275	2,517151	0,9293475	20
41	0,3532027	0,377536	2,648753	0,9355468	19	41	0,3694765	0,397611	2,515018	0,9292401	19
42	0,3534748	0,377869	2,646423	0,9354440	18	42	0,3697468	0,397948	2,512889	0,9291326	18
43	0,3537469	0,378201	2,644097	0,9353412	17	43	0,3700170	0,398285	2,510763	0,9290250	17
44	0,3540190	0,378534	2,641774	0,9352382	16	44	0,3702872	0,398622	2,508640	0,9289173	16
45	0,3542910	0,378866	2,639455	0,9351352	15	45	0,3705574	0,398960	2,506520	0,9288096	15
46	0,3545630	0,379199	2,637139	0,9350321	14	46	0,3708276	0,399297	2,504403	0,9287017	14
47	0,3548350	0,379532	2,634827	0,9349289	13	47	0,3710977	0,399634	2,502289	0,9285938	13
48	0,3551070	0,379864	2,632519	0,9348257	12	48	0,3713678	0,399971	2,500178	0,9284858	12
49	0,3553789	0,380197	2,630214	0,9347223	11	49	0,3716379	0,400309	2,498071	0,9283778	11
50	0,3556508	0,380530	2,627912	0,9346189	10	50	0,3719079	0,400646	2,495966	0,9282696	10
51	0,3559226	0,380863	2,625614	0,9345154	9	51	0,3721780	0,400984	2,493864	0,9281614	9
52	0,3561944	0,381196	2,623320	0,9344119	8	52	0,3724479	0,401322	2,491766	0,9280531	8
53	0,3564662	0,381530	2,621029	0,9343082	7	53	0,3727179	0,401660	2,489670	0,9279447	7
54	0,3567380	0,381863	2,618741	0,9342045	6	54	0,3729878	0,401997	2,487578	0,9278363	6
55	0,3570097	0,382196	2,616457	0,9341007	5	55	0,3732577	0,402335	2,485488	0,9277277	5
56	0,3572814	0,382530	2,614177	0,9339968	4	56	0,3735275	0,402673	2,483402	0,9276191	4
57	0,3575531	0,382863	2,611899	0,9338928	3	57	0,3737973	0,403011	2,481319	0,9275104	3
58	0,3578248	0,383197	2,609626	0,9337888	2	58	0,3740671	0,403350	2,479238	0,9274016	2
59	0,3580964	0,383530	2,607356	0,9336846	1	59	0,3743369	0,403688	2,477161	0,9272928	1

22°

23°

'	sin	tg	ctg	cos	'	'	sin	tg	ctg	cos	'
0	0,3746066	0,404026	2,475087	0,9271839	60	0	0,3907311	0,424475	2,355852	0,9205049	60
1	0,3748763	0,404365	2,473015	0,9270748	59	1	0,3909989	0,424818	2,353948	0,9203912	59
2	0,3751459	0,404703	2,470947	0,9269658	58	2	0,3912666	0,425162	2,352047	0,9202774	58
3	0,3754156	0,405042	2,468882	0,9268566	57	3	0,3915343	0,425505	2,350148	0,9201635	57
4	0,3756852	0,405380	2,466819	0,9267474	56	4	0,3918019	0,425849	2,348252	0,9200496	56
5	0,3759547	0,405719	2,464760	0,9266380	55	5	0,3920695	0,426192	2,346358	0,9199356	55
6	0,3762243	0,406058	2,462703	0,9265286	54	6	0,3923371	0,426536	2,344467	0,9198215	54
7	0,3764938	0,406397	2,460649	0,9264192	53	7	0,3926047	0,426880	2,342579	0,9197073	53
8	0,3767632	0,406736	2,458599	0,9263096	52	8	0,3928722	0,427224	2,340693	0,9195931	52
9	0,3770327	0,407075	2,456551	0,9262000	51	9	0,3931397	0,427568	2,338809	0,9194788	51
10	0,3773021	0,407414	2,454506	0,9260902	50	10	0,3934071	0,427912	2,336929	0,9193644	50
11	0,3775714	0,407753	2,452464	0,9259805	49	11	0,3936745	0,428256	2,335050	0,9192499	49
12	0,3778408	0,408092	2,450425	0,9258706	48	12	0,3939419	0,428600	2,333175	0,9191353	48
13	0,3781101	0,408432	2,448389	0,9257606	47	13	0,3942093	0,428945	2,331302	0,9190207	47
14	0,3783794	0,408771	2,446356	0,9256506	46	14	0,3944766	0,429289	2,329431	0,9189060	46
15	0,3786486	0,409111	2,444326	0,9255405	45	15	0,3947439	0,429634	2,327563	0,9187912	45
16	0,3789178	0,409450	2,442298	0,9254303	44	16	0,3950111	0,429979	2,325697	0,9186763	44
17	0,3791870	0,409790	2,440274	0,9253201	43	17	0,3952783	0,430323	2,323834	0,9185614	43
18	0,3794562	0,410130	2,438252	0,9252097	42	18	0,3955455	0,430668	2,321974	0,9184464	42
19	0,3797253	0,410470	2,436233	0,9250993	41	19	0,3958127	0,431013	2,320116	0,9183313	41
20	0,3799944	0,410810	2,434217	0,9249888	40	20	0,3960798	0,431358	2,318261	0,9182161	40
21	0,3802634	0,411150	2,432204	0,9248782	39	21	0,3963468	0,431703	2,316408	0,9181009	39
22	0,3805324	0,411490	2,430194	0,9247676	38	22	0,3966139	0,432048	2,314557	0,9179855	38
23	0,3808014	0,411830	2,428186	0,9246568	37	23	0,3968809	0,432393	2,312709	0,9178701	37
24	0,3810704	0,412170	2,426182	0,9245460	36	24	0,3971479	0,432739	2,310864	0,9177546	36
25	0,3813393	0,412511	2,424180	0,9244351	35	25	0,3974148	0,433084	2,309021	0,9176391	35
26	0,3816082	0,412851	2,422181	0,9243242	34	26	0,3976818	0,433430	2,307180	0,9175234	34
27	0,3818770	0,413191	2,420185	0,9242131	33	27	0,3979486	0,433775	2,305342	0,9174077	33
28	0,3821459	0,413532	2,418192	0,9241020	32	28	0,3982155	0,434121	2,303506	0,9172919	32
29	0,3824147	0,413873	2,416201	0,9239908	31	29	0,3984823	0,434467	2,301673	0,9171760	31
30	0,3826834	0,414214	2,414214	0,9238795	30	30	0,3987491	0,434812	2,299842	0,9170601	30
31	0,3829522	0,414554	2,412229	0,9237682	29	31	0,3990158	0,435158	2,298014	0,9169440	29
32	0,3832209	0,414895	2,410246	0,9236567	28	32	0,3992825	0,435504	2,296188	0,9168279	28
33	0,3834895	0,415236	2,408267	0,9235452	27	33	0,3995492	0,435850	2,294365	0,9167118	27
34	0,3837582	0,415577	2,406291	0,9234336	26	34	0,3998158	0,436197	2,292544	0,9165955	26
35	0,3840268	0,415919	2,404317	0,9233220	25	35	0,4000825	0,436543	2,290726	0,9164791	25
36	0,3842953	0,416260	2,402346	0,9232102	24	36	0,4003490	0,436889	2,288910	0,9163627	24
37	0,3845639	0,416601	2,400377	0,9230984	23	37	0,4006156	0,437236	2,287096	0,9162462	23
38	0,3848324	0,416943	2,398412	0,9229865	22	38	0,4008821	0,437582	2,285285	0,9161297	22
39	0,3851008	0,417284	2,396449	0,9228745	21	39	0,4011486	0,437929	2,283476	0,9160130	21
40	0,3853693	0,417626	2,394489	0,9227624	20	40	0,4014150	0,438276	2,281669	0,9158963	20
41	0,3856377	0,417967	2,392532	0,9226503	19	41	0,4016814	0,438622	2,279865	0,9157795	19
42	0,3859060	0,418309	2,390577	0,9225381	18	42	0,4019478	0,438969	2,278064	0,9156626	18
43	0,3861744	0,418651	2,388625	0,9224258	17	43	0,4022141	0,439316	2,276264	0,9155456	17
44	0,3864427	0,418993	2,386676	0,9223134	16	44	0,4024804	0,439663	2,274467	0,9154286	16
45	0,3867110	0,419335	2,384729	0,9222010	15	45	0,4027467	0,440011	2,272673	0,9153115	15
46	0,3869792	0,419677	2,382785	0,9220884	14	46	0,4030129	0,440358	2,270881	0,9151943	14
47	0,3872474	0,420019	2,380844	0,9219758	13	47	0,4032791	0,440705	2,269091	0,9150770	13
48	0,3875156	0,420361	2,378906	0,9218632	12	48	0,4035453	0,441053	2,267303	0,9149597	12
49	0,3877837	0,420704	2,376970	0,9217504	11	49	0,4038114	0,441400	2,265518	0,9148422	11
50	0,3880518	0,421046	2,375037	0,9216375	10	50	0,4040775	0,441748	2,263736	0,9147247	10
51	0,3883199	0,421389	2,373107	0,9215246	9	51	0,4043436	0,442095	2,261955	0,9146072	9
52	0,3885880	0,421731	2,371179	0,9214116	8	52	0,4046096	0,442443	2,260177	0,9144895	8
53	0,3888560	0,422074	2,369254	0,9212986	7	53	0,4048756	0,442791	2,258402	0,9143718	7
54	0,3891240	0,422417	2,367332	0,9211854	6	54	0,4051416	0,443139	2,256628	0,9142540	6
55	0,3893919	0,422759	2,365412	0,9210722	5	55	0,4054075	0,443487	2,254857	0,9141361	5
56	0,3896598	0,423102	2,363495	0,9209589	4	56	0,4056734	0,443835	2,253088	0,9140181	4
57	0,3899277	0,423445	2,361580	0,9208455	3	57	0,4059393	0,444183	2,251322	0,9139001	3
58	0,3901955	0,423788	2,359668	0,9207320	2	58	0,4062051	0,444532	2,249558	0,9137819	2
59	0,3904633	0,424132	2,357759	0,9206185	1	59	0,4064709	0,444880	2,247796	0,9136637	1

'	cos	ctg	tg	sin	'	'	cos	ctg	tg	sin	'
---	-----	-----	----	-----	---	---	-----	-----	----	-----	---

24°

25°

	sin	tg	ctg	cos			sin	tg	ctg	cos	
0	0,4067366	0,445229	2,246037	0,9135455	60	0	0,4226183	0,466308	2,144507	0,9063078	60
1	0,4070024	0,445577	2,244280	0,9134271	59	1	0,4228819	0,466662	2,142879	0,9061848	59
2	0,4072681	0,445926	2,242525	0,9133087	58	2	0,4231455	0,467016	2,141254	0,9060618	58
3	0,4075337	0,446275	2,240772	0,9131902	57	3	0,4234090	0,467371	2,139630	0,9059386	57
4	0,4077993	0,446624	2,239022	0,9130716	56	4	0,4236725	0,467725	2,138008	0,9058154	56
5	0,4080649	0,446973	2,237274	0,9129529	55	5	0,4239360	0,468080	2,136389	0,9056922	55
6	0,4083305	0,447322	2,235528	0,9128342	54	6	0,4241994	0,468434	2,134771	0,9055688	54
7	0,4085960	0,447671	2,233784	0,9127154	53	7	0,4244628	0,468789	2,133156	0,9054454	53
8	0,4088615	0,448020	2,232043	0,9125965	52	8	0,4247262	0,469144	2,131542	0,9053219	52
9	0,4091269	0,448369	2,230304	0,9124775	51	9	0,4249895	0,469499	2,129931	0,9051983	51
10	0,4093923	0,448719	2,228568	0,9123584	50	10	0,4252528	0,469854	2,128321	0,9050746	50
11	0,4096577	0,449068	2,226833	0,9122393	49	11	0,4255161	0,470209	2,126714	0,9049509	49
12	0,4099230	0,449418	2,225101	0,9121201	48	12	0,4257793	0,470564	2,125108	0,9048271	48
13	0,4101883	0,449768	2,223371	0,9120008	47	13	0,4260425	0,470920	2,123505	0,9047032	47
14	0,4104536	0,450117	2,221643	0,9118815	46	14	0,4263056	0,471275	2,121903	0,9045792	46
15	0,4107189	0,450467	2,219918	0,9117620	45	15	0,4265687	0,471631	2,120303	0,9044551	45
16	0,4109841	0,450817	2,218194	0,9116425	44	16	0,4268318	0,471986	2,118706	0,9043310	44
17	0,4112492	0,451167	2,216473	0,9115229	43	17	0,4270949	0,472342	2,117110	0,9042068	43
18	0,4115144	0,451517	2,214754	0,9114033	42	18	0,4273579	0,472698	2,115516	0,9040825	42
19	0,4117795	0,451868	2,213038	0,9112835	41	19	0,4276208	0,473054	2,113925	0,9039582	41
20	0,4120445	0,452218	2,211323	0,9111637	40	20	0,4278838	0,473410	2,112335	0,9038338	40
21	0,4123096	0,452568	2,209611	0,9110438	39	21	0,4281467	0,473766	2,110747	0,9037093	39
22	0,4125745	0,452919	2,207901	0,9109238	38	22	0,4284095	0,474122	2,109161	0,9035847	38
23	0,4128395	0,453269	2,206193	0,9108038	37	23	0,4286723	0,474478	2,107577	0,9034600	37
24	0,4131044	0,453620	2,204488	0,9106837	36	24	0,4289351	0,474835	2,105995	0,9033353	36
25	0,4133693	0,453971	2,202784	0,9105635	35	25	0,4291979	0,475191	2,104415	0,9032105	35
26	0,4136342	0,454322	2,201083	0,9104432	34	26	0,4294606	0,475548	2,102837	0,9030856	34
27	0,4138990	0,454673	2,199384	0,9103228	33	27	0,4297233	0,475905	2,101261	0,9029606	33
28	0,4141638	0,455024	2,197687	0,9102024	32	28	0,4299859	0,476262	2,099686	0,9028356	32
29	0,4144285	0,455375	2,195992	0,9100819	31	29	0,4302485	0,476619	2,098114	0,9027105	31
30	0,4146932	0,455726	2,194300	0,9099613	30	30	0,4305111	0,476976	2,096544	0,9025853	30
31	0,4149579	0,456078	2,192609	0,9098406	29	31	0,4307736	0,477333	2,094975	0,9024600	29
32	0,4152226	0,456429	2,190921	0,9097199	28	32	0,4310361	0,477690	2,093408	0,9023347	28
33	0,4154872	0,456781	2,189235	0,9095990	27	33	0,4312986	0,478047	2,091844	0,9022092	27
34	0,4157517	0,457132	2,187551	0,9094781	26	34	0,4315610	0,478405	2,090281	0,9020838	26
35	0,4160163	0,457484	2,185869	0,9093572	25	35	0,4318234	0,478762	2,088720	0,9019582	25
36	0,4162808	0,457836	2,184189	0,9092361	24	36	0,4320857	0,479120	2,087161	0,9018324	24
37	0,4165453	0,458188	2,182512	0,9091150	23	37	0,4323481	0,479477	2,085604	0,9017068	23
38	0,4168097	0,458540	2,180836	0,9089938	22	38	0,4326103	0,479835	2,084049	0,9015810	22
39	0,4170741	0,458892	2,179163	0,9088725	21	39	0,4328726	0,480193	2,082495	0,9014551	21
40	0,4173385	0,459244	2,177492	0,9087511	20	40	0,4331348	0,480551	2,080944	0,9013292	20
41	0,4176028	0,459596	2,175823	0,9086297	19	41	0,4333970	0,480909	2,079394	0,9012031	19
42	0,4178671	0,459949	2,174156	0,9085082	18	42	0,4336591	0,481267	2,077846	0,9010770	18
43	0,4181313	0,460301	2,172491	0,9083866	17	43	0,4339212	0,481626	2,076301	0,9009508	17
44	0,4183956	0,460654	2,170828	0,9082649	16	44	0,4341832	0,481984	2,074757	0,9008246	16
45	0,4186597	0,461006	2,169168	0,9081432	15	45	0,4344453	0,482343	2,073215	0,9006982	15
46	0,4189239	0,461359	2,167509	0,9080214	14	46	0,4347072	0,482701	2,071674	0,9005718	14
47	0,4191880	0,461712	2,165853	0,9078995	13	47	0,4349692	0,483060	2,070136	0,9004453	13
48	0,4194521	0,462065	2,164198	0,9077775	12	48	0,4352311	0,483419	2,068599	0,9003188	12
49	0,4197161	0,462418	2,162546	0,9076554	11	49	0,4354930	0,483778	2,067065	0,9001921	11
50	0,4199801	0,462771	2,160896	0,9075333	10	50	0,4357548	0,484137	2,065532	0,9000654	10
51	0,4202441	0,463124	2,159248	0,9074111	9	51	0,4360166	0,484496	2,064001	0,8999386	9
52	0,4205080	0,463478	2,157601	0,9072888	8	52	0,4362784	0,484855	2,062472	0,8998117	8
53	0,4207719	0,463831	2,155957	0,9071665	7	53	0,4365401	0,485214	2,060944	0,8996848	7
54	0,4210358	0,464185	2,154316	0,9070440	6	54	0,4368018	0,485574	2,059419	0,8995578	6
55	0,4212996	0,464538	2,152676	0,9069215	5	55	0,4370634	0,485933	2,057895	0,8994307	5
56	0,4215634	0,464892	2,151038	0,9067989	4	56	0,4373251	0,486293	2,056373	0,8993035	4
57	0,4218272	0,465246	2,149402	0,9066762	3	57	0,4375866	0,486653	2,054853	0,8991763	3
58	0,4220909	0,465600	2,147768	0,9065535	2	58	0,4378482	0,487013	2,053335	0,8990489	2
59	0,4223546	0,465954	2,146137	0,9064307	1	59	0,4381097	0,487373	2,051818	0,8989215	1

65°

64°

26°

27°

	sin	tg	ctg	cos			sin	tg	ctg	cos	
0	0,4383711	0,487733	2,050304	0,8987940	60	0	0,4539905	0,509525	1,962610	0,8910065	60
1	0,4386326	0,488093	2,048791	0,8986665	59	1	0,4542497	0,509892	1,961200	0,8908744	59
2	0,4388940	0,488453	2,047280	0,8985389	58	2	0,4545088	0,510258	1,959791	0,8907423	58
3	0,4391553	0,488813	2,045771	0,8984112	57	3	0,4547679	0,510625	1,958384	0,8906100	57
4	0,4394166	0,489174	2,044263	0,8982834	56	4	0,4550269	0,510992	1,956978	0,8904777	56
5	0,4396779	0,489534	2,042758	0,8981555	55	5	0,4552859	0,511359	1,955574	0,8903453	55
6	0,4399392	0,489895	2,041254	0,8980276	54	6	0,4555449	0,511726	1,954171	0,8902128	54
7	0,4402004	0,490256	2,039752	0,8978996	53	7	0,4558038	0,512093	1,952771	0,8900803	53
8	0,4404615	0,490617	2,038252	0,8977715	52	8	0,4560627	0,512460	1,951371	0,8899476	52
9	0,4407227	0,490978	2,036753	0,8976433	51	9	0,4563216	0,512828	1,949973	0,8898149	51
10	0,4409838	0,491339	2,035256	0,8975151	50	10	0,4565804	0,513195	1,948577	0,8896822	50
11	0,4412448	0,491700	2,033761	0,8973868	49	11	0,4568392	0,513563	1,947183	0,8895493	49
12	0,4415059	0,492061	2,032268	0,8972584	48	12	0,4570979	0,513930	1,945790	0,8894164	48
13	0,4417668	0,492422	2,030777	0,8971299	47	13	0,4573566	0,514298	1,944398	0,8892834	47
14	0,4420278	0,492784	2,029287	0,8970014	46	14	0,4576153	0,514666	1,943008	0,8891503	46
15	0,4422887	0,493145	2,027799	0,8968727	45	15	0,4578739	0,515034	1,941620	0,8890171	45
16	0,4425492	0,493507	2,026313	0,8967440	44	16	0,4581325	0,515402	1,940233	0,8888839	44
17	0,4428104	0,493869	2,024829	0,8966153	43	17	0,4583910	0,515770	1,938848	0,8887506	43
18	0,4430712	0,494231	2,023346	0,8964864	42	18	0,4586496	0,516138	1,937464	0,8886172	42
19	0,4433319	0,494593	2,021865	0,8963575	41	19	0,4589080	0,516507	1,936082	0,8884838	41
20	0,4435927	0,494955	2,020386	0,8962285	40	20	0,4591665	0,516875	1,934702	0,8883503	40
21	0,4438534	0,495317	2,018909	0,8960994	39	21	0,4594248	0,517244	1,933323	0,8882166	39
22	0,4441140	0,495679	2,017433	0,8959703	38	22	0,4596832	0,517613	1,931946	0,8880830	38
23	0,4443746	0,496042	2,015959	0,8958411	37	23	0,4599415	0,517982	1,930570	0,8879492	37
24	0,4446352	0,496404	2,014487	0,8957118	36	24	0,4601998	0,518351	1,929196	0,8878154	36
25	0,4448957	0,496767	2,013016	0,8955824	35	25	0,4604580	0,518720	1,927823	0,8876815	35
26	0,4451562	0,497130	2,011548	0,8954529	34	26	0,4607162	0,519089	1,926452	0,8875475	34
27	0,4454167	0,497492	2,010081	0,8953234	33	27	0,4609744	0,519458	1,925082	0,8874134	33
28	0,4456771	0,497855	2,008615	0,8951938	32	28	0,4612325	0,519828	1,923714	0,8872793	32
29	0,4459375	0,498218	2,007152	0,8950641	31	29	0,4614906	0,520197	1,922347	0,8871451	31
30	0,4461978	0,498582	2,005690	0,8949344	30	30	0,4617486	0,520567	1,920982	0,8870108	30
31	0,4464581	0,498945	2,004229	0,8948045	29	31	0,4620066	0,520937	1,919619	0,8868765	29
32	0,4467184	0,499308	2,002771	0,8946746	28	32	0,4622646	0,521307	1,918256	0,8867420	28
33	0,4469786	0,499672	2,001314	0,8945446	27	33	0,4625225	0,521677	1,916896	0,8866075	27
34	0,4472388	0,500035	1,999859	0,8944146	26	34	0,4627804	0,522047	1,915537	0,8864730	26
35	0,4474990	0,500399	1,998406	0,8942844	25	35	0,4630382	0,522417	1,914179	0,8863383	25
36	0,4477591	0,500763	1,996954	0,8941542	24	36	0,4632960	0,522787	1,912824	0,8862036	24
37	0,4480192	0,501127	1,995504	0,8940240	23	37	0,4635538	0,523158	1,911469	0,8860688	23
38	0,4482792	0,501491	1,994055	0,8938936	22	38	0,4638115	0,523528	1,910116	0,8859339	22
39	0,4485392	0,501855	1,992609	0,8937632	21	39	0,4640692	0,523899	1,908764	0,8857989	21
40	0,4487992	0,502219	1,991164	0,8936326	20	40	0,4643269	0,524270	1,907415	0,8856639	20
41	0,4490591	0,502583	1,989720	0,8935021	19	41	0,4645845	0,524641	1,906066	0,8855288	19
42	0,4493190	0,502948	1,988279	0,8933714	18	42	0,4648420	0,525012	1,904719	0,8853936	18
43	0,4495789	0,503312	1,986839	0,8932406	17	43	0,4650996	0,525383	1,903374	0,8852584	17
44	0,4498387	0,503677	1,985400	0,8931098	16	44	0,4653571	0,525754	1,902030	0,8851230	16
45	0,4500984	0,504041	1,983964	0,8929789	15	45	0,4656145	0,526125	1,900687	0,8849876	15
46	0,4503582	0,504406	1,982529	0,8928480	14	46	0,4658719	0,526497	1,899346	0,8848522	14
47	0,4506179	0,504771	1,981095	0,8927169	13	47	0,4661293	0,526868	1,898007	0,8847166	13
48	0,4508775	0,505136	1,979663	0,8925858	12	48	0,4663866	0,527240	1,896669	0,8845810	12
49	0,4511372	0,505502	1,978233	0,8924546	11	49	0,4666439	0,527612	1,895332	0,8844453	11
50	0,4513967	0,505867	1,976805	0,8923234	10	50	0,4669012	0,527984	1,893997	0,8843095	10
51	0,4516563	0,506232	1,975378	0,8921920	9	51	0,4671584	0,528356	1,892663	0,8841736	9
52	0,4519158	0,506598	1,973953	0,8920606	8	52	0,4674156	0,528728	1,891331	0,8840377	8
53	0,4521753	0,506963	1,972530	0,8919291	7	53	0,4676727	0,529100	1,890001	0,8839017	7
54	0,4524347	0,507329	1,971108	0,8917975	6	54	0,4679298	0,529473	1,888671	0,8837656	6
55	0,4526941	0,507695	1,969687	0,8916659	5	55	0,4681869	0,529845	1,887344	0,8836295	5
56	0,4529535	0,508061	1,968269	0,8915342	4	56	0,4684439	0,530218	1,886017	0,8834933	4
57	0,4532128	0,508427	1,966852	0,8914024	3	57	0,4687009	0,530591	1,884692	0,8833569	3
58	0,4534721	0,508793	1,965436	0,8912705	2	58	0,4689578	0,530963	1,883369	0,8832206	2
59	0,4537313	0,509159	1,964023	0,8911385	1	59	0,4692147	0,531336	1,882047	0,8830841	1
	cos	ctg	tg	sin			cos	ctg	tg	sin	

63°

5*

62°

28°

29°

	sin	tg	ctg	cos			sin	tg	ctg	cos	
0	0,4694716	0,531709	1,880726	0,8829476	60	0	0,4848096	0,554309	1,804048	0,8746197	60
1	0,4697284	0,532083	1,879407	0,8828110	59	1	0,4850640	0,554689	1,802811	0,8744786	59
2	0,4699852	0,532456	1,878090	0,8826743	58	2	0,4853184	0,555070	1,801575	0,8743375	58
3	0,4702419	0,532829	1,876774	0,8825376	57	3	0,4855727	0,555450	1,800341	0,8741963	57
4	0,4704986	0,533203	1,875459	0,8824007	56	4	0,4858270	0,555831	1,799108	0,8740550	56
5	0,4707553	0,533577	1,874145	0,8822638	55	5	0,4860812	0,556212	1,797876	0,8739137	55
6	0,4710119	0,533950	1,872834	0,8821269	54	6	0,4863354	0,556593	1,796645	0,8737722	54
7	0,4712685	0,534324	1,871523	0,8819898	53	7	0,4865895	0,556974	1,795416	0,8736307	53
8	0,4715250	0,534698	1,870214	0,8818527	52	8	0,4868436	0,557355	1,794188	0,8734891	52
9	0,4717815	0,535072	1,868906	0,8817155	51	9	0,4870977	0,557736	1,792962	0,8733475	51
10	0,4720380	0,535446	1,867600	0,8815782	50	10	0,4873517	0,558118	1,791736	0,8732058	50
11	0,4722944	0,535821	1,866295	0,8814409	49	11	0,4876057	0,558499	1,790512	0,8730640	49
12	0,4725508	0,536195	1,864992	0,8813035	48	12	0,4878597	0,558881	1,789289	0,8729221	48
13	0,4728071	0,536570	1,863690	0,8811660	47	13	0,4881136	0,559263	1,788068	0,8727801	47
14	0,4730634	0,536945	1,862390	0,8810284	46	14	0,4883674	0,559645	1,786847	0,8726381	46
15	0,4733197	0,537319	1,861090	0,8808907	45	15	0,4886212	0,560027	1,785628	0,8724960	45
16	0,4735759	0,537694	1,859793	0,8807530	44	16	0,4888750	0,560409	1,784411	0,8723538	44
17	0,4738321	0,538069	1,858496	0,8806152	43	17	0,4891288	0,560791	1,783194	0,8722116	43
18	0,4740882	0,538445	1,857201	0,8804774	42	18	0,4893825	0,561174	1,781979	0,8720693	42
19	0,4743443	0,538820	1,855908	0,8803394	41	19	0,4896361	0,561556	1,780765	0,8719269	41
20	0,4746004	0,539195	1,854616	0,8802014	40	20	0,4898897	0,561939	1,779552	0,8717844	40
21	0,4748564	0,539571	1,853325	0,8800633	39	21	0,4901433	0,562322	1,778341	0,8716419	39
22	0,4751124	0,539946	1,852036	0,8799251	38	22	0,4903968	0,562705	1,777131	0,8714993	38
23	0,4753683	0,540322	1,850748	0,8797869	37	23	0,4906503	0,563088	1,775922	0,8713566	37
24	0,4756242	0,540698	1,849461	0,8796486	36	24	0,4909038	0,563471	1,774714	0,8712138	36
25	0,4758801	0,541074	1,848176	0,8795102	35	25	0,4911572	0,563854	1,773508	0,8710710	35
26	0,4761359	0,541450	1,846892	0,8793717	34	26	0,4914105	0,564238	1,772302	0,8709281	34
27	0,4763917	0,541826	1,845610	0,8792332	33	27	0,4916638	0,564621	1,771093	0,8707851	33
28	0,4766474	0,542203	1,844329	0,8790946	32	28	0,4919171	0,565005	1,769896	0,8706420	32
29	0,4769031	0,542579	1,843049	0,8789559	31	29	0,4921704	0,565389	1,768694	0,8704989	31
30	0,4771588	0,542956	1,841771	0,8788171	30	30	0,4924236	0,565773	1,767494	0,8703557	30
31	0,4774144	0,543332	1,840494	0,8786783	29	31	0,4926767	0,566157	1,766295	0,8702124	29
32	0,4776700	0,543709	1,839218	0,8785394	28	32	0,4929298	0,566541	1,765097	0,8700691	28
33	0,4779255	0,544086	1,837944	0,8784004	27	33	0,4931829	0,566925	1,763901	0,8699256	27
34	0,4781810	0,544463	1,836671	0,8782613	26	34	0,4934359	0,567310	1,762705	0,8697821	26
35	0,4784364	0,544840	1,835400	0,8781222	25	35	0,4936889	0,567694	1,761511	0,8696386	25
36	0,4786919	0,545218	1,834130	0,8779830	24	36	0,4939419	0,568079	1,760318	0,8694949	24
37	0,4789472	0,545595	1,832861	0,8778437	23	37	0,4941948	0,568464	1,759127	0,8693512	23
38	0,4792026	0,545973	1,831594	0,8777043	22	38	0,4944476	0,568849	1,757936	0,8692074	22
39	0,4794579	0,546350	1,830327	0,8775649	21	39	0,4947005	0,569234	1,756747	0,8690636	21
40	0,4797131	0,546728	1,829063	0,8774254	20	40	0,4949532	0,569619	1,755559	0,8689196	20
41	0,4799683	0,547106	1,827799	0,8772858	19	41	0,4952060	0,570004	1,754372	0,8687756	19
42	0,4802235	0,547484	1,826537	0,8771462	18	42	0,4954587	0,570390	1,753187	0,8686315	18
43	0,4804786	0,547862	1,825277	0,8770064	17	43	0,4957113	0,570776	1,752002	0,8684874	17
44	0,4807337	0,548240	1,824017	0,8768666	16	44	0,4959639	0,571161	1,750819	0,8683431	16
45	0,4809888	0,548619	1,822759	0,8767268	15	45	0,4962165	0,571547	1,749637	0,8681988	15
46	0,4812438	0,548997	1,821503	0,8765868	14	46	0,4964690	0,571933	1,748456	0,8680544	14
47	0,4814987	0,549376	1,820247	0,8764468	13	47	0,4967215	0,572319	1,747277	0,8679100	13
48	0,4817537	0,549755	1,818993	0,8763067	12	48	0,4969740	0,572705	1,746093	0,8677655	12
49	0,4820086	0,550134	1,817740	0,8761665	11	49	0,4972264	0,573092	1,744921	0,8676209	11
50	0,4822634	0,550513	1,816489	0,8760263	10	50	0,4974787	0,573478	1,743745	0,8674762	10
51	0,4825182	0,550892	1,815239	0,8758859	9	51	0,4977310	0,573865	1,742570	0,8673314	9
52	0,4827730	0,551271	1,813990	0,8757455	8	52	0,4979833	0,574252	1,741397	0,8671866	8
53	0,4830277	0,551650	1,812743	0,8756051	7	53	0,4982355	0,574638	1,740224	0,8670417	7
54	0,4832824	0,552030	1,811497	0,8754645	6	54	0,4984877	0,575026	1,739053	0,8668967	6
55	0,4835370	0,552409	1,810252	0,8753239	5	55	0,4987399	0,575413	1,737883	0,8667517	5
56	0,4837916	0,552789	1,809009	0,8751832	4	56	0,4989920	0,575800	1,736714	0,8666066	4
57	0,4840462	0,553169	1,807766	0,8750425	3	57	0,4992441	0,576187	1,735547	0,8664614	3
58	0,4843007	0,553549	1,806526	0,8749016	2	58	0,4994961	0,576575	1,734380	0,8663161	2
59	0,4845552	0,553929	1,805286	0,8747607	1	59	0,4997481	0,576962	1,733215	0,8661708	1

61°

60°

30°

31°

	sin	tg	ctg	cos			sin	tg	ctg	cos	
0	0,5000000	0,577350	1,732051	0,8660254	60	0	0,5150381	0,600861	1,664279	0,8571673	60
1	0,5002519	0,577738	1,730888	0,8658799	59	1	0,5152874	0,601257	1,663183	0,8570174	59
2	0,5005037	0,578126	1,729726	0,8657344	58	2	0,5155367	0,601653	1,662088	0,8568675	58
3	0,5007556	0,578514	1,728565	0,8655887	57	3	0,5157859	0,602049	1,660994	0,8567175	57
4	0,5010073	0,578903	1,727406	0,8654430	56	4	0,5160351	0,602445	1,659902	0,8565674	56
5	0,5012591	0,579291	1,726248	0,8652973	55	5	0,5162842	0,602842	1,658810	0,8564173	55
6	0,5015107	0,579680	1,725091	0,8651514	54	6	0,5165333	0,603239	1,657719	0,8562671	54
7	0,5017624	0,580068	1,723935	0,8650055	53	7	0,5167824	0,603635	1,656629	0,8561168	53
8	0,5020140	0,580457	1,722780	0,8648595	52	8	0,5170314	0,604032	1,655541	0,8559664	52
9	0,5022655	0,580846	1,721626	0,8647134	51	9	0,5172804	0,604429	1,654453	0,8558160	51
10	0,5025170	0,581235	1,720474	0,8645673	50	10	0,5175293	0,604827	1,653366	0,8556655	50
11	0,5027685	0,581625	1,719322	0,8644211	49	11	0,5177782	0,605224	1,652281	0,8555149	49
12	0,5030199	0,582014	1,718172	0,8642748	48	12	0,5180270	0,605622	1,651196	0,8553643	48
13	0,5032713	0,582403	1,717023	0,8641284	47	13	0,5182758	0,606019	1,650113	0,8552135	47
14	0,5035227	0,582793	1,715875	0,8639820	46	14	0,5185246	0,606417	1,649030	0,8550627	46
15	0,5037740	0,583183	1,714728	0,8638355	45	15	0,5187733	0,606815	1,647949	0,8549119	45
16	0,5040252	0,583573	1,713583	0,8636889	44	16	0,5190219	0,607213	1,646869	0,8547609	44
17	0,5042765	0,583963	1,712438	0,8635423	43	17	0,5192705	0,607611	1,645789	0,8546099	43
18	0,5045276	0,584353	1,711295	0,8633956	42	18	0,5195191	0,608010	1,644711	0,8544588	42
19	0,5047788	0,584743	1,710153	0,8632488	41	19	0,5197676	0,608408	1,643634	0,8543077	41
20	0,5050298	0,585134	1,709012	0,8631019	40	20	0,5200161	0,608807	1,642558	0,8541564	40
21	0,5052809	0,585524	1,707872	0,8629549	39	21	0,5202646	0,609205	1,641482	0,8540051	39
22	0,5055319	0,585915	1,706733	0,8628079	38	22	0,5205130	0,609604	1,640408	0,8538538	38
23	0,5057828	0,586306	1,705595	0,8626608	37	23	0,5207613	0,610003	1,639335	0,8537023	37
24	0,5060338	0,586697	1,704459	0,8625137	36	24	0,5210096	0,610403	1,638263	0,8535508	36
25	0,5062846	0,587088	1,703323	0,8623664	35	25	0,5212579	0,610802	1,637192	0,8533992	35
26	0,5065355	0,587479	1,702189	0,8622191	34	26	0,5215061	0,611201	1,636122	0,8532475	34
27	0,5067863	0,587870	1,701056	0,8620717	33	27	0,5217543	0,611601	1,635053	0,8530958	33
28	0,5070370	0,588262	1,699924	0,8619243	32	28	0,5220024	0,612001	1,633985	0,8529440	32
29	0,5072877	0,588653	1,698793	0,8617768	31	29	0,5222505	0,612401	1,632918	0,8527921	31
30	0,5075384	0,589045	1,697663	0,8616292	30	30	0,5224986	0,612801	1,631852	0,8526402	30
31	0,5077890	0,589437	1,696534	0,8614815	29	31	0,5227466	0,613201	1,630787	0,8524881	29
32	0,5080396	0,589829	1,695407	0,8613337	28	32	0,5229945	0,613601	1,629723	0,8523360	28
33	0,5082901	0,590221	1,694280	0,8611859	27	33	0,5232424	0,614002	1,628660	0,8521839	27
34	0,5085406	0,590613	1,693155	0,8610380	26	34	0,5234903	0,614402	1,627598	0,8520316	26
35	0,5087910	0,591006	1,692031	0,8608901	25	35	0,5237381	0,614803	1,626537	0,8518793	25
36	0,5090414	0,591398	1,690908	0,8607420	24	36	0,5239859	0,615204	1,625477	0,8517269	24
37	0,5092918	0,591791	1,689786	0,8605939	23	37	0,5242336	0,615605	1,624418	0,8515745	23
38	0,5095421	0,592184	1,688665	0,8604457	22	38	0,5244813	0,616006	1,623360	0,8514219	22
39	0,5097924	0,592577	1,687545	0,8602975	21	39	0,5247290	0,616408	1,622303	0,8512693	21
40	0,5100426	0,592970	1,686426	0,8601491	20	40	0,5249766	0,616809	1,621247	0,8511167	20
41	0,5102928	0,593363	1,685308	0,8600007	19	41	0,5252241	0,617211	1,620192	0,8509639	19
42	0,5105429	0,593757	1,684192	0,8598523	18	42	0,5254717	0,617613	1,619138	0,8508111	18
43	0,5107930	0,594150	1,683077	0,8597037	17	43	0,5257191	0,618015	1,618085	0,8506582	17
44	0,5110431	0,594544	1,681962	0,8595551	16	44	0,5259665	0,618417	1,617033	0,8505053	16
45	0,5112931	0,594937	1,680849	0,8594064	15	45	0,5262139	0,618819	1,615982	0,8503522	15
46	0,5115431	0,595331	1,679737	0,8592576	14	46	0,5264613	0,619221	1,614932	0,8501991	14
47	0,5117930	0,595725	1,678626	0,8591088	13	47	0,5267085	0,619624	1,613883	0,8500459	13
48	0,5120429	0,596120	1,677516	0,8589599	12	48	0,5269558	0,620026	1,612835	0,8498927	12
49	0,5122927	0,596514	1,676407	0,8588109	11	49	0,5272030	0,620429	1,611788	0,8497394	11
50	0,5125425	0,596908	1,675299	0,8586619	10	50	0,5274502	0,620832	1,610742	0,8495860	10
51	0,5127923	0,597303	1,674192	0,8585127	9	51	0,5276973	0,621235	1,609697	0,8494325	9
52	0,5130420	0,597698	1,673086	0,8583635	8	52	0,5279443	0,621638	1,608653	0,8492790	8
53	0,5132916	0,598093	1,671982	0,8582143	7	53	0,5281914	0,622042	1,607609	0,8491254	7
54	0,5135413	0,598488	1,670878	0,8580649	6	54	0,5284383	0,622445	1,606567	0,8489717	6
55	0,5137908	0,598883	1,669776	0,8579155	5	55	0,5286853	0,622849	1,605526	0,8488179	5
56	0,5140404	0,599278	1,668674	0,8577660	4	56	0,5289322	0,623253	1,604486	0,8486641	4
57	0,5142899	0,599674	1,667574	0,8576164	3	57	0,5291790	0,623657	1,603446	0,8485102	3
58	0,5145393	0,600069	1,666475	0,8574668	2	58	0,5294258	0,624061	1,602408	0,8483562	2
59	0,5147887	0,600465	1,665377	0,8573171	1	59	0,5296726	0,624465	1,601371	0,8482022	1
	cos	ctg	tg	sin			cos	ctg	tg	sin	

59°

58°

32°

33°

	sin	tg	ctg	cos			sin	tg	ctg	cos	
0	0,5299193	0,624869	1,600335	0,8480481	60	0	0,5446390	0,649408	1,539865	0,8386706	60
1	0,5301659	0,625274	1,599299	0,8478939	59	1	0,5448830	0,649821	1,538885	0,8385121	59
2	0,5304125	0,625679	1,598265	0,8477397	58	2	0,5451269	0,650235	1,537905	0,8383536	58
3	0,5306591	0,626083	1,597231	0,8475853	57	3	0,5453707	0,650649	1,536927	0,8381950	57
4	0,5309057	0,626488	1,596199	0,8474309	56	4	0,5456145	0,651063	1,535949	0,8380363	56
5	0,5311521	0,626894	1,595167	0,8472765	55	5	0,5458583	0,651477	1,534973	0,8378775	55
6	0,5313986	0,627299	1,594137	0,8471219	54	6	0,5461020	0,651892	1,533997	0,8377187	54
7	0,5316450	0,627704	1,593107	0,8469673	53	7	0,5463456	0,652306	1,533022	0,8375598	53
8	0,5318913	0,628110	1,592078	0,8468126	52	8	0,5465892	0,652722	1,532048	0,8374009	52
9	0,5321376	0,628516	1,591051	0,8466579	51	9	0,5468328	0,653136	1,531075	0,8372418	51
10	0,5323839	0,628921	1,590024	0,8465030	50	10	0,5470763	0,653551	1,530102	0,8370827	50
11	0,5326301	0,629327	1,588998	0,8463481	49	11	0,5473198	0,653966	1,529131	0,8369236	49
12	0,5328763	0,629734	1,587973	0,8461932	48	12	0,5475632	0,654382	1,528160	0,8367643	48
13	0,5331224	0,630140	1,586949	0,8460381	47	13	0,5478066	0,654797	1,527190	0,8366050	47
14	0,5333685	0,630546	1,585926	0,8458830	46	14	0,5480499	0,655213	1,526222	0,8364456	46
15	0,5336145	0,630953	1,584904	0,8457278	45	15	0,5482932	0,655629	1,525253	0,8362862	45
16	0,5338605	0,631360	1,583883	0,8455726	44	16	0,5485365	0,656045	1,524286	0,8361266	44
17	0,5341065	0,631767	1,582863	0,8454172	43	17	0,5487797	0,656461	1,523320	0,8359670	43
18	0,5343523	0,632174	1,581844	0,8452618	42	18	0,5490228	0,656877	1,522355	0,8358074	42
19	0,5345982	0,632581	1,580825	0,8451064	41	19	0,5492659	0,657294	1,521390	0,8356476	41
20	0,5348440	0,632988	1,579808	0,8449508	40	20	0,5495090	0,657710	1,520426	0,8354878	40
21	0,5350898	0,633396	1,578792	0,8447952	39	21	0,5497520	0,658127	1,519463	0,8353279	39
22	0,5353355	0,633804	1,577776	0,8446395	38	22	0,5499950	0,658544	1,518501	0,8351680	38
23	0,5355812	0,634211	1,576761	0,8444838	37	23	0,5502379	0,658961	1,517540	0,8350080	37
24	0,5358268	0,634619	1,575748	0,8443279	36	24	0,5504807	0,659379	1,516580	0,8348479	36
25	0,5360724	0,635027	1,574735	0,8441720	35	25	0,5507236	0,659796	1,515620	0,8346877	35
26	0,5363179	0,635436	1,573723	0,8440161	34	26	0,5509663	0,660214	1,514661	0,8345275	34
27	0,5365634	0,635844	1,572713	0,8438600	33	27	0,5512091	0,660631	1,513704	0,8343672	33
28	0,5368089	0,636253	1,571703	0,8437039	32	28	0,5514518	0,661049	1,512747	0,8342068	32
29	0,5370543	0,636661	1,570694	0,8435477	31	29	0,5516944	0,661467	1,511790	0,8340463	31
30	0,5372996	0,637070	1,569686	0,8433914	30	30	0,5519370	0,661886	1,510835	0,8338858	30
31	0,5375449	0,637479	1,568678	0,8432351	29	31	0,5521795	0,662304	1,509881	0,8337252	29
32	0,5377902	0,637888	1,567672	0,8430787	28	32	0,5524220	0,662723	1,508927	0,8335646	28
33	0,5380354	0,638298	1,566667	0,8429222	27	33	0,5526645	0,663141	1,507974	0,8334038	27
34	0,5382806	0,638707	1,565662	0,8427657	26	34	0,5529069	0,663560	1,507022	0,8332430	26
35	0,5385257	0,639117	1,564659	0,8426091	25	35	0,5531492	0,663979	1,506071	0,8330822	25
36	0,5387708	0,639527	1,563656	0,8424524	24	36	0,5533915	0,664398	1,505121	0,8329212	24
37	0,5390158	0,639937	1,562655	0,8422956	23	37	0,5536338	0,664818	1,504172	0,8327602	23
38	0,5392608	0,640347	1,561654	0,8421388	22	38	0,5538760	0,665237	1,503223	0,8325991	22
39	0,5395058	0,640757	1,560654	0,8419819	21	39	0,5541182	0,665657	1,502275	0,8324380	21
40	0,5397507	0,641167	1,559655	0,8418249	20	40	0,5543603	0,666077	1,501328	0,8322768	20
41	0,5399955	0,641578	1,558657	0,8416679	19	41	0,5546024	0,666497	1,500382	0,8321155	19
42	0,5402403	0,641989	1,557660	0,8415108	18	42	0,5548444	0,666917	1,499437	0,8319541	18
43	0,5404851	0,642399	1,556664	0,8413536	17	43	0,5550864	0,667337	1,498492	0,8317927	17
44	0,5407298	0,642810	1,555669	0,8411963	16	44	0,5553283	0,667758	1,497549	0,8316312	16
45	0,5409745	0,643222	1,554674	0,8410390	15	45	0,5555702	0,668179	1,496606	0,8314696	15
46	0,5412191	0,643633	1,553681	0,8408816	14	46	0,5558121	0,668599	1,495664	0,8313080	14
47	0,5414637	0,644044	1,552688	0,8407241	13	47	0,5560539	0,669020	1,494723	0,8311463	13
48	0,5417082	0,644456	1,551696	0,8405666	12	48	0,5562956	0,669442	1,493782	0,8309845	12
49	0,5419527	0,644868	1,550705	0,8404090	11	49	0,5565373	0,669863	1,492843	0,8308226	11
50	0,5421971	0,645280	1,549715	0,8402513	10	50	0,5567790	0,670284	1,491904	0,8306607	10
51	0,5424415	0,645692	1,548726	0,8400936	9	51	0,5570206	0,670705	1,490966	0,8304987	9
52	0,5426859	0,646104	1,547738	0,8399357	8	52	0,5572621	0,671128	1,490029	0,8303366	8
53	0,5429302	0,646516	1,546751	0,8397778	7	53	0,5575036	0,671550	1,489092	0,8301745	7
54	0,5431744	0,646929	1,545765	0,8396199	6	54	0,5577451	0,671972	1,488157	0,8300123	6
55	0,5434187	0,647342	1,544779	0,8394618	5	55	0,5579865	0,672394	1,487222	0,8298500	5
56	0,5436628	0,647755	1,543795	0,8393037	4	56	0,5582279	0,672817	1,486288	0,8296877	4
57	0,5439069	0,648168	1,542811	0,8391455	3	57	0,5584692	0,673240	1,485355	0,8295252	3
58	0,5441510	0,648581	1,541828	0,8389873	2	58	0,5587105	0,673662	1,484423	0,8293628	2
59	0,5443951	0,648994	1,540846	0,8388290	1	59	0,5589517	0,674085	1,483492	0,8292002	1
	cos	ctg	tg	sin			cos	ctg	tg	sin	

57°

56°

34°

	sin	tg	ctg	cos
0	0,5591929	0,674509	1,482561	0,8290376
1	0,5594340	0,674932	1,481631	0,8288749
2	0,5596751	0,675355	1,480702	0,8287121
3	0,5599162	0,675779	1,479774	0,8285493
4	0,5601572	0,676203	1,478846	0,8283864
5	0,5603981	0,676627	1,477920	0,8282234
6	0,5606390	0,677051	1,476994	0,8280603
7	0,5608798	0,677475	1,476069	0,8278972
8	0,5611206	0,677900	1,475144	0,8277340
9	0,5613614	0,678324	1,474221	0,8275708
10	0,5616021	0,678749	1,473298	0,8274074
11	0,5618428	0,679174	1,472376	0,8272440
12	0,5620834	0,679599	1,471455	0,8270806
13	0,5623239	0,680025	1,470535	0,8269170
14	0,5625645	0,680450	1,469615	0,8267534
15	0,5628049	0,680876	1,468697	0,8265897
16	0,5630453	0,681302	1,467779	0,8264260
17	0,5632857	0,681728	1,466862	0,8262622
18	0,5635260	0,682154	1,465945	0,8260983
19	0,5637663	0,682580	1,465030	0,8259343
20	0,5640066	0,683007	1,464115	0,8257703
21	0,5642467	0,683433	1,463201	0,8256062
22	0,5644869	0,683860	1,462287	0,8254420
23	0,5647270	0,684287	1,461375	0,8252778
24	0,5649670	0,684714	1,460463	0,8251135
25	0,5652070	0,685142	1,459552	0,8249491
26	0,5654469	0,685569	1,458642	0,8247847
27	0,5656868	0,685997	1,457733	0,8246202
28	0,5659267	0,686425	1,456824	0,8244556
29	0,5661665	0,686853	1,455916	0,8242909
30	0,5664062	0,687281	1,455009	0,8241262
31	0,5666459	0,687709	1,454103	0,8239614
32	0,5668856	0,688138	1,453197	0,8237965
33	0,5671252	0,688567	1,452292	0,8236316
34	0,5673648	0,688995	1,451388	0,8234666
35	0,5676043	0,689425	1,450485	0,8233015
36	0,5678437	0,689854	1,449583	0,8231364
37	0,5680832	0,690283	1,448681	0,8229712
38	0,5683225	0,690713	1,447780	0,8228059
39	0,5685619	0,691143	1,446880	0,8226405
40	0,5688011	0,691572	1,445980	0,8224751
41	0,5690403	0,692003	1,445081	0,8223096
42	0,5692795	0,692433	1,444183	0,8221440
43	0,5695187	0,692863	1,443286	0,8219784
44	0,5697577	0,693294	1,442390	0,8218127
45	0,5699968	0,693725	1,441494	0,8216469
46	0,5702357	0,694156	1,440599	0,8214811
47	0,5704747	0,694587	1,439705	0,8213152
48	0,5707136	0,695018	1,438811	0,8211492
49	0,5709524	0,695450	1,437919	0,8209832
50	0,5711912	0,695881	1,437027	0,8208170
51	0,5714299	0,696313	1,436136	0,8206509
52	0,5716686	0,696745	1,435245	0,8204846
53	0,5719073	0,697177	1,434355	0,8203183
54	0,5721459	0,697610	1,433466	0,8201519
55	0,5723844	0,698042	1,432578	0,8199854
56	0,5726229	0,698475	1,431691	0,8198189
57	0,5728614	0,698908	1,430804	0,8196523
58	0,5730998	0,699341	1,429918	0,8194856
59	0,5733381	0,699774	1,429033	0,8193189

35°

	sin	tg	ctg	cos
0	0,5735764	0,700208	1,428148	0,8191520
1	0,5738147	0,700641	1,427264	0,8189852
2	0,5740529	0,701075	1,426381	0,8188182
3	0,5742911	0,701509	1,425499	0,8186512
4	0,5745292	0,701943	1,424617	0,8184841
5	0,5747672	0,702377	1,423736	0,8183169
6	0,5750053	0,702812	1,422856	0,8181497
7	0,5752432	0,703246	1,421977	0,8179824
8	0,5754811	0,703681	1,421098	0,8178151
9	0,5757190	0,704116	1,420220	0,8176476
10	0,5759568	0,704551	1,419343	0,8174801
11	0,5761946	0,704987	1,418466	0,8173125
12	0,5764323	0,705422	1,417590	0,8171449
13	0,5766700	0,705858	1,416715	0,8169772
14	0,5769076	0,706294	1,415841	0,8168094
15	0,5771452	0,706730	1,414967	0,8166416
16	0,5773827	0,707166	1,414094	0,8164736
17	0,5776202	0,707603	1,413222	0,8163056
18	0,5778576	0,708039	1,412351	0,8161376
19	0,5780950	0,708476	1,411480	0,8159695
20	0,5783323	0,708913	1,410610	0,8158013
21	0,5785696	0,709350	1,409740	0,8156330
22	0,5788069	0,709788	1,408872	0,8154647
23	0,5790440	0,710225	1,408004	0,8152963
24	0,5792812	0,710663	1,407137	0,8151278
25	0,5795183	0,711101	1,406270	0,8149593
26	0,5797553	0,711539	1,405404	0,8147906
27	0,5799923	0,711977	1,404539	0,8146220
28	0,5802292	0,712416	1,403675	0,8144532
29	0,5804661	0,712854	1,402811	0,8142844
30	0,5807030	0,713293	1,401948	0,8141155
31	0,5809397	0,713732	1,401086	0,8139466
32	0,5811765	0,714171	1,400224	0,8137775
33	0,5814132	0,714611	1,399364	0,8136084
34	0,5816498	0,715050	1,398503	0,8134393
35	0,5818864	0,715490	1,397644	0,8132701
36	0,5821230	0,715930	1,396785	0,8131008
37	0,5823595	0,716370	1,395927	0,8129314
38	0,5825959	0,716810	1,395070	0,8127620
39	0,5828323	0,717250	1,394213	0,8125925
40	0,5830687	0,717691	1,393357	0,8124229
41	0,5833050	0,718132	1,392502	0,8122532
42	0,5835412	0,718573	1,391647	0,8120835
43	0,5837774	0,719014	1,390793	0,8119137
44	0,5840136	0,719455	1,389940	0,8117439
45	0,5842497	0,719897	1,389088	0,8115740
46	0,5844857	0,720339	1,388236	0,8114040
47	0,5847217	0,720781	1,387385	0,8112339
48	0,5849577	0,721223	1,386534	0,8110638
49	0,5851936	0,721665	1,385684	0,8108936
50	0,5854294	0,722108	1,384835	0,8107234
51	0,5856652	0,722550	1,383987	0,8105530
52	0,5859010	0,722993	1,383139	0,8103826
53	0,5861367	0,723436	1,382292	0,8102122
54	0,5863724	0,723879	1,381446	0,8100416
55	0,5866080	0,724323	1,380600	0,8098710
56	0,5868435	0,724766	1,379755	0,8097004
57	0,5870790	0,725210	1,378911	0,8095296
58	0,5873145	0,725654	1,378067	0,8093588
59	0,5875499	0,726098	1,377224	0,8091879

55°

54°

36°

37°

	sin	g	ctg	cos			sin	tg	ctg	cos	
0	0,5877853	0,726543	1,376382	0,8090170	60	0	0,6018150	0,753554	1,327045	0,7986355	60
1	0,5880206	0,726987	1,375540	0,8088460	59	1	0,6020473	0,754010	1,326242	0,7984604	59
2	0,5882558	0,727432	1,374699	0,8086749	58	2	0,6022795	0,754467	1,325440	0,7982853	58
3	0,5884910	0,727877	1,373859	0,8085037	57	3	0,6025117	0,754923	1,324638	0,7981100	57
4	0,5887262	0,728322	1,373019	0,8083325	56	4	0,6027439	0,755380	1,323837	0,7979347	56
5	0,5889613	0,728767	1,372181	0,8081612	55	5	0,6029760	0,755837	1,323037	0,7977594	55
6	0,5891964	0,729213	1,371342	0,8079899	54	6	0,6032080	0,756294	1,322237	0,7975839	54
7	0,5894314	0,729658	1,370505	0,8078185	53	7	0,6034400	0,756751	1,321438	0,7974084	53
8	0,5896663	0,730104	1,369668	0,8076470	52	8	0,6036719	0,757209	1,320639	0,7972329	52
9	0,5899012	0,730550	1,368832	0,8074754	51	9	0,6039038	0,757667	1,319841	0,7970572	51
10	0,5901361	0,730996	1,367996	0,8073038	50	10	0,6041356	0,758125	1,319044	0,7968815	50
11	0,5903709	0,731443	1,367161	0,8071321	49	11	0,6043674	0,758583	1,318247	0,7967058	49
12	0,5906057	0,731889	1,366327	0,8069603	48	12	0,6045991	0,759041	1,317451	0,7965299	48
13	0,5908404	0,732336	1,365493	0,8067885	47	13	0,6048308	0,759500	1,316656	0,7963540	47
14	0,5910750	0,732783	1,364660	0,8066166	46	14	0,6050624	0,759959	1,315861	0,7961780	46
15	0,5913096	0,733230	1,363828	0,8064446	45	15	0,6052940	0,760418	1,315067	0,7960020	45
16	0,5915442	0,733678	1,362996	0,8062726	44	16	0,6055255	0,760877	1,314273	0,7958259	44
17	0,5917787	0,734125	1,362165	0,8061005	43	17	0,6057570	0,761336	1,313480	0,7956497	43
18	0,5920132	0,734573	1,361335	0,8059283	42	18	0,6059884	0,761796	1,312688	0,7954735	42
19	0,5922476	0,735021	1,360505	0,8057560	41	19	0,6062198	0,762256	1,311896	0,7952972	41
20	0,5924819	0,735469	1,359676	0,8055837	40	20	0,6064511	0,762716	1,311105	0,7951208	40
21	0,5927163	0,735917	1,358848	0,8054113	39	21	0,6066824	0,763176	1,310314	0,7949444	39
22	0,5929505	0,736366	1,358020	0,8052389	38	22	0,6069136	0,763636	1,309524	0,7947678	38
23	0,5931847	0,736815	1,357193	0,8050664	37	23	0,6071447	0,764097	1,308735	0,7945913	37
24	0,5934189	0,737264	1,356367	0,8048938	36	24	0,6073758	0,764558	1,307946	0,7944146	36
25	0,5936530	0,737713	1,355541	0,8047211	35	25	0,6076069	0,765019	1,307157	0,7942379	35
26	0,5938871	0,738162	1,354716	0,8045484	34	26	0,6078379	0,765480	1,306370	0,7940611	34
27	0,5941211	0,738611	1,353892	0,8043756	33	27	0,6080689	0,765941	1,305583	0,7938843	33
28	0,5943550	0,739061	1,353068	0,8042028	32	28	0,6082998	0,766403	1,304796	0,7937074	32
29	0,5945889	0,739511	1,352245	0,8040299	31	29	0,6085306	0,766865	1,304011	0,7935304	31
30	0,5948228	0,739961	1,351422	0,8038569	30	30	0,6087614	0,767327	1,303225	0,7933533	30
31	0,5950566	0,740411	1,350601	0,8036838	29	31	0,6089922	0,767789	1,302441	0,7931762	29
32	0,5952904	0,740862	1,349779	0,8035107	28	32	0,6092229	0,768252	1,301657	0,7929990	28
33	0,5955241	0,741312	1,348959	0,8033375	27	33	0,6094535	0,768714	1,300873	0,7928218	27
34	0,5957577	0,741763	1,348139	0,8031642	26	34	0,6096841	0,769177	1,300090	0,7926445	26
35	0,5959913	0,742214	1,347320	0,8029909	25	35	0,6099147	0,769640	1,299308	0,7924671	25
36	0,5962249	0,742666	1,346501	0,8028175	24	36	0,6101452	0,770104	1,298526	0,7922896	24
37	0,5964584	0,743117	1,345683	0,8026440	23	37	0,6103756	0,770567	1,297745	0,7921121	23
38	0,5966918	0,743569	1,344866	0,8024705	22	38	0,6106060	0,771031	1,296965	0,7919345	22
39	0,5969252	0,744020	1,344049	0,8022969	21	39	0,6108363	0,771495	1,296185	0,7917569	21
40	0,5971586	0,744472	1,343233	0,8021232	20	40	0,6110666	0,771959	1,295406	0,7915792	20
41	0,5973919	0,744925	1,342418	0,8019495	19	41	0,6112969	0,772423	1,294627	0,7914014	19
42	0,5976251	0,745377	1,341603	0,8017756	18	42	0,6115270	0,772888	1,293849	0,7912235	18
43	0,5978583	0,745830	1,340789	0,8016018	17	43	0,6117572	0,773353	1,293071	0,7910456	17
44	0,5980915	0,746282	1,339975	0,8014278	16	44	0,6119873	0,773818	1,292294	0,7908676	16
45	0,5983246	0,746735	1,339162	0,8012538	15	45	0,6122173	0,774283	1,291518	0,7906896	15
46	0,5985577	0,747189	1,338350	0,8010797	14	46	0,6124473	0,774748	1,290742	0,7905115	14
47	0,5987906	0,747642	1,337539	0,8009056	13	47	0,6126772	0,775214	1,289967	0,7903333	13
48	0,5990236	0,748096	1,336728	0,8007314	12	48	0,6129071	0,775680	1,289192	0,7901550	12
49	0,5992565	0,748549	1,335917	0,8005571	11	49	0,6131369	0,776146	1,288418	0,7899767	11
50	0,5994893	0,749003	1,335108	0,8003827	10	50	0,6133666	0,776612	1,287645	0,7897983	10
51	0,5997221	0,749458	1,334298	0,8002083	9	51	0,6135964	0,777078	1,286872	0,7896198	9
52	0,5999549	0,749912	1,333490	0,8000338	8	52	0,6138260	0,777545	1,286099	0,7894413	8
53	0,6001876	0,750366	1,332682	0,7998593	7	53	0,6140556	0,778012	1,285328	0,7892627	7
54	0,6004202	0,750821	1,331875	0,7996847	6	54	0,6142852	0,778479	1,284557	0,7890841	6
55	0,6006528	0,751276	1,331068	0,7995100	5	55	0,6145147	0,778946	1,283786	0,7889054	5
56	0,6008854	0,751731	1,330262	0,7993352	4	56	0,6147442	0,779414	1,283016	0,7887266	4
57	0,6011179	0,752187	1,329457	0,7991604	3	57	0,6149736	0,779881	1,282247	0,7885477	3
58	0,6013503	0,752642	1,328652	0,7989855	2	58	0,6152029	0,780349	1,281478	0,7883688	2
59	0,6015827	0,753098	1,327848	0,7988105	1	59	0,6154322	0,780817	1,280709	0,7881898	1
	cos	ctg	tg	sin			cos	ctg	tg	sin	

53°

52°

38°

39°

'	sin	tg	ctg	cos	'	'	sin	tg	ctg	cos	'
0	0,6156615	0,781286	1,279942	0,7880108	60	0	0,6293204	0,809784	1,234897	0,7771460	60
1	0,6158907	0,781754	1,279174	0,7878316	59	1	0,6295464	0,810266	1,234163	0,7769629	59
2	0,6161198	0,782223	1,278408	0,7876524	58	2	0,6297724	0,810748	1,233429	0,7767797	58
3	0,6163489	0,782692	1,277642	0,7874732	57	3	0,6299983	0,811230	1,232696	0,7765965	57
4	0,6165780	0,783161	1,276876	0,7872939	56	4	0,6302242	0,811712	1,231963	0,7764132	56
5	0,6168069	0,783631	1,276112	0,7871145	55	5	0,6304500	0,812195	1,231231	0,7762298	55
6	0,6170359	0,784100	1,275347	0,7869350	54	6	0,6306758	0,812678	1,230500	0,7760464	54
7	0,6172648	0,784570	1,274584	0,7867555	53	7	0,6309015	0,813161	1,229769	0,7758629	53
8	0,6174936	0,785040	1,273820	0,7865759	52	8	0,6311272	0,813644	1,229038	0,7756794	52
9	0,6177224	0,785510	1,273058	0,7863963	51	9	0,6313528	0,814128	1,228308	0,7754957	51
10	0,6179511	0,785981	1,272296	0,7862165	50	10	0,6315784	0,814612	1,227579	0,7753121	50
11	0,6181798	0,786451	1,271534	0,7860367	49	11	0,6318039	0,815096	1,226850	0,7751283	49
12	0,6184084	0,786922	1,270773	0,7858569	48	12	0,6320293	0,815580	1,226121	0,7749445	48
13	0,6186370	0,787394	1,270013	0,7856770	47	13	0,6322547	0,816065	1,225393	0,7747606	47
14	0,6188655	0,787865	1,269253	0,7854970	46	14	0,6324800	0,816549	1,224666	0,7745767	46
15	0,6190939	0,788336	1,268494	0,7853169	45	15	0,6327053	0,817034	1,223939	0,7743926	45
16	0,6193224	0,788808	1,267735	0,7851368	44	16	0,6329306	0,817519	1,223212	0,7742086	44
17	0,6195507	0,789280	1,266977	0,7849566	43	17	0,6331557	0,818005	1,222487	0,7740244	43
18	0,6197790	0,789752	1,266220	0,7847764	42	18	0,6333809	0,818491	1,221761	0,7738402	42
19	0,6200073	0,790225	1,265463	0,7845961	41	19	0,6336059	0,818976	1,221036	0,7736559	41
20	0,6202355	0,790697	1,264706	0,7844157	40	20	0,6338310	0,819463	1,220312	0,7734716	40
21	0,6204636	0,791170	1,263950	0,7842352	39	21	0,6340559	0,819949	1,219588	0,7732872	39
22	0,6206917	0,791643	1,263195	0,7840547	38	22	0,6342808	0,820435	1,218865	0,7731027	38
23	0,6209198	0,792117	1,262440	0,7838741	37	23	0,6345057	0,820922	1,218142	0,7729182	37
24	0,6211478	0,792590	1,261686	0,7836935	36	24	0,6347305	0,821409	1,217420	0,7727336	36
25	0,6213757	0,793064	1,260932	0,7835127	35	25	0,6349553	0,821897	1,216698	0,7725489	35
26	0,6216036	0,793538	1,260179	0,7833320	34	26	0,6351800	0,822384	1,215977	0,7723642	34
27	0,6218314	0,794012	1,259427	0,7831511	33	27	0,6354046	0,822872	1,215256	0,7721794	33
28	0,6220592	0,794486	1,258675	0,7829702	32	28	0,6356292	0,823360	1,214536	0,7719945	32
29	0,6222870	0,794961	1,257923	0,7827892	31	29	0,6358537	0,823848	1,213816	0,7718096	31
30	0,6225146	0,795436	1,257172	0,7826082	30	30	0,6360782	0,824336	1,213097	0,7716246	30
31	0,6227423	0,795911	1,256422	0,7824270	29	31	0,6363026	0,824825	1,212378	0,7714395	29
32	0,6229698	0,796386	1,255672	0,7822459	28	32	0,6365270	0,825314	1,211660	0,7712544	28
33	0,6231974	0,796862	1,254923	0,7820646	27	33	0,6367513	0,825803	1,210942	0,7710692	27
34	0,6234248	0,797337	1,254174	0,7818833	26	34	0,6369756	0,826292	1,210225	0,7708840	26
35	0,6236522	0,797813	1,253426	0,7817019	25	35	0,6371998	0,826782	1,209509	0,7706986	25
36	0,6238796	0,798290	1,252678	0,7815205	24	36	0,6374240	0,827272	1,208792	0,7705132	24
37	0,6241069	0,798766	1,251931	0,7813390	23	37	0,6376481	0,827762	1,208077	0,7703278	23
38	0,6243342	0,799242	1,251185	0,7811574	22	38	0,6378721	0,828252	1,207362	0,7701423	22
39	0,6245614	0,799719	1,250439	0,7809757	21	39	0,6380961	0,828743	1,206647	0,7699567	21
40	0,6247885	0,800196	1,249693	0,7807940	20	40	0,6383201	0,829234	1,205933	0,7697710	20
41	0,6250156	0,800674	1,248948	0,7806123	19	41	0,6385440	0,829725	1,205219	0,7695853	19
42	0,6252427	0,801151	1,248204	0,7804304	18	42	0,6387678	0,830216	1,204506	0,7693996	18
43	0,6254696	0,801629	1,247460	0,7802485	17	43	0,6389916	0,830707	1,203793	0,7692137	17
44	0,6256966	0,802107	1,246717	0,7800665	16	44	0,6392153	0,831199	1,203081	0,7690278	16
45	0,6259235	0,802585	1,245974	0,7798845	15	45	0,6394390	0,831691	1,202369	0,7688418	15
46	0,6261503	0,803063	1,245232	0,7797024	14	46	0,6396626	0,832183	1,201658	0,7686558	14
47	0,6263771	0,803542	1,244490	0,7795202	13	47	0,6398862	0,832676	1,200947	0,7684697	13
48	0,6266038	0,804021	1,243749	0,7793380	12	48	0,6401097	0,833169	1,200237	0,7682835	12
49	0,6268305	0,804500	1,243009	0,7791557	11	49	0,6403332	0,833662	1,199528	0,7680973	11
50	0,6270571	0,804979	1,242268	0,7789733	10	50	0,6405566	0,834155	1,198818	0,7679110	10
51	0,6272837	0,805458	1,241529	0,7787909	9	51	0,6407799	0,834648	1,198110	0,7677246	9
52	0,6275102	0,805938	1,240790	0,7786084	8	52	0,6410032	0,835142	1,197402	0,7675382	8
53	0,6277366	0,806418	1,240052	0,7784258	7	53	0,6412264	0,835636	1,196694	0,7673517	7
54	0,6279631	0,806898	1,239314	0,7782431	6	54	0,6414496	0,836130	1,195987	0,7671652	6
55	0,6281894	0,807379	1,238576	0,7780604	5	55	0,6416728	0,836624	1,195280	0,7669785	5
56	0,6284157	0,807859	1,237839	0,7778777	4	56	0,6418958	0,837119	1,194574	0,7667918	4
57	0,6286420	0,808340	1,237103	0,7776949	3	57	0,6421189	0,837614	1,193868	0,7666051	3
58	0,6288682	0,808821	1,236367	0,7775120	2	58	0,6423418	0,838109	1,193163	0,7664183	2
59	0,6290943	0,809303	1,235632	0,7773290	1	59	0,6425647	0,838604	1,192458	0,7662314	1

51°

50°

40°

41°

°	sin	tg	ctg	cos	°	sin	tg	ctg	cos	°
0	0,6427876	0,839100	1,191754	0,7660444	60	0,6560590	0,869287	1,150368	0,7547096	60
1	0,6430104	0,839595	1,191050	0,7658574	59	0,6562785	0,869798	1,149693	0,7545187	59
2	0,6432332	0,840092	1,190347	0,7656704	58	0,6564980	0,870309	1,149018	0,7543278	58
3	0,6434559	0,840588	1,189644	0,7654832	57	0,6567174	0,870820	1,148343	0,7541368	57
4	0,6436785	0,841084	1,188941	0,7652960	56	0,6569367	0,871332	1,147669	0,7539457	56
5	0,6439011	0,841581	1,188240	0,7651087	55	0,6571560	0,871843	1,146995	0,7537546	55
6	0,6441236	0,842078	1,187538	0,7649214	54	0,6573752	0,872356	1,146322	0,7535634	54
7	0,6443461	0,842575	1,186837	0,7647340	53	0,6575944	0,872868	1,145649	0,7533721	53
8	0,6445685	0,843073	1,186137	0,7645465	52	0,6578135	0,873381	1,144976	0,7531808	52
9	0,6447909	0,843571	1,185437	0,7643590	51	0,6580326	0,873894	1,144304	0,7529894	51
10	0,6450132	0,844069	1,184738	0,7641714	50	0,6582516	0,874407	1,143633	0,7527980	50
11	0,6452355	0,844567	1,184039	0,7639838	49	0,6584706	0,874920	1,142961	0,7526065	49
12	0,6454577	0,845066	1,183340	0,7637960	48	0,6586895	0,875434	1,142291	0,7524149	48
13	0,6456798	0,845564	1,182642	0,7636082	47	0,6589083	0,875948	1,141621	0,7522233	47
14	0,6459019	0,846063	1,181945	0,7634204	46	0,6591271	0,876462	1,140951	0,7520316	46
15	0,6461240	0,846562	1,181248	0,7632325	45	0,6593458	0,876976	1,140281	0,7518398	45
16	0,6463460	0,847062	1,180551	0,7630445	44	0,6595645	0,877491	1,139613	0,7516480	44
17	0,6465679	0,847562	1,179855	0,7628564	43	0,6597831	0,878006	1,138944	0,7514561	43
18	0,6467898	0,848062	1,179160	0,7626683	42	0,6600017	0,878521	1,138276	0,7512641	42
19	0,6470116	0,848562	1,178464	0,7624802	41	0,6602202	0,879037	1,137609	0,7510721	41
20	0,6472334	0,849062	1,177770	0,7622919	40	0,6604386	0,879553	1,136941	0,7508800	40
21	0,6474551	0,849563	1,177076	0,7621036	39	0,6606570	0,880069	1,136275	0,7506879	39
22	0,6476767	0,850064	1,176382	0,7619152	38	0,6608754	0,880585	1,135609	0,7504957	38
23	0,6478984	0,850565	1,175689	0,7617268	37	0,6610936	0,881102	1,134943	0,7503034	37
24	0,6481199	0,851067	1,174996	0,7615383	36	0,6613119	0,881619	1,134277	0,7501111	36
25	0,6483414	0,851568	1,174304	0,7613497	35	0,6615300	0,882136	1,133612	0,7499187	35
26	0,6485628	0,852070	1,173612	0,7611611	34	0,6617482	0,882653	1,132948	0,7497262	34
27	0,6487842	0,852573	1,172921	0,7609724	33	0,6619662	0,883171	1,132284	0,7495337	33
28	0,6490056	0,853075	1,172230	0,7607837	32	0,6621842	0,883689	1,131620	0,7493411	32
29	0,6492268	0,853578	1,171539	0,7605949	31	0,6624022	0,884207	1,130957	0,7491484	31
30	0,6494480	0,854081	1,170850	0,7604060	30	0,6626200	0,884725	1,130294	0,7489557	30
31	0,6496692	0,854584	1,170160	0,7602170	29	0,6628379	0,885244	1,129632	0,7487629	29
32	0,6498903	0,855087	1,169471	0,7600280	28	0,6630557	0,885763	1,128970	0,7485701	28
33	0,6501114	0,855591	1,168783	0,7598389	27	0,6632734	0,886282	1,128309	0,7483772	27
34	0,6503324	0,856095	1,168095	0,7596498	26	0,6634910	0,886802	1,127648	0,7481842	26
35	0,6505533	0,856599	1,167407	0,7594606	25	0,6637087	0,887321	1,126987	0,7479912	25
36	0,6507742	0,857104	1,166720	0,7592713	24	0,6639262	0,887842	1,126327	0,7477981	24
37	0,6509951	0,857608	1,166033	0,7590820	23	0,6641437	0,888362	1,125667	0,7476049	23
38	0,6512158	0,858113	1,165347	0,7588926	22	0,6643612	0,888882	1,125008	0,7474117	22
39	0,6514366	0,858619	1,164662	0,7587031	21	0,6645785	0,889403	1,124349	0,7472184	21
40	0,6516572	0,859124	1,163976	0,7585136	20	0,6647959	0,889924	1,123691	0,7470251	20
41	0,6518778	0,859630	1,163292	0,7583240	19	0,6650131	0,890446	1,123033	0,7468317	19
42	0,6520984	0,860136	1,162607	0,7581343	18	0,6652304	0,890967	1,122375	0,7466382	18
43	0,6523189	0,860642	1,161923	0,7579446	17	0,6654475	0,891489	1,121718	0,7464446	17
44	0,6525394	0,861148	1,161240	0,7577548	16	0,6656646	0,892012	1,121062	0,7462510	16
45	0,6527598	0,861655	1,160557	0,7575650	15	0,6658817	0,892534	1,120405	0,7460574	15
46	0,6529801	0,862162	1,159875	0,7573751	14	0,6660987	0,893057	1,119750	0,7458636	14
47	0,6532004	0,862669	1,159193	0,7571851	13	0,6663156	0,893580	1,119094	0,7456699	13
48	0,6534206	0,863177	1,158511	0,7569951	12	0,6665325	0,894103	1,118439	0,7454760	12
49	0,6536408	0,863685	1,157830	0,7568050	11	0,6667493	0,894627	1,117785	0,7452821	11
50	0,6538609	0,864193	1,157149	0,7566148	10	0,6669661	0,895151	1,117130	0,7450881	10
51	0,6540810	0,864701	1,156469	0,7564246	9	0,6671828	0,895673	1,116477	0,7448941	9
52	0,6543010	0,865209	1,155790	0,7562343	8	0,6673994	0,896199	1,115823	0,7446999	8
53	0,6545209	0,865718	1,155110	0,7560439	7	0,6676160	0,896724	1,115171	0,7445058	7
54	0,6547408	0,866227	1,154432	0,7558535	6	0,6678326	0,897249	1,114518	0,7443115	6
55	0,6549607	0,866736	1,153753	0,7556630	5	0,6680490	0,897774	1,113866	0,7441173	5
56	0,6551804	0,867246	1,153075	0,7554724	4	0,6682655	0,898299	1,113215	0,7439229	4
57	0,6554002	0,867756	1,152398	0,7552818	3	0,6684818	0,898825	1,112563	0,7437285	3
58	0,6556198	0,868266	1,151721	0,7550911	2	0,6686981	0,899351	1,111913	0,7435340	2
59	0,6558395	0,868776	1,151044	0,7549004	1	0,6689144	0,899877	1,111262	0,7433394	1
cos	ctg	tg	sin	°	°	cos	ctg	tg	sin	°

49°

48°

42°

43°

	sin	tg	ctg	cos			sin	tg	ctg	cos	
0	0,6691306	0,900404	1,110613	0,7431448	60	0	0,6819984	0,932515	1,072369	0,7313537	60
1	0,6693468	0,900931	1,109963	0,7429502	59	1	0,6822111	0,933059	1,071744	0,7311553	59
2	0,6695628	0,901458	1,109314	0,7427554	58	2	0,6824237	0,933603	1,071119	0,7309568	58
3	0,6697789	0,901985	1,108665	0,7425606	57	3	0,6826363	0,934148	1,070494	0,7307583	57
4	0,6699948	0,902513	1,108017	0,7423658	56	4	0,6828489	0,934693	1,069870	0,7305597	56
5	0,6702108	0,903041	1,107369	0,7421708	55	5	0,6830613	0,935238	1,069247	0,7303610	55
6	0,6704266	0,903569	1,106722	0,7419758	54	6	0,6832738	0,935783	1,068623	0,7301623	54
7	0,6706424	0,904098	1,106075	0,7417808	53	7	0,6834861	0,936329	1,068000	0,7299635	53
8	0,6708582	0,904627	1,105428	0,7415857	52	8	0,6836984	0,936875	1,067378	0,7297646	52
9	0,6710739	0,905156	1,104782	0,7413905	51	9	0,6839107	0,937422	1,066756	0,7295657	51
10	0,6712895	0,905685	1,104137	0,7411953	50	10	0,6841229	0,937968	1,066134	0,7293668	50
11	0,6715051	0,906215	1,103491	0,7410000	49	11	0,6843350	0,938515	1,065513	0,7291677	49
12	0,6717206	0,906745	1,102846	0,7408046	48	12	0,6845471	0,939063	1,064892	0,7289686	48
13	0,6719361	0,907275	1,102202	0,7406092	47	13	0,6847591	0,939610	1,064271	0,7287695	47
14	0,6721515	0,907805	1,101558	0,7404137	46	14	0,6849711	0,940158	1,063651	0,7285703	46
15	0,6723668	0,908336	1,100914	0,7402181	45	15	0,6851830	0,940706	1,063031	0,7283710	45
16	0,6725821	0,908867	1,100271	0,7400225	44	16	0,6853948	0,941255	1,062412	0,7281716	44
17	0,6727973	0,909398	1,099628	0,7398268	43	17	0,6856066	0,941803	1,061793	0,7279722	43
18	0,6730125	0,909930	1,098986	0,7396311	42	18	0,6858184	0,942352	1,061171	0,7277728	42
19	0,6732276	0,910462	1,098344	0,7394353	41	19	0,6860300	0,942902	1,060556	0,7275732	41
20	0,6734427	0,910994	1,097702	0,7392394	40	20	0,6862416	0,943451	1,059938	0,7273736	40
21	0,6736577	0,911526	1,097061	0,7390435	39	21	0,6864532	0,944001	1,059321	0,7271740	39
22	0,6738727	0,912059	1,096420	0,7388475	38	22	0,6866647	0,944552	1,058703	0,7269743	38
23	0,6740876	0,912592	1,095780	0,7386515	37	23	0,6868761	0,945102	1,058087	0,7267745	37
24	0,6743024	0,913125	1,095140	0,7384553	36	24	0,6870875	0,945653	1,057470	0,7265747	36
25	0,6745172	0,913659	1,094500	0,7382592	35	25	0,6872988	0,946204	1,056854	0,7263748	35
26	0,6747319	0,914193	1,093861	0,7380629	34	26	0,6875101	0,946756	1,056239	0,7261748	34
27	0,6749466	0,914727	1,093222	0,7378666	33	27	0,6877213	0,947307	1,055624	0,7259748	33
28	0,6751612	0,915261	1,092584	0,7376703	32	28	0,6879325	0,947859	1,055009	0,7257747	32
29	0,6753757	0,915796	1,091946	0,7374738	31	29	0,6881435	0,948412	1,054394	0,7255746	31
30	0,6755902	0,916331	1,091309	0,7372773	30	30	0,6883546	0,948965	1,053780	0,7253744	30
31	0,6758046	0,916866	1,090671	0,7370808	29	31	0,6885655	0,949518	1,053166	0,7251741	29
32	0,6760190	0,917402	1,090035	0,7368842	28	32	0,6887765	0,950071	1,052553	0,7249738	28
33	0,6762333	0,917938	1,089398	0,7366875	27	33	0,6889873	0,950624	1,051940	0,7247734	27
34	0,6764476	0,918474	1,088762	0,7364908	26	34	0,6891981	0,951178	1,051328	0,7245729	26
35	0,6766618	0,919010	1,088127	0,7362940	25	35	0,6894089	0,951733	1,050715	0,7243724	25
36	0,6768760	0,919547	1,087492	0,7360971	24	36	0,6896195	0,952287	1,050103	0,7241719	24
37	0,6770901	0,920084	1,086857	0,7359002	23	37	0,6898302	0,952842	1,049492	0,7239712	23
38	0,6773041	0,920621	1,086223	0,7357032	22	38	0,6900407	0,953397	1,048881	0,7237705	22
39	0,6775181	0,921159	1,085589	0,7355061	21	39	0,6902512	0,953953	1,048270	0,7235698	21
40	0,6777320	0,921697	1,084955	0,7353090	20	40	0,6904617	0,954508	1,047660	0,7233690	20
41	0,6779459	0,922235	1,084322	0,7351118	19	41	0,6906721	0,955064	1,047050	0,7231681	19
42	0,6781597	0,922773	1,083690	0,7349146	18	42	0,6908824	0,955621	1,046440	0,7229671	18
43	0,6783734	0,923312	1,083057	0,7347173	17	43	0,6910927	0,956177	1,045831	0,7227661	17
44	0,6785871	0,923851	1,082425	0,7345199	16	44	0,6913029	0,956734	1,045222	0,7225651	16
45	0,6788007	0,924390	1,081794	0,7343225	15	45	0,6915131	0,957292	1,044614	0,7223640	15
46	0,6790143	0,924930	1,081163	0,7341250	14	46	0,6917232	0,957849	1,044006	0,7221628	14
47	0,6792278	0,925470	1,080532	0,7339275	13	47	0,6919332	0,958407	1,043398	0,7219615	13
48	0,6794413	0,926010	1,079902	0,7337299	12	48	0,6921432	0,958966	1,042790	0,7217602	12
49	0,6796547	0,926551	1,079272	0,7335322	11	49	0,6923531	0,959524	1,042183	0,7215589	11
50	0,6798681	0,927091	1,078642	0,7333345	10	50	0,6925630	0,960083	1,041577	0,7213574	10
51	0,6800813	0,927632	1,078013	0,7331367	9	51	0,6927728	0,960642	1,040970	0,7211559	9
52	0,6802946	0,928174	1,077384	0,7329388	8	52	0,6929825	0,961202	1,040364	0,7209544	8
53	0,6805078	0,928715	1,076756	0,7327409	7	53	0,6931922	0,961761	1,039759	0,7207528	7
54	0,6807209	0,929257	1,076128	0,7325429	6	54	0,6934018	0,962322	1,039154	0,7205511	6
55	0,6809339	0,929800	1,075501	0,7323449	5	55	0,6936114	0,962882	1,038549	0,7203494	5
56	0,6811469	0,930342	1,074873	0,7321467	4	56	0,6938209	0,963443	1,037944	0,7201476	4
57	0,6813599	0,930885	1,074247	0,7319486	3	57	0,6940304	0,964004	1,037340	0,7199457	3
58	0,6815728	0,931428	1,073620	0,7317503	2	58	0,6942398	0,964565	1,036737	0,7197438	2
59	0,6817856	0,931971	1,072994	0,7315521	1	59	0,6944491	0,965127	1,036133	0,7195418	1

47°

46°

44°

44°

	sin	tg	ctg	cos			sin	tg	ctg	cos	
0	0,6946584	0,965689	1,035530	0,7193398	60	30	0,7009093	0,982697	1,017607	0,7132504	30
1	0,6948676	0,966251	1,034928	0,7191377	59	31	0,7011167	0,983269	1,017015	0,7130465	29
2	0,6950767	0,966814	1,034325	0,7189355	58	32	0,7013241	0,983842	1,016424	0,7128426	28
3	0,6952858	0,967377	1,033724	0,7187333	57	33	0,7015314	0,984414	1,015833	0,7126385	27
4	0,6954949	0,967940	1,033122	0,7185310	56	34	0,7017387	0,984987	1,015242	0,7124344	26
5	0,6957039	0,968504	1,032521	0,7183287	55	35	0,7019459	0,985560	1,014651	0,7122303	25
6	0,6959128	0,969067	1,031920	0,7181263	54	36	0,7021531	0,986134	1,014061	0,7120260	24
7	0,6961217	0,969632	1,031319	0,7179238	53	37	0,7023601	0,986708	1,013471	0,7118218	23
8	0,6963305	0,970196	1,030719	0,7177213	52	38	0,7025672	0,987282	1,012882	0,7116174	22
9	0,6965392	0,970761	1,030120	0,7175187	51	39	0,7027741	0,987857	1,012293	0,7114130	21
10	0,6967479	0,971326	1,029520	0,7173161	50	40	0,7029811	0,988432	1,011704	0,7112086	20
11	0,6969565	0,971892	1,028921	0,7171134	49	41	0,7031879	0,989007	1,011115	0,7110041	19
12	0,6971651	0,972458	1,028323	0,7169106	48	42	0,7033947	0,989582	1,010527	0,7107995	18
13	0,6973736	0,973024	1,027724	0,7167078	47	43	0,7036014	0,990158	1,009939	0,7105948	17
14	0,6975821	0,973590	1,027126	0,7165049	46	44	0,7038081	0,990735	1,009352	0,7103901	16
15	0,6977905	0,974157	1,026529	0,7163019	45	45	0,7040147	0,991311	1,008765	0,7101854	15
16	0,6979988	0,974724	1,025931	0,7160989	44	46	0,7042213	0,991888	1,008178	0,7099806	14
17	0,6982071	0,975291	1,025335	0,7158959	43	47	0,7044278	0,992465	1,007592	0,7097757	13
18	0,6984153	0,975859	1,024738	0,7156927	42	48	0,7046342	0,993043	1,007006	0,7095707	12
19	0,6986234	0,976427	1,024142	0,7154895	41	49	0,7048406	0,993621	1,006420	0,7093657	11
20	0,6988315	0,976996	1,023546	0,7152863	40	50	0,7050469	0,994199	1,005835	0,7091607	10
21	0,6990396	0,977564	1,022951	0,7150830	39	51	0,7052532	0,994778	1,005250	0,7089556	9
22	0,6992476	0,978133	1,022356	0,7148796	38	52	0,7054594	0,995357	1,004665	0,7087504	8
23	0,6994555	0,978703	1,021761	0,7146762	37	53	0,7056655	0,995936	1,004081	0,7085451	7
24	0,6996633	0,979272	1,021166	0,7144727	36	54	0,7058716	0,996515	1,003497	0,7083398	6
25	0,6998711	0,979842	1,020572	0,7142691	35	55	0,7060776	0,997095	1,002913	0,7081345	5
26	0,7000789	0,980413	1,019979	0,7140655	34	56	0,7062835	0,997676	1,002330	0,7079291	4
27	0,7002866	0,980983	1,019385	0,7138618	33	57	0,7064894	0,998256	1,001747	0,7077236	3
28	0,7004942	0,981554	1,018792	0,7136581	32	58	0,7066953	0,998837	1,001164	0,7075180	2
29	0,7007018	0,982126	1,018200	0,7134543	31	59	0,7069011	0,999418	1,000582	0,7073124	1
30	0,7009093	0,982697	1,017607	0,7132504	30	60	0,7071068	1,000000	1,000000	0,7071068	0
	cos	ctg	tg	sin			cos	ctg	tg	sin	

45°

45°

Таблица 4. ПЕРЕВОД ГРАДУСНОЙ МЕРЫ В РАДИАННУЮ
(длина дуг окружности радиуса 1)

Угол	Дуга	Угол	Дуга	Угол	Дуга	Угол	Дуга	Угол	Дуга	Угол	Дуга
1"	0,000005	20"	0,000097	7'	0,002036	2°	0,034907	20°	0,349066	120°	2,094395
2"	0,000010	30"	0,000145	8'	0,002327	3°	0,052360	30°	0,523599	150°	2,617994
3"	0,000015	40"	0,000194	9'	0,002618	4°	0,069813	40°	0,698132	180°	3,141593
4"	0,000019	50"	0,000242	10'	0,002909	5°	0,087266	50°	0,872665	200°	3,490659
5"	0,000024	1'	0,000291	20'	0,005818	6°	0,104720	60°	1,047198	250°	4,363323
6"	0,000029	2'	0,000582	30'	0,008727	7°	0,122173	70°	1,221730	270°	4,712389
7"	0,000034	3'	0,000873	40'	0,011636	8°	0,139626	80°	1,396263	300°	5,235988
8"	0,000039	4'	0,001164	50'	0,014544	9°	0,157080	90°	1,570796	360°	6,283185
9"	0,000044	5'	0,001454	1°	0,017453	10°	0,174533	100°	1,745329	400°	6,981317
10"	0,000048	6'	0,001745								

Таблица 5. ПЕРЕВОД РАДИАННОЙ МЕРЫ В ГРАДУСНУЮ

Радианная мера	Градусная мера			Радианная мера	Градусная мера			Радианная мера	Градусная мера			Радианная мера	Градусная мера		
	°	'	"		°	'	"		°	'	"		°	'	"
1,0	57	17	44,8	0,07	4	0	38,5	0,004	0	13	45,1	0,0002	0	0	41,3
0,9	51	33	58,3	0,06	3	26	15,9	0,003	0	10	18,8	0,0001	0	0	20,6
0,8	45	50	11,8	0,05	2	51	53,2	0,002	0	6	52,5	0,00009	0	0	18,6
0,7	40	6	25,4	0,04	2	17	30,6	0,001	0	3	26,3	0,00008	0	0	16,5
0,6	34	22	38,9	0,03	1	43	7,9	0,0009	0	3	5,6	0,00007	0	0	14,4
0,5	28	38	52,4	0,02	1	8	45,3	0,0008	0	2	45,0	0,00006	0	0	12,4
0,4	22	55	5,9	0,01	0	34	22,6	0,0007	0	2	24,4	0,00005	0	0	10,3
0,3	17	11	19,4	0,009	0	30	56,4	0,0006	0	2	3,8	0,00004	0	0	8,3
0,2	11	27	33,0	0,008	0	27	30,1	0,0005	0	1	43,1	0,00003	0	0	6,2
0,1	5	43	46,5	0,007	0	24	3,9	0,0004	0	1	22,5	0,00002	0	0	4,1
0,09	5	9	23,8	0,006	0	20	37,6	0,0003	0	1	1,9	0,00001	0	0	2,1
0,08	4	35	1,2	0,005	0	17	11,3								

Таблица 6. ДЛИНА ДУГИ И ХОРДЫ, СТРЕЛКА И ПЛОЩАДЬ СЕГМЕНТА
ДЛЯ КРУГА РАДИУСА, РАВНОГО ЕДИНИЦЕ

Центр. угол в град.	Длина дуги l	Стрел- ка h	$\frac{l}{h}$	Длина хорды s	Площадь сегмента	Центр. угол в град.	Длина дуги l	Стрел- ка h	$\frac{l}{h}$	Длина хорды s	Площадь сегмента
1	0,0175	0,0000	458,36	0,0175	0,00000	51	0,8901	0,0974	9,14	0,8610	0,05649
2	0,0349	0,0002	229,19	0,0349	0,00000	52	0,9076	0,1012	8,97	0,8767	0,05978
3	0,0524	0,0003	152,79	0,0524	0,00001	53	0,9250	0,1051	8,80	0,8924	0,06319
4	0,0698	0,0006	114,60	0,0698	0,00003	54	0,9425	0,1090	8,65	0,9080	0,06673
5	0,0873	0,0010	91,69	0,0872	0,00006	55	0,9599	0,1130	8,49	0,9235	0,07039
6	0,1047	0,0014	76,41	0,1047	0,00010	56	0,9774	0,1171	8,35	0,9389	0,07417
7	0,1222	0,0019	64,01	0,1221	0,00015	57	0,9948	0,1212	8,21	0,9543	0,07808
8	0,1396	0,0024	56,01	0,1395	0,00023	58	1,0123	0,1254	8,07	0,9696	0,08212
9	0,1571	0,0031	50,96	0,1569	0,00032	59	1,0297	0,1296	7,94	0,9848	0,08629
10	0,1745	0,0038	45,87	0,1743	0,00044	60	1,0472	0,1340	7,81	1,0000	0,09059
11	0,1920	0,0046	41,70	0,1917	0,00059	61	1,0647	0,1384	7,69	1,0151	0,09502
12	0,2094	0,0055	38,23	0,2091	0,00076	62	1,0821	0,1428	7,56	1,0301	0,09958
13	0,2269	0,0064	35,28	0,2264	0,00097	63	1,0996	0,1474	7,46	1,0450	0,10428
14	0,2443	0,0075	32,78	0,2437	0,00121	64	1,1170	0,1520	7,35	1,0598	0,10919
15	0,2618	0,0086	30,60	0,2611	0,00149	65	1,1345	0,1566	7,24	1,0746	0,11408
16	0,2793	0,0097	28,04	0,2783	0,00181	66	1,1519	0,1613	7,14	1,0893	0,11919
17	0,2967	0,0110	27,01	0,2956	0,00217	67	1,1694	0,1661	7,04	1,1039	0,12443
18	0,3142	0,0123	25,35	0,3129	0,00257	68	1,1868	0,1710	6,94	1,1184	0,12982
19	0,3316	0,0137	24,17	0,3301	0,00302	69	1,2043	0,1759	6,85	1,1328	0,13535
20	0,3491	0,0152	22,98	0,3473	0,00352	70	1,2217	0,1808	6,76	1,1472	0,14102
21	0,3665	0,0167	21,95	0,3645	0,00408	71	1,2392	0,1859	6,67	1,1614	0,14683
22	0,3840	0,0184	20,90	0,3816	0,00468	72	1,2566	0,1910	6,58	1,1756	0,15279
23	0,4014	0,0201	20,00	0,3987	0,00535	73	1,2741	0,1961	6,50	1,1896	0,15889
24	0,4189	0,0219	19,17	0,4158	0,00607	74	1,2915	0,2014	6,41	1,2036	0,16514
25	0,4363	0,0237	18,47	0,4329	0,00686	75	1,3090	0,2066	6,34	1,2175	0,17154
26	0,4538	0,0256	17,71	0,4499	0,00771	76	1,3265	0,2120	6,26	1,2313	0,17808
27	0,4712	0,0276	17,06	0,4669	0,00862	77	1,3439	0,2174	6,18	1,2450	0,18477
28	0,4887	0,0297	16,45	0,4838	0,00961	78	1,3614	0,2229	6,11	1,2586	0,19160
29	0,5061	0,0319	15,89	0,5008	0,01067	79	1,3788	0,2284	6,04	1,2722	0,19859
30	0,5236	0,0341	15,37	0,5176	0,01180	80	1,3963	0,2340	5,97	1,2856	0,20573
31	0,5411	0,0364	14,88	0,5345	0,01301	81	1,4137	0,2396	5,90	1,2989	0,21301
32	0,5585	0,0387	14,42	0,5513	0,01429	82	1,4312	0,2453	5,83	1,3121	0,22045
33	0,5760	0,0412	13,99	0,5680	0,01566	83	1,4486	0,2510	5,77	1,3252	0,22804
34	0,5934	0,0437	13,58	0,5847	0,01711	84	1,4661	0,2569	5,71	1,3383	0,23578
35	0,6109	0,0463	13,20	0,6014	0,01864	85	1,4835	0,2627	5,65	1,3512	0,24367
36	0,6283	0,0489	12,84	0,6180	0,02027	86	1,5010	0,2686	5,59	1,3640	0,25171
37	0,6458	0,0517	12,50	0,6346	0,02198	87	1,5184	0,2746	5,53	1,3767	0,25990
38	0,6632	0,0545	12,17	0,6511	0,02378	88	1,5359	0,2807	5,47	1,3893	0,26825
39	0,6807	0,0574	11,87	0,6676	0,02568	89	1,5533	0,2867	5,42	1,4018	0,27675
40	0,6981	0,0603	11,58	0,6840	0,02767	90	1,5708	0,2929	5,36	1,4142	0,28540
41	0,7156	0,0633	11,30	0,7004	0,02976	91	1,5882	0,2991	5,31	1,4265	0,29420
42	0,7330	0,0664	11,04	0,7167	0,03195	92	1,6057	0,3053	5,26	1,4387	0,30316
43	0,7505	0,0696	10,78	0,7330	0,03425	93	1,6232	0,3116	5,21	1,4507	0,31226
44	0,7679	0,0728	10,55	0,7492	0,03664	94	1,6406	0,3180	5,16	1,4627	0,32152
45	0,7854	0,0761	10,32	0,7654	0,03915	95	1,6581	0,3244	5,11	1,4746	0,33093
46	0,8029	0,0795	10,10	0,7815	0,04176	96	1,6755	0,3309	5,06	1,4863	0,34050
47	0,8203	0,0829	9,89	0,7975	0,04448	97	1,6930	0,3374	5,02	1,4979	0,35021
48	0,8378	0,0865	9,69	0,8135	0,04731	98	1,7104	0,3439	4,97	1,5094	0,36008
49	0,8552	0,0900	9,50	0,8294	0,05025	99	1,7279	0,3506	4,93	1,5208	0,37009
50	0,8727	0,0937	9,31	0,8452	0,05331	100	1,7453	0,3572	4,89	1,5321	0,38026

Продолжение

Центр. угол в град.	Длина дуги l	Стрел- ка h	$\frac{l}{h}$	Длина хорды s	Площадь сегмента	Центр. угол в град.	Длина дуги l	Стрел- ка h	$\frac{l}{h}$	Длина хорды s	Площадь сегмента
101	1,7628	0,3639	4,84	1,5432	0,39058	141	2,4609	0,6662	3,69	1,8853	0,91580
102	1,7802	0,3707	4,80	1,5543	0,40104	142	2,4784	0,6744	3,67	1,8910	0,93135
103	1,7977	0,3775	4,76	1,5652	0,41166	143	2,4958	0,6827	3,66	1,8966	0,94700
104	1,8151	0,3843	4,72	1,5760	0,42242	144	2,5133	0,6910	3,64	1,9021	0,96274
105	1,8326	0,3912	4,68	1,5867	0,43333	145	2,5307	0,6993	3,62	1,9074	0,97858
106	1,8500	0,3982	4,65	1,5973	0,44439	146	2,5482	0,7076	3,60	1,9126	0,99449
107	1,8675	0,4052	4,61	1,6077	0,45560	147	2,5656	0,7160	3,58	1,9176	1,01050
108	1,8850	0,4122	4,57	1,6180	0,46695	148	2,5831	0,7244	3,57	1,9225	1,02658
109	1,9024	0,4193	4,54	1,6282	0,47845	149	2,6005	0,7328	3,55	1,9273	1,04275
110	1,9199	0,4264	4,50	1,6383	0,49008	150	2,6180	0,7412	3,53	1,9319	1,05900
111	1,9373	0,4336	4,47	1,6483	0,50187	151	2,6354	0,7496	3,52	1,9363	1,07532
112	1,9548	0,4408	4,43	1,6581	0,51379	152	2,6529	0,7581	3,50	1,9406	1,09171
113	1,9722	0,4481	4,40	1,6678	0,52586	153	2,6704	0,7666	3,48	1,9447	1,10818
114	1,9897	0,4554	4,37	1,6773	0,53806	154	2,6878	0,7750	3,47	1,9487	1,12472
115	2,0071	0,4627	4,34	1,6868	0,55041	155	2,7053	0,7836	3,45	1,9526	1,14132
116	2,0246	0,4701	4,31	1,6961	0,56289	156	2,7227	0,7921	3,44	1,9563	1,15799
117	2,0420	0,4775	4,28	1,7053	0,57551	157	2,7402	0,8006	3,42	1,9598	1,17472
118	2,0595	0,4850	4,25	1,7143	0,58827	158	2,7576	0,8092	3,41	1,9633	1,19151
119	2,0769	0,4925	4,22	1,7233	0,60116	159	2,7751	0,8178	3,39	1,9665	1,20835
120	2,0944	0,5000	4,19	1,7321	0,61418	160	2,7925	0,8264	3,38	1,9696	1,22525
121	2,1118	0,5076	4,16	1,7407	0,62734	161	2,8100	0,8350	3,37	1,9726	1,24221
122	2,1293	0,5152	4,13	1,7492	0,64063	162	2,8274	0,8436	3,35	1,9754	1,25921
123	2,1468	0,5228	4,11	1,7576	0,65404	163	2,8449	0,8522	3,34	1,9780	1,27626
124	2,1642	0,5305	4,08	1,7659	0,66759	164	2,8623	0,8603	3,33	1,9805	1,29335
125	2,1817	0,5383	4,05	1,7740	0,68125	165	2,8798	0,8695	3,31	1,9829	1,31049
126	2,1991	0,5460	4,03	1,7820	0,69505	166	2,8972	0,8781	3,30	1,9851	1,32766
127	2,2166	0,5538	4,00	1,7899	0,70897	167	2,9147	0,8868	3,28	1,9871	1,34487
128	2,2340	0,5616	3,98	1,7976	0,72301	168	2,9322	0,8955	3,27	1,9890	1,36212
129	2,2515	0,5695	3,95	1,8052	0,73716	169	2,9496	0,9042	3,26	1,9908	1,37940
130	2,2689	0,5774	3,93	1,8126	0,75144	170	2,9671	0,9128	3,25	1,9924	1,39671
131	2,2864	0,5853	3,91	1,8199	0,76584	171	2,9845	0,9215	3,24	1,9938	1,41404
132	2,3038	0,5933	3,88	1,8271	0,78034	172	3,0020	0,9302	3,23	1,9951	1,43140
133	2,3213	0,6013	3,86	1,8341	0,79497	173	3,0194	0,9390	3,22	1,9963	1,44878
134	2,3387	0,6093	3,84	1,8410	0,80970	174	3,0369	0,9477	3,20	1,9973	1,46617
135	2,3562	0,6173	3,82	1,8478	0,82454	175	3,0543	0,9564	3,19	1,9981	1,48359
136	2,3736	0,6254	3,80	1,8544	0,83949	176	3,0718	0,9651	3,18	1,9988	1,50101
137	2,3911	0,6335	3,77	1,8608	0,85455	177	3,0892	0,9738	3,17	1,9993	1,51845
138	2,4086	0,6416	3,75	1,8672	0,86971	178	3,1067	0,9825	3,16	1,9997	1,53589
139	2,4260	0,6498	3,73	1,8733	0,88497	179	3,1241	0,9913	3,15	1,9999	1,55334
140	2,4435	0,6580	3,71	1,8794	0,90034	180	3,1416	1,0000	3,14	2,0000	1,57080

Радиус r для заданной длины дуги l и стрелки h определяется по формуле $r = l : l_0$, где l_0 — длина дуги, которая при радиусе, равном 1, соответствует заданному отношению $l:h$. Если r — радиус круга и φ — центральный угол в градусах, то имеем:

1) длина хорды: $s = 2r \sin \frac{\varphi}{2}$;

2) стрелка: $h = r \left(1 - \cos \frac{\varphi}{2} \right) = \frac{s}{2} \operatorname{tg} \frac{\varphi}{4} = 2r \sin^2 \frac{\varphi}{4}$;

3) длина дуги: $l = \pi r \frac{\varphi}{180} = 0,017453r\varphi \approx \sqrt{s^2 + \frac{16}{3} h^2}$ (приблизительно);

4) площадь сегмента равна $\frac{r^2}{2} \left(\frac{\pi}{180} \varphi - \sin \varphi \right)$;

5) » сектора равна $\frac{\varphi}{360} \pi r^2 = 0,00872665r^2\varphi$.

6) $l=r$ соответствует $\varphi = 57^\circ 17' 44,806'' = 57,2957795^\circ = 206\ 264,806''$.

7) $\operatorname{arc} 1^\circ = \pi : 180 = 0,01745329252$; $\lg \operatorname{arc} 1^\circ = 0,241877368-2$;

8) $\operatorname{arc} 1' = \pi : 10800 = 0,00029088821$; $\lg \operatorname{arc} 1' = 0,463726117-4$;

9) $\operatorname{arc} 1'' = \pi : 648000 = 0,00000484814$; $\lg \operatorname{arc} 1'' = 0,685574867-6$.

Таблица 7. ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ И ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

x	e^x	e^{-x}	$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{th} x$	x	e^x	e^{-x}	$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{th} x$
0,00	1,00000	1,00000	0,00000	1,00000	0,00000	0,60	1,82212	0,54881	0,63665	1,18547	0,53705
01	1,01005	0,99005	0,01000	1,00005	0,01000	61	1,84043	0,54335	0,64854	1,19189	0,54413
02	1,02020	0,98020	0,02000	1,00020	0,02000	62	1,85893	0,53794	0,66049	1,19844	0,55113
03	1,03045	0,97045	0,03000	1,00045	0,02999	63	1,87761	0,53259	0,67251	1,20510	0,55805
04	1,04081	0,96079	0,04001	1,00080	0,03998	64	1,89648	0,52729	0,68459	1,21189	0,56490
05	1,05127	0,95123	0,05002	1,00125	0,04996	65	1,91554	0,52205	0,69675	1,21879	0,57167
06	1,06184	0,94176	0,06004	1,00180	0,05993	66	1,93479	0,51685	0,70897	1,22582	0,57836
07	1,07251	0,93239	0,07006	1,00245	0,06989	67	1,95424	0,51171	0,72126	1,23297	0,58498
08	1,08329	0,92312	0,08009	1,00320	0,07983	68	1,97388	0,50662	0,73363	1,24025	0,59152
09	1,09417	0,91393	0,09012	1,00405	0,08976	69	1,99372	0,50158	0,74607	1,24765	0,59798
0,10	1,10517	0,90484	0,10017	1,00500	0,09967	0,70	2,01375	0,49659	0,75858	1,25517	0,60437
11	1,11628	0,89583	0,11022	1,00606	0,10956	71	2,03399	0,49164	0,77117	1,26282	0,61068
12	1,12750	0,88692	0,12029	1,00721	0,11943	72	2,05443	0,48675	0,78384	1,27059	0,61691
13	1,13883	0,87810	0,13037	1,00846	0,12927	73	2,07508	0,48191	0,79659	1,27849	0,62307
14	1,15027	0,86936	0,14046	1,00982	0,13909	74	2,09594	0,47711	0,80941	1,28652	0,62915
15	1,16183	0,86071	0,15056	1,01127	0,14889	75	2,11700	0,47237	0,82232	1,29468	0,63515
16	1,17351	0,85214	0,16068	1,01283	0,15865	76	2,13828	0,46767	0,83530	1,30297	0,64108
17	1,18530	0,84366	0,17082	1,01448	0,16838	77	2,15977	0,46301	0,84838	1,31139	0,64693
18	1,19722	0,83527	0,18097	1,01624	0,17808	78	2,18147	0,45841	0,86153	1,31994	0,65271
19	1,20925	0,82696	0,19115	1,01810	0,18775	79	2,20340	0,45384	0,87478	1,32862	0,65841
0,20	1,22140	0,81873	0,20134	1,02007	0,19738	0,80	2,22554	0,44933	0,88811	1,33743	0,66404
21	1,23368	0,81058	0,21155	1,02213	0,20697	81	2,24791	0,44486	0,90152	1,34638	0,66959
22	1,24608	0,80252	0,22178	1,02430	0,21652	82	2,27050	0,44043	0,91503	1,35547	0,67507
23	1,25860	0,79453	0,23203	1,02657	0,22603	83	2,29332	0,43605	0,92863	1,36468	0,68048
24	1,27125	0,78663	0,24231	1,02894	0,23550	84	2,31637	0,43171	0,94233	1,37404	0,68581
25	1,28403	0,77880	0,25261	1,03141	0,24492	85	2,33965	0,42741	0,95612	1,38353	0,69107
26	1,29693	0,77105	0,26294	1,03399	0,25430	86	2,36316	0,42316	0,97000	1,39316	0,69626
27	1,30996	0,76338	0,27329	1,03667	0,26362	87	2,38691	0,41895	0,98398	1,40293	0,70137
28	1,32313	0,75578	0,28367	1,03946	0,27291	88	2,41090	0,41473	0,99806	1,41284	0,70642
29	1,33643	0,74826	0,29408	1,04235	0,28213	89	2,43513	0,41066	1,01224	1,42289	0,71139
0,30	1,34986	0,74082	0,30452	1,04534	0,29131	0,90	2,45960	0,40657	1,02652	1,43309	0,71630
31	1,36343	0,73345	0,31499	1,04844	0,30044	91	2,48432	0,40252	1,04090	1,44342	0,72113
32	1,37713	0,72615	0,32549	1,05164	0,30951	92	2,50929	0,39852	1,05539	1,45390	0,72590
33	1,39097	0,71892	0,33602	1,05495	0,31852	93	2,53451	0,39455	1,06998	1,46453	0,73059
34	1,40495	0,71177	0,34659	1,05836	0,32748	94	2,55998	0,39063	1,08468	1,47530	0,73522
35	1,41907	0,70469	0,35719	1,06188	0,33638	95	2,58571	0,38674	1,09948	1,48623	0,73978
36	1,43333	0,69768	0,36783	1,06550	0,34521	96	2,61170	0,38289	1,11440	1,49729	0,74428
37	1,44773	0,69073	0,37850	1,06923	0,35399	97	2,63794	0,37908	1,12943	1,50851	0,74870
38	1,46228	0,68386	0,38921	1,07307	0,36271	98	2,66446	0,37531	1,14457	1,51988	0,75307
39	1,47698	0,67706	0,39996	1,07702	0,37136	99	2,69123	0,37158	1,15983	1,53141	0,75736
0,40	1,49182	0,67032	0,41075	1,08107	0,37995	1,00	2,71828	0,36788	1,17520	1,54308	0,76159
41	1,50682	0,66365	0,42158	1,08523	0,38847	01	2,74560	0,36422	1,19069	1,55491	0,76576
42	1,52196	0,65705	0,43246	1,08950	0,39693	02	2,77319	0,36059	1,20630	1,56689	0,76987
43	1,53726	0,65051	0,44337	1,09388	0,40532	03	2,80107	0,35701	1,22203	1,57904	0,77391
44	1,55271	0,64404	0,45434	1,09837	0,41364	04	2,82922	0,35345	1,23788	1,59134	0,77789
45	1,56831	0,63763	0,46534	1,10297	0,42190	05	2,85765	0,34994	1,25386	1,60379	0,78181
46	1,58407	0,63128	0,47640	1,10768	0,43008	06	2,88637	0,34646	1,26996	1,61641	0,78566
47	1,59999	0,62500	0,48750	1,11250	0,43820	07	2,91538	0,34301	1,28619	1,62919	0,78946
48	1,61607	0,61878	0,49865	1,11743	0,44624	08	2,94468	0,33960	1,30254	1,64214	0,79320
49	1,63232	0,61263	0,50984	1,12247	0,45422	09	2,97427	0,33622	1,31903	1,65525	0,79688
0,50	1,64872	0,60653	0,52110	1,12763	0,46212	1,10	3,00417	0,33287	1,33565	1,66852	0,80050
51	1,66529	0,60050	0,53240	1,13289	0,46995	11	3,03436	0,32956	1,35240	1,68196	0,80406
52	1,68203	0,59452	0,54375	1,13827	0,47770	12	3,06485	0,32628	1,36929	1,69557	0,80757
53	1,69893	0,58860	0,55516	1,14377	0,48538	13	3,09566	0,32303	1,38631	1,70934	0,81102
54	1,71601	0,58275	0,56663	1,14938	0,49299	14	3,12677	0,31982	1,40347	1,72329	0,81441
55	1,73325	0,57695	0,57815	1,15510	0,50052	15	3,15819	0,31664	1,42078	1,73741	0,81775
56	1,75067	0,57121	0,58973	1,16094	0,50798	16	3,18993	0,31349	1,43822	1,75171	0,82104
57	1,76827	0,56553	0,60137	1,16690	0,51536	17	3,22199	0,31037	1,45581	1,76618	0,82427
58	1,78604	0,55990	0,61307	1,17297	0,52267	18	3,25437	0,30728	1,47355	1,78083	0,82745
59	1,80399	0,55433	0,62483	1,17916	0,52990	19	3,28708	0,30422	1,49143	1,79565	0,83058

Продолжение

x	e^x	e^{-x}	shx	chx	thx	x	e^x	e^{-x}	shx	chx	thx
1,20	3,32012	0,30119	1,50946	1,81066	0,83365	2,00	7,38906	0,13534	3,62686	3,76220	0,96403
21	3,35348	0,29820	1,52764	1,82584	0,83668	10	8,16617	0,12246	4,02186	4,14431	0,97045
22	3,38719	0,29523	1,54598	1,84121	0,83965	20	9,02501	0,11080	4,45711	4,56791	0,97574
23	3,42123	0,29229	1,56447	1,85676	0,84258	30	9,97418	0,10026	4,93696	5,03722	0,98010
24	3,45561	0,28938	1,58311	1,87250	0,84546	40	11,02318	0,09072	5,46623	5,55695	0,98367
25	3,49034	0,28650	1,60192	1,88842	0,84828	50	12,18249	0,08208	6,05020	6,13229	0,98661
26	3,52542	0,28365	1,62088	1,90454	0,85106	60	13,46374	0,07427	6,69473	6,76901	0,98903
27	3,56085	0,28083	1,64001	1,92084	0,85380	70	14,87973	0,06721	7,40626	7,47347	0,99101
28	3,59664	0,27804	1,65930	1,93734	0,85648	80	16,44465	0,06081	8,19192	8,25273	0,99263
29	3,63279	0,27527	1,67876	1,95403	0,85913	90	18,17415	0,05502	9,05956	9,11458	0,99396
1,30	3,66930	0,27253	1,69838	1,97091	0,86172	3,00	20,08554	0,04979	10,01787	10,06766	0,99505
31	3,70617	0,26982	1,71818	1,98800	0,86428	10	22,19795	0,04505	11,07645	11,12150	0,99595
32	3,74342	0,26714	1,73814	2,00528	0,86678	20	24,53253	0,04076	12,24588	12,28665	0,99668
33	3,78104	0,26448	1,75828	2,02276	0,86925	30	27,11264	0,03688	13,53788	13,57476	0,99728
34	3,81904	0,26185	1,77860	2,04044	0,87167	40	29,96410	0,03337	14,96536	14,99874	0,99777
35	3,85743	0,25924	1,79909	2,05833	0,87405	50	33,11545	0,03020	16,54263	16,57282	0,99818
36	3,89619	0,25666	1,81977	2,07643	0,87639	60	36,59823	0,02732	18,28546	18,31278	0,99851
37	3,93535	0,25411	1,84062	2,09473	0,87869	70	40,44730	0,02472	20,21129	20,23601	0,99878
38	3,97490	0,25158	1,86166	2,11324	0,88095	80	44,70118	0,02237	22,33941	22,36178	0,99900
39	4,01485	0,24908	1,88289	2,13196	0,88317	90	49,40245	0,02024	24,69110	24,71135	0,99918
1,40	4,05520	0,24660	1,90430	2,15090	0,88535	4,00	54,59815	0,01832	27,28992	27,30823	0,99933
41	4,09596	0,24414	1,92591	2,17005	0,88749	10	60,34029	0,01657	30,16186	30,17843	0,99945
42	4,13712	0,24171	1,94770	2,18942	0,88960	20	66,68633	0,01500	33,33567	33,35066	0,99955
43	4,17870	0,23931	1,96970	2,20900	0,89167	30	73,69979	0,01357	36,84311	36,85668	0,99963
44	4,22070	0,23693	1,99188	2,22881	0,89370	40	81,45087	0,01228	40,71930	40,73157	0,99970
45	4,26311	0,23457	2,01427	2,24884	0,89569	50	90,01713	0,01111	45,00301	45,01412	0,99975
46	4,30596	0,23224	2,03686	2,26910	0,89765	60	99,48432	0,01005	49,73713	49,74718	0,99980
47	4,34924	0,22993	2,05965	2,28958	0,89958	70	109,9472	0,00910	54,96904	54,97813	0,99983
48	4,39295	0,22764	2,08265	2,31029	0,90147	80	121,5104	0,00823	60,75109	60,75932	0,99986
49	4,43710	0,22537	2,10586	2,33123	0,90332	90	134,2898	0,00745	67,14117	67,14861	0,99989
1,50	4,48169	0,22313	2,12928	2,35241	0,90515	5,00	148,4132	0,00674	74,20321	74,20995	0,99991
51	4,52673	0,22091	2,15291	2,37382	0,90694	10	164,0219	0,00610	82,00791	82,01400	0,99993
52	4,57223	0,21871	2,17676	2,39547	0,90870	20	181,2722	0,00552	90,63336	90,63888	0,99994
53	4,61818	0,21654	2,20082	2,41736	0,91042	30	200,3368	0,00499	100,1659	100,1709	0,99995
54	4,66459	0,21438	2,22510	2,43949	0,91212	40	221,4064	0,00452	110,7009	110,7055	0,99996
55	4,71147	0,21225	2,24961	2,46186	0,91379	50	244,6919	0,00409	122,3439	122,3480	0,99997
56	4,75882	0,21014	2,27434	2,48448	0,91542	60	270,4264	0,00370	135,2114	135,2150	0,99997
57	4,80665	0,20805	2,29930	2,50735	0,91703	70	298,8674	0,00335	149,4320	149,4354	0,99998
58	4,85496	0,20598	2,32449	2,53047	0,91860	80	330,2996	0,00303	165,1483	165,1513	0,99998
59	4,90375	0,20393	2,34991	2,55384	0,92015	90	365,0375	0,00274	182,5174	182,5201	0,99999
1,60	4,95303	0,20190	2,37557	2,57746	0,92167	6,00	403,4288	0,00248	201,7132	201,7156	0,99999
70	5,47395	0,18268	2,64563	2,82832	0,93541	30	544,5719	0,00184	272,2850	272,2869	0,99999
80	6,04965	0,16530	2,94217	3,10747	0,94681						
90	6,68589	0,14957	3,26816	3,41773	0,95624						

Определения показательной и гиперболических функций:

$$e^x = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$e^{-x} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots$$

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} - \frac{17x^7}{315} + \dots$$

Таблица 8. ФУНКЦИИ БЕССЕЛЯ

x	$J_0(x)$	$J_1(x)$	$Y_0(x)$	$Y_1(x)$	x	$J_0(x)$	$J_1(x)$	$Y_0(x)$	$Y_1(x)$
0,0	+1,00000	+0,00000	$-\infty$	$-\infty$	5,0	-0,17760	-0,32758	-0,30852	+0,14786
0,1	+0,99750	+0,04994	-1,53424	-6,45895	5,1	-0,14433	-0,33710	-0,32160	+0,11374
0,2	0,99002	0,09950	1,08111	3,32383	5,2	0,11029	0,34322	0,33125	0,07919
0,3	0,97763	0,14832	0,80727	2,29311	5,3	0,07580	0,34596	0,33744	0,04455
0,4	0,96040	0,19603	0,60602	1,78087	5,4	0,04121	0,34534	0,34017	+0,01013
0,5	0,93847	0,24227	0,44452	1,47147	5,5	-0,00684	0,34144	0,33948	-0,02376
0,6	+0,91200	+0,28670	-0,30851	-1,26039	5,6	+0,02697	-0,33433	-0,33544	-0,05681
0,7	0,88120	0,32900	0,19066	1,10325	5,7	0,05192	0,32415	0,32816	0,08872
0,8	0,84629	0,36884	-0,08680	0,97814	5,8	0,09170	0,31103	0,31775	0,11923
0,9	0,80752	0,40595	+0,00563	0,87313	5,9	0,12203	0,29514	0,30437	0,14808
1,0	0,76520	0,44005	0,08826	0,78121	6,0	0,15065	0,27668	0,28819	0,17501
1,1	+0,71962	+0,47090	+0,16216	-0,69812	6,1	+0,17729	-0,25586	-0,26943	-0,19981
1,2	0,67113	0,49829	0,22808	0,62114	6,2	0,20175	0,23292	0,24831	0,22228
1,3	0,62009	0,52202	0,28654	0,54852	6,3	0,22381	0,20809	0,22503	0,24225
1,4	0,56686	0,54195	0,33790	0,47915	6,4	0,24331	0,18164	0,19995	0,25956
1,5	0,51183	0,55794	0,38245	0,41231	6,5	0,26009	0,15384	0,17324	0,27409
1,6	+0,45540	+0,56990	+0,42043	-0,34758	6,6	+0,27404	-0,12498	-0,14523	-0,28575
1,7	0,39798	0,57777	0,45203	0,28473	6,7	0,28506	0,09534	0,11619	0,29446
1,8	0,33999	0,58152	0,47743	0,22366	6,8	0,29310	0,06522	0,08643	0,30019
1,9	0,28182	0,58116	0,49682	0,16441	6,9	0,29810	0,03490	0,05625	0,30292
2,0	0,22389	0,57672	0,51038	0,10703	7,0	0,30008	-0,00468	-0,02595	0,30267
2,1	+0,16661	+0,56829	+0,51829	-0,05168	7,1	+0,29905	+0,02515	+0,00418	-0,29948
2,2	0,11036	0,55596	0,52078	+0,00149	7,2	0,29507	0,05433	0,03385	0,29342
2,3	0,05554	0,53987	0,51808	0,05228	7,3	0,28822	0,08257	0,06277	0,28459
2,4	+0,00251	0,52019	0,51041	0,10049	7,4	0,27860	0,10963	0,09068	0,27311
2,5	-0,04838	0,49709	0,49807	0,14592	7,5	0,26634	0,13525	0,11731	0,25913
2,6	-0,09680	+0,47082	+0,48133	+0,18836	7,6	+0,25160	+0,15921	+0,14243	-0,24280
2,7	0,14245	0,44160	0,46050	0,22763	7,7	0,23456	0,18131	0,16580	0,22432
2,8	0,18504	0,40971	0,43592	0,26355	7,8	0,21541	0,20136	0,18723	0,20389
2,9	0,22431	0,37543	0,40791	0,29594	7,9	0,19436	0,21918	0,20652	0,18172
3,0	0,26005	0,33906	0,37685	0,32467	8,0	0,17165	0,23464	0,22352	0,15806
3,1	-0,29206	+0,30092	+0,34310	+0,34963	8,1	+0,14752	+0,24761	+0,23809	-0,13315
3,2	0,32019	0,26134	0,30705	0,37071	8,2	0,12222	0,25800	0,25012	0,10724
3,3	0,34430	0,22066	0,26909	0,38785	8,3	0,09601	0,26574	0,25952	0,08060
3,4	0,36430	0,17923	0,22962	0,40102	8,4	0,06916	0,27079	0,26622	0,05348
3,5	0,38013	0,13738	0,18902	0,41019	8,5	0,04194	0,27312	0,27021	-0,02617
3,6	-0,39177	+0,09547	+0,14771	+0,41539	8,6	+0,01462	+0,27275	+0,27145	+0,00102
3,7	0,39923	0,05383	0,10607	0,41667	8,7	-0,01252	0,26972	0,27000	0,02801
3,8	0,40256	+0,01282	0,06450	0,41411	8,8	0,03923	0,26407	0,26587	0,05436
3,9	0,40183	-0,02724	+0,02338	0,40782	8,9	0,06525	0,25590	0,25916	0,07987
4,0	0,39715	0,06604	-0,01694	0,39793	9,0	0,09033	0,24531	0,24994	0,10431
4,1	-0,38867	-0,10327	-0,05609	+0,38459	9,1	-0,11424	+0,23243	+0,23834	+0,12747
4,2	0,37656	0,13865	0,09375	0,36801	9,2	0,13675	0,21741	0,22449	0,14911
4,3	0,36101	0,17190	0,12960	0,34839	9,3	0,15766	0,20041	0,20857	0,16906
4,4	0,34226	0,20278	0,16334	0,32597	9,4	0,17677	0,18163	0,19074	0,18714
4,5	0,32054	0,23106	0,19471	0,30100	9,5	0,19393	0,16126	0,17121	0,20318
4,6	-0,29614	-0,25655	-0,22346	+0,27375	9,6	-0,20898	+0,13952	+0,15018	+0,21706
4,7	0,26933	0,27908	0,24939	0,24450	9,7	0,22180	0,11664	0,12787	0,22866
4,8	0,24043	0,29850	0,27230	0,21357	9,8	0,23228	0,09284	0,10453	0,23789
4,9	0,20974	0,31469	0,29205	0,18125	9,9	0,24034	0,06837	0,08038	0,24469
5,0	0,17760	0,32758	0,30852	0,14786	10,0	0,24594	0,04347	0,05567	0,24901

Определение функций Бесселя см. на стр. 171.

Рекуррентные формулы: $J_{n+1}(x) = \frac{2n}{x} J_n(x) - J_{n-1}(x)$; $Y_{n+1}(x) = \frac{2n}{x} Y_n(x) - Y_{n-1}(x)$.

Асимптотические формулы (для больших значений x):

$$J_0(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left[P_0(x) \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + Q_0(x) \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \right]$$

$$J_1(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left[P_1(x) \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + Q_1(x) \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \right]$$

$$Y_0(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left[-P_0(x) \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + Q_0(x) \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \right]$$

$$Y_1(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left[-P_1(x) \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + Q_1(x) \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \right],$$

$$\text{где } P_0(x) = 1 - \frac{3}{2!(8x)^2} + \frac{105}{4!(8x)^4} - \dots$$

$$Q_0(x) = -\frac{1}{1!8x} + \frac{15}{3!(8x)^3} - \dots$$

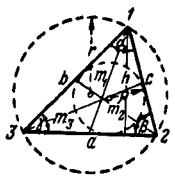
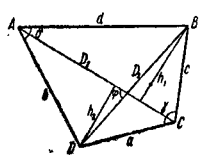
$$P_1(x) = 1 + \frac{15}{2!(8x)^2} - \frac{14175}{4!(8x)^4} + \dots$$

$$Q_1(x) = \frac{3}{1!8x} - \frac{315}{3!(8x)^3} + \dots$$

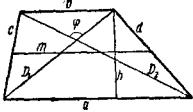
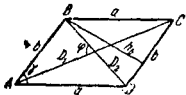
Таблица 9. НЕКОТОРЫЕ ПОСТОЯННЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

Величина	n	$\lg n$	Величина	n	$\lg n$	n	$n!$
π	3,141593	0,49715	$\frac{1}{\pi}$	0,318310	1,50285	1	1
$\frac{\pi}{4}$	0,785398	1,89509	$\frac{4}{\pi}$	1,273240	0,10491	2	2
$\frac{\pi}{180} (= 1^\circ)$	0,017453	2,24188	$\frac{180^\circ}{\pi} (= 1 \text{ радиан})$	57°,2958	1,75812	3	6
π^2	9,869604	0,99430	$\frac{1}{\pi^2}$	0,101321	1,00570	4	24
$\sqrt{\pi}$	1,772454	0,24857	$\sqrt{\frac{1}{\pi}}$	0,564190	1,75143	5	120
$\sqrt{\frac{\pi}{4}}$	0,886227	1,05246	$\sqrt{\frac{4}{\pi}}$	1,128380	0,05246	6	720
$\sqrt{\frac{\pi}{6}}$	0,723600	1,85950	$\sqrt{\frac{6}{\pi}}$	1,38198	0,14050	7	5040
$\sqrt[3]{\pi}$	1,464592	0,16572	$\sqrt[3]{\frac{1}{\pi}}$	0,682784	1,83428	8	40320
e	2,718282	0,43429	$\frac{1}{e}$	0,367879	1,56571	9	362 880
e^2	7,389056	0,86859	$\frac{1}{e^2}$	0,135335	1,13141	10	3 628 800
\sqrt{e}	1,648721	0,21715	$\sqrt{\frac{1}{e}}$	0,606531	1,78285	11	39 916 800
$M = \lg e$	0,434294	1,63778	$\frac{1}{M} = \ln 10$	2,302585	0,36222	12	479 001 600
g	9,80665	0,99152	$\frac{1}{g}$	0,101972	1,00848	13	6 227 020 800
g^2	96,1703	1,98304	$\frac{1}{g^2}$	0,010398	2,01696	14	87 178 291 200
\sqrt{g}	3,13156	0,49576	$\sqrt{\frac{1}{g}}$	0,319330	1,50424	15	1 307 674 368 000
$\sqrt{2g}$	4,42869	0,64628	$\sqrt{\frac{1}{2g}}$	0,225801	1,35372		

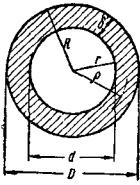
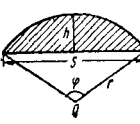

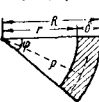
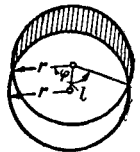
Таблица 10. ПЕРИМЕТРЫ И ПЛОЩАДИ ПЛОСКИХ ФИГУР

Фигура	Обозначение размеров	Периметр P ; площадь F
<p>Треугольник (стр. 109—111)</p> 	<p>a, b, c — стороны; α, β, γ — углы;</p> <p>h — высота из вершины 1;</p> <p>$p = \frac{1}{2}(a + b + c)$ — полупериметр;</p> <p>r — радиус описанной окружности;</p> <p>ρ — радиус вписанной окружности;</p> <p>m_1, m_2, m_3 — медианы;</p> <p>$S = \frac{1}{2}(m_1 + m_2 + m_3)$;</p> <p>$(x_1, y_1); (x_2, y_2); (x_3, y_3)$ — координаты вершин в прямоугольной системе координат.</p>	<p>$P = a + b + c$;</p> <p>$F = \frac{1}{2} ah$</p> <p>$= \frac{1}{2} ab \sin \gamma$</p> <p>$= \frac{a^2}{2} \frac{\sin \beta \sin \gamma}{\sin \alpha}$</p> <p>$= \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$</p> <p>$= 2r^2 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma$</p> <p>$= r^2 \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2} \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2}$</p> <p>$= \rho p$</p> <p>$= \frac{abc}{4r}$</p> <p>$= \frac{4}{3} \sqrt{S(S-m_1)(S-m_2)(S-m_3)}$</p> <p>$= \pm \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$;</p> <p>$F = \pm \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$,</p> <p>если третья вершина находится в начале координат ($x_3 = y_3 = 0$).</p>
<p>Прямоугольный треугольник (стр. 111)</p>	<p>a, b — катеты; c — гипотенуза;</p> <p>α — угол, противолежащий стороне a.</p>	<p>$P = a + b + c$;</p> <p>$F = \frac{1}{2} ab$;</p> <p>$= \frac{1}{2} a^2 \operatorname{ctg} \alpha$</p> <p>$= \frac{1}{2} b^2 \operatorname{tg} \alpha$</p> <p>$= \frac{1}{4} c^2 \sin 2\alpha$</p>
<p>Четыреугольник (стр. 111)</p> 	<p>a, b, c, d — стороны; D_1, D_2 — диагонали;</p> <p>φ — угол между диагоналями;</p> <p>m — длина линии, соединяющей середины диагоналей;</p> <p>h_1, h_2 — длины перпендикуляров, опущенных из вершин B и D на диагональ D_1;</p> <p>δ, γ — два противолежащих угла четырехугольника;</p> <p>p — полупериметр.</p>	<p>$P = a + b + c + d$;</p> <p>$F = \frac{h_1 + h_2}{2} D_1$</p> <p>$= \frac{1}{2} D_1 D_2 \sin \varphi$</p> <p>$= \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$</p> <p>$= abcd \cos^2 \frac{\delta + \gamma}{2}$</p>

Продолжение

Фигура	Обозначение размеров	Периметр P ; площадь F
Трапеция (стр. 112) 	a, b — основания; c, d — боковые стороны; D_1, D_2 — диагонали; φ — угол между диагоналями; m — средняя линия; h — высота.	$P = a + b + c + d$ $= 2m + c + d$; $F = \frac{a+b}{2}h$ $= mh$ $= \frac{1}{2} D_1 D_2 \sin \varphi$
Параллелограмм (стр. 112) 	a, b — стороны; h — расстояние между сторонами b ; γ — угол параллелограмма; D_1, D_2 — диагонали; φ — угол между диагоналями.	$P = 2(a + b)$; $F = bh$ $= ab \sin \gamma$ $= \frac{1}{2} D_1 D_2 \sin \varphi$
Прямоугольник (стр. 112)	a, b — стороны; D — диагональ; φ — угол между диагоналями.	$P = 2(a + b)$; $F = ab$ $= \frac{1}{2} D^2 \sin \varphi$
Ромб (стр. 112)	a — сторона; γ — угол ромба; D_1, D_2 — диагонали.	$P = 4a$; $F = a^2 \sin \gamma$ $= \frac{1}{2} D_1 D_2$
Многоугольник (стр. 109)	a_1, a_2, \dots, a_n — стороны; $(x_1, y_1); (x_2, y_2); \dots; (x_n, y_n)$ — координаты вершин в прямоугольной системе координат.	$P = a_1 + a_2 + \dots + a_n$; $F = \pm \frac{1}{2} \left[(x_2 y_1 - x_1 y_2) + (x_3 y_2 - x_2 y_3) + \dots + (x_n y_{n-1} - x_{n-1} y_n) + (x_1 y_n - x_n y_1) \right]$ Площадь F может быть определена также путём разделения многоугольника диагоналями на треугольники.
Правильный многоугольник (стр. 112—113)	r — радиус вписанного круга; R — радиус описанного круга; $a = 2\sqrt{R^2 - r^2}$ — сторона; n — число сторон; $\alpha = 180^\circ - 2\varphi$ — угол многоугольника, где $\varphi = \frac{180^\circ}{n}$.	$P = na$ $= 2nr \operatorname{tg} \varphi$ $= 2nR \sin \varphi$; $F = \frac{1}{4} na^2 \operatorname{ctg} \varphi$ $= nr^2 \operatorname{tg} \varphi$ $= \frac{1}{2} nR^2 \sin 2\varphi$ $= \frac{1}{2} nar$
Круг (табл. 1 и стр. 113)	r — радиус; d — диаметр.	$P = 2\pi r$ $= \pi d$ $= 3,141593 d$; $F = \pi r^2$ $= \frac{1}{4} \pi d^2$ $= 0,785398 d^2$

Продолжение

Фигура	Обозначение размеров	Периметр P ; площадь F																				
Круговое кольцо 	r — внутренний радиус; R — наружный радиус; d — внутренний диаметр; D — наружный диаметр; $\rho = \frac{r+R}{2}$ — средний радиус; $\delta = R - r$ — ширина кольца	$P = 2\pi(r+R)$ $= \pi(d+D);$ $F = \pi(R^2 - r^2)$ $= \frac{\pi}{4}(D^2 - d^2)$ $= 2\pi\rho\delta$																				
Круговой сегмент (табл. 6 и стр. 113) 	r — радиус; φ — центральный угол в градусах; l — длина дуги; s — длина хорды; h — высота стрелки.	$P = l + s;$ $F = \frac{1}{2} r^2 \left(-\frac{\pi\varphi}{180} - \sin \varphi \right)$ $= \frac{r(l-s) + sh}{2};$ Площадь сегмента меньшего полуокруга $F \approx \frac{2}{3} sh + \frac{h^3}{2s}.$ Площадь сегмента, дуга которого меньше 50° $H \approx \frac{2}{3} sh.$																				
Круговой сектор (стр. 113) 	r — радиус; φ — центральный угол в градусах; $l = \frac{\pi\varphi}{180} r$ — длина дуги.	$P = l + 2r;$ $F = \frac{1}{2} lr$ $= \frac{\pi\varphi}{360} r^2$																				
Часть кругового кольца 	r — внутренний радиус; R — наружный радиус; $\rho = \frac{r+R}{2}$ — средний радиус; $\delta = R - r$ — ширина кольца; φ — центральный угол в градусах.	$P = \frac{\pi\varphi}{180} (R+r);$ $F = \frac{\pi\varphi}{360} (R^2 - r^2)$ $= \frac{\pi\varphi}{180} \rho\delta$																				
Круговой серп 	r — радиус; φ — центральный угол в градусах; l — расстояние между центрами.	$P = 2\pi r;$ $F = r^2 \left(\pi + \sin \varphi - \frac{\pi\varphi}{180} \right) = r^2 \eta,$ $\text{где } \eta = \pi + \sin \varphi - \frac{\pi\varphi}{180}.$ Значения η в зависимости от l : <table><tr><td>$\frac{l}{2r}$</td><td>0,1</td><td>0,2</td><td>0,3</td><td>0,4</td><td>0,5</td><td>0,6</td><td>0,7</td><td>0,8</td><td>0,9</td></tr><tr><td>η</td><td>0,40</td><td>0,79</td><td>1,18</td><td>1,56</td><td>1,91</td><td>2,25</td><td>2,55</td><td>2,81</td><td>3,02</td></tr></table>	$\frac{l}{2r}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	η	0,40	0,79	1,18	1,56	1,91	2,25	2,55	2,81	3,02
$\frac{l}{2r}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9													
η	0,40	0,79	1,18	1,56	1,91	2,25	2,55	2,81	3,02													

Продолжение

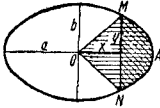
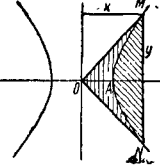
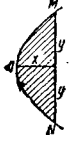
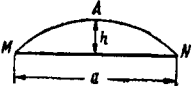
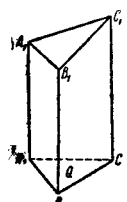
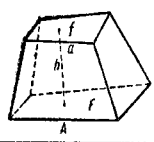
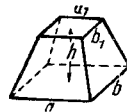
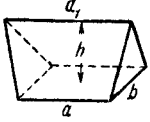
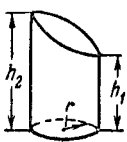
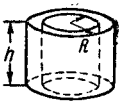
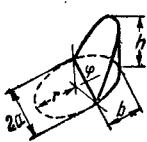
Фигура	Обозначение размеров	Периметр P ; площадь F
<p>Эллипс (стр. 184)</p> 	<p>a — большая полуось;</p> <p>b — малая полуось;</p> <p>$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$ — эксцентриситет;</p> <p>x, y — расстояния точки M на эллипсе от осей.</p>	<p>$P = 2\pi a \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 e^2 - \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \frac{e^4}{3} - \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 \frac{e^6}{5} - \dots \right]$</p> <p>$= 4aE\left(e, \frac{\pi}{2}\right),$</p> <p>где E — эллиптический интеграл 2-го рода (стр. 149).</p> <p>$P \approx \pi \left(3 \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} \right);$</p> <p>$F = \pi ab.$</p> <p>Площадь эллиптического сегмента MAN</p> <p>$F = ab \arccos \frac{x}{a} - xy.$</p> <p>Площадь эллиптического сектора $OMAN$</p> <p>$F = ab \arccos \frac{x}{a}$</p>
<p>Гипербола (стр. 184)</p> 	<p>a — вещественная полуось;</p> <p>b — мнимая полуось;</p> <p>x, y — расстояния точки M на гиперболе от осей.</p>	<p>Площадь гиперболического сегмента AMN</p> <p>$F = xy - ab \ln \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} \right).$</p> <p>Площадь гиперболического сектора $OMAN$</p> <p>$F = ab \ln \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} \right)$</p> <p>$= -ab \ln \left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b} \right)$</p>
<p>Парабола (стр. 185)</p> 	<p>p — параметр параболы;</p> <p>x — высота параболического сегмента;</p> <p>$2y$ — основание параболического сегмента.</p>	<p>Длина дуги MON</p> <p>$P = p \left\{ \sqrt{\frac{2x}{p} \left(1 + \frac{2x}{p} \right)} + \ln \left[\sqrt{\frac{2x}{p}} + \sqrt{1 + \frac{2x}{p}} \right] \right\}$</p> <p>$= \frac{y}{p} \sqrt{y^2 + p^2} + p \ln \frac{y + \sqrt{y^2 + p^2}}{p}.$</p> <p>Площадь параболического сегмента OMN</p> <p>$F = \frac{4}{3} xy$</p>
<p>Синусоида</p> 	<p>a — основание сегмента (параллельное оси синусоиды);</p> <p>h — высота сегмента.</p>	<p>Длина дуги MAN</p> <p>$P \approx a \left[1 + \frac{\pi^2}{4} \left(\frac{h}{a} \right)^2 - \frac{\pi^4}{8} \left(\frac{h}{a} \right)^4 \right],$</p> <p>если $\frac{h}{a}$ — мало.</p> <p>Площадь сегмента MAN</p> <p>$F = \frac{2}{\pi} ah$</p>

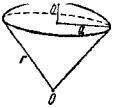
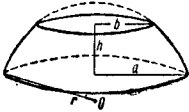

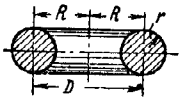
Таблица 11. ПЛОЩАДИ ПОВЕРХНОСТЕЙ И ОБЪЕМЫ ТЕЛ

Тело	Обозначение размеров	Площадь боковой поверхности S_b ; площадь полной поверхности S ; объем тела V .
Призма (стр. 115)	F — площадь основания; Q — площадь сечения, перпендикулярного ребру; h — высота; l — боковое ребро; P — периметр сечения, перпендикулярного ребру.	$S_b = Pl$; $S = Pl + 2F$; $V = Fh$; $= Ql$.
Прямая призма (стр. 115)	F — площадь основания; l — ребро; P — периметр основания.	$S_b = Pl$; $S = Pl + 2F$; $V = Fl$.
Прямой прямоугольный параллелепипед (стр. 115)	a, b, c — рёбра.	$S = 2(ab + bc + ac)$; $V = abc$.
Куб (стр. 115)	a — ребро.	$S = 6a^2$; $V = a^3$.
Призма, усечённая непараллельно основанию	l — длина отрезка, соединяющего центры тяжести оснований; Q — площадь сечений, перпендикулярно к l .	$V = Ql$
Трёхгранная призма, усечённая непараллельно основанию 	a, b, c — параллельные рёбра; Q — площадь сечения, перпендикулярного рёбрам.	$V = \frac{1}{3}(a + b + c)Q$
Пирамида (стр. 115)	F — площадь основания; h — высота.	$V = \frac{1}{3} Fh$
Треугольная пирамида	$(x_1, y_1, z_1); (x_2, y_2, z_2); (x_3, y_3, z_3)$ — три вершины в прямоугольной системе координат; четвёртая вершина — в начале координат.	$V = \pm \frac{1}{6} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$
Усечённая пирамида (стр. 116) 	F, f — площади параллельных оснований; h — высота (расстояние между основаниями); A, a — две соответственные стороны оснований.	$V = \frac{1}{3} h (F + f + \sqrt{Ff})$ $= \frac{1}{3} h F \left[1 + \frac{a}{A} + \left(\frac{a}{A} \right)^2 \right]$
Обелиск 	a, b, a_1, b_1 — стороны прямоугольных оснований; h — высота.	$V = \frac{1}{6} h \left[(2a + a_1)b + (2a_1 + a)b_1 \right]$

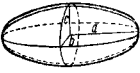
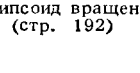


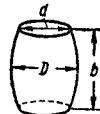

Продолжение

Тело	Обозначение размеров	Площадь боковой поверхности $S_{\text{б}}$; площадь полной поверхности S ; объем тела V .
Клин 	a, b — стороны основания; a_1 — верхнее ребро; h — высота.	$V = \frac{1}{6} (2a + a_1) bh.$
Цилиндр (стр. 116)	F — площадь основания; Q — площадь сечения, перпендикулярного образующей; h — высота; l — образующая; P — периметр сечения, перпендикулярного образующей.	$S_{\text{б}} = Pl;$ $S = Pl + 2F;$ $V = Fh$ $= Ql$
Прямой цилиндр (стр. 116)	F — площадь основания; l — образующая; P — периметр основания.	$S_{\text{б}} = Pl;$ $S = Pl + 2F;$ $V = Fl$
Прямой круговой цилиндр (стр. 116)	r — радиус основания; h — высота.	$S_{\text{б}} = 2\pi rh$ $S = 2\pi r(h + r);$ $V = \pi r^2 h$
Цилиндр, усеченный непараллельно основанию	l — длина отрезка, соединяющего центры тяжести оснований; Q — площадь сечения, перпендикулярного к l .	$V = Ql$
Прямой круговой цилиндр, усеченный непараллельно основанию 	r — радиус основания; h_1 и h_2 — наименьшая и наибольшая из образующих.	$S_{\text{б}} = \pi r (h_1 + h_2);$ $V = \frac{1}{2} \pi r^2 (h_1 + h_2)$
Полый цилиндр 	R — наружный радиус; r — внутренний радиус; h — высота; $\delta = R - r$ — толщина; $\rho = \frac{R + r}{2}$ — средний радиус.	$S_{\text{б}} = 2\pi h (R + r)$ $= 4\pi h\rho;$ $S = 2\pi (R + r) (h + R - r)$ $= 4\pi \rho (h + \delta);$ $V = \pi h (R^2 - r^2)$ $= \pi h\delta (2R - \delta)$ $= \pi h\delta (2R + \delta)$ $= 2\pi h\delta\rho$
Цилиндрическая подкова 	h — высота; r — радиус основания; $2a$ — прямая сторона; b — длина перпендикуляра, опущенного из основания высоты на прямую сторону; 2φ — центральный угол основания в градусах.	$S_{\text{б}} = \frac{2rh}{b} \left[\left(b - r \right) \frac{\varphi\pi}{180} + a \right]$ $= 2rh \text{ (если в основании полукруг)};$ $V = \frac{h}{3b} \left[a \left(3r^2 - a^2 \right) + 3r^2 \left(b - r \right) \frac{\varphi\pi}{180} \right]$ $= \frac{2}{3} r^2 h \text{ (если в основании полукруг)}$
Конус (стр. 116)	F — площадь основания; h — высота.	$V = \frac{1}{3} Fh$

Продолжение

Т е л о	Обозначение размеров	Площадь боковой поверхности S_{θ} ; площадь полной поверхности S ; объем тела V
Прямой круговой конус (стр. 116)	r — радиус основания; h — высота; $l = \sqrt{r^2 + h^2}$ — образующая.	$S_{\theta} = \pi r \sqrt{r^2 + h^2}$ $= \pi r l$; $S = \pi r (r + l)$; $V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$
Усеченный круговой конус (стр. 117)	R и r — радиусы оснований; h — высота; $\sigma = R + r$; $\delta = R - r$; $l = \sqrt{\delta^2 + h^2}$ — образующая.	$S_{\theta} = \pi l (R + r)$ $= \pi l \sigma$; $S = \pi [R^2 + r^2 + l (R + r)]$; $V = \frac{1}{3} \pi h (R^2 + r^2 + Rr)$ $= \frac{\pi h}{12} (3 \sigma^2 + \delta^2)$
Шар (стр. 117)	r — радиус; d — диаметр.	$S = 4 \pi r^2$ $= \pi d^2$; $V = \frac{4}{3} \pi r^3$ $= \frac{1}{6} \pi d^3$ $= 0,523599 d^3$
Полый шар	R — наружный радиус; r — внутренний радиус; D — наружный диаметр; d — внутренний диаметр.	$S = 4 \pi (R^2 + r^2)$ $= \pi (D^2 + d^2)$; $V = \frac{4}{3} \pi (R^3 - r^3)$ $= \frac{1}{6} \pi (D^3 - d^3)$
Шаровой сегмент 	h — высота сегмента; r — радиус шара; $a = \sqrt{h(2r - h)}$ — радиус основания.	$S_{\theta} = 2 \pi r h$ $= \pi (a^2 + h^2)$; $S = \pi (2 a^2 + h^2)$; $V = \frac{1}{6} \pi h (3 a^2 + h^2)$ $= \frac{1}{3} \pi h^2 (3 r - h)$
Шаровой пояс 	h — высота пояса; a и b — радиусы оснований ($a > b$); $r = \sqrt{a^2 + \frac{a^2 - b^2 - h^2}{2}}$ — радиус шара.	$S_{\theta} = 2 \pi r h$; $S = \pi (a^2 + b^2 + 2 r h)$; $V = \frac{1}{6} \pi h (3 a^2 + 3 b^2 + h^2)$ $= V_1 + \frac{1}{6} \pi h l^2$, где V_1 — объем вписанного в шаровой пояс усеченного конуса, радиусы основания которого — a и b , высота — h и образующая — l .
Шаровой сектор 	h — высота сегмента; a — радиус основания сегмента; r — радиус шара.	$S = \pi r (a + 2 h)$; $V = \frac{2}{3} \pi r^2 h$
Тор (цилиндрическое кольцо) 	r — радиус поперечного сечения; R — расстояние центра поперечного сечения от оси вращения; $D = 2R$; $d = 2r$	$S = 4 \pi^2 R r$ $= \pi^2 D d$ $= 9,8696 D d$; $V = 2 \pi^2 R r^2$ $= \frac{1}{4} \pi^2 D d^2$ $= 2,4674 D d^2$

Продолжение

Тело	Обозначение размеров	Площадь боковой поверхности S_b ; площадь полной поверхности S ; объем тела V
Эллипсоид (стр. 192) 	a, b, c — полуоси.	$V = \frac{4}{3} \pi abc$
Эллипсоид вращения (стр. 192) 	$e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} \quad (a > b);$ 1) ось вращения — $2a$; 2) ось вращения — $2b$.	1) $S = 2 \pi ab \left(\sqrt{1 - e^2} + \frac{\arcsin e}{e} \right);$ $V = \frac{4}{3} \pi ab^2;$ 2) $S = 2 \pi a^2 + \frac{2 \pi b^2}{e} \ln \frac{a(1+e)}{b};$ $V = \frac{4}{3} \pi a^2 b$
Параболоид вращения (стр. 192) 	r — радиус основания; h — высота.	$V = \frac{1}{2} \pi r^2 h$
Усеченный параболоид вращения 	R и r — радиусы параллельных оснований; h — высота.	$V = \frac{1}{2} \pi h (R^2 + r^2)$
Бочка 	D — диаметр среднего сечения; d — диаметр доньев; h — высота.	$V = \frac{1}{15} \pi h \left(2D^2 + Dd + \frac{3}{4} d^2 \right)$ — для параболической клёпки; $V \approx \frac{1}{12} \pi h \left(2D^2 + d^2 \right)$ — для круговой клёпки
Квадка или чай (усеченный эллиптический конус) 	Параллельные основания — эллипсы с полуосями a, b и a_1, b_1 ; h — высота. Если $a_1 = b_1 = 0$ — эллиптический конус.	$V = \frac{1}{6} \pi h \left[2 \left(ab + a_1 b_1 \right) + a b_1 + a_1 b \right]$

Теоремы Гюльдена для вычисления объемов и поверхностей тел вращения

1. Если F — площадь плоской фигуры, которая вращается около оси, лежащей в плоскости этой фигуры и не пересекающей её, x_0 — расстояние центра тяжести фигуры от оси вращения, то объем полученного тела вращения равен произведению длины окружности, описываемой центром тяжести, на площадь фигуры:

$$V = 2 \pi x_0 F.$$

2. Если s — длина дуги плоской кривой, которая вращается около оси, лежащей в плоскости этой дуги и не пересекающей её, x_0 — расстояние центра тяжести дуги от оси вращения, то площадь поверхности полученного тела вращения равна произведению длины окружности, описываемой центром тяжести, на длину дуги:

$$S = 2 \pi x_0 s.$$

МАТЕМАТИКА



АРИФМЕТИКА И АЛГЕБРА

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ДЕЙСТВИЯ И ИХ СВОЙСТВА

Обозначения шести алгебраических действий
и соответствующие термины

Действия	Данные величины		Результат
	a	b	c
Сложение $a + b = c$ Вычитание $a - b = c$	Слагаемое Уменьшаемое	Слагаемое Вычитаемое	Сумма Разность
Умножение $a \cdot b = c$	Множимое (сомножитель)	Множитель (сомножитель)	Произведение
Деление $a : b = c$	Делимое	Делитель	Частное
Возведение в степень $a^b = c$	Основание степени	Показатель степени	Степень
Извлечение корня $\sqrt[b]{a} = c$	Подкоренное количество	Показатель корня	Корень

Результат нескольких выполняемых действий может зависеть от порядка действий. В случае отсутствия скобок сначала производят действия возведения в степень и извлечения корня, потом — умножения и деления и, наконец, сложения и вычитания. Действия, которые должны быть выполнены раньше других, выделяются при помощи скобок.

Наряду с простыми (круглыми) скобками употребляются квадратные [] и фигурные { } скобки. Вычисление выражений, содержащих такие скобки, производится в следующем порядке: сначала производится вычисления внутри всех круглых скобок, затем — внутри квадратных скобок, далее — внутри фигурных скобок и, наконец, выполняются оставшиеся действия.

Действие сложения обладает свойствами: переместительности (коммутативности)

$$a + b = b + a$$

и сочетательности (ассоциативности)

$$a + (b + c) = (a + b) + c = a + b + c.$$

Действие умножения обладает свойством: переместительности

$$a \cdot b = b \cdot a,$$

сочетательности

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c = a \cdot b \cdot c$$

и распределительности (дистрибутивности)

$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c.$$

Действие деления обладает следующими свойствами:

$$m : (abc) = [(m : a) : b] : c;$$

$$(abc) : m = (a : m) bc;$$

$$(am) : (bm) = a : b; (a : m) : (b : m) = a : b.$$

ДЕЛИМОСТЬ ЧИСЕЛ

Число, на которое делится данное число без остатка, называется его делителем.

Число, которое не имеет никаких других делителей, кроме единицы и самого себя, называется простым. Простых чисел бесчисленное множество; простые числа от 1 до 1013 приведены в табл. 1.

Таблица 1
Простые числа от 1 до 1013

2	61	149	239	347	443	563	659	773	887
3	67	151	241	349	449	569	661	787	907
5	71	157	251	353	457	571	673	797	911
7	73	163	257	359	461	577	677	809	919
11	79	167	263	367	463	587	683	811	929
13	83	173	269	373	467	593	691	821	937
17	89	179	271	379	479	599	701	823	941
19	97	181	277	383	487	601	709	827	947
23	101	191	281	389	491	607	719	829	953
29	103	193	283	397	499	613	727	839	957
31	107	197	293	401	503	617	733	853	971
37	109	199	307	409	509	619	739	857	977
41	113	211	311	419	521	631	743	859	983
43	127	213	313	421	523	641	751	863	991
47	131	227	317	431	541	643	757	877	997
53	137	229	331	433	547	647	761	881	1009
59	139	233	337	439	557	653	769	883	1013

Числа, которые имеют другие делители, кроме единицы и самого себя, называются составными или сложными.

Всякое составное число можно единственным образом представить в виде произведения простых множителей (разложить на простые множители), испытывая в качестве множителей в последовательном порядке простые числа: 2, 3, 5, 7, 11 и т. д.

Общим делителем нескольких чисел называется число, являющееся делителем каждого из них.

Наибольший из общих делителей называется общим наибольшим делителем.

Общий наибольший делитель нескольких чисел находится путём разложения каждого из данных чисел на простые множители и перемножения тех из множителей, которые входят во все данные числа.

Числа, не имеющие общих делителей (кроме единицы), называются взаимно простыми.

Если число a делится нацело на другое число b , то a называется кратным b .

Число, служащее кратным для нескольких данных чисел, называется общим кратным данных чисел.

Наименьшее из общих кратных нескольких чисел называется их общим наименьшим кратным. Для нахождения общего наименьшего кратного нескольких чисел нужно разложить данные числа на простые множители и взять произведение всех простых множителей, которые входят хотя бы в одно из данных чисел.

Признаки делимости чисел

Делитель n	На n делятся числа, которые:
2	оканчиваются на 2, 4, 6, 8, 0 (чётные числа);
3	имеют сумму цифр, делящуюся на 3;
4	оканчиваются двумя нулями или у которых последние две цифры образуют число, делящееся на 4;
5	оканчиваются нулём или 5;
6	делятся одновременно на 2 и на 3;
7	имеют разность между числом десятков и удвоенной последней цифрой, делящуюся на 7, или равную нулю;
8	оканчиваются тремя нулями или у которых последние три цифры образуют число, делящееся на 8;
9	имеют сумму цифр, делящуюся на 9;
10	оканчиваются нулём;
11	имеют разность между суммой цифр, стоящих на нечётных местах (начиная с правого края), и суммой цифр, стоящих на чётных местах, равную нулю или делящуюся на 11;
25	оканчиваются двумя нулями или у которых последние две цифры образуют число, делящееся на 25;
100	оканчиваются двумя нулями;
1 000	оканчиваются тремя нулями.

ПРОСТЫЕ ДРОБИ

Дробью называется одна или несколько равных частей (долей) единицы. Число, показывающее, на сколько частей разделена еди-

ница, называется знаменателем дроби, а число, показывающее сколько таких частей взято, называется числителем дроби. Обозначение дроби: $\frac{a}{b}$, где a — чис-

литель, а b — знаменатель.

Дробь называется правильной, если числитель меньше знаменателя ($a < b$), и неправильной, если числитель больше или равен знаменателю ($a \geq b$).

Сумма целого числа и правильной дроби называется смешанным числом.

Неправильную дробь можно обратить в смешанное число, выделив целую часть путём деления числителя на знаменатель. Остаток от деления даёт числитель дробной части:

$$\frac{a}{b} = n + \frac{c}{b},$$

где n — целое частное, c — остаток от деления a на b .

Для обращения смешанного числа в неправильную дробь целая часть умножается на знаменатель и складывается с числителем дробной части; это даёт числитель неправильной дроби, знаменатель же остаётся прежний:

$$n + \frac{a}{b} = \frac{n \cdot b + a}{b}.$$

Величина дроби не изменится, если разделить или умножить числитель и знаменатель на одно и то же число:

$$\frac{a}{b} = \frac{a:c}{b:c}; \quad \frac{a}{b} = \frac{a \cdot c}{b \cdot c}.$$

Первая из этих формул применяется для сокращения дроби (c есть общий делитель чисел a и b), а вторая при приведении дробей к общему знаменателю.

Общим знаменателем нескольких дробей называется общее наименьшее кратное знаменателей этих дробей. Чтобы привести дроби $\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \dots$ к общему знаменателю, нужно числитель и знаменатель каждой из них умножить на соответствующий дополнительный множитель, являющийся частным от деления общего знаменателя на знаменатель рассматриваемой дроби.

ДЕЙСТВИЯ С ПРОСТЫМИ ДРОБЯМИ

При действиях с дробями целое число можно рассматривать как дробь со знаменателем, равным единице.

При сложении или вычитании дробей с одинаковыми знаменателями складываются или вычитаются числители, а знаменатель остаётся прежний. Если знаменатели дробей разные, то сперва нужно привести дроби к общему знаменателю:

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd}.$$

При сложении или вычитании смешанных чисел отдельно складывают или вычитают целые и дробные части.

При умножении дроби на дробь получается дробь, числитель которой равен

произведению числителей сомножителей, а знаменатель — произведению знаменателей сомножителей:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

Если среди сомножителей встречаются смешанные числа, то их следует предварительно обратить в неправильные дроби.

При делении на дробь делимое умножается на дробь, обратную делителю:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}.$$

Как и при умножении, смешанные числа предварительно обращаются в неправильные дроби.

ДЕСЯТИЧНЫЕ ДРОБИ

Десятичные дроби — дроби со знаменателями, являющимися целыми степенями числа 10 (10, 100, 1 000 и вообще 10^n). При записи десятичной дроби пишется сначала целая часть, затем ставится запятая, после чего пишется дробная часть, первая цифра которой означает число десятых долей единицы, вторая — сотых, третья — тысячных и т. д. Цифры, стоящие после запятой, называются десятичными знаками. Если десятичная дробь не содержит целой части, то перед запятой ставится нуль.

Десятичная дробь не изменится, если к ней справа приписать любое число нулей или отбросить нули, стоящие справа в её конце (после запятой).

Десятичная дробь увеличивается (или уменьшается) в 10, 100, 1 000 и т. д. раз, если запятую перенести на один, два, три и т. д. знака вправо (влево).

Сложение и вычитание десятичных дробей выполняется по тем же правилам, что и для целых чисел, причём складываемые или вычитаемые дроби подписываются одна под другой так, что единицы приходятся под единицами, десятые доли под десятками долями и т. д.

Умножение десятичных дробей также производится по тем же правилам, что и для целых чисел. В произведении ставится запятая таким образом, чтобы число знаков после запятой равнялось общему количеству знаков после запятой во всех сомножителях.

Деление десятичных дробей производится следующим образом: отбрасывается запятая в делителе, в делимом запятая переносится вправо на столько знаков, сколько было десятичных знаков в делителе, затем находится сначала целое частное, после которого ставится запятая и далее десятые, сотые, тысячные и т. д. доли частного:

$$125,469 : 2,7 = 1\,254,69 : 27 = 46,47.$$

Для обращения простой дроби в десятичную нужно разделить числитель на знаменатель по правилу деления десятичных дробей.

При делении десятичных дробей, а также при обращении простой дроби в десятичную

может случиться, что представляющая частное десятичная дробь будет иметь, начиная с некоторого места, бесчисленное множество периодически повторяющихся десятичных знаков. Такая десятичная дробь называется периодической.

Если повторение начинается с первой значащей цифры, то дробь называется чистой периодической, в противном случае — смешанной периодической.

Чтобы обратить правильную чистую периодическую дробь в простую, нужно её период сделать числителем, а в знаменателе написать цифру 9 столько раз, сколько цифр в периоде со столькими нулями, сколько нулей между запятой и периодом.

Пример:

$$0,1212\dots = 0,(12) = \frac{12}{99} = \frac{4}{33}.$$

Чтобы обратить правильную смешанную периодическую дробь в простую, нужно числителем взять разность между числом, стоящим до второго периода, и числом, стоящим до первого периода, а в знаменателе написать цифру 9 столько раз, сколько цифр в периоде, со столькими нулями, сколько цифр между запятой и первым периодом.

Пример:

$$5,3222\dots = 5,3(2) = 5 \frac{32-3}{90} = 5 \frac{29}{90};$$

$$23,17236236\dots = 23,17(236) =$$

$$= 23 \frac{17\,236-17}{99\,900} = 23 \frac{17\,219}{99\,900}.$$

ПРОЦЕНТЫ

Процентом называется сотая часть числа. Процент обозначается символом %.

Выражение величины a в процентах другой величины b определяется числом $\frac{a}{b} \cdot 100\%$.

Если величина a составляет $p\%$ величины b , то

$$a = \frac{bp}{100} \quad \text{и} \quad b = \frac{100a}{p}.$$

Изменение числа a за год, выраженное в процентах, называется годовым процентом. Если приращение за каждый год не влияет на приращение последующих лет, то число a за t лет при $p\%$ годовых обращается в число A , определяемое равенством (формула простых процентов):

$$A = a \left(1 + \frac{pt}{100} \right).$$

Число a за t лет при $p\%$ годовых в случае сложных процентов обращается в число A , определяемое равенством (формула сложных процентов):

$$A = a \left(1 + \frac{p}{100} \right)^t.$$

Если приращение $p\%$ начисляется m раз в году (через равные промежутки времени), то

$$A = a \left(1 + \frac{p}{100m} \right)^{mt}.$$

ОТНОШЕНИЯ И ПРОПОРЦИИ

Отношением (геометрическим) числа a к числу b называется частное от деления a на b :

$$a:b \text{ или } \frac{a}{b},$$

при этом делимое a называется предыдущим членом отношения, а делитель b — последующим.

Пропорцией называется равенство двух отношений:

$$a:b = c:d$$

или

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d},$$

при этом a и d называются крайними членами пропорции, а b и c — средними членами.

Основное свойство пропорции: произведение крайних членов пропорции равно произведению её средних членов

$$ad = bc.$$

Если известны три члена пропорции, то может быть найден неизвестный четвёртый член x : если x — крайний член, то он равен произведению средних членов, делённому на известный крайний член, а если x — средний член, то он равен произведению крайних членов, делённому на известный средний член, т. е. если дана пропорция

$$x:b = c:d, \text{ то } x = \frac{bc}{d};$$

если

$$a:x = c:d, \text{ то } x = \frac{ad}{c}.$$

В непрерывной пропорции (пропорции с двумя равными крайними или двумя равными средними членами)

$$x:a = b:x \text{ или } a:x = x:b$$

имеет место равенство

$$x = \sqrt{ab}.$$

Две взаимно зависимые величины называются пропорциональными, если отношение их значений остаётся неизменным. Это отношение носит название коэффициента пропорциональности.

Две величины, зависящие друг от друга так, что при увеличении одной в некоторое число раз другая уменьшается во столько же раз, называются обратно пропорциональными.

В пропорции можно менять местами средние или крайние члены или те и другие, т. е. одновременно справедливы пропорции:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}; \frac{a}{c} = \frac{b}{d}; \frac{d}{b} = \frac{c}{a}; \frac{d}{c} = \frac{b}{a}.$$

Кроме того, из основной пропорции $a:b = c:d$ можно получить ряд так называемых производных пропорций:

$$\frac{a \pm b}{c \pm d} = \frac{b}{d} = \frac{a}{c};$$

$$\frac{a+b}{c+d} = \frac{a-b}{c-d}.$$

Из равенства нескольких отношений:

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = \dots = \frac{a_n}{b_n},$$

следует:

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n}{b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n} = \frac{a_1}{b_1}.$$

Если имеется n чисел: $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$, то их среднее арифметическое x_{am} , среднее квадратическое x_{qm} , среднее геометрическое x_{gm} и среднее гармоническое x_{hm} определяются равенствами:

$$x_{am} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n};$$

$$x_{qm} = \sqrt[n]{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \dots + x_n^2};$$

$$x_{gm} = \sqrt[n]{x_1 x_2 x_3 \dots x_n};$$

$$\frac{1}{x_{hm}} = \frac{1}{n} \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \dots + \frac{1}{x_n} \right).$$

В частности, различные средние двух величин x_1 и x_2 находятся из равенств:

$$x_{am} = \frac{x_1 + x_2}{2};$$

$$x_{qm} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2};$$

$$x_{gm} = \sqrt{x_1 x_2};$$

$$x_{hm} = \frac{2 x_1 x_2}{x_1 + x_2}.$$

ПРОГРЕССИИ

Арифметическая прогрессия есть такая последовательность чисел $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ (членов прогрессии), в которой каждое последующее число получается из предыдущего путём прибавления к нему некоторого определённого числа d , называемого разностью прогрессии. При $d > 0$ члены прогрессии увеличиваются с увеличением номера и прогрессия называется возрастающей, при $d < 0$ члены прогрессии уменьшаются и прогрессия называется убывающей.

Общий вид арифметической прогрессии:

$$a_1; a_1 + d; a_1 + 2d; a_1 + 3d; \dots$$

Здесь a_1 — первый член, d — разность прогрессии.

Общее выражение n -го члена арифметической прогрессии

$$a_n = a_1 + (n-1)d.$$

Сумма n первых членов арифметической прогрессии

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} n = \frac{n}{2} [2a_1 + (n-1)d].$$

Геометрическая прогрессия есть такая последовательность чисел $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ (членов прогрессии), в которой каждое последующее число получается из предыдущего путём умножения его на некоторое определённое число q , называемое знаменателем прогрессии.

При $|q| > 1$ прогрессия называется возрастающей, при $|q| < 1$ — убывающей.

Общий вид геометрической прогрессии:

$$\div \div a_1, a_1q; a_1q^2; a_1q^3, \dots$$

Здесь a_1 — первый член, q — знаменатель прогрессии.

Общее выражение n -го члена геометрической прогрессии:

$$a_n = a_1 q^{n-1}.$$

Сумма n первых членов геометрической прогрессии

$$S_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1} = a_1 \frac{1 - q^n}{1 - q}.$$

Если число членов убывающей прогрессии безгранично растёт, то S_n стремится к пределу S :

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{a_1}{1 - q}.$$

При помощи последней формулы можно преобразовать любую десятичную периодическую дробь в простую (стр. 93):

$$\begin{aligned} 0,121\,212\dots &= \frac{12}{100} + \frac{12}{100} \cdot \frac{1}{100} + \\ &+ \frac{12}{100} \cdot \frac{1}{100^2} + \dots = \frac{\frac{12}{100}}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{12}{99} = \frac{4}{33}. \end{aligned}$$

НЕКОТОРЫЕ КОНЕЧНЫЕ ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

$$1) \quad 1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) + n = \frac{n(n+1)}{2};$$

$$2) \quad p + (p+1) + (p+2) + \dots + (p+n-2) + (p+n-1) = \frac{n(2p+n-1)}{2};$$

$$3) \quad 1 + 3 + 5 + \dots + (2n-3) + (2n-1) = n^2;$$

$$4) \quad 2 + 4 + 6 + \dots + (2n-2) + 2n = n(n+1);$$

$$5) \quad 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n-1)^2 + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6};$$

$$6) \quad 1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2n-1)^2 = \frac{n(4n^2-1)}{3};$$

$$7) \quad 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + (n-1)^3 + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4};$$

$$8) \quad 1^3 + 3^3 + 5^3 + \dots + (2n-1)^3 = n^2(2n^2-1).$$

ДЕЙСТВИЯ НАД ОТНОСИТЕЛЬНЫМИ ЧИСЛАМИ

Абсолютной величиной (модулем) числа a (обозначение: $|a|$) называется число, равное a (если a положительное) или полученное из a изменением знака (если a отрицательное). Абсолютная величина есть число положительное (или нуль).

При сложении двух чисел с одинаковыми знаками складываются их модули и перед суммой ставится их общий знак. При сложении двух чисел с разными знаками из модуля большего из них вычитается модуль меньшего и ставится знак большего числа.

Вычитание одного числа из другого можно заменить сложением, при этом уменьшаемое берётся со своим знаком, а вычитаемое с обратным.

При умножении двух чисел умножаются их модули и перед произведением ставится знак плюс, если знаки сомножителей одинаковы, и знак минус, если они разные.

При делении одного числа на другое делят модуль первого на модуль второго и перед частным ставят знак плюс, если знаки делимого и делителя одинаковы, и знак минус, если они разные.

Абсолютная величина суммы или разности (алгебраической суммы) двух чисел больше или равна разности абсолютных величин этих чисел и меньше или равна сумме их абсолютных величин:

$$|a| - |b| \leq |a \pm b| \leq |a| + |b|.$$

ТОЖДЕСТВЕННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Алгебраическим выражением называется одна или несколько алгебраических величин (букв или чисел), соединённых между собой знаками алгебраических действий и знаками последовательности этих действий (скобками). Два алгебраических выражения, соединённых знаком равенства, образуют равенство.

Тождеством называется такое равенство, которое остаётся верным, если вместо входящих в него букв подставить любые величины; равенство, которое верно только при подстановке некоторых определённых значений входящих в него букв, называется уравнением. Получение из одного алгебраического выражения другого, тождественно равному ему, называется тождественным преобразованием.

Классификация алгебраических выражений производится по отношению к буквенным величинам, принятым за основные, в зависимости от действий, которые производятся над ними. Различают выражения: целые рациональные (в которых над основными величинами производятся только сложение, вычитание, умножение и возведение в целую положительную степень), дробные рациональные (к перечисленным действиям присоединяется деление или возведение в целую отрицательную степень) и иррациональные (присоединяется ещё извлечение корня или возведение в дробную степень).

Алгебраическое выражение, в котором последним по порядку действием не является сложение или вычитание, называется одночленом, например:

$$a; a(2b - 3c).$$

Числовые или буквенные множители, не содержащие величин, принятых за основные, называются коэффициентами.

Одночлены называются подобными, если они одинаковы или отличаются только коэффициентами, например $3a^2b$ и $5a^2b$.

Сложение одночленов сводится к преобразованию суммы к более простому виду. Сумма подобных членов равна подобному им выражению с коэффициентом, равным сумме коэффициентов слагаемых. Такая замена называется приведением подобных членов, например:

$$5x^3y + 3x^3y - 2x^3y = 6x^3y.$$

Если коэффициентами являются буквенные выражения, то производят вынесение за скобки общих множителей, например:

$$ax^2y + bx^2y - cxy^2 = (a + b - c)xy^2.$$

При умножении одночленов коэффициенты перемножаются, показатели одинаковых букв складываются, а прочие буквы с их показателями переписываются в произведении без изменений, например:

$$3x^2y \cdot (-5xz^2) = -15x^3yz^2.$$

Для деления одночлена на одночлен нужно коэффициенты разделить, а показатели одинаковых букв вычесть, например:

$$24x^5y^4z : 6x^3z = 4x^2y^4.$$

Сумма или разность одночленов называется многочленом. Сложение и вычитание многочленов сводятся к образованию нового многочлена путём приписывания к первому многочлену членов остальных с их знаками (в случае сложения) или с обратными знаками (в случае вычитания), после чего производится приведение подобных членов, если это возможно.

Пример.

$$(5x^3y + 7x^2y^2 - 13xy^3) + (2x^3y - 7x^2y^2) - (5x^2y^2 - 12xy^3) = 7x^3y - 5x^2y^2 - xy^3.$$

При умножении и делении многочлена на одночлен нужно каждый член многочлена умножить или разделить поочередно на одночлен и результаты сложить.

Пример 1.

$$(8a^2b^3 - 9a^3b^3 + 6ab^4) \cdot 2ab^2 = 16a^3b^5 - 18a^4b^5 + 12a^2b^6.$$

Пример 2.

$$(8a^3b^3 - 9a^2b^3 + 6ab^4) : 2ab^2 = 4a^2 - \frac{9}{2}ab + 3b^2.$$

При умножении многочлена на многочлен нужно каждый член множимого умножить на каждый член множителя и результаты сложить.

Пример.

$$(5a^2b - 3ab^2 + 2b^3) \cdot (a - 2b) = 5a^3b - 3a^2b^2 + 2ab^3 - 10a^2b^2 + 6ab^3 - 4b^4 = 5a^3b - 13a^2b^2 + 8ab^3 - 4b^4.$$

При делении многочлена на многочлен нужно расположить их по убывающим степеням какой-либо буквы и разделить старший член делимого на старший член делителя; получим старший член частного. Его следует умножить на весь делитель, полученное произведение вычесть из делимого и старший член остатка опять разделить на старший член делителя; получим второй член частного. Так следует продолжать до тех пор, пока не получится в остатке нуль или пока степень старшего члена остатка не будет меньше степени стар-

шего члена делителя. Последний случай представляет собой деление с остатком.

Пример.

$$\begin{array}{r} -2x^3 + 5x^2 + 13x + 4 \\ -2x^3 + 4x^2 = 6x \\ \hline -x^2 + 7x + 4 \\ -x^2 + 2x + 3 \\ \hline 5x + 1 \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} x^3 + 2x + 3 \\ 2x + 1 \end{array} \right.$$

Следовательно

$$(2x^3 + 5x^2 + 13x + 4) : (x^3 + 2x + 3) = 2x + 1 + \frac{5x + 1}{x^3 + 2x + 3}.$$

В некоторых случаях умножение и деление многочленов можно производить с использованием так называемых формул сокращённого умножения и деления.

ФОРМУЛЫ СОКРАЩЁННОГО УМНОЖЕНИЯ И ДЕЛЕНИЯ

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b);$$

$$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2);$$

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2;$$

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc;$$

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2 = a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 + 2a_1a_2 + 2a_1a_3 + \dots + 2a_1a_n + 2a_2a_3 + \dots + 2a_{n-1}a_n;$$

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3;$$

$$\frac{a^n - b^n}{a - b} = a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + a^{n-3}b^2 + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1};$$

$$\frac{a^{2n} - b^{2n}}{a \pm b} = a^{2n-1} \mp a^{2n-2}b + \dots + a^{2n-3}b^2 \mp \dots + ab^{2n-2} \mp b^{2n-1};$$

$$\frac{a^{2n+1} + b^{2n+1}}{a + b} = a^{2n} - a^{2n-1}b + \dots + a^{2n-2}b^2 - \dots - ab^{2n-1} + b^{2n}.$$

РАЦИОНАЛЬНЫЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ВЫРАЖЕНИЯ

Различают целые и дробные рациональные выражения (стр. 95). Всякое целое рациональное выражение можно преобразовать к виду многочлена:

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n,$$

где x — основная величина, а $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ — коэффициенты многочлена.

Корнем многочлена $P(x)$ называется такое значение $x = a$, которое при подстановке в многочлен вместо x обращает его в нуль: $P(a) = 0$. Например, один из корней многочлена $P(x) = x^2 - 6x + 8$ есть $x = 4$, так как $P(4) = 0$.

Всякий многочлен имеет по крайней мере один корень (основная теорема алгебры).

Во многих случаях можно произвести разложение многочлена на множители, т. е. представить многочлен в виде произведения

простых множителей — одночленов и многочленов.

Пример 1. Вынесение за скобки:

$$4a^2z^2 + 6a^2z^2 = 2a^2z^2(2a + 3z).$$

Пример 2. Группировка:

$$x^2 + ax + bx + ab = (x^2 + ax) + (bx + ab) = x(x + a) + b(x + a) = (x + a)(x + b).$$

Пример 3. Применение формул сокращённого умножения:

$$5x^4 - 5y^4 = 5(x^4 - y^4) = 5(x^2 + y^2)(x^2 - y^2) = 5(x^2 + y^2)(x + y)(x - y).$$

Всякое дробное рациональное выражение можно преобразовать в отношение двух многочленов, не имеющих общих множителей:

$$R(x) = \frac{Q(x)}{P(x)} =$$

$$= \frac{b_0x^m + b_1x^{m-1} + b_2x^{m-2} + \dots + b_{m-1}x + b_m}{a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n},$$

где x — основная величина, $a_0, a_1, a_2, \dots, b_0, b_1, b_2, \dots$ — коэффициенты.

Коэффициент при старшем члене знаменателя можно всегда сделать равным единице, разделив на него числитель и знаменатель дроби.

Отношение двух многочленов называется правильной рациональной дробью, если степень числителя меньше степени знаменателя ($m < n$), и неправильной, если степень числителя больше или равна степени знаменателя ($m \geq n$). Любая неправильная рациональная дробь может быть путём деления числителя на знаменатель представлена в виде суммы многочлена и правильной дроби (стр. 96):

$$R(x) = \frac{2x^3 + 5x^2 + 13x + 4}{x^2 + 2x + 3} = 2x + 1 + \frac{5x + 1}{x^2 + 2x + 3}.$$

Теорема Безу

Остаток от деления многочлена

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_n$$

на $x - \alpha$ равен значению многочлена при $x = \alpha$, т. е.

$$P(x) = (x - \alpha)P_1(x) + P(\alpha),$$

где $P_1(x)$ — многочлен степени $n - 1$.

В случае, когда $P(\alpha) = 0$ (т. е. α — корень многочлена), деление совершается без остатка:

$$P(x) = (x - \alpha)P_1(x).$$

Если $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$ — корни данного многочлена, то многочлен может быть представлен в виде произведения линейных (первой степени) относительно x множителей:

$$P(x) = a_0(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3) \dots (x - \alpha_n).$$

Если в разложении многочлена множитель $x - \alpha$ встречается k раз, то α называется корнем многочлена кратности k . В случае, когда коэффициенты многочлена $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ действительны, каждые два множителя, соответствующие сопряжён-

ным комплексным корням (стр. 99), можно заменить квадратным трёхчленом

$$x^2 + px + q,$$

где p и q — действительные числа¹.

Поэтому в самом общем случае имеем:

$$P(x) = a_0(x - \alpha_1)^{k_1}(x - \alpha_2)^{k_2} \dots (x^2 + p_1x + q_1)^{s_1}(x^2 + p_2x + q_2)^{s_2} \dots,$$

где k_1, k_2, \dots — показатели кратности действительных корней;

s_1, s_2, \dots — показатели кратности сопряжённых пар комплексных корней.

Всякая правильная несократимая дробь

$$R(x) = \frac{Q(x)}{P(x)} = \frac{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \dots + b_m}{x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n}$$

может быть единственным образом разложена на сумму элементарных (простейших) дробей вида

$$\frac{A}{(x - \alpha)^k} \text{ или } \frac{Cx + D}{(x^2 + px + q)^s} \left(\frac{p^2}{4} - q < 0 \right),$$

где k и s — целые положительные числа:

$$\begin{aligned} \frac{Q(x)}{P(x)} &= \frac{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \dots + b_m}{(x - \alpha_1)^{k_1} \dots (x^2 + p_1x + q_1)^{s_1} \dots} = \\ &= \frac{A_1}{x - \alpha_1} + \frac{A_2}{(x - \alpha_1)^2} + \dots + \frac{A_{k_1}}{(x - \alpha_1)^{k_1}} + \\ &+ \frac{B_1}{x - \alpha_2} + \frac{B_2}{(x - \alpha_2)^2} + \dots + \frac{B_{k_2}}{(x - \alpha_2)^{k_2}} + \\ &+ \dots + \frac{C_1x + D_1}{x^2 + p_1x + q_1} + \frac{C_2x + D_2}{(x^2 + p_1x + q_1)^2} + \\ &+ \dots + \frac{C_{s_1}x + D_{s_1}}{(x^2 + p_1x + q_1)^{s_1}} + \dots \end{aligned}$$

Величины $A_1, A_2, \dots, A_{k_1}, B_1, B_2, \dots, B_{k_2}, C_1, C_2, \dots, C_{s_1}$ и т. д. определяются методом неопределённых коэффициентов.

Для этого складывают все простые дроби, приняв в качестве общего знаменателя знаменатель исходной дроби, числитель полученной суммы располагают по убывающим степеням x и приравнивают коэффициенты при одинаковых степенях x этого числителя и числителя исходной дроби (в силу тождественности этих числителей).

Пример. Разложить дробь $\frac{x-3}{x^3-x}$ на простейшие.

Так как $x^3 - x = x(x - 1)(x + 1)$, то

$$\frac{x-3}{x^3-x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1},$$

откуда

$$x - 3 = A(x^2 - 1) + Bx(x + 1) + Cx(x - 1)$$

или

$$x - 3 = (A + B + C)x^2 + (B - C)x - A.$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях равенства, получим:

$$A + B + C = 0;$$

$$B - C = 1;$$

$$-A = -3,$$

¹ Если $a + bi$ — корень многочлена с действительными коэффициентами кратности k , то $a - bi$ тоже корень этого многочлена и притом той же кратности.

откуда $A = 3$, $B = -1$; $C = -2$ и, следовательно,

$$\frac{x-3}{x^2-x} = \frac{3}{x} - \frac{1}{x-1} - \frac{2}{x+1}.$$

Аналогично

$$\begin{aligned} \frac{3x^4 + x^3 + 4x^2 + 1}{x^5 + 2x^3 + x} &= \frac{3x^4 + x^3 + 4x^2 + 1}{x(x^4 + 1)^2} = \\ &= \frac{1}{x} + \frac{2x+1}{x^2+1} - \frac{1}{(x^2+1)^2}. \end{aligned}$$

ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ ВЫРАЖЕНИЯ

Всякое иррациональное выражение можно привести к простейшему (так называемому нормальному) виду различными алгебраическими преобразованиями, как то: сокращение показателя, вынесение за знак корня и уничтожение иррациональности в знаменателе.

Сокращение показателя:

$$\begin{aligned} \sqrt[8]{81(x^6 - 4x^7 + 4x^8)} &= \sqrt[8]{9^2 x^6 (x-2)^2} = \\ &= \sqrt[4]{9x^3(x-2)}. \end{aligned}$$

Вынесение за знак корня:

$$\sqrt[3]{81x^7y^5} = 3x^2y \sqrt[3]{3xy^2}.$$

Уничтожение иррациональности в знаменателе:

$$\sqrt[3]{\frac{y}{3x}} = \sqrt[3]{\frac{9x^2y}{27x^3}} = \frac{\sqrt[3]{9x^2y}}{3x}.$$

Ниже приводятся формулы, относящиеся к степеням и корням и к действиям над ними.

СТЕПЕНИ

Возведение числа a (основания) в степень при показателе степени n целом и положительном:

$$\begin{aligned} a^n &= a \cdot a \cdot a \dots a \quad (n \text{ раз}); \\ (+a)^{2n} &= +a^{2n}; \\ (-a)^{2n} &= +a^{2n}; \\ (+a)^{2n-1} &= +a^{2n-1}; \\ (-a)^{2n-1} &= -a^{2n-1}; \end{aligned}$$

в частности: $0^n = 0$; $(+1)^n = +1$;

$$(-1)^{2n} = +1; \quad (-1)^{2n-1} = -1.$$

При показателе степени, равном нулю ($n = 0$, $a \neq 0$):

$$a^0 = 1.$$

При показателе целом и отрицательном ($n = -m$):

$$a^{-m} = \frac{1}{a^m}.$$

При показателе дробном и положительном ($n = \frac{p}{q}$):

$$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}.$$

При показателе дробном и отрицательном ($n = -\frac{p}{q}$):

$$a^{-\frac{p}{q}} = \frac{1}{\sqrt[q]{a^p}}.$$

Действия над степенями (при любых показателях степеней):

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n};$$

$$a^m : a^n = a^{m-n};$$

$$(a^m)^n = a^{mn};$$

$$(a \cdot b)^n = a^n b^n;$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}.$$

КОРНИ (РАДИКАЛЫ)

Корень нечётной степени имеет тот же знак, что и подкоренное выражение, например:

$$\sqrt[2n+1]{1} = 1, \quad \sqrt[2n+1]{-1} = -1.$$

Корень чётной степени из положительного числа имеет два действительных значения, отличающихся одно от другого знаком, например $\sqrt[2n]{1} = \pm 1$.

Корень чётной степени из отрицательного числа не имеет действительных значений.

Действия с корнями

$$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b};$$

$$\sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[nm]{a^n \cdot b^m};$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}};$$

$$\sqrt[m]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[nm]{\frac{a^n}{b^m}};$$

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}};$$

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}};$$

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[nm]{a}.$$

Уничтожение иррациональности в знаменателе дроби

$$\frac{a}{\sqrt[n]{b^m}} = \frac{a \sqrt[n]{b^{n-m}}}{b};$$

$$\frac{a}{\sqrt{b} \pm \sqrt{c}} = \frac{a(\sqrt{b} \mp \sqrt{c})}{b - c}.$$

Преобразование выражения $\sqrt{A \pm \sqrt{B}}$

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A+m}{2}} \pm \sqrt{\frac{A-m}{2}},$$

где $m = \sqrt{A^2 - B}$.

Пример. Преобразование выражения $\sqrt{2 - \sqrt{3}}$:

$$m = \sqrt{A^2 - B} = \sqrt{4 - 3} = 1;$$

$$\sqrt{2 - \sqrt{3}} = \sqrt{\frac{2+1}{2}} - \sqrt{\frac{2-1}{2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{3}{2}} - \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(\sqrt{6} - \sqrt{2}).$$

Извлечение квадратного корня.

Извлечение квадратного корня из чисел производится по схеме, показанной ниже.

Пример 1. Извлечь квадратный корень из числа 123 904.

$$\begin{array}{r} \sqrt{12'39'04} = 352 \\ 9 \\ \hline 65 \overline{) 339} \\ 5 \overline{) 325} \\ \hline 702 \overline{) 1404} \\ 2 \overline{) 1404} \\ \hline \end{array}$$

Разбиваем число справа налево на грани по две цифры в каждой грани: 12'39'04 (первая грань может оказаться неполной, т. е. состоящей из одной цифры). Из первой грани (12) извлекаем корень точно или приближённо с недостатком ($\sqrt{12} \approx 3$); полученное число (3) есть первая цифра искомого корня. Из 12 вычитаем 3^2 и к остатку (3) приписываем следующую грань (39). Затем, удвоив полученную первую цифру корня ($2 \cdot 3 = 6$), приписываем её слева от полученного числа (339), оставляя между обоими числами свободное место ещё для одной цифры; оба числа отделяются друг от друга вертикальной чертой. Деля число десятков (33) на 6, получаем вторую цифру (5) искомого корня (она может быть и нулём). Её записывают в трёх местах: в ответе, рядом с цифрой 6 и ниже; полученные слева от черты два числа перемножаются ($65 \cdot 5 = 325$) и складываются ($65 + 5 = 70$). Произведение вычитаем из 339 и к остатку (14) приписываем следующую грань (04). Если окажется, что вычитаемое больше уменьшаемого, то вторую цифру берут на единицу меньше. Нахождение третьей из следующих цифр производится подобным же образом; так как в последнем остатке получился нуль, то число 352 является точным значением квадратного корня:

$$\sqrt{123\,904} = 352.$$

Пример 2. Извлечь квадратный корень из десятичной дроби 1239,04.

Разбиваем дробь на грани (по две цифры в каждой грани) в обе стороны от запятой: 12'39',04'; если крайняя правая грань окажется неполной, нужно приписать справа нуль. Далее производим вычисления по той же схеме, что и для целых чисел, не обращая внимания на запятую. Результат содержит столько цифр до запятой, сколько полных или неполных граней содержало до запятой данное число:

$$\sqrt{1239,04} = 35,2.$$

Если десятичная дробь не содержит целой части, то и квадратный корень из неё не содержит целой части и имеет после запятой столько нулей, сколько полных граней, состоящих из нулей, справа от запятой, имеет данная десятичная дробь:

$$\sqrt{0,00'00'12'39'04} = 0,00352.$$

Пример 3. Извлечь квадратный корень из числа 123 906.

Применив ту же схему, получаем в остатке 2, и 352 является не точным, а приближённым (с недостатком) значением корня: $\sqrt{123\,906} \approx 352$.

$$\begin{array}{r} \sqrt{12'39'06} \approx 352 \\ 9 \\ \hline 65 \overline{) 339} \\ 5 \overline{) 325} \\ \hline 702 \overline{) 1406} \\ 2 \overline{) 1404} \\ \hline 2 \end{array}$$

В этом случае для получения большей точности следует в подкоренном количестве приписать после запятой нужное число нулей и продолжать вычисление по схеме для извлечения корня из десятичной дроби

ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ, МНИМЫЕ И КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

Все числа, которые могут быть получены путём сложения, вычитания, умножения и деления натуральных чисел 1, 2, 3, 4, 5, ..., называются **рациональными**, напри-

мер: $\frac{3}{5}$; $-\frac{4}{7}$; 2,512; все прочие числа называются **иррациональными**, например: $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{5}$, π . Рациональные числа могут быть изображены конечными или периодическими десятичными дробями:

$$\frac{1}{4} = 0,25; \quad \frac{1}{3} = 0,333 \dots$$

Каждое число можно приближённо (с любой точностью) изобразить конечной десятичной дробью с достаточно большим числом знаков.

Числа рациональные и иррациональные, как положительные, так и отрицательные, называются **действительными** (вещественными).

Формально, введя новую единицу счисления, так называемую **мнимую единицу**, определяемую равенством

$$i^2 = -1 \quad \text{или} \quad i = \sqrt{-1},$$

получим общее выражение для чисто мнимого числа:

$$\sqrt{-b^2} = b \sqrt{-1} = bi,$$

где b — действительное число.

Пример 1.

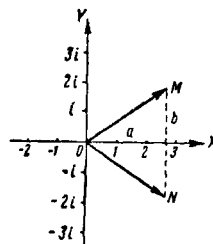
$$\sqrt{-4} = 2\sqrt{-1} = 2i.$$

Пример 2.

$$\sqrt{-3} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{-1} = i\sqrt{3}.$$

Число вида $a + bi$, где a и b — действительные числа, называется **комплексным** числом, a — его действительной частью, bi — мнимой, b — коэффициентом при мнимой части.

Комплексные числа содержат в себе действительные и мнимые числа как частные случаи: при $b = 0$ комплексное число $a + bi$ превращается в действительное число a , при $a = 0$ в чисто мнимое число bi .



Фиг. 1

Комплексное число $z = a + bi$ изображается на плоскости точкой M с координатами a и b (фиг. 1) или вектором OM (радиусом-вектором точки M).

При этом действительные числа изображаются точками на оси OX (действительная ось), а чисто мнимые числа — точками на оси OY (мнимая ось).

Число $\bar{z} = a - bi$ изображается точкой N , симметричной с точкой M относительно действительной оси, и называется **сопряжённым** с $z = a + bi$.

Два комплексных числа равны между собой, если отдельно равны их действительные и мнимые части:

$$a_1 + b_1 i = a_2 + b_2 i,$$

если

$$a_1 = a_2 \quad \text{и} \quad b_1 = b_2.$$

Комплексное число равно нулю, если равны нулю его действительная и мнимая части:

$$a + bi = 0,$$

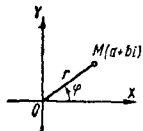
если

$$a = 0 \text{ и } b = 0.$$

Тригонометрическая форма комплексного числа

$$z = a + bi = r(\cos \varphi + i \sin \varphi);$$

r называется модулем комплексного числа и обозначается символом $|z|$, φ называется аргументом комплексного числа и обозначается символом $\arg z$:



Фиг. 2

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}; \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a}.$$

Модуль комплексного числа равен длине OM радиуса-вектора точки M (фиг. 2), аргумент — углу между этим радиусом-вектором и положительным направлением действительной оси. Угол отсчитывается от положительного направления действительной оси против часовой стрелки.

Число с модулем r и аргументом φ может быть также записано в форме $re^{i\varphi}$ (показательная форма)¹, где $e = 2,718 \dots$ (стр. 129).

Например, число $1 + i\sqrt{3}$ (алгебраическая форма) может быть представлено в тригонометрической форме в виде

$$2\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right)$$

и в показательной форме в виде $2e^{i\frac{\pi}{3}}$.

Сложение и вычитание комплексных чисел. При сложении или вычитании комплексных чисел отдельно складываются или вычитаются их действительные и мнимые части;

$$(a_1 + b_1i) \pm (a_2 + b_2i) = (a_1 \pm a_2) + (b_1 \pm b_2)i.$$

Радиус-вектор суммы и разности двух комплексных чисел строится как геометрическая сумма или разность радиусов-векторов этих чисел (стр. 208).

Сумма двух сопряжённых комплексных чисел есть число действительное:

$$(a + bi) + (a - bi) = 2a.$$

Умножение двух комплексных чисел

$$(a_1 + b_1i)(a_2 + b_2i) = \\ = (a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)i,$$

или в тригонометрической форме:

$$[r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)][r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)] = \\ = r_1r_2[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)],$$

т. е. модуль произведения равен произведению модулей сомножителей, а аргумент — сумме аргументов сомножителей.

Произведение сопряжённых комплексных чисел равно квадрату модуля:

$$z \bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2.$$

Деление двух комплексных чисел

$$\frac{a_1 + b_1i}{a_2 + b_2i} = \frac{(a_1a_2 + b_1b_2) + (a_2b_1 - a_1b_2)i}{a_2^2 + b_2^2}$$

или

$$\frac{r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)}{r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)} = \\ = \frac{r_1}{r_2} [\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)],$$

т. е. модуль частного равен частному модулю сомножителей, а аргумент — разности аргументов сомножителей.

Возведение в степень комплексного числа

$[r(\cos \varphi + i \sin \varphi)]^n = r^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$ (формула Муавра), т. е. модуль возводится в n -ю степень, а аргумент умножается на n . В частности:

$$i^{4m} = 1; \quad i^{4m+1} = i; \quad i^{4m+2} = -1;$$

$$i^{4m+3} = -i \quad (m - \text{целое}).$$

Извлечение корня из комплексного числа

$$\sqrt[n]{r(\cos \varphi + i \sin \varphi)} = \\ = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right),$$

где $k = 0, 1, 2, 3, \dots, n-1$.

Различные значения корня изображаются геометрически вершинами правильного n -угольника, вписанного в круг с радиусом $\sqrt[n]{r}$.

Пример.

$$\sqrt[3]{-1} = \sqrt[3]{1(\cos \pi + i \sin \pi)} = \\ = \cos \frac{\pi + 2k\pi}{3} + i \sin \frac{\pi + 2k\pi}{3}.$$

Полагая $k = 0, 1, 2$, получим три значения

$$\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad -1; \quad \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

СОЕДИНЕНИЯ (КОМБИНАТОРИКА)

Соединениями называются всевозможные группировки данных предметов (элементов).

Различают следующие виды соединений:

Размещения — соединения, содержащие одинаковое число элементов (например, m элементов из n данных) и отличающиеся друг от друга или элементами (по крайней мере одним) или порядком элементов. Например, размещения из трёх элементов a, b и c по два: ab, ac, bc, ba, ca, cb .

Перестановки — соединения, содержащие все данные элементы и различающиеся друг от друга только порядком входящих в них элементов. Например, перестановки из трёх элементов: $abc, bca, cab, acb, bac, cba$.

Сочетания — соединения, содержащие одинаковое число элементов (например, m элементов из n данных) и отличающиеся друг от друга только самими элементами (по крайней мере одним). Например, сочетания из трёх элементов a, b и c по два: ab, ac, bc .

¹ См. формулу Эйлера, стр. 213.

Число размещений из n элементов по m :

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)\dots(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!},$$

где символом $n!$ (n факториал) обозначено произведение натуральных чисел от 1 до n .

Таблица факториалов ($n!$) приведена на стр. 82 (0! принимают равным единице).

Число перестановок из n элементов

$$P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \dots n = n! = A_n^n.$$

Число сочетаний из n элементов по m :

$$C_n^m = \binom{n}{m} = \frac{A_n^m}{P_m} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-m+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \dots m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

В частности: $C_n^1 = n$; $C_n^n = C_n^0 = 1$.

Основное свойство сочетаний:

$$C_n^m = C_n^{n-m}.$$

Число размещений из n различных элементов по m , при условии, что среди этих m один или несколько могут повторяться, вычисляется по формуле числа размещений с повторениями

$$AA_n^m = n^m.$$

Число перестановок из n элементов a, b, c, \dots , среди которых имеются одинаковые (a повторяется α раз, $b - \beta$ раз, $c - \gamma$ раз и т. д.), определяется формулой числа перестановок с повторениями

$$P(\alpha, \beta, \gamma, \dots) = \frac{P_n}{P_\alpha P_\beta P_\gamma \dots} = \frac{n!}{\alpha! \beta! \gamma! \dots},$$

где

$$\alpha + \beta + \gamma + \dots = n.$$

Число сочетаний из n различных элементов по m , при условии, что среди этих m один или несколько могут повторяться, вычисляется по формуле числа сочетаний с повторениями

$$CC_n^m = C_{n+m-1}^m = \frac{(n+m-1)!}{m!(n-1)!}.$$

БИНОМ НЬЮТОНА

Биномом Ньютона называется формула, представляющая выражение $(a+b)^n$ в виде многочлена при целом и положительном n (другие случаи см. стр. 161):

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 + \dots + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}b^3 + \dots + \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+2)}{(k-1)!}a^{n-k+1}b^{k-1} + \dots + nab^{n-1} + b^n.$$

Общее выражение k -го члена бинома Ньютона:

$$\frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+2)}{(k-1)!}a^{n-k+1}b^{k-1} = C_n^{k-1}a^{n-k+1}b^{k-1}.$$

Таблица 2

Биномиальные коэффициенты C_n^{k-1}

$\begin{smallmatrix} k \\ n \end{smallmatrix}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0	1										
1	1	1									
2	1	2	1								
3	1	3	3	1							
4	1	4	6	4	1						
5	1	5	10	10	5	1					
6	1	6	15	20	15	6	1				
7	1	7	21	35	35	21	7	1			
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1		
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	
10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1

Основные свойства биномиальных коэффициентов

1) Коэффициенты в разложении бинома Ньютона возрастают до середины формулы и затем убывают;

2) коэффициенты членов, равноотстоящих от начала и от конца разложения, равны между собой;

3) сумма коэффициентов в биноме n -й степени равна 2^n ;

4) сумма коэффициентов членов нечётно порядка равна сумме коэффициентов членов чётно порядка, причём каждая из этих сумм равна 2^{n-1} .

Определители

Определитель (детерминант) n -го порядка

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

содержит n^2 элементов, расположенных в n строках и n столбцах.

Минором некоторого элемента определителя n -го порядка называется определитель порядка $n-1$, получаемый из данного определителя вычеркиванием той строки и того столбца, которым принадлежит рассматриваемый элемент.

Алгебраическим дополнением (адъюнктой) элемента определителя называется его минор, умноженный на $(-1)^{i+j}$, где i — номер строки, а j — номер столбца рассматриваемого элемента.

Определитель равен сумме произведений элементов какой-либо строки или столбца на соответствующие алгебраические дополнения (разложение определителя по минорам); так, например, если A_{11}

A_{21}, \dots, A_{n1} — алгебраические дополнения элементов первого столбца, то

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & 1 & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \\ = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + \dots + a_{n1}A_{n1}.$$

Это свойство позволяет свести вычисление определителя порядка n к вычислению определителей порядка $n-1$.

Для вычисления определителя второго порядка $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ надо из произведения элементов, расположенных на главной диагонали, вычесть произведение элементов, расположенных на второй диагонали:

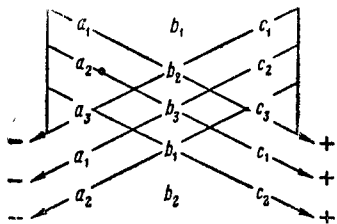
$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1.$$

Для вычисления определителя третьего порядка можно применить один из следующих способов:

а) Общий способ (разложение по минорам элементов какой-либо строки или столбца):

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} = \\ = a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - b_1(a_2c_3 - a_3c_2) + \\ + c_1(a_2b_3 - a_3b_2) = a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 + \\ + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1.$$

б) Способ Саррюса. Подписывают под определителем две первые строки и составляют алгебраическую сумму произведений элементов, взятых по три, расположенных по диагоналям определителя и их параллелям, причём произведения по диагонали a_1, b_2, c_3 (главной диагонали) и по её параллелям берут со знаком $+$, а остальные со знаком $-$.



Пример.

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 4 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 18 - 1 + 0 - 8 - 0 + 6 = 15.$$

Вместо строк можно аналогичным образом приписывать столбцы.

Основные свойства определителей

1. Определитель не изменит своей величины, если все строки его заменить соответствующими столбцами (свойство равноправности строк и столбцов):

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

2. Если все элементы какой-либо строки (или столбца) равны нулю, то определитель равен нулю:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

3. При перестановке двух строк (или столбцов) определитель изменяет знак:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}; \\ \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

4. Если определитель имеет две одинаковых строки (или столбца), то он равен нулю:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

5. Общий множитель всех элементов какой-либо строки (или столбца) можно вынести за знак определителя:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ \lambda a_2 & \lambda b_2 \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}; \\ \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ \lambda a_2 & \lambda b_2 & \lambda c_3 \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

6. Определитель, у которого элементы какой-либо строки (или столбца) пропорциональны соответствующим элементам другой строки (или столбца), равен нулю:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ \lambda a_1 & \lambda b_1 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ \lambda a_1 & \lambda b_1 & \lambda c_1 \end{vmatrix} = 0.$$

7. Если к элементам какой-либо строки (или столбца) прибавить элементы другой строки (или столбца), умноженные на одно и то же число, то величина определителя не изменится:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 + \lambda a_2 & b_1 + \lambda b_2 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}; \\ \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 + \lambda a_2 & b_1 + \lambda b_2 & c_1 + \lambda c_2 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

В частности, если элементы какой-либо строки (или столбца) представляют собой линейную комбинацию соответствующих элементов остальных строк (или столбцов), то определитель равен нулю:

$$\begin{vmatrix} \lambda a_2 + \mu a_3 & \lambda b_2 + \mu b_3 & \lambda c_2 + \mu c_3 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

8. Если определители разнятся между собой только элементами какой-либо одной строки (или столбца), то можно складывать между собой такие определители, причём в сумме получается определитель, у которого элементами соответствующей строки (или столбца) будут суммы элементов опре-

делителей — слагаемых, а остальные элементы — те же, что у слагаемых:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a'_1 & b'_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 + a'_1 & b_1 + b'_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix};$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a'_1 & b'_1 & c'_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 + a'_1 & b_1 + b'_1 & c_1 + c'_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

9. Сумма произведений элементов какой-либо строки (или столбца) на алгебраические дополнения соответствующих элементов другой строки (или столбца) равна нулю. Например, $b_1A_1 + b_2A_2 + b_3A_3 = 0$ (A_1, A_2 и A_3 — алгебраические дополнения элементов a_1, a_2 и a_3).

УРАВНЕНИЯ

УРАВНЕНИЯ С ОДНИМ НЕИЗВЕСТНЫМ

Алгебраическим уравнением с одним неизвестным называется равенство двух алгебраических выражений, которое верно (удовлетворяется) только при определённых значениях входящей в него неизвестной величины x . Эти значения x_1, x_2, x_3, \dots называются корнями уравнения. Решить уравнение — значит найти его корни.

Например, уравнение $x^2 - 5x + 6 = 0$ имеет корни: $x_1 = 2$ и $x_2 = 3$, так как $2^2 - 5 \cdot 2 + 6 = 0$ и $3^2 - 5 \cdot 3 + 6 = 0$.

Равносильными называются уравнения, имеющие одни и те же корни.

При решении уравнения применяются следующие основные приёмы:

1. Замена одного выражения другим, равным ему тождественно.

2. Перенос слагаемых из одной части уравнения в другую с переменной знака на обратный.

3. Умножение или деление обеих частей уравнения на одно и то же выражение. При этом может, впрочем, оказаться, что новое уравнение не будет равносильно исходному, если выражение, на которое умножают или делят обе части уравнения, содержит неизвестное и может быть равным нулю.

Например, разделив обе части уравнения $(x-3)(x+3) = 4x+12$ на $x+3$, получаем уравнение $x-3=4$ и $x=7$ будет его единственным корнем. Между тем исходное уравнение имело два корня: $x=7$ и $x=-3$, что легко проверить подстановкой. Наоборот, при переходе от второго уравнения к первому (путём умножения на $x+3$) появился бы лишний корень $x=-3$.

4. Возведение обеих частей уравнения в одну и ту же степень или извлечение корня одной и той же степени. И в этом случае возможно появление лишних или потеря корней.

Например, уравнение $\sqrt{x+7} = 2x-1$ при возведении в квадрат переходит в $x+7 = 4x^2 - 4x + 1$ или $4x^2 - 5x - 6 = 0$, которое имеет два корня: $x_1 = 2$ и $x_2 = -\frac{3}{4}$; между тем исходному уравнению удовлетворяет только корень $x=2$.

Проверка решения уравнения осуществляется путём подстановки найденных корней в исходное уравнение.

Всякое алгебраическое уравнение можно при помощи алгебраических преобразований привести к так называемой канонической форме, т. е. к уравнению вида:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0.$$

Показатель степени n называется степенью уравнения.

Уравнения первой степени (линейные). Всякое уравнение первой степени с одним неизвестным можно привести к виду:

$$ax + b = 0 \text{ (канонический вид),}$$

откуда $x = -\frac{b}{a}$, т. е. линейное уравнение имеет один действительный корень (если $a \neq 0$).

Уравнения второй степени (квадратные). Приведённое уравнение $x^2 + px + q = 0$:

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

Уравнение общего вида $ax^2 + bx + c = 0$:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Уравнение с чётным средним коэффициентом $ax^2 + 2tx + c = 0$:

$$x_{1,2} = \frac{-m \pm \sqrt{m^2 - ac}}{a}.$$

Неполное уравнение вида $ax^2 + bx = 0$:

$$x_1 = 0; x_2 = -\frac{b}{a}.$$

Неполное уравнение вида $ax^2 + c = 0$:

$$x_{1,2} = \pm \sqrt{-\frac{c}{a}}.$$

Свойства корней квадратного уравнения. Если x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2 + px + q = 0$, то

$$x_1 + x_2 = -p; x_1x_2 = q.$$

Соответственно для уравнения $ax^2 + bx + c = 0$:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}; x_1x_2 = \frac{c}{a}.$$

Исследование корней квадратного уравнения. Выражение $4ac - b^2$ или $q - \frac{p^2}{4}$ (для приведённого уравнения) обозначается через Δ и называется дискриминантом квадратного уравнения.

Если $\Delta < 0$, то корни действительные и разные; если $\Delta = 0$, то корни действительные и равны между собой; если $\Delta > 0$, то корни мнимые.

Преобразования трёхчлена второй степени. Если x_1 и x_2 — корни трёхчлена $ax^2 + bx + c$, то

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Всякий трёхчлен второй степени можно представить также в виде:

$$ax^2 + bx + c = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \left(\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right)^2 \right].$$

Уравнения третьей степени (кубические). Корни кубического уравнения в приведённой форме

$$x^3 + px + q = 0$$

находятся по формуле

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}.$$

а) Если

$$\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 > 0,$$

то

$$x_1 = A + B;$$

$$x_2 = -\frac{1}{2}(A + B) + i\frac{\sqrt{3}}{2}(A - B);$$

$$x_3 = -\frac{1}{2}(A + B) - i\frac{\sqrt{3}}{2}(A - B),$$

где A и B — действительные значения кубических корней, входящих в формулу.

б) Если

$$\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 = 0,$$

то $A = B$, $x_1 = 2A$, $x_2 = x_3 = -A$.

в) Если $\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 < 0$ («неприводимый случай»), то в действительной форме корни выражаются по формулам:

$$x_1 = 2r \cos \frac{\varphi}{3};$$

$$x_2 = 2r \cos \frac{\varphi + 2\pi}{3} =$$

$$= r \left(-\cos \frac{\varphi}{3} - \sqrt{3} \sin \frac{\varphi}{3} \right);$$

$$x_3 = 2r \cos \frac{\varphi + 4\pi}{3} =$$

$$= r \left(-\cos \frac{\varphi}{3} + \sqrt{3} \sin \frac{\varphi}{3} \right);$$

где

$$r = \sqrt[3]{-\left(\frac{p}{3}\right)^3} \text{ и } \cos \varphi = -\frac{q}{2r}.$$

Уравнение третьей степени общего вида

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

можно преобразовать к приведённой форме $y^3 + py + q = 0$, разделив обе его части на a и выполнив подстановку

$$x = y - \frac{1}{3} \frac{b}{a}.$$

Возвратные уравнения третьей степени

$$ax^3 + bx^2 \pm bx + a = 0$$

можно представить в виде:

$$(x \pm 1)[ax^2 + (b \mp a)x + a] = 0$$

и свести к решению уравнений первой и второй степени.

Уравнения четвёртой степени. Корни уравнения четвёртой степени

$$x^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$$

совпадают с корнями двух квадратных уравнений:

$$x^2 + (b + A)\frac{x}{2} + \left(y + \frac{by - d}{A}\right) = 0,$$

где $A = \pm \sqrt{8y + b^2 - 4c}$, а y — какой-нибудь действительный корень кубического уравнения

$$8y^3 - 4cy^2 + (2bd - 8e)y + e(4c - b^3) - d^2 = 0.$$

Корни биквадратного уравнения

$$ax^4 + bx^2 + c = 0$$

определяются по формуле

$$x_{1,2,3,4} = \pm \sqrt{\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}.$$

Возвратные уравнения четвёртой степени

$$ax^4 \pm bx^3 + cx^2 \pm bx + a = 0$$

путём деления всех членов уравнения на x^2 и подстановки

$$x + \frac{1}{x} = y$$

сводятся к уравнению

$$ay^2 \pm by + (c - 2a) = 0,$$

откуда

$$y = \frac{\mp b \pm \sqrt{b^2 - 4ac + 8a^2}}{2a}$$

и, следовательно,

$$x_{1,2,3,4} = \frac{y \pm \sqrt{y^2 - 4}}{2}.$$

Если уравнение имеет вид

$$ax^4 \pm bx^3 + cx^2 \mp bx + a = 0,$$

то производится подстановка

$$x - \frac{1}{x} = y.$$

Двучленные уравнения. Корни двучленного уравнения

$$x^n - a = 0$$

определяются по формуле

$$x = \sqrt[n]{a} \left[\cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n} \right]$$

$$(k = 0, 1, 2, \dots, n-1).$$

Трёхчленные уравнения. Трёхчленное уравнение вида

$$ax^{2n} + bx^n + c = 0$$

подстановкой $x^n = y$ сводится к квадратному уравнению

$$ay^2 + by + c = 0.$$

Уравнения степени n . В общем случае уравнение степени n при $n > 4$ не может

быть решено в радикалах. Способы отыскания приближённых решений указаны на стр. 236—244.

Свойства корней. Если x_1, x_2, \dots, x_n — корни уравнения

$$x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_{n-1} x + a_n = 0,$$

то:

$$a_1 = -(x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n);$$

$$a_2 = x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_1 x_4 + \dots + x_2 x_3 + x_2 x_4 + \dots + x_{n-1} x_n;$$

$$a_3 = -(x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_4 + \dots + x_1 x_2 x_n + x_2 x_3 x_4 + x_2 x_3 x_5 + \dots + x_{n-2} x_{n-1} x_n);$$

$$\dots \dots \dots$$

$$a_n = (-1)^n x_1 x_2 x_3 \dots x_{n-1} x_n.$$

СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

Система n алгебраических уравнений

$$\begin{cases} f_1(x, y, \dots, z) = 0, \\ f_2(x, y, \dots, z) = 0, \\ \dots \dots \dots \\ f_n(x, y, \dots, z) = 0 \end{cases}$$

может иметь одно, несколько или бесчисленное множество решений, а также может быть несовместной (не иметь решений).

Решением системы называется группа значений неизвестных x, y, \dots, z , обращающая в тождества все уравнения системы.

Система двух линейных уравнений с двумя неизвестными. Общий вид системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными:

$$a_1 x + b_1 y = c_1,$$

$$a_2 x + b_2 y = c_2.$$

Путём исключения одного из неизвестных любым из указанных ниже способов решение этой системы можно свести к решению одного уравнения с одним неизвестным. Решив это уравнение и подставив найденное решение в любое из исходных уравнений, можно определить второе неизвестное.

Способ сравнения. Каждое уравнение разрешается относительно y (или x) и полученные для y (или x) выражения приравниваются:

$$\frac{c_1 - a_1 x}{b_1} = \frac{c_2 - a_2 x}{b_2}.$$

Способ подстановки. Выражение, полученное для y (или x) из одного уравнения, подставляется в другое:

$$a_1 x + b_1 \frac{c_2 - a_2 x}{b_2} = c_1.$$

Способ сложения и вычитания.

$$\begin{array}{l} + a_1 x + b_1 y = c_1 \quad | \cdot b_2 \text{ (умножаем на } b_2); \\ + a_2 x + b_2 y = c_2 \quad | \cdot b_1 \text{ (умножаем на } b_1); \\ \hline (a_1 b_2 - a_2 b_1) x = c_1 b_2 - c_2 b_1 \text{ (складываем)}. \end{array}$$

Решение с помощью определителей.

$$\text{Если } \Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0, \text{ то}$$

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}; \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

Пример. Решить систему уравнений:

$$2x - 3y = 1;$$

$$3x + y = 7.$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 7 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}} = 2;$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}}{11} = 1.$$

В дальнейшем предполагается, что оба неизвестных действительно входят в систему, т. е. хотя бы один коэффициент при каждом из них отличен от нуля.

В случае $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$ формулы для определения неизвестных при помощи определителей $\left(x = \frac{\Delta_x}{\Delta}; y = \frac{\Delta_y}{\Delta}\right)$ теряют смысл.

Если одновременно с равенством $\Delta = 0$ имеет место неравенство $\Delta_x \neq 0$ (тогда и $\Delta_y \neq 0$), то система несовместна (не имеет решения). Если же одновременно с $\Delta = 0$ имеет место равенство $\Delta_x = \Delta_y = 0$, то система неопределённая (имеет бесчисленное множество решений). В этом случае

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

и одно из уравнений является следствием второго и может быть отброшено. Любая пара значений x и y , удовлетворяющих оставшемуся уравнению, даёт решение системы.

Система двух линейных однородных уравнений

$$a_1 x + b_1 y = 0,$$

$$a_2 x + b_2 y = 0$$

либо неопределённая (при $\Delta = 0$), либо имеет единственное решение (нулевое: $x = y = 0$ при $\Delta \neq 0$). Случай несовместности для однородной системы исключается. Если система однородных уравнений неопределённая, то она имеет, кроме нулевого, бесчисленное множество решений, содержащихся в формуле

$$x : y = -b_1 : a_1 = -b_2 : a_2.$$

Система трёх линейных уравнений с тремя неизвестными

$$a_1 x + b_1 y + c_1 z = d_1,$$

$$a_2 x + b_2 y + c_2 z = d_2,$$

$$a_3 x + b_3 y + c_3 z = d_3,$$

если

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0,$$

решается при помощи определителей по формулам:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix};$$

$$y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix};$$

$$z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}.$$

В дальнейшем предполагается, что все три неизвестные действительно входят в систему, т. е. хотя бы один из коэффициентов при каждом из них отличен от нуля.

В случае $\Delta = 0$ приведённые формулы теряют смысл. Если при $\Delta = 0$ среди определителей $\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z$ есть по крайней мере один, не равный нулю (тогда и остальные отличны от нуля), то система несовместная (не имеет решения); если же одновременно с $\Delta = 0$ все три определителя $\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z$ равны нулю, то система неопределённая (имеет бесчисленное множество решений).

В последнем случае по крайней мере одно из уравнений системы является следствием оставшихся двух и может быть отброшено. Любая тройка значений x, y и z , удовлетворяющая оставшимся двум (или одному) уравнениям, даёт решение системы.

Пример 1.

$$\begin{aligned} x + 2y - z &= 2; \\ 5x - 4y + z &= 0; \\ 2x + y - 3z &= -5. \end{aligned}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 5 & -4 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 32 \quad (\Delta \neq 0, \text{ система совместна и имеет единственное решение}).$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 0 & -4 & 1 \\ -5 & 1 & -3 \end{vmatrix}}{32} = 1; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 5 & 2 & -1 \\ 2 & -5 & -3 \end{vmatrix}}{32} = -2;$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 5 & -4 & 0 \\ 2 & 1 & -5 \end{vmatrix}}{32} = 3.$$

Пример 2.

$$\begin{aligned} x - y + 2z &= 2; & (\Delta = \Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0, \text{ система} \\ 2x - y - 3z &= 3; & \text{неопределённая}). \\ 4x - 3y + z &= 7 \end{aligned}$$

Умножив обе части первого уравнения на 2 и сложив их с соответствующими частями второго, получают третье уравнение, которое, таким образом, является следствием первых двух и может быть отброшено.

Система двух однородных линейных уравнений с тремя неизвестными

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= 0, \\ a_2x + b_2y + c_2z &= 0 \end{aligned}$$

имеет бесчисленное множество решений, которые определяются по формулам:

$$x = \begin{vmatrix} b_1 c_1 \\ b_2 c_2 \end{vmatrix} t; \quad y = \begin{vmatrix} c_1 a_1 \\ c_2 a_2 \end{vmatrix} t; \quad z = \begin{vmatrix} a_1 b_1 \\ a_2 b_2 \end{vmatrix} t,$$

где t — произвольная величина (предполагается, что не все определители, входящие в формулу, равны нулю).

Пример. Решив систему уравнений:

$$\begin{aligned} x + y - z &= 0, \\ 3x - 3y + z &= 0, \end{aligned}$$

получим:

$$x = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} t = -2t; \quad y = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} t = -4t;$$

$$z = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} t = -6t,$$

где t произвольно.

Положив $t = -\frac{1}{2}$, получим решение:

$$x = 1, \quad y = 2, \quad z = 3;$$

положив $t = 1$, получим другое решение:

$$x = -2, \quad y = -4, \quad z = -6 \text{ и т. д.}$$

Система трёх однородных линейных уравнений с тремя неизвестными

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= 0; \\ a_2x + b_2y + c_2z &= 0; \\ a_3x + b_3y + c_3z &= 0 \end{aligned}$$

либо имеет единственное решение (нулевое, при $\Delta \neq 0$), либо неопределённая (при $\Delta = 0$). В последнем случае одно или два уравнения могут быть отброшены как следствия остальных. Если только одно уравнение отбрасывается ($\Delta = 0$, но по крайней мере один из его миноров не равен нулю), то задача сводится к решению системы двух независимых однородных уравнений с тремя неизвестными (см. выше). Если же два уравнения являются следствием третьего ($\Delta = 0$ и все его миноры также равны нулю), то любая тройка значений, удовлетворяющих этому третьему оставшемуся уравнению, даёт решение системы.

Система n линейных уравнений с n неизвестными

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= p_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= p_2, \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n &= p_n \end{aligned}$$

является совместной, если определитель системы (Δ) не равен нулю:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0.$$

В этом случае решение системы имеет вид:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}; \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}; \quad \dots; \quad x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta},$$

где

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} p_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ p_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & p_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & p_2 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & p_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & p_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & p_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & p_n \end{vmatrix}.$$

НЕРАВЕНСТВА

Два алгебраических выражения, соединённые знаком $>$ (больше) или $<$ (меньше), образуют неравенство. Решить неравенство $F(x) > f(x)$ или $F(x) < f(x)$, где $F(x)$ и $f(x)$ — выражения, содержащие неизвестное x , значит определить, при каких значениях x неравенство имеет место.

Два неравенства называются равносильными, если они справедливы при одних и тех же значениях неизвестного x .

Прибавление или вычитание из обеих частей неравенства одного и того же числа

или выражения, а следовательно, и перенос любого выражения из одной части неравенства в другую с изменением знака, приводят к неравенству, равносильному исходному.

При умножении или делении обеих частей неравенства на одно и то же положительное число получается неравенство, равносильное прежнему; при умножении и делении обеих частей неравенства на одно и то же отрицательное число следует, для получения неравенства, равносильного первоначальному, изменить смысл неравенства на обратный ($>$ на $<$ или $<$ на $>$).

Неравенства 1-й степени решаются при помощи указанных выше преобразований.

Пример,

$$2x + 3 > 5x + 18; -3x > 15 \text{ и } x < -5.$$

Неравенства 2-й степени (квадратные) могут быть приведены к одному из видов:

$$x^2 + px + q > 0$$

или

$$x^2 + px + q < 0.$$

а) $x^2 + px + q > 0$.

Если корни x_1 и x_2 многочлена $x^2 + px + q$ мнимые (т. е. $p^2 - 4q < 0$), то неравенство имеет место при всех значениях x ($-\infty < x < \infty$).

Если корни x_1 и x_2 действительные и $x_1 = x_2$ (т. е. $p^2 - 4q = 0$), то неравенство справедливо при всех значениях x , кроме $x = x_1 = x_2$.

Если корни x_1 и x_2 действительны и различны (т. е. $p^2 - 4q > 0$), причём $x_1 < x_2$, то неравенство имеет место при $x < x_1$ и при $x > x_2$.

б) $x^2 + px + q < 0$.

Если корни x_1 и x_2 мнимые ($p^2 - 4q < 0$), то неравенство противоречиво.

Если $x_1 = x_2$ ($p^2 - 4q = 0$), то неравенство тоже противоречиво.

Если x_1 и x_2 действительны и различны ($p^2 - 4q > 0$) и $x_1 < x_2$, то неравенство имеет место при $x_1 < x < x_2$.

Пример 1. $x^2 - 5x + 6 > 0$; корни трёхчлена $x_1 = 2$, $x_2 = 3$ (действительные) и, следовательно, $x < 2$ или $x > 3$.

Пример 2. $x^2 - x + 2 < 0$; $p^2 - 4q = -7 < 0$ (корни мнимые) и неравенство противоречиво.

ЛОГАРИФМЫ

Логарифмом числа N при основании a (обозначение: $\log_a N$) называется показатель степени x , в которую надо возвести основание a , чтобы получить число N , т. е. если $a^x = N$, то $x = \log_a N$.

При любом положительном основании, кроме единицы, всякое положительное число имеет свой логарифм.

При основании $a = 10$ логарифмы называются десятичными и обозначаются символом \lg . При основании $a = e = 2,71828\dots$ (стр. 129) логарифмы называются натуральными и обозначаются символом \ln .

Соотношения между десятичными и натуральными логарифмами: $\ln N = \ln 10 \cdot \lg N$ и $\lg N = \lg e \ln N$.

Числа $M = \lg e = \frac{1}{\ln 10} \approx 0,43429$ и $\frac{1}{M} = \ln 10 \approx 2,30259$ называются модулями

перехода от десятичных логарифмов к натуральным и обратно.

Вообще для перехода от системы логарифмов с основанием a к системе с основанием b можно пользоваться формулой

$$\log_b N = M \log_a N,$$

где $M = \log_b a = \frac{1}{\log_a b}$ — модуль перехода.

Нахождение логарифма данного числа называется логарифмированием; нахождение числа по его логарифму — потенцирование.

ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ЛОГАРИФМОВ

1) Логарифмы отрицательных чисел при положительном основании мнимы.

2) Логарифм нуля — бесконечен:

$$\log_a 0 = -\infty \text{ при } a > 1,$$

$$\log_a 0 = +\infty \text{ при } a < 1.$$

3) Логарифмы положительных чисел, меньших единицы, при основании, большем единицы, отрицательны.

4) Логарифм единицы при любом основании ($a \neq 1$) равен нулю:

$$\log_a 1 = 0.$$

5) Логарифмы чисел, больших единицы, при основании $a > 1$ положительны.

6) Логарифм основания равен единице:

$$\log_a a = 1; \lg 10 = 1; \ln e = 1.$$

7) С увеличением чисел их логарифмы при основании $a > 1$ возрастают и $\log_a x \rightarrow \infty$, когда $x \rightarrow \infty$.

ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ О ЛОГАРИФМАХ

$$\log_a (N_1 N_2) = \log_a N_1 + \log_a N_2;$$

$$\log_a \left(\frac{N_1}{N_2} \right) = \log_a N_1 - \log_a N_2;$$

$$\log_a (N^n) = n \log_a N;$$

$$\log_a \left(\sqrt[n]{N} \right) = \frac{1}{n} \log_a N.$$

ДЕСЯТИЧНЫЕ ЛОГАРИФМЫ

Десятичные логарифмы записываются в виде десятичной дроби с точностью до определённого десятичного знака; её целая часть называется характеристикой логарифма, а дробная — мантиссой; например, $\lg 285 = 2,454845$, здесь 2 — характеристика, а 454845 — мантисса. Если число больше единицы, то характеристика положительна и на единицу меньше числа его цифр, стоящих перед запятой; если число меньше единицы, то характеристика отрицательна и по абсолютной величине равна числу нулей слева, включая и нуль целых. Мантисса отыскивается по таблицам логарифмов, причём на положение запятой и на нули слева и справа не обращают внимания, так как числа, получающиеся из данного путём умножения или деления на 10 имеют одинаковые мантиссы. Мантисса всегда берётся положительной, поэтому если логарифм отрицательный, то знак минус ставится над характеристикой ($\bar{3},820714 = -3 + 0,820714 = -2,179286$).

ВЫЧИСЛЕНИЯ ПРИ ПОМОЩИ ЛОГАРИФМОВ

С помощью логарифмов удобно находить численные значения одночленных выражений.

Для этого следует прологарифмировать (пользуясь свойствами логарифмов) подлежащее вычислению выражение и найти при помощи таблиц логарифмов логарифм искомой величины. Далее, пользуясь таблицами логарифмов, находят искомую величину по её уже известному логарифму.

Если значение вычисляемого выражения отрицательно, то следует указанным способом определять его абсолютную величину и в результате изменить знак.

Пример.

$$N = \frac{11,08 \cdot 0,02154}{\sqrt{3,425}}.$$

Имеем

$$\lg N = 3 \lg 11,08 + \lg 0,02154 - \frac{1}{2} \lg 3,425.$$

По таблицам десятичных логарифмов находим:

$$\lg 11,08 = 1,044540;$$

$$\lg 0,02154 = \bar{2},333246;$$

$$\lg 3,425 = 0,534661$$

$$\lg N = 1,199536.$$

По мантиссе этого логарифма с помощью таблиц находим число N (запятую ставим после второй цифры, так как характеристика равна единице):

$$N = 15,83.$$

ГЕОМЕТРИЯ

ПЛАНИМЕТРИЯ

ЛИНИИ И ОТРЕЗКИ

Часть прямой линии, ограниченная с обеих сторон, называется отрезком.

Часть прямой, ограниченная с одной стороны, называется лучом или полупрямой.

Последовательность отрезков, расположенных так, что конец первого служит началом второго, конец второго — началом третьего и т. д. называется ломаной линией; отрезки, образующие ломаную, называются её сторонами, а общие точки сторон — вершинами.

Ломаная линия называется выпуклой, если она вся расположена по одну сторону от каждого из составляющих её отрезков, продолженного неограниченно в обе стороны.

Если начало первого и конец последнего отрезков, составляющих ломаную, совпадают, ломаная называется замкнутой.

УГЛЫ

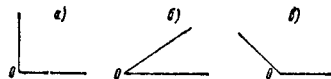
Углом называется фигура (фиг. 3), образованная двумя полупрямыми (лучами) OA и OB , исходящими из одной точки O .

Лучи OA и OB называются сторонами угла, точка O — его вершиной.

Два угла называются равными, если они могут быть совмещены при помощи наложения. Вообще, две геометрические фигуры называются равными, если они могут быть совмещены при наложении одна на другую.

В геометрии обычно употребляется градусная система измерения углов, в которой за единицу измерения, называемую градусом, принимается поворот луча на $1/360$ часть одного полного оборота. Градус подразделяется на 60 минут, а минута — на 60 секунд. Обозначение: $37^\circ 14' 27''$ означает 37 градусов 14 минут 27 секунд. Полный оборот, таким образом, составляет 360° ; $1/4$ его часть, равная 90° , называется прямым

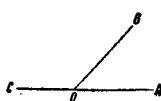
углом (фиг. 4, а) и обозначается буквой d . Угол, меньший 90° , называется острым (фиг. 4, б), а больший 90° — тупым (фиг. 4, в). Прямые, образующие прямой угол, называются перпендикулярными одна другой.



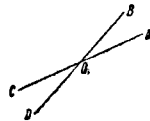
Фиг. 4

Смежными углами (фиг. 5) называется пара углов AOB и BOC , у которых одна сторона OB общая, а две другие OA и OC составляют продолжение одна другой. Сумма двух смежных углов составляет 180° или $2d$.

Вертикальными углами называется пара углов, у которых общая вершина, а стороны одного составляют продолжение сторон другого. На фиг. 6 изображены две пары вертикальных углов ($\angle AOB$ и $\angle COD$, а



Фиг. 5



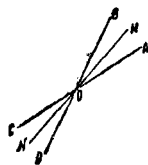
Фиг. 6

также $\angle BOC$ и $\angle DOA$). Вертикальные углы равны между собой.

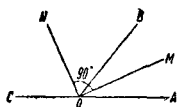
Биссектрисой угла называется прямая, делящая угол пополам. Биссектрисы OM и ON вертикальных углов AOB и COD составляют продолжение одна другой (фиг. 7а). У смежных углов биссектрисы OM и ON взаимно перпендикулярны (фиг. 7б).

Две прямые (фиг. 8) называются параллельными, если они лежат в одной плоскости и не пересекаются. Расстояние между параллельными прямыми определяется длиной отрезка перпендикуляра MN к прямым, заключённого между ними. Этот отрезок имеет постоянную длину. При пересече-

нии двух параллельных прямых секущей PQ образуется восемь углов (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8):

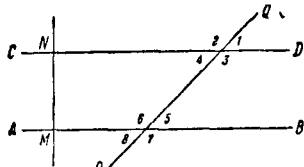


Фиг. 7а

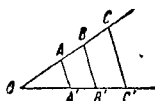


Фиг. 7б

- 1) соответственные углы (1 и 5; 2 и 6; 3 и 7; 4 и 8) равны между собой ($\angle 1 = \angle 5$; $\angle 2 = \angle 6$ и т. д.);
- 2) внутренние накрест лежащие углы (4 и 5; 3 и 6) также равны;
- 3) внешние накрест лежащие углы (1 и 8; 2 и 7) также равны;
- 4) внутренние односторонние углы (3 и 5; 4 и 6) в сумме составляют 180° ($\angle 3 + \angle 5 = 180^\circ$; $\angle 4 + \angle 6 = 180^\circ$);



Фиг. 8



Фиг. 9

- 5) внешние односторонние углы (1 и 7; 2 и 8) в сумме составляют 180° ($\angle 1 + \angle 7 = 180^\circ$; $\angle 2 + \angle 8 = 180^\circ$).

Углы с соответственно параллельными или перпендикулярными сторонами либо равны друг другу, либо в сумме составляют 180° .

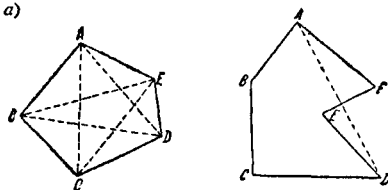
Параллельные прямые отсекают на сторонах угла (Фиг. 9) пропорциональные части:

$$\frac{OA}{OA'} = \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'}.$$

МНОГОУГОЛЬНИКИ

Многоугольником называется плоская фигура, ограниченная замкнутой ломаной линией. Например, фигура $ABCDE$ есть пятиугольник (Фиг. 10а). Точки A, B, C, D и E называются вершинами многоугольника. Отрезки AC, AD, BD, BE и

а)



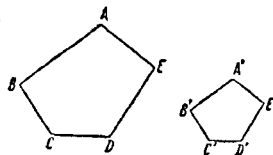
Фиг. 10

CE называются диагоналями многоугольника. Сумма длин сторон $AB + BC + CD + DE + EA$ называется периметром многоугольника.

Многоугольник выпуклый, если все его диагонали лежат внутри него (Фиг. 10а), в противном случае многоугольник невыпуклый (Фиг. 10б).

Во всяком выпуклом многоугольнике с числом сторон, равным n , сумма внутренних углов равна $180^\circ \cdot (n-2)$, а сумма внешних углов (стр. 110, Фиг. 15) равна 360° .

Многоугольники $ABCDE$ и $A'B'C'D'E'$ (Фиг. 11) подобны, если их углы соответ-



Фиг. 11

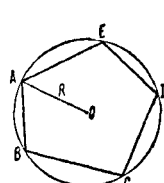
ственно равны, а сходственные стороны пропорциональны, т. е. если выполнены условия:

$$\angle A = \angle A'; \quad \angle B = \angle B'; \quad \angle C = \angle C'; \quad \angle D = \angle D'; \quad \angle E = \angle E'$$

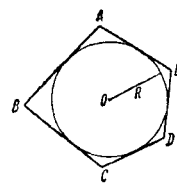
$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{DE}{D'E'} = \frac{EA}{E'A'}.$$

Площади подобных многоугольников относятся как квадраты сходственных линейных элементов (сторон, радиусов вписанных или описанных кругов и т. д.).

Вписанным в круг многоугольником называется такой многоугольник, вершины которого лежат на окружности (Фиг. 12);



Фиг. 12



Фиг. 13

окружность, проходящая через вершины многоугольника, называется описанной около многоугольника.

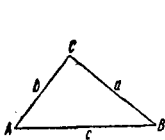
Описанным около круга многоугольником называется такой многоугольник, стороны которого касаются окружности (Фиг. 13); окружность, касающаяся сторон многоугольника, называется вписанной в многоугольник.

ТРЕУГОЛЬНИКИ

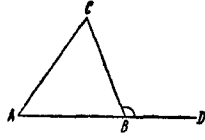
Треугольником называется многоугольник с тремя сторонами (Фиг. 14).

Различают треугольники: остроугольные (если все три угла острые), прямоугольные (один из углов прямой) и тупоугольные (один из углов тупой). В прямоугольном треугольнике стороны, составляющие прямой угол, называются катетами, а сторона, лежащая против прямого угла, называется гипотенузой. Кроме того, различают треугольники равносторонние (если все три стороны равны), равнобедренные (две

стороны равны) и разносторонние (все три стороны не равны между собой). Во всяком треугольнике против большей стороны лежит больший угол; против равных сторон лежат равные углы и обратно, поэтому равнобедренный треугольник одновременно является и равноугольным. Каждая из сторон треугольника меньше суммы и больше разности двух других сторон ($b - c < a < b + c$). Сумма углов всякого треугольника равна 180° ; в равнобедренном треугольнике каждый угол равен 60° .



Фиг. 14



Фиг. 15

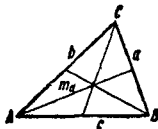
Угол, образованный одной из сторон треугольника с продолжением другой стороны, называется внешним (фиг. 15); он равен сумме двух внутренних углов с ним не смежных ($\angle CBD = \angle BAC + \angle ACB$).

Медианой треугольника называется отрезок, соединяющий вершину с серединой противоположной стороны треугольника (фиг. 16). Медианы треугольника пересекаются в одной точке (центр тяжести треугольника) и делятся этой точкой в отношении 2:1, считая от вершины угла.

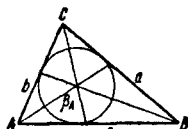
Длина медианы, проведённой на сторону a ,

$$m_a = \frac{1}{2} \sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2}.$$

Биссектрисой треугольника называется отрезок биссектрисы угла треугольника от вершины до пересечения с противоположной стороной (фиг. 17). Биссектрисы



Фиг. 16



Фиг. 17

треугольника пересекаются в одной точке, являющейся центром вписанной окружности. Биссектриса делит противоположную сторону на части, пропорциональные двум другим сторонам.

Длина биссектрисы угла A

$$b_A = \frac{\sqrt{bc(b+c)^2 - a^2}}{b+c}.$$

Высотой треугольника называется отрезок перпендикуляра, опущенного из вершины на противоположную сторону (основание) треугольника (фиг. 18). Высоты треугольника пересекаются в одной точке, называемой ортоцентром.

Длина высоты, проведённой из вершины A

$$h_a = \frac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{a},$$

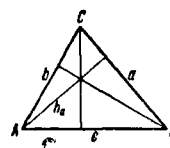
где p — полупериметр:

$$p = \frac{a+b+c}{2}.$$

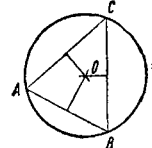
Перпендикуляры к сторонам треугольника, проведённые через их середины (фиг. 19), пересекаются в одной точке O , служащей центром описанного круга.

В равнобедренном треугольнике медиана, биссектриса и высота, опущенные на основание, а также перпендикуляр, проведённый через середину основания, совпадают друг с другом; в равнобедренном треугольнике это имеет место для всех трёх сторон. Во всех остальных случаях ни одна из этих линий не совпадает с другой.

В равнобедренном треугольнике точки пересечения медиан (центр тяжести), биссектрис (центр вписанного круга) и высот (ортоцентр), а также центр описанного круга совпадают между собой. Во всех остальных случаях ни одна из этих точек не совпадает с другой.



Фиг. 18



Фиг. 19

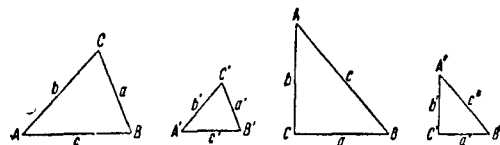
Два треугольника равны, если выполняется одно из следующих условий (признаки равенства):

1. Три стороны одного треугольника соответственно равны трём сторонам второго треугольника.

2. Две стороны и угол, заключённый между ними, одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу между ними второго треугольника.

3. Одна сторона и два прилежащих к ней угла одного треугольника соответственно равны стороне и двум прилежащим к ним углам второго треугольника.

Два треугольника подобны (фиг. 20), т. е. соответственные углы у них равны и сходственные стороны пропорциональны, при выполнении одного из следующих условий (признаки подобия):



Фиг. 20

Фиг. 21

1. Три стороны одного треугольника пропорциональны трём сторонам другого:

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}.$$

2. Два угла одного треугольника равны двум углам другого, например:

$$\angle A = \angle A' \text{ и } \angle B = \angle B'.$$

3. Две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого тре-

угольника, а заключённые между ними углы равны, например:

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \text{ и } \angle C = \angle C'.$$

Площади подобных треугольников относятся, как квадраты сходственных линейных элементов (сторон, высот и т. д.).

Прямоугольные треугольники подобны (фиг. 21), если гипотенуза и катет одного треугольника пропорциональны гипотенузе и катету другого, например:

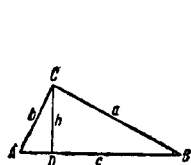
$$\frac{c}{c'} = \frac{a}{a'}.$$

Ниже приводятся формулы для вычисления элементов треугольника.

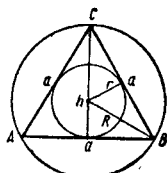
Прямоугольный треугольник (фиг. 22): $\angle C = 90^\circ$; c — гипотенуза; $\angle A + \angle B = 90^\circ$; a и b — катеты, лежащие против углов соответствующих наименований; точка D — основание перпендикуляра, опущенного из вершины прямого угла C на гипотенузу c ; S — площадь треугольника.

- 1) $a^2 + b^2 = c^2$ (теорема Пифагора);
- 2) $\frac{AD}{DC} = \frac{DC}{DB}$;
- 3) $\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{AD}$; $\frac{AB}{CB} = \frac{CB}{DB}$;
- 4) $S = \frac{ab}{2}$.

Равносторонний треугольник (фиг. 23): a — сторона; h — высота; R — ра-



Фиг. 22



Фиг. 23

диус описанной окружности; r — радиус вписанной окружности; S — площадь.

- 1) $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$;
- 2) $a = R\sqrt{3} = 2r\sqrt{3}$;
- 3) $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3R^2\sqrt{3}}{4} = 3r^2\sqrt{3}$.

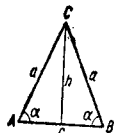
Равнобедренный треугольник (фиг. 24): $\angle A = \angle B = \alpha$; $\angle C = 180^\circ - 2\alpha$; $AC = BC = a$; h — высота; c — основание; S — площадь.

- 1) $h = \frac{1}{2}\sqrt{4a^2 - c^2}$;
- 2) $S = \frac{ch}{2} = \frac{c}{4}\sqrt{4a^2 - c^2}$.

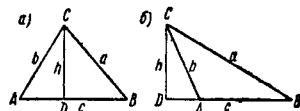
Косоугольный треугольник (общий случай): R — радиус описанной окруж-

ности; r — вписанной; $a + b + c = 2p$; S — площадь.

- 1) $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$;
- 2) если A — острый угол, то $a^2 = b^2 + c^2 - 2c \cdot AD$ (фиг. 25а),
если A — тупой угол, то $a^2 = b^2 + c^2 + 2c \cdot AD$ (фиг. 25б);



Фиг. 24



Фиг. 25

- 3) $S = \frac{ch}{2} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{abc}{4R} = rp$;
- $r = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$;
- $R = \frac{abc}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$.

ЧЕТЫРЁХУГОЛЬНИКИ

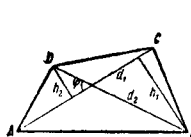
Четырёхугольником называется многоугольник с четырьмя сторонами (фиг. 26). Сумма его углов равна 360° . Площадь его

$$S = \frac{1}{2}(h_1 + h_2)d_1,$$

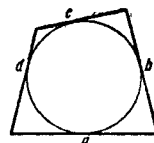
где d_1 — одна из диагоналей, а h_1 и h_2 — длины перпендикуляров, опущенных на эту диагональ из двух не лежащих на ней вершин четырёхугольника.

В четырёхугольник можно вписать окружность (фиг. 27) только тогда, когда суммы длин его противоположных сторон равны

$$a + c = b + d.$$



Фиг. 26



Фиг. 27

Около четырёхугольника можно описать окружность (фиг. 28), если сумма его противоположных углов равна 180° :

$$\angle A + \angle C = \angle B + \angle D = 180^\circ.$$

Для вписанного выпуклого четырёхугольника имеет место соотношение между его сторонами и диагоналями (теорема Птолемея):

$$ac + bd = d_1d_2.$$

Площадь вписанного четырёхугольника

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)},$$

где

$$p = \frac{a + b + c + d}{2}.$$

Различают следующие частные виды четырёхугольников:

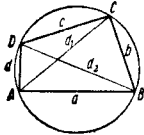
а) параллелограмм — четырёхугольник с попарно параллельными (и равными) противоположными сторонами;

б) ромб — параллелограмм, у которого все стороны равны;

в) прямоугольник — параллелограмм, у которого все углы прямые;

г) квадрат — ромб, у которого все углы прямые (прямоугольник, у которого все стороны равны);

д) трапеция — четырёхугольник с двумя параллельными противоположными сторонами, называемыми основаниями трапеции. Непараллельные стороны трапеции называются её боковыми сторонами, расстояние между основаниями — высотой, а отрезок прямой, соединяющей середины боковых сторон, — средней линией трапеции (средняя линия трапеции параллельна её основаниям).



Фиг. 28



Фиг. 29

Ниже приводится сводка основных свойств и формул для вычисления элементов квадрата, ромба, параллелограмма, прямоугольника и трапеции.

Обозначения: R — радиус описанной окружности; r — вписанной; h — высота; d — диагональ; S — площадь.

Квадрат (фиг. 29).

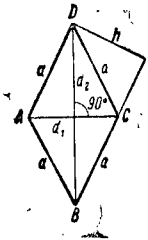
$$d = a\sqrt{2}; \quad R = \frac{a\sqrt{2}}{2}; \quad r = \frac{a}{2};$$

$a = R\sqrt{2}; \quad S = a^2 = \frac{d^2}{2} = 2R^2 = 4r^2$, где a — сторона квадрата.

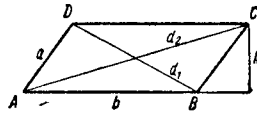
Ромб (фиг. 30). Диагонали ромба взаимно перпендикулярны и делят углы ромба пополам;

$$d_1^2 + d_2^2 = 4a^2; \quad S = ah = \frac{d_1 d_2}{2},$$

где a — сторона; d_1, d_2 — диагонали.



Фиг. 30



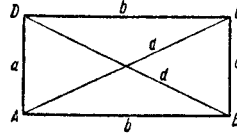
Фиг. 31

Параллелограмм (фиг. 31). Диагонали параллелограмма делятся в точке пересечения пополам;

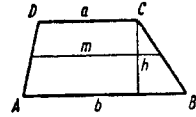
$$d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2); \quad S = bh,$$

где a и b — стороны; d_1, d_2 — диагонали; h — высота, опущенная на основание b .

Прямоугольник (фиг. 32). Диагонали прямоугольника равны между собой; $d^2 = a^2 + b^2, \quad S = ab$.



Фиг. 32



Фиг. 33

Обозначения те же, что и для параллелограмма.

Трапеция (фиг. 33).

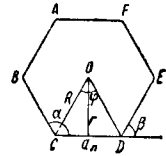
$$m = \frac{a+b}{2}; \quad S = \frac{a+b}{2} h = mh,$$

где a и b — параллельные стороны; h — высота; m — средняя линия.

ПРАВИЛЬНЫЕ МНОГОУГОЛЬНИКИ

Многоугольник называется правильным, если все его стороны и углы равны.

Ниже приводятся формулы для вычисления элементов правильного многоугольника, причём приняты обозначения (фиг. 34): a_n — сторона; R — радиус описанной окружности; r — вписанной (апофема); n — число сторон; φ — центральный угол, опирающийся на сторону; α — внутренний угол; β — внешний угол многоугольника и S — площадь.



Фиг. 34

$$1) \quad \varphi = \frac{360^\circ}{n};$$

$$2) \quad \alpha = \frac{180^\circ}{n} (n-2) = 180^\circ - \varphi;$$

$$3) \quad \beta = \frac{360^\circ}{n};$$

$$4) \quad a_n = 2 \sqrt{R^2 - r^2};$$

В частности,

$$a_3 = R\sqrt{3}, \quad a_4 = R\sqrt{2}, \quad a_6 = R,$$

$$a_{10} = \frac{R}{2} (\sqrt{5} - 1);$$

$$5) \quad a_{2n}^2 = 2R^2 - R\sqrt{4R^2 - a_n^2}$$

или

$$\frac{a_n^2}{2} = 2 + \sqrt{4 - \frac{a_n^2}{R^2}}$$

(формула удвоения числа сторон правильного вписанного многоугольника);

$$6) \quad S = \frac{1}{2} na_n r.$$

Данные об элементах отдельных правильных многоугольников приведены в табл. 3.

Элементы правильных многоугольников

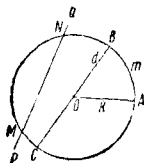
Таблица 3

n	$\frac{S}{a_n^2}$	$\frac{S}{R^2}$	$\frac{S}{r^2}$	$\frac{R}{a_n}$	$\frac{R}{r}$	$\frac{a_n}{R}$	$\frac{a_n}{r}$	$\frac{r}{R}$	$\frac{r}{a_n}$
3	0,4330	1,2990	5,1962	0,5774	2,0000	1,7321	3,4641	0,5000	0,2887
4	1,0000	2,0000	4,0000	0,7071	1,4142	1,4142	2,0000	0,7071	0,5000
5	1,7205	2,3776	3,6327	0,8507	1,2361	1,1756	1,4531	0,8090	0,6882
6	2,5981	2,5981	3,4641	1,0000	1,1547	1,0000	1,1547	0,8660	0,8660
7	3,6339	2,7364	3,3710	1,1524	1,1099	0,8678	0,9631	0,9010	1,0383
8	4,8284	2,8284	3,3137	1,3066	1,0824	0,7654	0,8284	0,9239	1,2071
9	6,1818	2,8925	3,2757	1,4619	1,0642	0,6840	0,7279	0,9397	1,3737
10	7,6942	2,9389	3,2492	1,6180	1,0515	0,6180	0,6498	0,9511	1,5388
12	11,196	3,0000	3,2154	1,8319	1,0353	0,5176	0,5359	0,9659	1,8660
15	17,642	3,0505	3,1883	2,4049	1,0223	0,4158	0,4251	0,9781	2,3523
16	20,109	3,0615	3,1826	2,5629	1,0196	0,3902	0,3978	0,9808	2,5137
20	31,569	3,0902	3,1677	3,1962	1,0125	0,3129	0,3168	0,9877	3,1569
24	45,575	3,1058	3,1597	3,8306	1,0086	0,2611	0,2633	0,9914	3,7979
32	81,225	3,1214	3,1517	5,1011	1,0048	0,1960	0,1970	0,9952	5,0768
48	183,08	3,1326	3,1461	7,6449	1,0021	0,1308	0,1311	0,9979	7,6285
64	325,69	3,1365	3,1441	10,190	1,0012	0,0981	0,0983	0,9988	10,178

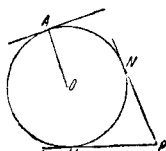
ОКРУЖНОСТЬ

Окружностью (фиг. 35) называется геометрическое место точек плоскости, равноудалённых от некоторой точки, называемой центром.

Отрезок, соединяющий центр с любой точкой окружности, называется радиусом (обозначается обычно буквой R или r). Часть



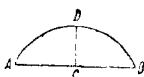
Фиг. 35



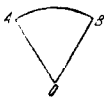
Фиг. 36

окружности (например, AmB) называется дугой. Прямая PQ , проходящая через две точки M и N окружности, называется секущей, а отрезок её MN , лежащий внутри окружности, называется хордой. Хорда, проходящая через центр, называется диаметром (обозначается буквой D или d). Диаметр равен двум радиусам ($D = 2R$).

Круг есть часть плоскости, ограниченная окружностью. Прямая, имеющая с окружностью одну общую точку, называется



Фиг. 37



Фиг. 38

касательной. Касательная перпендикулярна к радиусу OA в конце его A (фиг. 36), лежащем на окружности (точка касания). Из точки P вне круга можно провести две касательные к окружности, длины которых равны между собой ($PM = PN$).

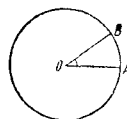
Сегментом называется часть круга, ограниченная дугой ADB и стягивающей её хордой AB (фиг. 37). Перпендикуляр CD , восстановленный из середины хорды AB до пересечения с дугой, называется стрелкой дуги AB или высотой сегмента.

Сектором называется часть круга, ограниченная дугой AB и двумя радиусами OA и OB , проведёнными к концам дуги (фиг. 38).

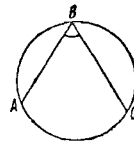
Длина дуги, описываемой концом радиуса, пропорциональна величине соответствующего центрального угла, поэтому дуги одной и той же окружности можно измерять, как и углы, градусами, принимая за 1° $\frac{1}{360}$ часть окружности, т. е. дугу, на которую опирается центральный угол в 1° . Вся окружность имеет 360° . Длина дуги пропорциональна также длине радиуса.

Углы в круге измеряются следующим образом:

1) центральный угол (фиг. 39) измеряется дугой, на которую он опирается, т. е. содержит столько же градусов (угловых), сколько его дуга (дуговых): $\angle AOB = \widehat{AB}$;



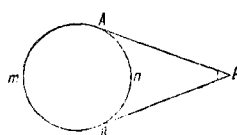
Фиг. 39



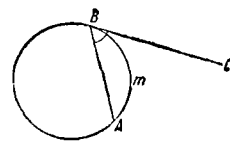
Фиг. 40

2) вписанный угол (фиг. 40):

$$\angle ABC = \frac{1}{2} \widehat{AC};$$



Фиг. 41



Фиг. 42

3) описанный угол (фиг. 41):

$$\angle APB = \frac{1}{2} (\widehat{AmB} - \widehat{AnB});$$

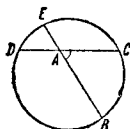
4) угол между хордой и касательной (фиг. 42): $\angle ABC = \frac{1}{2} \widehat{AmB}$;

5) угол между хордами (фиг. 43):

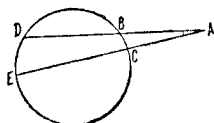
$$\angle BAC = \frac{1}{2} (\widehat{CB} + \widehat{ED});$$

6) угол между секущими (фиг. 44):

$$\angle BAC = \frac{1}{2} (\widehat{DE} - \widehat{BC});$$



Фиг. 43

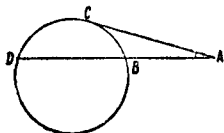


Фиг. 44

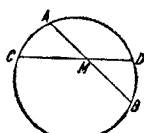
7) угол между касательной и секущей (фиг. 45): $\angle BAC = \frac{1}{2} (\widehat{CD} - \widehat{CB})$.

Если M — точка внутри круга, а AB и CD — проходящие через неё хорды (фиг. 46), то

$$AM \cdot MB = CM \cdot MD.$$



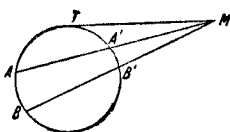
Фиг. 45



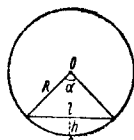
Фиг. 46

Если M — точка вне круга, MA и MB — проходящие через неё секущие, а MT — касательная (фиг. 47), то

$$MA \cdot MA' = MB \cdot MB' = MT^2.$$



Фиг. 47



Фиг. 48

Отношение длины окружности C к её диаметру d есть величина постоянная, равная 3,141592653... Это число иррациональное, оно не может быть выражено конечным числом десятичных знаков; сокращённо оно обозначается греческой буквой π :

$$\frac{C}{d} = \pi,$$

откуда длина окружности

$$C = \pi d \approx 3,1416 d,$$

или

$$C = 2 \pi R \approx 6,2832 R.$$

Длина дуги в 1°

$$s = \frac{\pi d}{360} = \frac{\pi R}{180}.$$

Длина дуги в α° (фиг. 48)

$$s = \frac{\pi d \alpha}{360} = \frac{\pi R \alpha}{180} \approx 0,01745 R \alpha.$$

Длина хорды

$$l = 2 \sqrt{2 h R - h^2}.$$

Высота сегмента (стрелка)

$$h = R - \sqrt{R^2 - \frac{l^2}{4}}.$$

Площадь круга S пропорциональна квадрату его диаметра или радиуса и равна

$$S = \frac{\pi d^2}{4} = \pi R^2 \approx 0,78539 d^2 \approx 3,1416 R^2.$$

Площадь сектора с углом в α°

$$S = \frac{\pi d^2 \alpha}{1440} = \frac{\pi R^2 \alpha}{360} \approx 0,00873 \alpha R^2.$$

Площадь сегмента

$$S = \frac{1}{2} [R (s - l) + lh].$$

СТЕРЕОМЕТРИЯ

ПРЯМЫЕ И ПЛОСКОСТИ

Две прямые называются параллельными, если они не пересекаются и лежат в одной плоскости (непересекающиеся прямые, не лежащие в одной плоскости, называются скрещивающимися).

Две плоскости называются параллельными, если они не пересекаются.

Прямая называется параллельной плоскости, если она не пересекает плоскость.

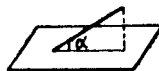
Прямая называется перпендикулярной к плоскости, если она перпендикулярна ко всем пересекающим её прямым, лежащим в данной плоскости.

Угол между двумя прямыми, не лежащими в одной плоскости, измеряется углом между параллельными им прямыми, проведёнными из одной точки.

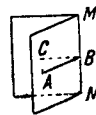
Проекцией (ортогональной) отрезка прямой на плоскость называется отрезок, лежащий в этой плоскости, соединяющий основания перпендикуляров, опущенных из концов данного отрезка на плоскость.

Угол между прямой и плоскостью измеряется углом между прямой и её проекцией на плоскость (фиг. 49).

Двугранный угол — угол между двумя плоскостями — измеряется его линейным углом ABC (фиг. 50), т. е. углом



Фиг. 49



Фиг. 50

между перпендикулярами к ребру MN двугранного угла, составленными в обеих плоскостях (гранях) из одной точки B .

Признаки параллельности и перпендикулярности прямых и плоскостей следующие:

1. Прямая параллельна плоскости, если она параллельна одной из прямых, лежащих в этой плоскости.

2. Две плоскости параллельны между собой, если две пересекающиеся прямые, лежащие в одной плоскости, соответственно

параллельны двум пересекающимся прямым, лежащим в другой плоскости.

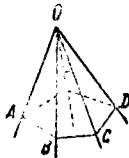
3. Прямая, перпендикулярная к двум прямым, лежащим в плоскости, перпендикулярна к самой плоскости.

4. Прямая, лежащая в плоскости и перпендикулярная к проекции наклонной на эту плоскость, перпендикулярна к самой наклонной и обратно: если прямая, лежащая в плоскости, перпендикулярна к наклонной, то она перпендикулярна и к проекции этой наклонной на плоскость.

Многогранный угол $OABCDE$ (фиг. 51) образуется несколькими плоскостями (границами), проходящими через одну точку. Многогранные углы называются равными, если при наложении они совпадают; многогранные углы равны, если соответственно равны их двугранные и плоские углы. Многогранный угол называется выпуклым, если он расположен по одну сторону от каждой его грани. Сумма плоских углов любого выпуклого многогранного угла меньше 360° .

Трёхгранные углы равны, если они имеют:

а) по одному равному двугранному углу, заключённому между двумя соответственно



Фиг. 51



Фиг. 52

равными и одинаково расположенными плоскими углами;

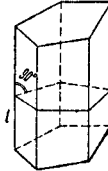
б) по одному равному плоскому углу, заключённому между двумя соответственно

Для всякой призмы:

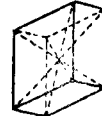
$$V = Fh; F_{\Pi} = F_6 + 2F; F_6 = pl,$$

где l — ребро, p — периметр сечения призмы плоскостью, перпендикулярной к ребру.

Параллелепипедом (фиг. 54) называется призма, у которой основания — параллелограммы. В параллелепипеде все четыре диагонали пересекаются в одной точке и делятся в ней пополам.



Фиг. 53



Фиг. 54

Прямой параллелепипед, основания которого — прямоугольники, называется прямоугольным. В прямоугольном параллелепипеде (фиг. 55) все диагонали равны. Если a , b и c — рёбра прямоугольного параллелепипеда, d — его диагональ, то:

$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2; F_{\Pi} = 2(ab + bc + ca);$$

$$V = abc.$$

$$\text{Куб. } a = b = c; d^2 = 3a^2; F_{\Pi} = 6a^2;$$

$$V = a^3.$$

Пирамида (фиг. 56) — многогранник, в основании которого многоугольник, а боковые грани — треугольники, сходящиеся в одной точке (вершине). Пирамида называется n -угольной, если её основание — n -угольник. Треугольную пирамиду называют также тетраэдром.

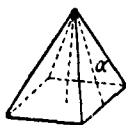
Сечение пирамиды плоскостью, параллельной основанию, есть многоугольник.

где p — периметр основания, a — апофема правильной пирамиды, т. е. высота какой-либо её боковой грани.

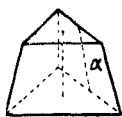
Для усечённой пирамиды (плоскости оснований параллельны между собой, а боковые рёбра при продолжении пересекаются в одной точке, фиг. 58):

$$V = \frac{1}{3} h (F + f + \sqrt{Ff}),$$

где F и f — площади оснований, h — высота.



Фиг. 57



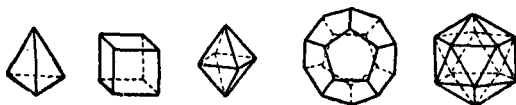
Фиг. 58

Если усечённая пирамида правильная, то

$$F_6 = \frac{P+p}{2} a,$$

где P и p — периметры оснований, a — апофема.

Многогранники, у которых все грани — равные правильные многоугольники и все многогранные углы равны, называются правильными. Всего имеется пять правильных многогранников (фиг. 59).



Фиг. 59

Таблица 4

Элементы правильных многогранников
(a — длина ребра)

Название многогранника	Грани (их число и форма)	Число		Полная поверхность F_p	Объём V
		ребер	вершин		
Тетраэдр	4 треугольника	6	4	$1,7321 a^2$	$0,1179 a^3$
Куб	6 квадратов . . .	12	8	$6 a^2$	a^3
Октаэдр	8 треугольников . . .	12	6	$3,4641 a^2$	$0,4714 a^3$
Додекаэдр	12 пятиугольников . . .	30	20	$20,6457 a^2$	$7,6631 a^3$
Икосаэдр	20 треугольников . . .	30	12	$8,6603 a^2$	$2,1817 a^3$

КРУГЛЫЕ ТЕЛА

Обозначения: V — объём; F_p — полная поверхность; F_6 — боковая поверхность; h — высота.

Цилиндрическая поверхность (фиг. 60) — поверхность, образованная прямой линией (образующей), перемещающейся параллельно самой себе вдоль некоторой кривой (направляющей).

Цилиндр (фиг. 61) — тело, ограниченное цилиндрической поверхностью, направляющая которой — замкнутая кривая, и двумя параллельными плоскостями (основаниями и крышкой).

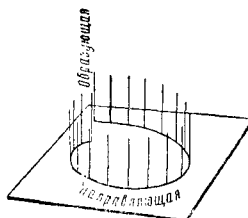
$$F_6 = ph = sl; \quad V = Fh = Ql,$$

где p — периметр основания; F — площадь основания; s — периметр сечения, перпендикулярного к образующей; Q — его площадь; l — длина образующей.

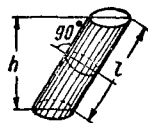
Прямой круговой цилиндр имеет в основании круг, а его образующие перпендикулярны к плоскости основания (фиг. 62):

$$F_6 = 2\pi R h = \pi D h; \quad F_p = 2\pi R (R + h) = \frac{1}{2} \pi D (D + 2h); \quad V = \pi R^2 h = \frac{\pi D^2 h}{4},$$

где R и D — радиус и диаметр основания.

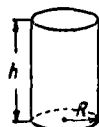


Фиг. 60

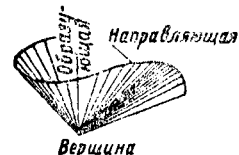


Фиг. 61

Коническая поверхность (фиг. 63) — поверхность, образованная прямой линией (образующей) с неподвижной точкой (вершиной), перемещающейся вдоль кривой линии (направляющей).



Фиг. 62

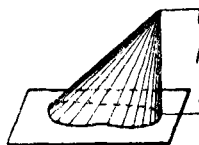


Фиг. 63

Конус (фиг. 64) ограничен конической поверхностью с замкнутой направляющей и плоскостью (плоскость основания).

$$V = \frac{1}{3} Fh,$$

где F — площадь основания.



Фиг. 64



Фиг. 65

Прямой круговой конус (фиг. 65) имеет в основании круг, а его высота проходит через центр основания:

$$F_6 = \pi R l = \frac{1}{2} \pi D l = \pi R \sqrt{R^2 + h^2};$$

$$F_p = \pi R (R + l);$$

$$V = \frac{1}{3} \pi R^2 h = \frac{1}{12} \pi D^2 h \approx 0,2618 D^2 h,$$

где R и D — радиус и диаметр основания, а l — длина образующей.

Усечённый прямой круговой конус (фиг. 66) — тело, ограниченное поверхностью прямого кругового конуса, его основанием и плоскостью, параллельной этому основанию:

$$l = \sqrt{h^2 + (R - r)^2};$$

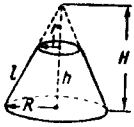
$$F_6 = \pi l (R + r) = \frac{\pi l}{2} (D + d);$$

$$F_n = F_6 + \pi (R^2 + r^2) = F_6 + \frac{\pi}{4} (D^2 + d^2);$$

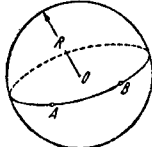
$$V = \frac{\pi h}{3} (R^2 + r^2 + Rr) =$$

$$= \frac{1}{12} \pi h (D^2 + d^2 + Dd).$$

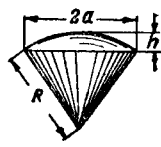
Сфера (поверхность шара). R — радиус шара; $D = 2R$ — диаметр шара (фиг. 67).



Фиг. 66



Фиг. 67



Фиг. 68

Всякое сечение сферы плоскостью есть круг. Большой круг — круг, получающийся от сечения сферы плоскостью, проходящей через её центр. Через всякие две точки A и B сферы (не являющиеся противоположными концами диаметра) всегда можно провести (и при том только один) большой круг.

Поверхность сферы и объём шара:

$$F = 4\pi R^2 = \pi D^2 \approx 12,56637 R^2 \approx 3,14159 D^2;$$

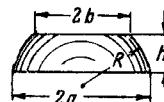
$$V = \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{1}{6} \pi D^3 \approx 4,18879 R^3 \approx 0,5236 D^3.$$

Шаровым сектором (фиг. 68) называется тело, образованное вращением плоского сектора около оси симметрии:

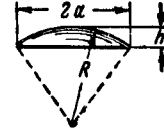
$$a^2 = h(2R - h); F_n = \pi R(2h + a);$$

$$V = \frac{2\pi R^2 h}{3} \approx 2,0944 R^2 h.$$

Шаровым слоем (фиг. 69) называется часть шара, заключённая между двумя параллельными плоскостями; слой ограни-



Фиг. 69



Фиг. 70

чен двумя кругами и частью поверхности шара, которая называется шаровым поясом.

$$R^2 = a^2 + \left(\frac{a^2 - b^2 - h^2}{2h} \right)^2 \quad (a > b);$$

$$F_6 = 2\pi R h; F_n = \pi(2Rh + a^2 + b^2);$$

$$V = \frac{1}{6} \pi h (3a^2 + 3b^2 + h^2).$$

$$\text{Если } a = R, \text{ то } V = \pi h \left(R^2 - \frac{h^2}{3} \right).$$

Шаровым сегментом (фиг. 70) называется часть шара, отсечённая плоскостью:

$$a^2 = h(2R - h); F_6 = 2\pi R h = \pi(a^2 + h^2);$$

$$F_n = \pi(2Rh + a^2) = \pi(h^2 + 2a^2);$$

$$V = \frac{1}{3} \pi h^2 (3R - h) = \frac{1}{6} \pi h (3a^2 + h^2).$$

ТРИГОНОМЕТРИЯ

ПРЯМОЛИНЕЙНАЯ ТРИГОНОМЕТРИЯ

РАДИАННОЕ ИЗМЕРЕНИЕ УГЛОВ

Центральный угол, опирающийся на дугу, длина которой равна радиусу окружности, называется радианом.

Центральный угол, опирающийся на дугу окружности произвольного радиуса, измеряется в радианах отношением длины дуги s к длине радиуса R :

$$\alpha = \frac{s}{R} \text{ (радианов).}$$

Переход от градусной меры угла (стр. 108) к радианной и обратно совершается по формулам:

$$\alpha \text{ (радианов)} = \frac{\pi}{180} \alpha^\circ;$$

$$\alpha^\circ = \frac{180}{\pi} \alpha \text{ (радианов);}$$

в частности:

$$\frac{\pi}{6} \text{ (радианов)} = 30^\circ; \frac{\pi}{4} = 45^\circ; \frac{\pi}{2} = 90^\circ;$$

$$\pi = 180^\circ; 2\pi = 360^\circ \text{ и т. д.}$$

Один радиан равен

$$\frac{180^\circ}{\pi} \approx 57^\circ 17' 45'' \approx 57^\circ, 2958;$$

в одном градусе содержится $\frac{\pi}{180} \approx 0,017453$ радианов.

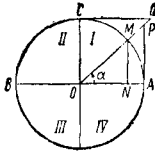
ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Если взять тригонометрический круг (радиус $R = 1$; фиг. 71) и условиться измерять положительный угол α от неподвижного радиуса OA до подвижного радиуса OM в направлении, обратном движению часовой

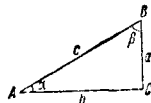
стрелки, то тригонометрические функции угла α определяются длинами следующих отрезков, называемых тригонометрическими линиями:

$$\begin{aligned}\sin \alpha &= NM \text{ (синус),} \\ \cos \alpha &= ON \text{ (косинус),} \\ \operatorname{tg} \alpha &= AP \text{ (тангенс),} \\ \operatorname{ctg} \alpha &= CQ \text{ (котангенс),} \\ \sec \alpha &= OP \text{ (секанс),} \\ \operatorname{cosec} \alpha &= OQ \text{ (косеканс).}\end{aligned}$$

Для острого угла α тригонометрические функции могут быть определены также и из прямоугольного треугольника (фиг. 72):



Фиг. 71



Фиг. 72

$$\sin \alpha = \frac{a}{c}, \quad \cos \alpha = \frac{b}{c}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b},$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{b}{a}, \quad \sec \alpha = \frac{c}{b}, \quad \operatorname{cosec} \alpha = \frac{c}{a}.$$

Знаки тригонометрических функций. В зависимости от того, в какой четверти тригонометрического круга находится подвижной радиус OM (см. фиг. 71), тригонометрическим функциям приписывается положительный или отрицательный знак (табл. 5).

В табл. 6 приведены значения тригонометрических функций некоторых углов, в табл. 7 — пределы изменения тригонометрических функций при изменении угла от 0° до 360° (от 0 до 2π).

Таблица 5

Знаки тригонометрических функций

Угол α	$0^\circ < \alpha < 90^\circ$ (I четверть)	$90^\circ < \alpha < 180^\circ$ (II четверть)	$180^\circ < \alpha < 270^\circ$ (III четверть)	$270^\circ < \alpha < 360^\circ$ (IV четверть)
Функции				
$\sin \alpha$	+	+	-	-
$\cos \alpha$	+	-	-	+
$\operatorname{tg} \alpha$	+	-	+	-
$\operatorname{ctg} \alpha$	+	-	+	-
$\sec \alpha$	+	-	-	+
$\operatorname{cosec} \alpha$	+	+	-	-

Таблица 6

Значения тригонометрических функций некоторых углов

Угол α	0°	30°	45°	60°	90°
Функции					
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
$\cos \alpha$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\operatorname{tg} \alpha$	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞
$\operatorname{ctg} \alpha$	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	0
$\sec \alpha$	1	$\frac{2}{3}\sqrt{3}$	$\sqrt{2}$	2	∞
$\operatorname{cosec} \alpha$	∞	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{3}\sqrt{3}$	1

Таблица 7

Пределы изменения тригонометрических функций

Изменение угла α	От 0° до 90°	От 90° до 180°	От 180° до 270°	От 270° до 360°
Изменение функций				
$\sin \alpha$	От 0 до 1	От 1 до 0	От 0 до -1	От -1 до 0
$\cos \alpha$	» 1 » 0	» 0 » -1	» -1 » 0	» 0 » 1
$\operatorname{tg} \alpha$	» 0 » $+\infty$	» $-\infty$ » 0	» 0 » $+\infty$	» $-\infty$ » 0
$\operatorname{ctg} \alpha$	» $+\infty$ » 0	» 0 » $-\infty$	» $+\infty$ » 0	» 0 » $-\infty$
$\sec \alpha$	» 1 » $+\infty$	» $-\infty$ » -1	» -1 » $-\infty$	» $+\infty$ » 1
$\operatorname{cosec} \alpha$	» $+\infty$ » 1	» 1 » $+\infty$	» $-\infty$ » -1	» -1 » $-\infty$

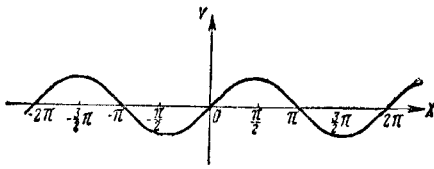
Графики тригонометрических функций даны на фиг. 73—78.

Тригонометрические функции углов, дополняющих до 90° . Угол $\beta = 90^\circ - \alpha$, дополняющий угол α до 90° , называется по отношению к углу α дополнительным углом. Между тригонометрическими функ-

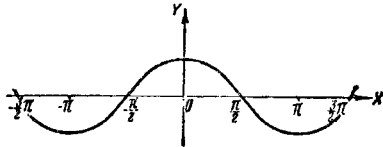
циями угла α и дополнительного угла $90^\circ - \alpha$ имеют место соотношения:

$$\begin{aligned}\sin(90^\circ - \alpha) &= \cos \alpha; & \cos(90^\circ - \alpha) &= \sin \alpha; \\ \operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) &= \operatorname{ctg} \alpha; & \operatorname{ctg}(90^\circ - \alpha) &= \operatorname{tg} \alpha; \\ \sec(90^\circ - \alpha) &= \operatorname{cosec} \alpha; & \operatorname{cosec}(90^\circ - \alpha) &= \sec \alpha\end{aligned}$$

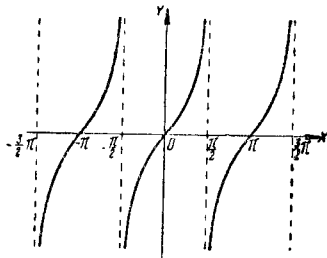
Периодичность тригонометрических функций. Тригонометрические функции являются



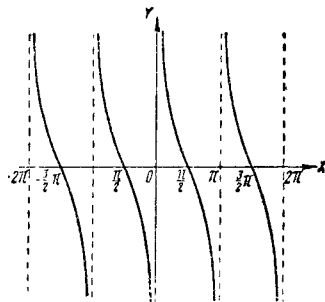
Фиг. 73. График функции $y = \sin x$



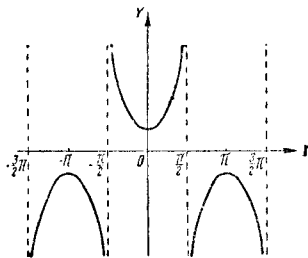
Фиг. 74. График функции $y = \cos x$



Фиг. 75. График функции $y = \operatorname{tg} x$



Фиг. 76. График функции $y = \operatorname{ctg} x$



Фиг. 77. График функции $y = \sec x$

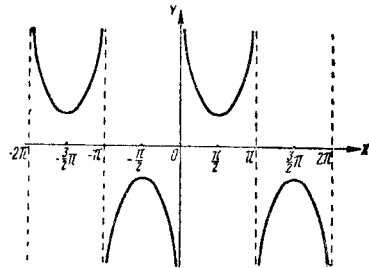
периодическими функциями. Период синуса, косинуса, секанса и косеканса в градусной мере 360° , а в радианной 2π . Период тангенса и котангенса соответственно 180° и π .

Периодичность тригонометрических функций выражается равенствами:

$$\begin{aligned}\sin \alpha &= \sin (\alpha \pm 360^\circ n); \quad \cos \alpha = \cos (\alpha \pm 360^\circ n); \\ \operatorname{tg} \alpha &= \operatorname{tg} (\alpha \pm 180^\circ n); \quad \operatorname{ctg} \alpha = \operatorname{ctg} (\alpha \pm 180^\circ n); \\ \sec \alpha &= \sec (\alpha \pm 360^\circ n); \quad \operatorname{cosec} \alpha = \operatorname{cosec} (\alpha \pm 360^\circ n);\end{aligned}$$

где $n = 0, 1, 2, 3, \dots$,
или (в радианной мере):

$$\begin{aligned}\sin \alpha &= \sin (\alpha \pm 2\pi n); \quad \cos \alpha = \cos (\alpha \pm 2\pi n); \\ \operatorname{tg} \alpha &= \operatorname{tg} (\alpha \pm \pi n); \quad \operatorname{ctg} \alpha = \operatorname{ctg} (\alpha \pm \pi n); \\ \sec \alpha &= \sec (\alpha \pm 2\pi n); \quad \operatorname{cosec} \alpha = \operatorname{cosec} (\alpha \pm 2\pi n).\end{aligned}$$



Фиг. 78. График функции $y = \operatorname{cosec} x$

Соотношения между тригонометрическими функциями положительного и отрицательного углов

$$\begin{aligned}\sin (-\alpha) &= -\sin \alpha; \quad \cos (-\alpha) = \cos \alpha; \\ \operatorname{tg} (-\alpha) &= -\operatorname{tg} \alpha; \quad \operatorname{ctg} (-\alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha; \\ \sec (-\alpha) &= \sec \alpha; \quad \operatorname{cosec} (-\alpha) = -\operatorname{cosec} \alpha.\end{aligned}$$

Приведение тригонометрических функций любого угла к функциям острого угла. Тригонометрические функции любого угла могут быть выражены через функции острого угла; для этого нужно из аргумента (если он больше периода) вычесть целое число периодов и применить данные в табл. 8 формулы приведения.

Пример.

$$\begin{aligned}\cos (-1360^\circ) &= \cos 1360^\circ = \cos (360^\circ \cdot 3 + 280^\circ) = \\ &= \cos 280^\circ = \cos (270^\circ + 10^\circ) = \sin 10^\circ = 0,173648.\end{aligned}$$

ОСНОВНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ

Между тригонометрическими функциями одного и того же угла α имеют место следующие соотношения:

$$\begin{aligned}\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha &= 1; \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}; \\ \operatorname{ctg} \alpha &= \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}; \quad \sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}; \\ \operatorname{cosec} \alpha &= \frac{1}{\sin \alpha}; \quad \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1; \\ 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha &= \frac{1}{\cos^2 \alpha}; \quad 1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}.\end{aligned}$$

При помощи этих соотношений каждая тригонометрическая функция острого угла α может быть выражена через любую другую его функцию по формулам, приведённым в табл. 9.

Таблица 8

Формулы приведения

Угол \ Функция	$90^\circ - \alpha$	$90^\circ + \alpha$	$180^\circ - \alpha$	$180^\circ + \alpha$	$270^\circ - \alpha$	$270^\circ + \alpha$	$360^\circ - \alpha$
sin	$+\cos \alpha$	$+\cos \alpha$	$+\sin \alpha$	$-\sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\sin \alpha$
cos	$+\sin \alpha$	$-\sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\sin \alpha$	$+\sin \alpha$	$+\cos \alpha$
tg	$+\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$+\operatorname{tg} \alpha$	$+\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$
ctg	$+\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$+\operatorname{ctg} \alpha$	$+\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$
sec	$+\operatorname{cosec} \alpha$	$-\operatorname{cosec} \alpha$	$-\sec \alpha$	$-\sec \alpha$	$-\operatorname{cosec} \alpha$	$+\operatorname{cosec} \alpha$	$+\sec \alpha$
cosec	$+\sec \alpha$	$+\sec \alpha$	$+\operatorname{cosec} \alpha$	$-\operatorname{cosec} \alpha$	$-\sec \alpha$	$-\sec \alpha$	$-\operatorname{cosec} \alpha$

Таблица 9

Выражение одних тригонометрических функций через другие

	sin α	cos α	tg α	ctg α	sec α	cosec α
sin $\alpha =$		$\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$	$\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}$	$\frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}}$	$\frac{\sqrt{\sec^2 \alpha - 1}}{\sec \alpha}$	$\frac{1}{\operatorname{cosec} \alpha}$
cos $\alpha =$	$\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$		$\frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}$	$\frac{\operatorname{ctg} \alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}}$	$\frac{1}{\sec \alpha}$	$\frac{\sqrt{\operatorname{cosec}^2 \alpha - 1}}{\operatorname{cosec} \alpha}$
tg $\alpha =$	$\frac{\sin \alpha}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}$	$\frac{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}{\cos \alpha}$		$\frac{1}{\operatorname{ctg} \alpha}$	$\sqrt{\sec^2 \alpha - 1}$	$\frac{1}{\sqrt{\operatorname{cosec}^2 \alpha - 1}}$
ctg $\alpha =$	$\frac{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}{\sin \alpha}$	$\frac{\cos \alpha}{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}$	$\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$		$\frac{1}{\sqrt{\sec^2 \alpha - 1}}$	$\sqrt{\operatorname{cosec}^2 \alpha - 1}$
sec $\alpha =$	$\frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}$	$\frac{1}{\cos \alpha}$	$\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}$	$\frac{\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}}{\operatorname{ctg} \alpha}$		$\frac{\operatorname{cosec} \alpha}{\sqrt{\operatorname{cosec}^2 \alpha - 1}}$
cosec $\alpha =$	$\frac{1}{\sin \alpha}$	$\frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}$	$\frac{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}{\operatorname{tg} \alpha}$	$\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}$	$\frac{\sec \alpha}{\sqrt{\sec^2 \alpha - 1}}$	

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ СУММЫ И РАЗНОСТИ УГЛОВ, КРАТНЫХ И ПОЛОВИННЫХ УГЛОВ

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta \pm \cos \alpha \cdot \sin \beta;$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta \mp \sin \alpha \cdot \sin \beta;$$

$$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta}{1 \mp \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta};$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \beta \mp 1}{\operatorname{ctg} \beta \pm \operatorname{ctg} \alpha};$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha;$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \frac{2 \cos^2 \alpha - 1}{1 - 2 \sin^2 \alpha};$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{2}{\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{tg} \alpha};$$

$$\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha - 1}{2 \operatorname{ctg} \alpha} = \frac{\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{tg} \alpha}{2};$$

$$\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha;$$

$$\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha;$$

$$\operatorname{tg} 3\alpha = \frac{3 \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg}^3 \alpha}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 \alpha};$$

$$\sin 4\alpha = 8 \cos^3 \alpha \cdot \sin \alpha - 4 \cos \alpha \cdot \sin \alpha;$$

$$\cos 4\alpha = 8 \cos^4 \alpha - 8 \cos^2 \alpha + 1;$$

$$\sin n\alpha = n \cos^{n-1} \alpha \cdot \sin \alpha -$$

$$- C_n^3 \cos^{n-3} \alpha \cdot \sin^3 \alpha +$$

$$+ C_n^5 \cdot \cos^{n-5} \alpha \cdot \sin^5 \alpha - \dots;$$

$$\cos n\alpha = \cos^n \alpha - C_n^2 \cos^{n-2} \alpha \sin^2 \alpha +$$

$$+ C_n^4 \cos^{n-4} \alpha \sin^4 \alpha - C_n^6 \cos^{n-6} \alpha \sin^6 \alpha + \dots;$$

где

$$C_m^k = \frac{m(m-1)(m-2) \dots (m-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \dots k};$$

$$\sin(m+1)\alpha = \sin m\alpha \cos \alpha + \sin \alpha \cos m\alpha;$$

$$\cos(m+1)\alpha = \cos m\alpha \cos \alpha - \sin \alpha \sin m\alpha;$$

$$\operatorname{tg}(m+1)\alpha = \frac{\operatorname{tg} m\alpha + \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg} m\alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha};$$

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}};$$

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}};$$

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha};$$

$$\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}} = \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha}.$$

ФОРМУЛЫ ПРОИЗВЕДЕНИЙ И СТЕПЕНЕЙ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

$$\sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)];$$

$$\cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)];$$

$$\sin \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)];$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}; \quad \cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2};$$

$$\sin^3 \alpha = \frac{3 \sin \alpha - \sin 3\alpha}{4};$$

$$\cos^3 \alpha = \frac{\cos 3\alpha + 3 \cos \alpha}{4}.$$

ВЫРАЖЕНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ УГЛА ЧЕРЕЗ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ ПОЛОВИННОГО УГЛА

$$\sin \alpha = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}};$$

$$\cos \alpha = \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}};$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}; \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}.$$

ФОРМУЛЫ СЛОЖЕНИЯ И ВЫЧИТАНИЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2};$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2};$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2};$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2};$$

$$\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos \alpha \cdot \cos \beta};$$

$$\operatorname{ctg} \alpha \pm \operatorname{ctg} \beta = \frac{\sin(\beta \pm \alpha)}{\sin \alpha \cdot \sin \beta};$$

$$1 + \sin \alpha = 2 \cos^2 \left(45^\circ - \frac{\alpha}{2} \right);$$

$$1 - \sin \alpha = 2 \sin^2 \left(45^\circ - \frac{\alpha}{2} \right);$$

$$1 + \cos \alpha = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2};$$

$$1 - \cos \alpha = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2};$$

$$\sin \alpha \pm \cos \alpha = 2 \sin 45^\circ \sin(\alpha \pm 45^\circ);$$

$$\sin \alpha + \operatorname{tg} \alpha = 2 \operatorname{tg} \alpha \cos^2 \frac{\alpha}{2};$$

$$\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{\sin 2\alpha};$$

$$\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{tg} \alpha = 2 \operatorname{ctg} 2\alpha;$$

$$\frac{\sin \alpha + \sin \beta}{\sin \alpha - \sin \beta} = \frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha + \beta}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\alpha - \beta}{2}};$$

$$\frac{\cos \alpha - \cos \beta}{\cos \alpha + \cos \beta} = \operatorname{tg} \frac{\alpha + \beta}{2} \operatorname{tg} \frac{\beta - \alpha}{2};$$

$$\frac{1 + \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg} \alpha} = \operatorname{tg}(45^\circ + \alpha);$$

$$\frac{\operatorname{ctg} \alpha + 1}{\operatorname{ctg} \alpha - 1} = \operatorname{ctg}(45^\circ - \alpha);$$

$$\sin^2 \alpha - \sin^2 \beta = \sin(\alpha + \beta) \sin(\alpha - \beta);$$

$$\cos^2 \alpha - \cos^2 \beta = \sin(\alpha + \beta) \sin(\beta - \alpha);$$

$$\operatorname{cosec} \alpha \pm \sec \alpha = \frac{4 \sin 45^\circ \sin(45^\circ \pm \alpha)}{\sin 2\alpha};$$

$$m \sin \alpha + n \cos \alpha = \frac{m \sin(\alpha + \beta)}{\cos \beta},$$

$$\text{где } \operatorname{tg} \beta = \frac{n}{m}.$$

Если $A + B + C = 180^\circ$ (A, B, C — углы треугольника), то:

$$\sin A + \sin B + \sin C = 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2};$$

$$\cos A + \cos B + \cos C = 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} + 1;$$

$$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2 \cos A \cos B \cos C + 2;$$

$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = -2 \cos A \cos B \cos C + 1;$$

$$\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4 \sin A \sin B \sin C;$$

$$\begin{aligned}\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C &= \\ &= -4 \cos A \cos B \cos C - 1; \\ \operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C &= \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C; \\ \operatorname{ctg} \frac{A}{2} + \operatorname{ctg} \frac{B}{2} + \operatorname{ctg} \frac{C}{2} &= \\ &= \operatorname{ctg} \frac{A}{2} \operatorname{ctg} \frac{B}{2} \operatorname{ctg} \frac{C}{2}.\end{aligned}$$

ОБРАТНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ (КРУГОВЫЕ) ФУНКЦИИ

Определения обратных тригонометрических (круговых) функций:

если $x = \sin y$, то $y = \operatorname{Arc} \sin x$ (арксинус);
если $x = \cos y$, то $y = \operatorname{Arc} \cos x$ (арккосинус);
если $x = \operatorname{tg} y$, то $y = \operatorname{Arc} \operatorname{tg} x$ (арктангенс);
если $x = \operatorname{ctg} y$, то $y = \operatorname{Arc} \operatorname{ctg} x$

(арккотангенс);

если $x = \sec y$, то $y = \operatorname{Arc} \sec x$ (арксеканс);

если $x = \operatorname{cosec} y$, то $y = \operatorname{Arc} \operatorname{cosec} x$

(арккосеканс).

Обратные тригонометрические функции обычно измеряются в радианах. Например,

$$\operatorname{Arc} \sin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6} \text{ или } \frac{5\pi}{6} \text{ или } -\frac{7}{6}\pi$$

и т. д.;

вообще,

$$\operatorname{Arc} \sin \frac{1}{2} = n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{6},$$

где $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Функции $\operatorname{Arc} \sin x$ и $\operatorname{Arc} \cos x$ определены для значений x , не превосходящих по абсолютной величине единицы; функции $\operatorname{Arc} \operatorname{tg} x$ и $\operatorname{Arc} \operatorname{ctg} x$ определены для всех значений x , а $\operatorname{Arc} \sec x$ и $\operatorname{Arc} \operatorname{cosec} x$ для значений x , которые по абсолютному значению больше или равны единице.

Обратные тригонометрические функции многозначны (стр. 128), их главные значения обозначаются через $\operatorname{arc} \sin x$, $\operatorname{arc} \cos x$ и т. д. и заключены в пределах:

$$-\frac{\pi}{2} \leq \operatorname{arc} \sin x \leq \frac{\pi}{2};$$

$$0 \leq \operatorname{arc} \cos x \leq \pi;$$

$$-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arc} \operatorname{tg} x < \frac{\pi}{2};$$

$$0 < \operatorname{arc} \operatorname{ctg} x < \pi.$$

Между значениями обратных тригонометрических функций и их главными значениями имеют место соотношения:

$$\operatorname{Arc} \sin x = n\pi + (-1)^n \operatorname{arc} \sin x;$$

$$\operatorname{Arc} \cos x = 2n\pi \pm \operatorname{arc} \cos x;$$

$$\operatorname{Arc} \operatorname{tg} x = n\pi + \operatorname{arc} \operatorname{tg} x;$$

$$\operatorname{Arc} \operatorname{ctg} x = n\pi + \operatorname{arc} \operatorname{ctg} x$$

(n — целое число).

Графики обратных тригонометрических функций даны на фиг. 79—82. Главные значения на графиках обозначены сплошными линиями.

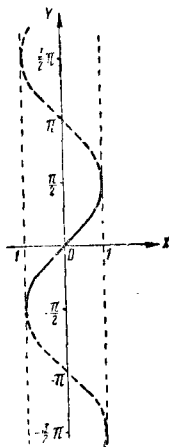
Соотношения между обратными тригонометрическими функциями положительного и отрицательного углов:

$$\operatorname{arc} \sin(-x) = -\operatorname{arc} \sin x;$$

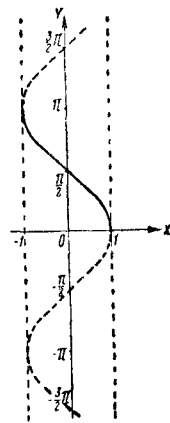
$$\operatorname{arc} \cos(-x) = \pi - \operatorname{arc} \cos x;$$

$$\operatorname{arc} \operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{arc} \operatorname{tg} x;$$

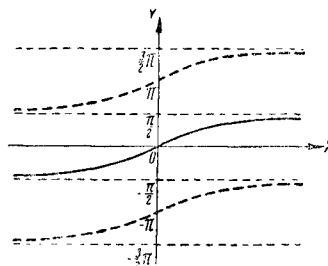
$$\operatorname{arc} \operatorname{ctg}(-x) = \pi - \operatorname{arc} \operatorname{ctg} x.$$



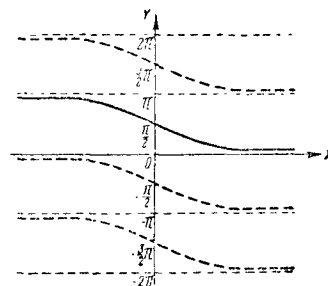
Фиг. 79. График функции $y = \operatorname{arc} \sin x$



Фиг. 80. График функции $y = \operatorname{arc} \cos x$



Фиг. 81. График функции $y = \operatorname{arc} \operatorname{tg} x$



Фиг. 82. График функции $y = \operatorname{arc} \operatorname{ctg} x$

Основные тригонометрические соотношения в применении к обратным тригонометрическим функциям приводят к равенствам:

$$\sin(\operatorname{arc} \sin x) = x;$$

$$\sin(\operatorname{arc} \cos x) = \sqrt{1-x^2};$$

$$\sin(\operatorname{arc} \operatorname{tg} x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}};$$

$$\sin(\operatorname{arctg} x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}};$$

$$\cos(\operatorname{arcsin} x) = \sqrt{1-x^2};$$

$$\cos(\operatorname{arccos} x) = x;$$

$$\cos(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}};$$

$$\cos(\operatorname{arccot} x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}};$$

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arcsin} x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arccos} x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x};$$

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x;$$

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arccot} x) = \frac{1}{x};$$

$$\operatorname{ctg}(\operatorname{arcsin} x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x};$$

$$\operatorname{ctg}(\operatorname{arccos} x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$\operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{x};$$

$$\operatorname{ctg}(\operatorname{arccot} x) = x.$$

Из соотношений между тригонометрическими функциями дополнительных углов следует:

$$\operatorname{arcsin} x + \operatorname{arccos} x = \frac{\pi}{2};$$

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arccot} x = \frac{\pi}{2}.$$

Главные значения обратных тригонометрических функций связаны соотношениями, указанными в табл. 10 (при этом следует иметь в виду, что формулы, взятые в квадратные скобки, верны только для положительных значений x , так как пределы главных значений определены для различных функций по-разному).

Таблица 10

Соотношения между обратными тригонометрическими функциями

	$\operatorname{arcsin} x$	$\operatorname{arccos} x$	$\operatorname{arctg} x$	$\operatorname{arccot} x$
$\operatorname{arcsin} x =$		$[\operatorname{arccos} \sqrt{1-x^2}]$	$\operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$	$[\operatorname{arccot} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}]$
$\operatorname{arccos} x =$	$[\operatorname{arcsin} \sqrt{1-x^2}]$		$[\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}]$	$\operatorname{arccot} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$
$\operatorname{arctg} x =$	$\operatorname{arcsin} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$	$[\operatorname{arccos} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}]$		$[\operatorname{arccot} \frac{1}{x}]$
$\operatorname{arccot} x =$	$[\operatorname{arcsin} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}]$	$\operatorname{arccos} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$	$[\operatorname{arctg} \frac{1}{x}]$	

РЕШЕНИЕ ПЛОСКИХ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

Решить треугольник — значит найти путём вычислений все его элементы (стороны, углы, площадь).

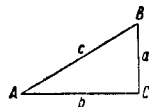
Формулы для решения прямоугольных треугольников (фиг. 83) даны в табл. 11.

Таблица 11

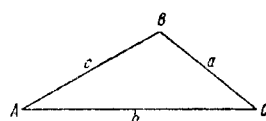
Решение прямоугольных треугольников

Данные элементы	Формулы для определения остальных элементов
Гипотенуза и острый угол (c, A)	$B=90^\circ-A; a=c \sin A; b=c \cos A$
Катет и острый угол (a, A)	$B=90^\circ-A; b=a \operatorname{ctg} A; c=\frac{a}{\sin A}$
Катет и гипотенуза (a, c)	$\sin A=\frac{a}{c}; b=c \cos A; B=90^\circ-A$
Два катета (a, b)	$\operatorname{tg} A=\frac{a}{b}; c=\frac{1}{\sin A}; B=90^\circ-A$

Обозначения: a, b — катеты; c — гипотенуза; A, B, C — углы против сторон a, b, c (угол C — прямой).



Фиг. 83



Фиг. 84

Соотношения между сторонами и углами любого треугольника (фиг. 84)

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

(теорема синусов);

где R — радиус описанной окружности;

$$a^2 = c^2 + b^2 - 2bc \cos A$$

(теорема косинусов);

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\operatorname{tg} \frac{A+B}{2}}{\operatorname{tg} \frac{A-B}{2}}$$

(теорема тангенсов);

$$\left. \begin{aligned} \frac{a+b}{c} &= \frac{\cos \frac{A-B}{2}}{\cos \frac{A+B}{2}} = \frac{\cos \frac{A-B}{2}}{\sin \frac{C}{2}}; \\ \frac{a-b}{c} &= \frac{\sin \frac{A-B}{2}}{\sin \frac{A+B}{2}} = \frac{\sin \frac{A-B}{2}}{\cos \frac{C}{2}}; \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{формулы} \\ \text{Моль-} \\ \text{вейде} \end{array}$$

$$\sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}};$$

$$\cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}};$$

$$\operatorname{tg} \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}},$$

где

$$p = \frac{a+b+c}{2}$$

полупериметр треугольника);

$$\operatorname{tg} \frac{A}{2} = \frac{a \sin B}{c - a \cos B}.$$

Площадь

$$S = \frac{1}{2} ab \sin C = 2R^2 \sin A \sin B \sin C = rp =$$

$$= \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

где r — радиус вписанной окружности.

Формулы для решения косоугольных треугольников даны в табл. 12. Обозначения: A, B, C — углы против сторон a, b, c ;

$$p = \frac{a+b+c}{2}.$$

ВЫЧИСЛЕНИЕ ДЛИН НЕКОТОРЫХ ОТРЕЗКОВ СВЯЗАННЫХ С ТРЕУГОЛЬНИКОМ

Высота из вершины A

$$h_a = b \sin C = c \sin B.$$

Медиана из вершины A

$$m_a = \frac{1}{2} \sqrt{b^2 + c^2 + 2bc \cos A}.$$

Биссектриса угла A

$$\beta_a = \frac{bc \cos \frac{A}{2}}{b+c}.$$

Радиус описанной окружности

$$R = \frac{a}{2 \sin A} = \frac{b}{2 \sin B} = \frac{c}{2 \sin C}.$$

Радиус вписанной окружности

$$r = \frac{S}{p} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}} =$$

$$= p \operatorname{tg} \frac{A}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{B}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{C}{2} =$$

$$= 4R \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}.$$

Таблица 12

Решение косоугольных треугольников

Данные элементы	Формулы для определения остальных элементов
Сторона и два угла (a, A, B)	$C = 180^\circ - A - B; \quad b = \frac{a \sin B}{\sin A};$ $c = \frac{a \sin C}{\sin A}; \quad S = \frac{1}{2} ab \sin C$
Две стороны и угол между ними (a, b, C)	<p>1-й способ:</p> $c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos C};$ $\sin B = \frac{b \sin C}{c};$ $A = 90^\circ - B - C; \quad S = \frac{ab}{2} \sin C.$ <p>2-й способ:</p> <p>Углы A и B находятся из системы двух уравнений:</p> $\operatorname{tg} \frac{1}{2} (A - B) = \frac{a-b}{a+b} \operatorname{ctg} \frac{C}{2};$ $\frac{1}{2} (A + B) = 90^\circ - \frac{C}{2}.$ $c = \frac{a \sin C}{\sin A}; \quad S = \frac{1}{2} ab \sin C$
Две стороны и угол против одной из них (a, b, A)	$\sin B = \frac{b \sin A}{a}.$ <p>Если $a > b$, то $B < 90^\circ$ — имеется одно решение.</p> <p>Если $b \sin A > a$, то решение невозможно.</p> <p>Если $b \sin A = a$, то имеется одно решение $B = 90^\circ$.</p> <p>Если $b \sin A < a$, то решений два: B_1 и B_2; причём $B_2 = 180^\circ - B_1$.</p> $C = 180^\circ - A - B; \quad b = \frac{a \sin C}{\sin A};$ $S = \frac{ab}{2} \sin C$
Три стороны (a, b, c)	<p>1-й способ:</p> $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc};$ $\sin B = \frac{b \sin A}{a}; \quad C = 90^\circ - A - B;$ $S = \frac{bc}{2} \sin A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$ <p>2-й способ:</p> $\operatorname{tg} \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}};$ $\operatorname{tg} \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}};$ $C = 90^\circ - A - B;$ $S = \frac{bc}{2} \sin A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

ГИПЕРБОЛИЧЕСКАЯ ТРИГОНОМЕТРИЯ

ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Гиперболические функции определяются через показательные функции по формулам:

$$\operatorname{sh} \varphi = \frac{e^{\varphi} - e^{-\varphi}}{2} \quad (\text{гиперболический синус});$$

$$\operatorname{ch} \varphi = \frac{e^{\varphi} + e^{-\varphi}}{2} \quad (\text{гиперболический косинус});$$

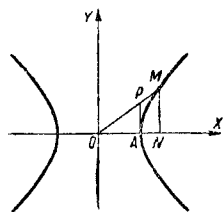
$$\operatorname{th} \varphi = \frac{e^{\varphi} - e^{-\varphi}}{e^{\varphi} + e^{-\varphi}} \quad (\text{гиперболический тангенс});$$

$$\operatorname{cth} \varphi = \frac{e^{\varphi} + e^{-\varphi}}{e^{\varphi} - e^{-\varphi}} \quad (\text{гиперболический котангенс});$$

$$\operatorname{sch} \varphi = \frac{2}{e^{\varphi} + e^{-\varphi}} \quad (\text{гиперболический секанс});$$

$$\operatorname{csch} \varphi = \frac{2}{e^{\varphi} - e^{-\varphi}} \quad (\text{гиперболический косеканс}).$$

Гиперболические функции для действительных значений аргумента φ геометрически могут быть изображены длинами некоторых отрезков в равноосной гиперболы с полуосями, равными единице (фиг. 85), подобно тому, как тригонометрические функции изображаются длинами отрезков в круге с радиусом, равным единице, а именно:



Фиг. 85

$$\operatorname{sh} \varphi = NM, \operatorname{ch} \varphi = ON, \operatorname{th} \varphi = AP.$$

Аргумент φ гиперболических функций геометрически представляет собой удвоенную площадь гиперболического сектора OAM подобно тому, как аргумент α тригонометрических функций может быть истолкован как удвоенная площадь кругового сектора OAM (см. фиг. 71).

При действительных значениях аргумента φ имеют место неравенства:

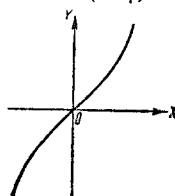
$$\operatorname{ch} \varphi \geq 1; -1 \leq \operatorname{th} \varphi \leq 1; |\operatorname{cth} \varphi| \geq 1,$$

а $\operatorname{sh} \varphi$ может иметь какие угодно значения как положительные, так и отрицательные.

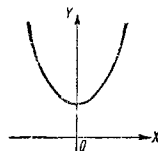
Соотношения между гиперболическими функциями отрицательного и положительного аргументов:

$$\operatorname{sh}(-\varphi) = -\operatorname{sh} \varphi; \operatorname{ch}(-\varphi) = \operatorname{ch} \varphi;$$

$$\operatorname{th}(-\varphi) = -\operatorname{th} \varphi; \operatorname{cth}(-\varphi) = -\operatorname{cth} \varphi.$$

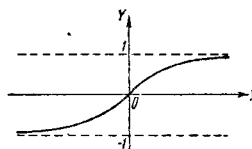


Фиг. 86. График функции $y = \operatorname{sh} x$

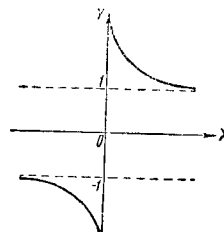


Фиг. 87. График функции $y = \operatorname{ch} x$

Таблицы значений гиперболических функций для действительных значений аргумента см. на стр. 79—80.



Фиг. 88. График функции $y = \operatorname{th} x$



Фиг. 89. График функции $y = \operatorname{cth} x$

Графики гиперболических функций см. на фиг. 86—89.

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ ТРИГОНОМЕТРИИ

Между гиперболическими функциями существуют соотношения, аналогичные соотношениям между тригонометрическими функциями.

Таблица 13

Выражение одних гиперболических функций через другие

	$\operatorname{sh} \varphi$	$\operatorname{ch} \varphi$	$\operatorname{th} \varphi$	$\operatorname{cth} \varphi$
$\operatorname{sh} \varphi =$		$\sqrt{\operatorname{ch}^2 \varphi - 1}$	$\frac{\operatorname{th} \varphi}{\sqrt{1 - \operatorname{th}^2 \varphi}}$	$\frac{1}{\sqrt{\operatorname{cth}^2 \varphi - 1}}$
$\operatorname{ch} \varphi =$	$\sqrt{\operatorname{sh}^2 \varphi + 1}$		$\frac{1}{\sqrt{1 - \operatorname{th}^2 \varphi}}$	$\frac{\operatorname{cth} \varphi}{\sqrt{\operatorname{cth}^2 \varphi - 1}}$
$\operatorname{th} \varphi =$	$\frac{\operatorname{sh} \varphi}{\sqrt{\operatorname{sh}^2 \varphi + 1}}$	$\frac{\sqrt{\operatorname{ch}^2 \varphi - 1}}{\operatorname{ch} \varphi}$		$\frac{1}{\operatorname{cth} \varphi}$
$\operatorname{cth} \varphi =$	$\frac{\sqrt{\operatorname{sh}^2 \varphi + 1}}{\operatorname{sh} \varphi}$	$\frac{\operatorname{ch} \varphi}{\sqrt{\operatorname{ch}^2 \varphi - 1}}$	$\frac{1}{\operatorname{th} \varphi}$	

Между функциями одного и того же аргумента имеют место следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \operatorname{ch}^2 \varphi - \operatorname{sh}^2 \varphi &= 1; \\ 1 - \operatorname{th}^2 \varphi &= \operatorname{sch}^2 \varphi; \\ \operatorname{cth}^2 \varphi - 1 &= \operatorname{csch}^2 \varphi; \\ \frac{\operatorname{sh} \varphi}{\operatorname{ch} \varphi} &= \operatorname{th} \varphi; \\ \frac{\operatorname{ch} \varphi}{\operatorname{sh} \varphi} &= \operatorname{cth} \varphi; \\ \operatorname{sh} \varphi \cdot \operatorname{csch} \varphi &= 1; \\ \operatorname{ch} \varphi \cdot \operatorname{sch} \varphi &= 1; \\ \operatorname{th} \varphi \cdot \operatorname{cth} \varphi &= 1. \end{aligned}$$

При помощи этих соотношений каждая гиперболическая функция аргумента φ может быть выражена через любую другую функцию этого же аргумента (табл. 13).

Гиперболические функции суммы и разности двух аргументов, двойных и половинных аргументов:

$$\begin{aligned} \operatorname{sh}(\varphi \pm \psi) &= \operatorname{sh} \varphi \operatorname{ch} \psi \pm \operatorname{ch} \varphi \operatorname{sh} \psi; \\ \operatorname{ch}(\varphi \pm \psi) &= \operatorname{ch} \varphi \operatorname{ch} \psi \pm \operatorname{sh} \varphi \operatorname{sh} \psi; \end{aligned}$$

$$\operatorname{th}(\varphi \pm \psi) = \frac{\operatorname{th} \varphi \pm \operatorname{th} \psi}{1 \pm \operatorname{th} \varphi \operatorname{th} \psi};$$

$$\operatorname{cth}(\varphi \pm \psi) = \frac{1 \pm \operatorname{cth} \varphi \operatorname{cth} \psi}{\operatorname{cth} \varphi \pm \operatorname{cth} \psi};$$

$$\operatorname{sh} 2\varphi = 2 \operatorname{sh} \varphi \cdot \operatorname{ch} \varphi;$$

$$\begin{aligned} \operatorname{ch} 2\varphi &= \operatorname{ch}^2 \varphi + \operatorname{sh}^2 \varphi = 2 \operatorname{sh}^2 \varphi + 1 = \\ &= 2 \operatorname{ch}^2 \varphi - 1; \end{aligned}$$

$$\operatorname{th} 2\varphi = \frac{2 \operatorname{th} \varphi}{1 + \operatorname{th}^2 \varphi};$$

$$\operatorname{cth} 2\varphi = \frac{1 + \operatorname{cth}^2 \varphi}{2 \operatorname{cth} \varphi};$$

$$\operatorname{sh} \frac{\varphi}{2} = \sqrt{\frac{\operatorname{ch} \varphi - 1}{2}}; \quad \operatorname{ch} \frac{\varphi}{2} = \sqrt{\frac{\operatorname{ch} \varphi + 1}{2}};$$

$$\operatorname{th} \frac{\varphi}{2} = \sqrt{\frac{\operatorname{ch} \varphi - 1}{\operatorname{ch} \varphi + 1}}; \quad \operatorname{cth} \frac{\varphi}{2} = \sqrt{\frac{\operatorname{ch} \varphi + 1}{\operatorname{ch} \varphi - 1}}.$$

Суммы и разности гиперболических функций:

$$\operatorname{sh} \varphi \pm \operatorname{sh} \psi = 2 \operatorname{sh} \frac{\varphi \pm \psi}{2} \operatorname{ch} \frac{\varphi \mp \psi}{2};$$

$$\operatorname{ch} \varphi + \operatorname{ch} \psi = 2 \operatorname{ch} \frac{\varphi + \psi}{2} \operatorname{ch} \frac{\varphi - \psi}{2};$$

$$\operatorname{ch} \varphi - \operatorname{ch} \psi = 2 \operatorname{sh} \frac{\varphi + \psi}{2} \operatorname{sh} \frac{\varphi - \psi}{2};$$

$$\operatorname{th} \varphi \pm \operatorname{th} \psi = \frac{\operatorname{sh}(\varphi \pm \psi)}{\operatorname{ch} \varphi \operatorname{ch} \psi}.$$

ОБРАТНЫЕ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Определение обратных гиперболических функций:

если $x = \operatorname{sh} y$, то $y = \operatorname{Ar sh} x$ (ареасинус);
если $x = \operatorname{ch} y$, то $y = \operatorname{Ar ch} x$ (ареакосинус);
если $x = \operatorname{th} y$, то $y = \operatorname{Ar th} x$ (ареатангенс);
если $x = \operatorname{cth} y$, то $y = \operatorname{Ar cth} x$ (ареакотангенс).

Графики обратных гиперболических функций см. на фиг. 90—93.

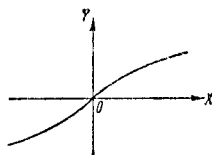
Выражение обратных гиперболических функций через логарифмы:

$$\operatorname{Ar sh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1});$$

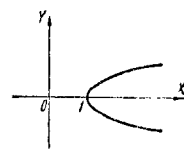
$$\operatorname{Ar ch} x = \ln(x \pm \sqrt{x^2 - 1});$$

$$\operatorname{Ar th} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x};$$

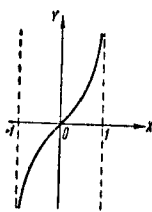
$$\operatorname{Ar cth} x = \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1}.$$



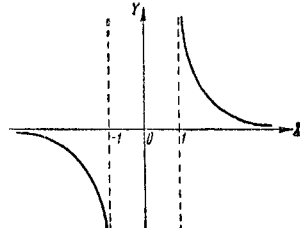
Фиг. 90. График функции $y = \operatorname{Ar sh} x$



Фиг. 91. График функции $y = \operatorname{Ar ch} x$



Фиг. 92. График функции $y = \operatorname{Ar th} x$



Фиг. 93. График функции $y = \operatorname{Ar cth} x$

СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИМИ И ГИПЕРБОЛИЧЕСКИМИ ФУНКЦИЯМИ

На формулах Эйлера:

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x, \quad e^{-ix} = \cos x - i \sin x,$$

где $i = \sqrt{-1}$, основаны соотношения между тригонометрическими и гиперболическими функциями:

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = \operatorname{ch} ix;$$

$$\operatorname{ch} x = \cos ix,$$

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = -i \operatorname{sh} ix;$$

$$\operatorname{sh} x = -i \sin ix,$$

$$\operatorname{tg} x = -i \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{e^{ix} + e^{-ix}} = -i \operatorname{th} ix;$$

$$\operatorname{th} x = -i \operatorname{tg} ix;$$

$$\operatorname{ctg} x = i \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{e^{ix} - e^{-ix}} = i \operatorname{cth} ix;$$

$$\operatorname{cth} x = i \operatorname{ctg} ix;$$

$$\begin{aligned} \operatorname{arc} \cos x &= -i \ln(x + i \sqrt{1 - x^2}) = \\ &= -i \operatorname{Ar ch} ix; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{arc} \sin x &= -i \ln(\sqrt{1 - x^2} + ix) = \\ &= -i \operatorname{Ar sh} ix; \end{aligned}$$

$$\operatorname{arc} \operatorname{tg} x = \frac{i}{2} \ln \frac{1+ix}{1-ix} = -i \operatorname{Ar th} ix;$$

$$\operatorname{arc} \operatorname{ctg} x = \frac{i}{2} \ln \frac{ix-1}{ix+1} = i \operatorname{Ar cth} ix;$$

$$\operatorname{Ar} \operatorname{ch} x = \pm i \operatorname{arc} \cos ix;$$

$$\operatorname{Ar} \operatorname{sh} x = -i \operatorname{arc} \sin ix;$$

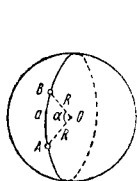
$$\operatorname{Ar} \operatorname{th} x = -i \operatorname{arc} \operatorname{tg} ix;$$

$$\operatorname{Ar} \operatorname{cth} x = i \operatorname{arc} \operatorname{ctg} ix.$$

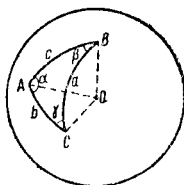
СФЕРИЧЕСКАЯ ТРИГОНОМЕТРИЯ

Меньшая дуга большого круга на сфере (фиг. 94), соединяющая две точки A и B , является кратчайшей линией на поверхности сферы (геодезическая линия) и играет на сфере такую же роль, как прямая на плоскости. Если принять за единицу измерения дуги $\widehat{AB} = a$ радиус сферы ($R = 1$), то изображённый угол $\angle AOB = \alpha$, измеренный в радианах, равен длине дуги: $a = \alpha$.

Сферический треугольник (фиг. 95) образуется пересечением дуг трёх больших кру-



Фиг. 94



Фиг. 95

гов на сфере. Длины его сторон a, b, c измеряются плоскими углами трёхгранного угла $O\alpha\beta\gamma$.

Сферический треугольник может быть решён по любым трём из его шести элементов (трёх сторон и трёх углов), так как его углы не связаны таким соотношением, как в прямолинейной тригонометрии. Сумма углов сферического треугольника всегда больше π , поэтому вводится понятие сферического избытка сферического треугольника:

$$\epsilon = (\alpha + \beta + \gamma) - \pi.$$

Величина ϵ определяется из формулы

$$\operatorname{ctg} \frac{\epsilon}{2} = \frac{\operatorname{ctg} \frac{c}{2} + \operatorname{ctg} \frac{b}{2} + \operatorname{ctg} \frac{a}{2}}{\sin \gamma},$$

или

$$\operatorname{tg} \frac{\epsilon}{4} = \sqrt{\operatorname{tg} \frac{p}{2} \operatorname{tg} \frac{p-a}{2} \operatorname{tg} \frac{p-b}{2} \operatorname{tg} \frac{p-c}{2}},$$

где

$$p = \frac{a+b+c}{2}.$$

Для решения прямоугольных сферических треугольников с прямым углом α и гипотенузой a (фиг. 96) применяются следующие формулы:

$$\cos a = \cos b \cos c = \operatorname{ctg} \beta \operatorname{ctg} \gamma;$$

$$\cos b = \frac{\cos \beta}{\sin \gamma}; \quad \cos \beta = \frac{\operatorname{tg} c}{\operatorname{tg} a};$$

$$\cos c = \frac{\cos \gamma}{\sin \beta}; \quad \cos \gamma = \frac{\operatorname{tg} b}{\operatorname{tg} a};$$

$$\sin \beta = \frac{\sin b}{\sin a}; \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{\operatorname{tg} b}{\sin c};$$

$$\sin \gamma = \frac{\sin c}{\sin a}; \quad \operatorname{tg} \gamma = \frac{\operatorname{tg} c}{\sin b}.$$

Для решения косоугольных сферических треугольников пользуются формулами:

$$\frac{\sin a}{\sin \alpha} = \frac{\sin b}{\sin \beta} = \frac{\sin c}{\sin \gamma} \quad (\text{теорема синусов})$$

$$\left. \begin{aligned} \cos a &= \cos b \cos c + \\ &+ \sin b \sin c \cos \alpha; \\ \cos \alpha &= -\cos \beta \cos \gamma + \\ &+ \sin \beta \sin \gamma \cos a; \end{aligned} \right\} \quad (\text{теоремы ко-} \\ \text{синусов})$$

$$\sin a \cos b = \cos a \sin b \cos \gamma + \sin c \cos \beta;$$

$$\sin a \operatorname{ctg} b = \operatorname{ctg} b \sin \gamma + \cos a \cos \gamma;$$

$$\sin \alpha \cos \beta = \cos b \sin \gamma - \cos c \sin \beta \cos \alpha;$$

$$\sin \alpha \operatorname{ctg} \beta = \sin c \operatorname{ctg} b - \cos c \cos \alpha;$$

$$\sin \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{-\cos \sigma \cos (\sigma - \alpha)}{\sin \beta \sin \gamma}},$$

$$\cos \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{\cos (\sigma - \beta) \cos (\sigma - \gamma)}{\sin \beta \sin \gamma}};$$

$$\text{где } \sigma = \frac{\alpha + \beta + \gamma}{2};$$

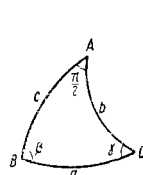
$$\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\sin (p-b) \sin (p-c)}{\sin b \sin c}};$$

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\sin p \sin (p-a)}{\sin b \sin c}}.$$

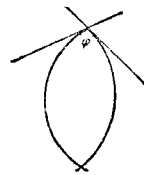
Площадь сферического треугольника

$$S = \epsilon R^2,$$

где ϵ — сферический избыток, а R — радиус сферы.



Фиг. 96



Фиг. 97

Площадь сферического двухугольника (фиг. 97), образованного двумя дугами большого круга,

$$S = 2\varphi R^2,$$

где φ измеряется в радианах.

ДИФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

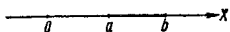
ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ

Всякое действительное значение переменной величины x может быть изображено

при помощи точки на числовой прямой (оси OX) с абсциссой x . Множеству значений x соответствует множество точек на прямой. В частности, совокупность значений x , заключённых между двумя постоянными зна-

чениями $x=a$ и $x=b$, изображается при помощи отрезка (фиг. 98).

Если концы отрезка, т. е. значения $x=a$ и $x=b$, принадлежат данному отрезку, т. е. совокупность состоит из всех значений x , для которых $a \leq x \leq b$, то отрезок называется замкнутым или сегментом; обозначение: $[a, b]$.



Фиг. 98

Если концы отрезка ему не принадлежат, т. е. $a < x < b$, то отрезок называется открытым, или интервалом; обозначение: (a, b) .

Отрезок, которому принадлежит только один из его концов, т. е. $a \leq x < b$ или $a < x \leq b$, называется полусегментом или полуинтервалом; обозначения: $[a, b)$; $(a, b]$.

Окрестностью точки $x = x_0$ называется всякий отрезок, для которого точка x_0 является внутренней.

Величина y называется функцией независимой переменной величины (аргумента) x , если всякому значению величины x , принадлежащему некоторой совокупности, соответствует вполне определённое (действительное) значение y .

Обозначение: $y=f(x)$ (x — аргумент, y — функция, f — символ функциональной зависимости).

Областью существования функции называется совокупность значений аргумента, для которых эта функция определена.

Пример. Областью существования функции $y = \sqrt{x-1}$ является полусегмент $[1, 4)$ ($1 \leq x < 4$).

Если задано такое соотношение между x и y , что каждому (или некоторым) значению x соответствует более чем одно значение y , то такое соотношение определяет не одну, а несколько функций, или, как говорят коротко, многозначную функцию (каждая из функций, объединяемых этой многозначной функцией, называется её ветвью).

Пример 1. Равенство $y^2 = x+5$ определяет двузначную функцию $y = \pm \sqrt{x+5}$, т. е. две функции: $y = \sqrt{x+5}$ и $y = -\sqrt{x+5}$.

Пример 2. Равенство $y = \text{Arc sin } x$ определяет бесконечнозначную функцию

$$y = \pi n + (-1)^n \text{ arc sin } x,$$

где $n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Всякая функция может быть геометрически изображена при помощи графика, если значения аргумента x и функции y интерпретировать, как координаты точки на плоскости.

Функция $f(x)$ называется чётной, если $f(-x) = f(x)$ (например: $\cos x$; $3x^4 + x^2 - 2$) и нечётной, если $f(-x) = -f(x)$ (например: $\sin x$; $x^3 - 2x$).

График чётной функции симметричен относительно оси OY , график нечётной функции симметричен относительно начала координат.

Заданная при помощи некоторой формулы функциональная зависимость называется неявной, если она имеет вид $F(x, y) = 0$, явной, если $y=f(x)$, и параметрической, если аргумент x и функция y выражены через вспомогательную переменную величину t (параметр): $x=\varphi_1(t)$, $y=\varphi_2(t)$.

Если формула, определяющая функцию, такова, что над аргументом совершается конечное число алгебраических действий (сложение, вычитание, умножение, деление, возведение в степень, извлечение корня, решение алгебраического уравнения), то функция называется алгебраической, в противном случае она называется трансцендентной (тригонометрические и обратные тригонометрические функции, логарифмическая функция, показательная функция и др.).

Алгебраические функции делятся на рациональные и иррациональные. Функция рациональна, если для её вычисления нужно произвести над аргументом конечное число арифметических действий (сложение, вычитание, умножение, деление, возведение в целую степень), в противном случае функция иррациональна.

Рациональная функция называется целой или многочленом (полиномом), если для её вычисления можно не прибегать к делению на выражение, содержащее аргумент (и к возведению аргумента в отрицательную степень), в противном случае она является рациональной дробью.

Функции, для определения которых над аргументом совершается конечное число так называемых элементарных действий (к числу элементарных действий относятся все алгебраические, а также логарифмирование, потенцирование и действия, определяемые тригонометрическими и обратными тригонометрическими функциями), называются элементарными функциями.

Число b называется пределом функции $f(x)$ при x , стремящемся к a (обозначение: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$), если, как мало бы ни

было положительное число ε , к нему можно подобрать столь малое положительное число δ , что для всякого значения x , удовлетворяющего условию $|x-a| < \delta$, имеет место неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Равенство $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b$ обозначает, что ко

всякому положительному числу ε можно подобрать столь большое число A , что для всякого x , удовлетворяющего условию $x > A$, имеет место неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Равенство $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ (в этом случае

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ не существует) имеет тот смысл,

что каково бы ни было сколь угодно большое число B , можно подобрать столь малое положительное число δ , что из $|x-a| < \delta$ следует $f(x) > B$.

Аналогичным образом определяется смысл равенств:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b; \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty;$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \pm \infty; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \pm \infty.$$

Определение левого и правого пределов функции см. ниже.

Пределом последовательности чисел a_1, a_2, \dots, a_n называется $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

Если этот предел существует (и конечен), то последовательность называется сходящейся, в противном случае последовательность расходящаяся.

Величина $f(x)$ называется ограниченной, если существует такая постоянная A , что $|f(x)| < A$, и неограниченной в противном случае.

Бесконечно малой называется переменная величина, предел которой равен нулю.

Бесконечно большой называется переменная величина, предел абсолютного значения которой равен бесконечности. Величина, обратная бесконечно большой, есть бесконечно малая, и величина, обратная бесконечно малой, есть бесконечно большая.

Простейшие свойства бесконечно малых:
1. Сумма конечного числа бесконечно малых есть бесконечно малая.

2. Произведение конечного числа бесконечно малых, а также произведение ограниченной величины на бесконечно малую есть бесконечно малая.

Если $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ — бесконечно малые при $x \rightarrow a$, то они называются бесконечно малыми одинакового порядка малости в случае, если $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = A$, причём $A \neq 0$ и $|A| \neq \infty$.

Если $A=0$, то $\alpha(x)$ — бесконечно малая более высокого порядка, чем $\beta(x)$; если $|A| = \infty$, то $\alpha(x)$ имеет порядок малости ниже, чем $\beta(x)$.

В случае, когда $A=1$, $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются равносильными (эквивалентными) бесконечно малыми (обозначение: $\alpha \sim \beta$).

Если $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{[\beta(x)]^k} = A$ ($A \neq 0$ и $|A| \neq \infty$), то α является бесконечно малой порядка k относительно β .

Порядок малости произведения нескольких бесконечно малых выше, чем каждого из сомножителей.

Сумма нескольких бесконечно малых различных порядков имеет порядок наименьшего (в отношении порядка малости) слагаемого и равносильна этому слагаемому (оно называется главной частью суммы).

Если $\alpha \sim \beta$, то $\alpha - \beta$ бесконечно малая более высокого порядка, чем α и β .

Если $\alpha \sim \alpha_1$ и $\beta \sim \beta_1$, то

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}.$$

Простейшие теоремы о пределах (a — величина конечная или бесконечная):

$$\lim c = c \text{ (если } c \text{ постоянная);}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} [f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x)] &= \\ &= \lim_{x \rightarrow a} f_1(x) + \lim_{x \rightarrow a} f_2(x) + \dots + \lim_{x \rightarrow a} f_n(x); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} [f_1(x) f_2(x) \dots f_n(x)] &= \\ &= \lim_{x \rightarrow a} f_1(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} f_2(x) \dots \lim_{x \rightarrow a} f_n(x); \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} [cf(x)] = c \lim_{x \rightarrow a} f(x) \quad (c \text{ — постоянная});$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x)}, \text{ если } \lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) \neq 0.$$

Некоторые пределы

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1;$$

$$\lim_{n \rightarrow \pm \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e = 2,71828 \dots$$

$$\lim_{n \rightarrow \pm \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x;$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} a^x = \begin{cases} \infty & \text{при } a > 1, \\ 1 & \text{при } a = 1, \\ 0 & \text{при } 0 \leq a < 1; \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\ln x)^m}{x} = 0; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^m}{e^x} = 0 \quad (m \text{ — любое число});$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n e^{-n} \sqrt{n}} = \sqrt{2\pi}$$

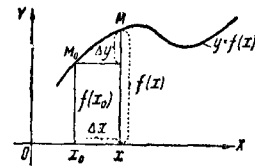
(формула Стирлинга);

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1;$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1 \quad (a > 0 \text{ и постоянная}).$$

Правило Лопиталя для вычисления пределов см. на стр. 132.

Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке $x = x_0$, если в этой точке $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0$, где (фиг. 99) $\Delta x = x - x_0$.



Фиг. 99

(приращение аргумента) и $\Delta y = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ (приращение функции).

Условие непрерывности $f(x)$ в точке $x = x_0$ можно записать также при помощи равенства $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

Функция непрерывна на отрезке, если она непрерывна во всех точках этого отрезка.

Точки, в которых условие непрерывности нарушается, называются точками разрыва функции.

Левым и правым пределами функции в точке $x = x_0$ называются числа, определяемые равенствами:

$$f(x_0 - 0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f(x_0 - \varepsilon) \quad (\varepsilon > 0);$$

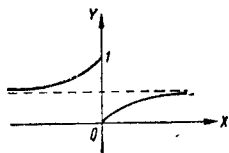
$$f(x_0 + 0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f(x_0 + \varepsilon) \quad (\varepsilon > 0).$$

Если эти пределы существуют (и конечны), но не равны между собой, то точка x_0 на-

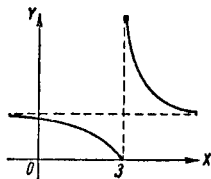
зывается точкой разрыва 1-го рода. Если хотя бы один из этих пределов не существует, то x_0 — точка разрыва 2-го рода.

Примеры.

а) $f(x) = \frac{1}{1+2^{1/x}}$; $x_0 = 0$ — точка разрыва 1-го рода (фиг. 100);



Фиг. 100

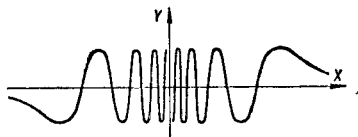


Фиг. 101

здесь $f(-0) = 1$; $f(+0) = 0$;

б) $f(x) = 2^{x-3}$; $x_0 = 3$ — точка разрыва 2-го рода (фиг. 101);
здесь $f(3-0) = 0$; $f(3+0) = \infty$;

в) $f(x) = \sin \frac{1}{x}$; $x_0 = 0$ — точка разрыва 2-го рода (фиг. 102);
здесь $f(-0)$ и $f(+0)$ не существуют.



Фиг. 102

Если $f(x_0-0) = f(x_0+0) \neq f(x_0)$, то точка x_0 называется точкой устранимого разрыва.

Непрерывность некоторых элементарных функций

1. Непрерывны при всех значениях аргумента следующие функции:

- а) всякая целая рациональная функция;
- б) показательная функция $y = a^x$;
- в) тригонометрические функции:

$$y = \sin x; y = \cos x;$$

г) обратные тригонометрические функции:

$$y = \arctg x; y = \operatorname{arccotg} x.$$

2. Непрерывна при всех положительных значениях x функция

$$y = \ln x.$$

3. Непрерывны при всех значениях x от -1 до $+1$ функции:

$$y = \arcsin x; y = \arccos x.$$

4. Претерпевают разрыв следующие функции:

а) дробные рациональные функции при значениях аргумента, обращающих знаменатель в нуль, если дробь несократима;

б) тригонометрические функции:

$$y = \operatorname{tg} x$$

$$\text{при } x = \pi n \pm \frac{\pi}{2};$$

$$y = \operatorname{ctg} x$$

$$\text{при } x = \pm \pi n.$$

ПРОИЗВОДНАЯ

Производной функции $y = f(x)$ называется предел, к которому стремится отношение приращения функции к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю:

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

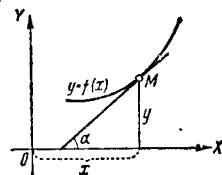
Другие обозначения производной: $f'(x)$; $\frac{dy}{dx}$; $\frac{d}{dx} f(x)$.

Нахождение производной или дифференциала (стр. 132) называется дифференцированием.

Для того чтобы при некотором значении аргумента функция была дифференцируемой (т. е. имела производную), необходимо (но недостаточно), чтобы она была при данном значении аргумента непрерывной.

Производная функции $y = f(x)$ равна тангенсу угла наклона касательной к графику функции в точке $M(x, y)$ к оси OX (фиг. 103):

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \alpha.$$



Фиг. 103

Второй производной функции $y = f(x)$, или производной второго порядка, называется производная от её производной.

Обозначения второй производной: y'' ; $f''(x)$; $\frac{d^2 y}{dx^2}$. Аналогично определяются производные любого порядка.

Обозначения производной n -го порядка:

$$y^{(n)}; f^{(n)}(x); \frac{d^n y}{dx^n}.$$

Производные основных элементарных функций (аргумент обозначен через x):

1) $C' = 0$ (C — постоянная);

2) $(x^n)' = nx^{n-1}$,

в частности:

$$x' = 1, (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2};$$

3) $(a^x)' = a^x \ln a$,

в частности $(e^x)' = e^x$;

$$4) (\log_a x)' = \frac{1}{x} \log_a e = \frac{1}{x \ln a},$$

в частности $(\ln x)' = \frac{1}{x}$;

5) $(\sin x)' = \cos x$;

6) $(\cos x)' = -\sin x$;

$$7) (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x};$$

$$8) (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x};$$

$$9) (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$10) (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$11) (\operatorname{arc} \operatorname{tg} x)' = \frac{1}{1+x^2};$$

$$12) (\operatorname{arc} \operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2};$$

$$13) (\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x;$$

$$14) (\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x;$$

$$15) (\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x};$$

$$16) (\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x};$$

$$17) (\operatorname{Ar} \operatorname{sh} x)' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}};$$

$$18) (\operatorname{Arch} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}};$$

$$19) (\operatorname{Ar} \operatorname{th} x)' = \frac{1}{1-x^2};$$

$$20) (\operatorname{Ar} \operatorname{cth} x)' = \frac{1}{x^2-1}.$$

Производные высших порядков некоторых функций

$$1) (x^m)^{(n)} = m(m-1) \dots (m-n+1) x^{m-n};$$

$$2) (\log_a x)^{(n)} = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{(\ln a)^n} \cdot \frac{1}{x^n},$$

$$\text{в частности } (\ln x)^{(n)} = (-1)^{n-1} (n-1)! \frac{1}{x^n};$$

$$3) (a^x)^{(n)} = a^x (\ln a)^n,$$

$$\text{в частности } (e^x)^{(n)} = e^x;$$

$$4) (\sin x)^{(n)} = \sin \left(x + \frac{n\pi}{2} \right);$$

$$5) (\cos x)^{(n)} = \cos \left(x + \frac{n\pi}{2} \right);$$

$$6) (\operatorname{sh} x)^{(n)} = \begin{cases} \operatorname{sh} x & \text{при } n \text{ чётном,} \\ \operatorname{ch} x & \text{при } n \text{ нечётном;} \end{cases}$$

$$7) (\operatorname{ch} x)^{(n)} = \begin{cases} \operatorname{ch} x & \text{при } n \text{ чётном,} \\ \operatorname{sh} x & \text{при } n \text{ нечётном.} \end{cases}$$

Правила дифференцирования

u, v, w — функции аргумента x , по которому производится дифференцирование:

$$1) (u \pm v)' = u' \pm v' \text{ (производная суммы);}$$

$$2) (uv)' = u'v + uv' \text{ (производная произведения);}$$

$$(uv)^{(n)} = u^{(n)}v + \binom{n}{1} u^{(n-1)}v' + \binom{n}{2} u^{(n-2)}v'' + \dots + uv^{(n)};$$

в частности, если c — постоянная, то

$$(cu)' = cu'; \quad (cu)^{(n)} = cu^{(n)}.$$

$$3) (u^v)' = v u^{v-1} u' + u^v \ln u \cdot v' \text{ (производная общей показательной функции);}$$

$$4) \text{ если } y=f(u) \text{ и } u=\varphi(x), \text{ то } y' = f'(u) \varphi'(x) \text{ или } \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \text{ (правило дифференцирования функции от функции).}$$

В более общем случае, если $y=f(u)$, $u=\varphi(v)$, $v=\psi(x)$, то

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx}$$

и т. д.
Пример.

$$(\sin^5 5x)' = \frac{d}{du} (u^5) \cdot \frac{d}{dv} (\sin v) \cdot \frac{d}{dx} (5x) = 5u^4 \cdot \cos v \cdot 5 = 15 \sin^4 5x \cdot \cos 5x$$

(здесь $u=u^5$; $u=\sin v$; $v=5x$).

5) Если переменная u задана, как функция аргумента x , неявно уравнением $F(x, u)=0$, то её производные могут быть найдены с помощью частных производных (определение частных производных см. стр. 133):

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x}{F'_y};$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{F''_{xx} (F'_y)^2 - 2F''_{xy} F'_x F'_y + F''_{yy} (F'_x)^2}{F''_{yy} (F'_y)^2}.$$

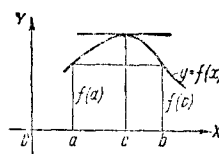
6) Если зависимость между y и x дана в параметрической форме: $x=\varphi(t)$; $y=\psi(t)$, то:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}; \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\frac{d^2 y}{dt^2} \cdot \frac{dy}{dt} - \frac{dy}{dt} \cdot \frac{d^2 x}{dt^2}}{\left(\frac{dx}{dt} \right)^3}.$$

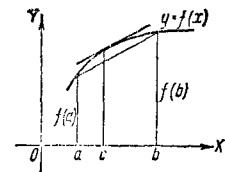
7) Если равенство $y=f(x)$ рассматривать, как определяющее неявно функцию $x=\varphi(y)$, то символы f и φ определяют, как говорят, две взаимно обратные функции. Производные таких функций связаны между собой соотношением:

$$\varphi'(y) = \frac{1}{f'(x)} \text{ или } \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}.$$

Теорема Ролля. Если функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$, дифференцируема в интервале (a, b) и $f(a)=f(b)$, то найдётся в этом интервале по крайней мере одна точка $x=c$, в которой $f'(c)=0$ [касательная к графику функции в точке $x=c$ параллельна оси OX (фиг. 104)].



Фиг. 104



Фиг. 105

Теорема Лагранжа (теорема о конечном приращении). Если функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$ и дифференцируема в интервале (a, b) , то в этом интервале найдётся по крайней мере одна точка $x=c$ такая, что имеет место равенство

$$f(b) - f(a) = (b-a) f'(c).$$

Геометрический смысл теоремы Лагранжа состоит в том, что касательная к кривой $y=f(x)$ в точке с абсциссой $x=c$ параллельна хорде, соединяющей точки с абсциссами $x=a$ и $x=b$ (фиг. 105).

Обобщением формулы Лагранжа является формула Тейлора:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!} (x-a) + \frac{f''(a)}{2!} (x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}[a + \theta(x-a)]}{(n+1)!} (x-a)^{n+1},$$

где $0 < \theta < 1$ (см. также стр. 160).

При $a = 0$ получаем формулу Маклорена.

Правило Лопиталя для вычисления пределов (для раскрытия неопределённостей).

$$\begin{aligned} \text{Если } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = 0 \text{ или } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \\ = \pm \infty, \lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = \pm \infty, \text{ то } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \\ = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}. \end{aligned}$$

Пример.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\operatorname{tg} x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\cos^2 x}{2} = -\frac{1}{2}.$$

Возрастание и убывание функций. Если для любых точек x_1 и x_2 интервала (a, b) из неравенства $x_1 < x_2$ следует, что $f(x_1) < f(x_2)$, то функция $f(x)$ называется в этом интервале возрастающей. Если из неравенства $x_1 < x_2$ следует $f(x_1) > f(x_2)$, то функция называется убывающей.

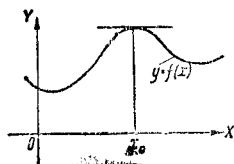
Функция называется монотонной в интервале, если она в этом интервале возрастает (монотонно возрастающая функция) или убывает (монотонно убывающая функция).

Для того чтобы функция $f(x)$ в некотором интервале возрастала (убывала), достаточно, чтобы во всех точках этого интервала $f'(x) > 0$ [$f'(x) < 0$].

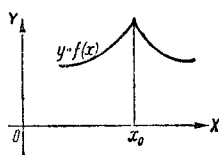
ЭКСТРЕМУМ

Точка x_0 называется точкой максимума (минимума) функции $f(x)$, если существует такая окрестность этой точки, что для всякой точки x этой окрестности ($x \neq x_0$) имеет место неравенство $f(x_0) > f(x)$ [$f(x_0) < f(x)$].

Общее название для максимума и минимума — экстремум.



Фиг. 106



Фиг. 107

В точке экстремума производная данной функции $f'(x)$ либо равна нулю (фиг. 106), либо (фиг. 107) не существует (необходимое условие экстремума).

Если x_0 — корень уравнения $f'(x) = 0$ [или если $f'(x_0)$ не существует] и имеется такая

окрестность точки x_0 , что во всех точках этой окрестности слева от x_0 производная $f'(x)$ имеет один знак, а во всех точках справа от x_0 — противоположный знак, то точка x_0 является точкой экстремума (достаточное условие). При этом изменение знака (слева направо) с $+$ на $-$ соответствует точке максимума, а с $-$ на $+$ — точке минимума.

Другое достаточное условие: если $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) < 0$, то x_0 — точка максимума; если $f'(x_0) = 0$ и $f''(x_0) > 0$, то x_0 — точка минимума.

В более общем случае, если $f'(x_0) = 0$ и первая из неравных нулю в точке x_0 производных функции $f(x)$ — четного порядка, то точка x_0 является точкой экстремума, а именно: точкой максимума, если упомянутая производная в точке x_0 отрицательна, и точкой минимума, если она положительна.

Пример.

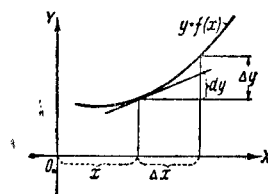
$f(x) = (x-1)^4$. Из необходимого условия получаем уравнение $f'(x) = 4(x-1)^3 = 0$, которое имеет корень $x_0 = 1$. Далее $f''(1) = f'''(1) = 0$; $f^{(IV)}(1) = 4! > 0$; $x=1$ — точка минимума.

ДИФФЕРЕНЦИАЛ

Дифференциалом функции $y = f(x)$ [обозначения: dy , $df(x)$] называется произведение её производной на приращение аргумента

$$dy = f'(x) \Delta x = y' \Delta x.$$

Разность между приращением функции и её дифференциалом является бесконечно малой более высокого порядка, чем Δx . Дифференциал аргумента dx равен его приращению Δx и, следовательно,



Фиг. 108

$dy = y' dx$.

Эта формула инвариантна, т. е. сохраняется и в том случае, когда x не является независимым переменным: $x = \varphi(t)$.

Геометрически дифференциал изображается приращением ординаты точки на касательной к графику функции (фиг. 108).

Дифференциал второго порядка $d^2y = d(dy)$ и т. д.

Формулы для дифференциалов высших порядков:

$$d^2y = y'' dx^2, d^3y = y''' dx^3, \dots,$$

$$d^n y = y^{(n)} dx^n,$$

имеют место, если x — аргумент; если же $x = \varphi(t)$ [причём функция $\varphi(t)$ — нелинейная], то эти формулы перестают быть справедливыми.

ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Функцией переменных x, y, z, \dots называется такая величина u [обозначение: $u = f(x, y, z, \dots)$], которая принимает определённое значение, когда даны значения независимых друг от друга аргументов x, y, z, \dots . Совокупность значений аргументов, для которых функция определена, об-

разуют область существования функции. Если имеется функция, зависящая от двух аргументов, $z = f(x, y)$, то геометрически она может быть интерпретирована при помощи некоторой поверхности, координаты точек которой обращают в тождество данную зависимость между x , y и z .

Каждая пара значений аргументов (x, y) может быть изображена при помощи точки $M(x, y)$ плоскости OXY и функцию двух переменных можно рассматривать как функцию точки в плоскости OXY : $z = f(M)$; область существования такой функции — некоторая область в плоскости OXY .

Пример. Область существования функции $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ есть круг $x^2 + y^2 \leq 1$.

В качестве окрестности точки (x_0, y_0) принято брать либо прямоугольник с центром в этой точке и сторонами, параллельными координатным осям (т. е. совокупность значений x и y , удовлетворяющих неравенствам $|x - x_0| \leq h$, $|y - y_0| \leq k$, где $2h$ и $2k$ — стороны прямоугольника), либо круг с центром в данной точке $[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq \rho^2]$, где ρ — радиус круга].

Число c называется пределом функции $f(x, y)$ при x , стремящемся к a , и y , стремящемся к b

$$[\text{обозначение: } \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ y \rightarrow b}} f(x, y) = c],$$

если, как мало бы ни было положительное число δ , к нему можно подобрать столь малые положительные числа h и k , что для всех значений x и y , удовлетворяющих условиям: $|x - a| < h$ и $|y - b| < k$, имеет место неравенство $|f(x, y) - c| < \delta$.

Подобным образом определяется понятие предела для функции любого числа аргументов.

Смысл символов: $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ y \rightarrow b}} f(x, y) = c$;

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ y \rightarrow b}} f(x, y) = \pm \infty; \quad \lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow b}} f(x, y) = \pm \infty$$

и т. д. аналогичен смыслу соответствующих символов для функции одного аргумента (стр. 128).

Функция $f(x, y)$ называется непрерывной в точке (x_0, y_0) , если

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0).$$

Функция, непрерывная во всех точках некоторой области, называется непрерывной в этой области.

ЧАСТНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ

Частной производной по аргументу x функции $u = f(x, y, z, \dots)$ называется производная этой функции, вычисленная в предположении, что все аргументы, кроме x , постоянны:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y, z, \dots) - f(x, y, z, \dots)}{\Delta x}.$$

Другие обозначения частной производной по x функции $u = f(x, y, z, \dots)$:

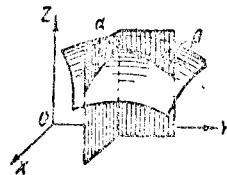
$$\frac{\partial f}{\partial x}; \quad f'_x; \quad \frac{\partial}{\partial x} f(x, y, z, \dots).$$

Если функция двух переменных $z = f(x, y)$ изображена при помощи поверхности, то $\frac{\partial z}{\partial x} = \operatorname{tg} \alpha$, где α — угол между касательной в данной точке поверхности к кривой, полученной в сечении этой поверхности плоскостью, параллельной плоскости OXZ , и положительным направлением оси OX (фиг. 109); аналогично $\frac{\partial z}{\partial y} = \operatorname{tg} \beta$.

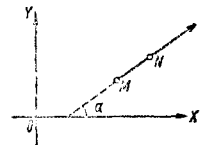
Для производных высших порядков применяются обозначения:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f''_{xx};$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f''_{xy} \text{ и т. д.}$$



Фиг. 109



Фиг. 110

В случае, если подлежащие вычислению производные непрерывны, то результат многократного дифференцирования не зависит от порядка дифференцирования; так, например,

$$f''_{xy} = f''_{yx}.$$

Производная в данном направлении. Производной функции $f(x, y)$ в точке $M(x, y)$ по направлению l (обозначение: $\frac{\partial f}{\partial l}$) называется предел (фиг. 110)

$$\frac{\partial f}{\partial l} = \lim_{N \rightarrow M} \frac{f(N) - f(M)}{MN}.$$

Если α — угол между направлением l и положительным направлением оси OX , то

$$\frac{\partial f}{\partial l} = \frac{\partial f}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial f}{\partial y} \sin \alpha.$$

Аналогично определяется производная функции $f(x, y, z)$ в данном направлении l в пространстве. Если при этом α, β, γ — углы, образованные направлением l с положительными направлениями соответствующих координатных осей, то

$$\frac{\partial f}{\partial l} = \frac{\partial f}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial f}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial f}{\partial z} \cos \gamma.$$

Дифференцирование сложных и неявных функций. Если $z = f(x, y, \dots)$ и $x = \varphi_1(u, v, \dots)$; $y = \varphi_2(u, v, \dots)$, ..., то

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} + \dots,$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} + \dots$$

В частности, если $x = \varphi_1(t)$; $y = \varphi_2(t)$, ...,

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \dots$$

Если равенство $f(x, y, z, \dots) = 0$ определяет неявно z , как функцию аргументов x, y, \dots , то

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{f'_x}{f'_z}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{f'_y}{f'_z}; \quad \dots$$

ЭКСТРЕМУМ

Точка (x_0, y_0) называется точкой экстремума функции $f(x, y)$, если существует такая её окрестность, что для всех точек (x, y) этой окрестности имеет место одно из неравенств $f(x_0, y_0) > f(x, y)$ (в случае максимума) или $f(x_0, y_0) < f(x, y)$ (в случае минимума). Аналогично определение экстремума для функции $f(x, y, \dots)$ любого числа аргументов.

В точке экстремума частные производные функции по всем аргументам равны нулю (если эти производные существуют):

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \dots$$

(необходимые условия экстремума).

В случае функции $f(x, y)$, зависящей от двух аргументов, способ определения точек экстремума следующий. Если x_0, y_0 — одно из решений системы $\frac{\partial f}{\partial x} = 0; \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ и

$$A = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2}, \quad B = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial y}, \quad C = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2},$$

то следует составить дискриминант $\Delta = AC - B^2$ и применить правило: точка (x_0, y_0) является точкой экстремума, если $\Delta > 0$ (и притом точкой максимума, если $A < 0$, или, что то же, $C < 0$, и точкой минимума, если $A > 0$, или, что то же, $C > 0$) и не является точкой экстремума, если $\Delta < 0$. Случай, когда $\Delta = 0$, требует дальнейшего исследования.

Пример.

$$f(x, y) = xy(a - x - y).$$

Решив систему $f'_x(x, y) = y(a - 2x - y) = 0$,

$f'_y(x, y) = x(a - x - 2y) = 0$, определяя четыре точки $(0, 0); (0, a); (a, 0); \left(\frac{a}{3}, \frac{a}{3}\right)$

Здесь

$$f''_{xx} = -2y; \quad f''_{xy} = a - 2x - 2y \text{ и } f''_{yy} = -2x.$$

В первых трёх точках $\Delta = AC - B^2 < 0$ и они не являются точками экстремума функции. В точке $\left(\frac{a}{3}, \frac{a}{3}\right)$ имеем $\Delta = \frac{a^3}{3} > 0$ и она является точкой экстремума; так как при этом $A = C = -\frac{2a}{3}$, то эта точка есть точка максимума, если $a > 0$, и точка минимума, если $a < 0$.

Для отыскания экстремума функции n переменных $f(x, y, z, \dots)$ в случаях, когда аргументы x, y, z, \dots связаны между собой при помощи k условий ($k < n$):

$$\varphi_1(x, y, z, \dots) = 0;$$

$$\varphi_2(x, y, z, \dots) = 0; \dots \varphi_k(x, y, z, \dots) = 0$$

(условный экстремум),

следует составить вспомогательную функцию:

$$F(x, y, z, \dots) = f(x, y, z, \dots) + \lambda_1 \varphi_1(x, y, z, \dots) + \lambda_2 \varphi_2(x, y, z, \dots) + \dots + \lambda_k \varphi_k(x, y, z, \dots)$$

($\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ — постоянные, так называемые множители Лагранжа).

Система $n+k$ уравнений с $n+k$ неизвестными $(x, y, z, \dots; \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$:

$$\varphi_1 = 0; \varphi_2 = 0; \dots; \varphi_k = 0;$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial F}{\partial z} = 0, \dots$$

даёт необходимые (но недостаточные) условия условного экстремума.

ДИФФЕРЕНЦИАЛ

Полным дифференциалом функции $z = f(x, y, \dots)$ аргументов x, y, \dots называется выражение

$$dz = f'_x(x, y, \dots) \Delta x + f'_y(x, y, \dots) \Delta y + \dots,$$

где $\Delta x, \Delta y, \dots$ — приращения аргументов.

Дифференциалы аргументов равны их приращениям:

$$dx = \Delta x, \quad dy = \Delta y, \dots$$

и

$$dz = f'_x dx + f'_y dy + \dots$$

Эта формула инвариантна, т. е. сохраняется и в том случае, если x, y, \dots не являются аргументами: $x = \varphi_1(u, v, \dots); y = \varphi_2(u, v, \dots); \dots$ Выражения $f'_x dx, f'_y dy, \dots$ называются частными дифференциалами:

$$d_x z = f'_x dx; \quad d_y z = f'_y dy, \dots$$

Полный дифференциал функции dz отличается от полного приращения

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y, \dots) - f(x, y, \dots)$$

на бесконечно малую более высокого порядка, чем $\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + \dots}$

Для того чтобы выражение $M(x, y)dx + N(x, y)dy$, линейное относительно dx и dy , было полным дифференциалом некоторой функции переменных x и y , необходимо и достаточно, чтобы имело место тождество $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$.

Выражение $P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz$ является полным дифференциалом некоторой функции переменных x, y, z , если

$$\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}; \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}; \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}.$$

Вообще выражение

$$f_1(x_1, x_2, \dots, x_n)dx_1 + f_2(x_1, x_2, \dots, x_n)dx_2 + \dots + f_n(x_1, x_2, \dots, x_n)dx_n$$

является полным дифференциалом некоторой функции переменных x_1, x_2, \dots, x_n , если для всех i и j

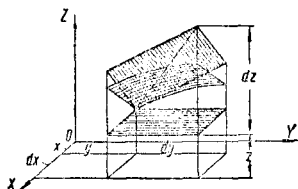
$$(i = 1, 2, 3, \dots, n; j = 1, 2, 3, \dots, n)$$

выполнены равенства:

$$\frac{\partial f_i(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_i}.$$

Геометрически полный дифференциал dz функции двух переменных изображается при помощи приращения аппликаты касательной плоскости в данной точке к поверх-

ности $z=f(x, y)$, соответствующего приращением аргументов dx и dy (фиг. 111).



Фиг. 111

Формулы для дифференциалов высших порядков (для функции двух аргументов):

$$\begin{aligned} d^2z &= d(dz) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx dy + \\ &+ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2 = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^2 z; \dots; \\ d^n z &= d(d^{n-1} z) = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^n z \end{aligned}$$

справедливы, если x и y — аргументы или если x и y зависят от аргументов u, v, \dots , линейно.

Формула Тейлора для функции двух переменных (в символической записи):

$$\begin{aligned} f(x+h, y+k) &= f(x, y) + \\ &+ \frac{1}{1!} \left(\frac{\partial}{\partial x} h + \frac{\partial}{\partial y} k \right) f(x, y) + \\ &+ \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial}{\partial x} h + \frac{\partial}{\partial y} k \right)^2 f(x, y) + \dots + \\ &+ \frac{1}{n!} \left(\frac{\partial}{\partial x} h + \frac{\partial}{\partial y} k \right)^n f(x, y) + \\ &+ \frac{1}{(n+1)!} \left(\frac{\partial}{\partial x} h + \frac{\partial}{\partial y} k \right)^{n+1} f(x+\theta_1 h, y+\theta_2 k), \end{aligned}$$

где $0 < \theta_1 < 1$; $0 < \theta_2 < 1$.

При $x=y=0$ получаем формулу Маклорена (см. также стр. 160).

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

НЕОПРЕДЕЛЁННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Функция $F(x)$ называется первообразной (примитивной) для функции $f(x)$, если $F'(x) = f(x)$. Если $F_1(x)$ и $F_2(x)$ первообразные для одной и той же функции $f(x)$, то разность $F_1(x) - F_2(x)$ постоянна. Совокупность всех первообразных для некоторой функции $f(x)$ называется неопределённым интегралом от этой функции и обозначается символом $\int f(x) dx$, где \int — знак интеграла, $f(x)$ — подинтегральная функция, $f(x) dx$ — подинтегральное выражение.

Таким образом, $\int f(x) dx = F(x) + C$, где $F(x)$ — одна из первообразных функции $f(x)$, а C — произвольная постоянная (постоянная интегрирования).

ТАБЛИЦА ОСНОВНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

- 1) $\int dx = x + C$;
- 2) $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1)$;
- 3) $\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$;
- 4) $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$;
- 5) $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \frac{x-a}{x+a} + C =$
 $= \begin{cases} -\frac{1}{a} \operatorname{Arth} \frac{x}{a} + C, & \text{если } x < a, \\ -\frac{1}{a} \operatorname{Arcth} \frac{x}{a} + C, & \text{если } x > a; \end{cases}$
- 6) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \operatorname{arcsin} \frac{x}{a} + C$;

$$\begin{aligned} 7) \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}} &= \ln(x + \sqrt{x^2 + a}) + C = \\ &= \begin{cases} \operatorname{Arsh} \frac{x}{\sqrt{a}} + C, & \text{если } a > 0, \\ \operatorname{Arch} \frac{x}{\sqrt{-a}} + C, & \text{если } a < 0; \end{cases} \end{aligned}$$

$$8) \int e^x dx = e^x + C;$$

$$9) \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C;$$

$$10) \int \sin x dx = -\cos x + C;$$

$$11) \int \cos x dx = \sin x + C;$$

$$12) \int \operatorname{tg} x dx = -\ln \cos x + C;$$

$$13) \int \operatorname{ctg} x dx = \ln \sin x + C;$$

$$14) \int \frac{dx}{\sin x} = \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2} + C;$$

$$15) \int \frac{dx}{\cos x} = \ln \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) + C;$$

$$16) \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C;$$

$$17) \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C;$$

$$18) \int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C;$$

$$19) \int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C;$$

$$20) \int \operatorname{th} x dx = \ln \operatorname{ch} x + C;$$

$$21) \int \operatorname{cth} x \, dx = \ln \operatorname{sh} x + C;$$

$$22) \int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C;$$

$$23) \int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C.$$

ПРАВИЛА ИНТЕГРИРОВАНИЯ

$$1) \int [f_1(x) \pm f_2(x)] dx = \int f_1(x) dx \pm \int f_2(x) dx;$$

$$2) \int a f(x) dx = a \int f(x) dx \quad (a - \text{постоянная});$$

$$3) \int u(x) dv(x) = u(x) v(x) - \int v(x) du(x)$$

(правило интегрирования по частям);

$$4) \text{ если } x = \varphi(t), \text{ то } \int f(x) dx = \int f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt$$

(правило замены переменной или правило подстановки).

Пример 1. Найти $\int x \cos x \, dx$.

Пользуясь правилом интегрирования по частям, полагаем $u=x$, $dv=\cos x \, dx$, откуда $du=dx$, $v=\sin x$ и $\int x \cos x \, dx = x \sin x - \int \sin x \, dx = x \sin x + \cos x + C$.

Пример 2.

$$\int \sin ax \, dx = \int \sin t \frac{dt}{a} = \frac{1}{a} \int \sin t \, dt =$$

$$= -\frac{1}{a} \cos t + C = -\frac{1}{a} \cos ax + C$$

(подстановка $ax = t$, откуда $adx = dt$, $dx = \frac{dt}{a}$).

Пример 3.

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \int \frac{dt}{t} = \ln t + C = \ln f(x) + C \quad (\text{подстановка } f(x) = t, \text{ откуда } f'(x)dx = dt).$$

Пример 4.

$$\int \sqrt{1-x^2} \, dx = \int \cos^2 t \, dt = \frac{1}{2} \int (1 + \cos 2t) \, dt =$$

$$= \frac{1}{2} t + \frac{1}{4} \sin 2t + C = \frac{1}{2} (\arcsin x + x \sqrt{1-x^2}) + C$$

(подстановка $x = \sin t$, $dx = \cos t \, dt$).

ИНТЕГРИРОВАНИЕ РАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

$$1) \int (ax+b)^n dx = \frac{1}{(n+1)a} (ax+b)^{n+1} + C$$

($n \neq -1$);

$$2) \int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a} \ln(ax+b) + C;$$

$$3) \int \frac{dx}{(ax+b)^n} = -\frac{1}{(n-1)a(ax+b)^{n-1}} + C$$

($n \neq 1$);

$$4) \int \frac{dx}{ax^2+b} = \frac{1}{\sqrt{ab}} \arctg \sqrt{\frac{a}{b}} x + C$$

($ab > 0$);

$$5) \int \frac{dx}{ax^2-b} = \frac{1}{2\sqrt{ab}} \ln \frac{\sqrt{ab}-ax}{\sqrt{ab}+ax} + C$$

($ab > 0$);

$$6) \int \frac{dx}{(x+a)(x+b)} = \frac{1}{a-b} \ln \frac{x+b}{x+a} + C$$

($a \neq b$);

$$7) \int \frac{dx}{ax^2+bx+c} = \frac{1}{a} \int \frac{dx}{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac-b^2}{4a^2}}$$

$$= \begin{cases} \frac{2}{a\sqrt{4ac-b^2}} \arctg \frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}} + C, & \text{если } 4ac-b^2 > 0; \\ \frac{1}{a\sqrt{b^2-4ac}} \ln \frac{2ax+b-\sqrt{b^2-4ac}}{2ax+b+\sqrt{b^2-4ac}} + C, & \text{если } 4ac-b^2 < 0; \\ -\frac{2}{2ax+b} + C, & \text{если } 4ac-b^2=0; \end{cases}$$

$$8) \int \frac{Mx+N}{ax^2+bx+c} dx = \frac{M}{2a} \ln(ax^2+bx+c) +$$

$$+ \frac{2aN-Mb}{2a} \int \frac{dx}{ax^2+bx+c};$$

$$9) \int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^n} =$$

$$= \frac{2ax+b}{(n-1)(4ac-b^2)(ax^2+bx+c)^{n-1}} +$$

$$+ \frac{2(2n-3)a}{(n-1)(4ac-b^2)} \int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^{n-1}}$$

($n \neq 1$);

можно также подстановкой $x + \frac{b}{2a} =$

$= \frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a} \operatorname{tg} t$ ($4ac-b^2 > 0$) привести к виду $\int \cos^{2m} t \, dt$ (стр. 140);

$$10) \int \frac{Mx+N}{(ax^2+bx+c)^n} dx =$$

$$= -\frac{M}{2(n-1)a(ax^2+bx+c)^{n-1}} +$$

$$+ \frac{2aN-bM}{2a} \int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^n} \quad (n \neq 1).$$

Интегрирование рациональных дробей в общем случае. Если рациональная дробь $\frac{P(x)}{Q(x)}$ неправильная [т. е. степень многочлена $P(x)$ больше или равна степени многочлена $Q(x)$], то, разделив $P(x)$ на $Q(x)$ по правилу деления многочлена на многочлен, можно представить дробь $\frac{P(x)}{Q(x)}$ в виде суммы некоторого многочлена и правильной рациональной дроби $\frac{P_1(x)}{Q(x)}$.

Правильную рациональную дробь $\frac{P_1(x)}{Q(x)}$ можно разложить на сумму простейших дробей (стр. 97), которые интегрируются, как указано выше.

¹ Для вычисления интеграла эта формула должна быть применена $n-1$ раз (рекуррентная формула).

В частности, если все корни многочлена $Q(x)$ действительны и различны, то

$$Q(x) = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)$$

и

$$\frac{P_1(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x - x_1} + \frac{A_2}{x - x_2} + \dots + \frac{A_n}{x - x_n},$$

где коэффициенты A_i могут быть определены из формул:

$$A_1 = \frac{P_1(x_1)}{Q'(x_1)}; \quad A_2 = \frac{P_1(x_2)}{Q'(x_2)}; \dots;$$

$$A_n = \frac{P_1(x_n)}{Q'(x_n)}.$$

Метод Остроградского. Метод Остроградского позволяет свести интегрирование произвольной рациональной дроби к интегрированию дроби, знаменатель которой имеет только простые корни. Для этого знаменатель правильной дроби

$$\frac{F(x)}{Q(x)}$$

следует представить в виде

$$Q(x) = X_1(x) X_2^3(x) \dots X_p^p(x),$$

где $X_1(x)$ — произведение линейных и квадратичных множителей, соответствующих простым корням, а $X_i(x)$ — произведение линейных и квадратичных множителей, соответствующих корням кратности i . Тогда

$$\int \frac{F(x)}{Q(x)} dx = \frac{H(x)}{U(x)} + \int \frac{G(x)}{V(x)} dx, \quad (*)$$

где

$$U(x) = X_2 X_3^2 \dots X_p^{p-1};$$

$$V(x) = X_1 X_2 \dots X_p,$$

а $H(x)$ и $G(x)$ — многочлены с неопределёнными коэффициентами степеней соответственно на единицу меньше, чем степени многочленов $U(x)$ и $V(x)$.

Многочлены $U(x)$ и $V(x)$ можно найти, не производя разложения $Q(x)$ на простейшие множители: $U(x)$ есть общий наибольший делитель многочленов $Q(x)$ и $Q'(x)$, а

$$V(x) = \frac{Q(x)}{U(x)}.$$

Коэффициенты многочленов $H(x)$ и $G(x)$ можно найти путём дифференцирования равенства (*), что приводит к равенству

$$F = \frac{(UH' - HU')V}{U} + GU,$$

в обеих частях которого следует сравнить коэффициенты при одинаковых степенях x .

Пример. Вычислить

$$\int \frac{4x^5 - 1}{(x^5 + x + 1)^2} dx.$$

Здесь:

$$Q(x) = (x^5 + x + 1)^2;$$

$$Q'(x) = 2(x^5 + x + 1)(5x^4 + 1);$$

$$U(x) = x^5 + x + 1;$$

$$V(x) = \frac{Q(x)}{U(x)} = x^5 + x + 1$$

и

$$\int \frac{4x^5 - 1}{(x^5 + x + 1)^2} dx = \frac{H(x)}{x^5 + x + 1} + \int \frac{G(x)}{x^5 + x + 1} dx.$$

Положив:

$$H(x) = a_0 x^4 + a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x + a_4;$$

$$G(x) = b_0 x^4 + b_1 x^3 + b_2 x^2 + b_3 x + b_4,$$

имеем

$$4x^5 - 1 = (x^5 + x + 1)(b_0 x^4 + b_1 x^3 + b_2 x^2 + b_3 x + b_4) + (x^5 + x + 1)(4a_0 x^4 + 3a_1 x^3 + 2a_2 x^2 + a_3 x + a_4) - (5x^4 + 1)(a_0 x^4 + a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x + a_4).$$

Сравнив коэффициенты при одинаковых степенях x в обеих частях последнего равенства, находим

$$a_0 = a_1 = a_2 = a_4 = 0; \quad a_3 = -1;$$

$$b_0 = b_1 = b_2 = b_3 = b_4 = 0$$

и

$$\int \frac{4x^5 - 1}{(x^5 + x + 1)^2} dx = -\frac{x}{x^5 + x + 1} + C.$$

ИНТЕГРИРОВАНИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ИРРАЦИОНАЛЬНОСТЕЙ

- 1) $\int \sqrt{ax+b} dx = \frac{2}{3a} (\sqrt{ax+b})^3 + C;$ 2) $\int \sqrt[n]{ax+b} dx = \frac{n}{(n+1)a} (\sqrt[n]{ax+b})^{n+1} + C;$
- 3) $\int (\sqrt[n]{ax+b})^m dx = \frac{n}{(n+m)a} (\sqrt[n]{ax+b})^{n+m} + C;$ 4) $\int \frac{dx}{\sqrt{ax+b}} = \frac{2}{a} \sqrt{ax+b} + C;$
- 5) $\int \frac{dx}{\sqrt[n]{ax+b}} = \frac{n}{(n-1)a} (\sqrt[n]{ax+b})^{n-1} + C;$
- 6) $\int \frac{dx}{(\sqrt[n]{ax+b})^m} = \frac{n}{(n-m)a} (\sqrt[n]{ax+b})^{n-m} + C;$
- 7) $\int \frac{Mx+N}{\sqrt{ax+b}} dx = \frac{2}{3a^2} (3Na - 2Mb + Max) \sqrt{ax+b} + C;$
- 8) $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \ln(2ax+b+2\sqrt{a}\sqrt{ax^2+bx+c}) + C, \text{ если } a > 0;$
 $= \frac{1}{\sqrt{a}} \operatorname{Ar sh} \frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}} + C, \text{ если } a > 0 \text{ и } 4ac-b^2 > 0;$
 $= \frac{1}{\sqrt{a}} \operatorname{Ar ch} \frac{2ax+b}{\sqrt{b^2-4ac}} + C, \text{ если } a > 0 \text{ и } 4ac-b^2 < 0;$
 $= -\frac{1}{\sqrt{-a}} \operatorname{arc sin} \frac{2ax+b}{\sqrt{b^2-4ac}} + C, \text{ если } a < 0;$

- 9) $\int \frac{Mx + N}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx = \frac{M}{a} \sqrt{ax^2 + bx + c} + \frac{2aN - Mb}{2a} \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}};$
- 10) $\int \frac{x^n dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = \frac{x^{n-1} \sqrt{ax^2 + bx + c}}{na} - \frac{(n-1)c}{na} \int \frac{x^{n-2} dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} -$
 $-\frac{(2n-1)b}{2na} \int \frac{x^{n-1} dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}};$
- 11) $\int \sqrt{x^2 + a^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 + a^2} + \frac{a^2}{2} \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) + C =$
 $= \frac{x}{2} \sqrt{x^2 + a^2} + \frac{a^2}{2} \operatorname{Ar sh} \frac{x}{a} + C;$
- 12) $\int \sqrt{x^2 - a^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2} \ln(x + \sqrt{x^2 - a^2}) + C =$
 $= \frac{x}{2} \sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2} \operatorname{Ar ch} \frac{x}{a} + C;$
- 13) $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C;$
- 14) $\int x \sqrt{x^2 \pm a^2} dx = \frac{1}{3} (x^2 \pm a^2)^{\frac{3}{2}} + C;$
- 15) $\int x \sqrt{a^2 - x^2} dx = -\frac{1}{3} (a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}} + C;$
- 16) $\int x^2 \sqrt{x^2 \pm a^2} dx = \frac{x}{4} \sqrt{(x^2 \pm a^2)^3} - \frac{a^2}{8} [x \sqrt{x^2 \pm a^2} + a^2 \ln(x + \sqrt{x^2 \pm a^2})] + C =$
 $= \frac{x}{4} \sqrt{(x^2 \pm a^2)^3} - \frac{a^2}{8} \left(x \sqrt{x^2 \pm a^2} + a^2 \operatorname{Ar sh} \frac{x}{a} \right) + C;$
- 17) $\int x^2 \sqrt{a^2 - x^2} dx = -\frac{x}{4} (a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}} + \frac{a^2}{8} \left(x \sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsin \frac{x}{a} \right) + C;$
- 18) $\int \frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{x} dx = \sqrt{x^2 + a^2} - a \ln \frac{a + \sqrt{x^2 + a^2}}{x} + C;$
- 19) $\int \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x} dx = \sqrt{x^2 - a^2} - a \arccos \frac{a}{x} + C;$
- 20) $\int \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x} dx = \sqrt{a^2 - x^2} - a \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x} + C;$
- 21) $\int \sqrt{ax^2 + bx + c} dx = \frac{2ax + b}{4a} \sqrt{ax^2 + bx + c} + \frac{4ac - b^2}{8a} \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}};$

можно также, положив $x + \frac{b}{2a} = t$, привести к одному из видов 11, 12 или 13;

22) $\int \frac{dx}{(x-a)^n \sqrt{ax^2 + bx + c}}$ приводится к виду 10 подстановкой $x - a = \frac{1}{z}$;

23) $\int R \left\{ x, \left(\frac{ax+b}{cx+d} \right)^{\frac{m_1}{n_1}}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d} \right)^{\frac{m_p}{n_p}} \right\} dx,$

или, в частном случае,

$\int R \left\{ x, (ax+b)^{\frac{m_1}{n_1}}, \dots, (ax+b)^{\frac{m_p}{n_p}} \right\} dx,$

где R — рациональная функция от аргументов, обозначенных внутри фигурной скобки, а $m_1, m_2, \dots, m_p, n_1, n_2, \dots, n_p$ — целые числа, приводится к интегралу от рациональной дроби подстановкой $\frac{ax+b}{cx+d} = t^N$

(в указанном частном случае $ax+b = t^N$), где N — общее наименьшее кратное чисел n_1, n_2, \dots, n_p .

Пример 1.

$$\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \frac{dx}{x}.$$

Полагая $\frac{1-x}{1+x} = t^2$, имеем

$$x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \text{ и } dx = -\frac{4tdt}{(1+t^2)^2}.$$

откуда

$$\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \frac{dx}{x} = \int \frac{-4t^2 dt}{(1-t^2)(1+t^2)}.$$

Разложив подинтегральное выражение на сумму простых дробей, получим

$$-\frac{4t^2}{(1+t)(1-t)(1+t^2)} = -\frac{1}{1+t} - \frac{1}{1-t} + \frac{2}{1+t^2}$$

и далее

$$\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \frac{dx}{x} = 2 \operatorname{arctg} t - \ln(1+t) + \ln(1-t) + C = 2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + \ln \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}} + C.$$

Пример 2.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}.$$

Полагая $1+x=t^2$, имеем $dx=2t dt$ и

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}} &= \int \frac{2t^2 dt}{t^2 + t^2} = 6 \int \frac{t^2 dt}{t^2 + 1} = \\ &= 2t^3 - 3t + 6t - 6 \ln(t+1) + C = \\ &= 2\sqrt{1+x} - 3\sqrt{1-x} + 6\sqrt{1+x} - \\ &\quad - 6 \ln(\sqrt{1+x} + 1) + C; \end{aligned}$$

24) $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c}) dx$, где R — рациональная функция от x и $\sqrt{ax^2+bx+c}$, приводится к интегралу от рациональной дроби одной из следующих трёх подстановок (подстановки Эйлер а):

а) $\sqrt{ax^2+bx+c} = t \pm x\sqrt{a}$ ($a > 0$),

б) $\sqrt{ax^2+bx+c} = tx \pm \sqrt{c}$ ($c > 0$),

в) $\sqrt{ax^2+bx+c} = t(x-\alpha)$ ($4ac-b^2 < 0$), где α — один из корней трёхчлена ax^2+bx+c .

$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c}) dx$ можно привести также к $\int R_1(\sin t, \cos t) dt$ (стр. 140) при помощи тригонометрических подстановок:

$$x + \frac{b}{2a} = \begin{cases} \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \sin t \\ \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \cos t \end{cases} \quad (a < 0, 4ac - b^2 < 0);$$

$$x + \frac{b}{2a} = \begin{cases} \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \sec t \\ \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \operatorname{cosec} t \end{cases} \quad (a > 0, 4ac - b^2 < 0);$$

$$x + \frac{b}{2a} = \begin{cases} \frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a} \operatorname{tg} t \\ \frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a} \operatorname{ctg} t \end{cases} \quad (a > 0, 4ac - b^2 > 0);$$

25) $\int x^m (ax^n+b)^p dx$ (интеграл от биномиального дифференциала) выражается через элементарные функции только при выполнении одного из следующих условий (условия Чебышева интегрируемости биномиального дифференциала):

а) если p целое, б) если $\frac{m+1}{n}$ целое, в) если $\frac{m+1}{n} + p$ целое.

В первом случае, если $p > 0$, получаем сумму степенных интегралов, если же $p < 0$, то подстановка $x = z^N$, где N — общий знаменатель дробей m и n , приводит к интегралу от рациональной функции.

Во втором случае полагаем $ax^n + b = z^s$, где s — знаменатель дроби $p = \frac{r}{s}$.

В третьем случае пользуемся подстановкой $ax^n + b = z^s x^n$.

Пример 1. $\int x^{1/3} (1+3x^{2/3})^{1/3} dx.$

Здесь $\frac{m+1}{n} = 2$ и, следовательно, полагаем

$1+3x^{2/3} = z^2$, откуда

$$x = \frac{(z^2-1)^{3/2}}{3\sqrt{3}}, \quad dx = \frac{\sqrt{3}}{2} (z^2-1)^{1/2} z dz$$
 и

$$\begin{aligned} \int x^{1/3} (1+3x^{2/3})^{1/3} dx &= \frac{1}{2} \int z^3 (z^2-1) dz = \\ &= \frac{z^4}{4} - \frac{z^6}{6} + C = \frac{(1+3x^{2/3})^{7/2}}{14} - \\ &\quad - \frac{(1+3x^{2/3})^{9/2}}{8} + C. \end{aligned}$$

Пример 2. $\int \frac{dx}{x^{11} \sqrt{1+x^4}}.$

Здесь $\frac{m+1}{n} + p = -3$; положив $1+x^4 = z^2 x^4$,

имеем:

$$x = \frac{1}{(z^2-1)^{1/4}}, \quad dx = -\frac{z dz}{2(z^2-1)^{5/4}}$$

и

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^{11} \sqrt{1+x^4}} &= -\frac{1}{2} \int \frac{z dz}{(z^2-1)^{5/4}} = \\ &= -\frac{z^4}{10} + \frac{z^2}{3} - \frac{z}{2} + C = -\frac{1}{10} \sqrt{\left(\frac{1+x^4}{x^4}\right)^{5/4}} + \\ &\quad + \frac{1}{3} \sqrt{\left(\frac{1+x^4}{x^4}\right)^{3/4}} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1+x^4}{x^4}} + C. \end{aligned}$$

ИНТЕГРИРОВАНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

m, n, p, q — целые положительные числа.

1) $\int \sin^2 x dx = -\frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{2} x + C;$

2) $\int \cos^2 x dx = \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{2} x + C;$

3) $\int \sin x \cos x dx = \frac{1}{2} \sin^2 x + C;$

4) $\int \sin mx \cos nx dx = -\frac{\cos(m+n)x}{2(m+n)} - \frac{\cos(m-n)x}{2(m-n)} + C; \quad (m \neq n);$

5) $\int \sin mx \sin nx dx = \frac{\sin(m-n)x}{2(m-n)} - \frac{\sin(m+n)x}{2(m+n)} + C; \quad (m \neq n);$

6) $\int \cos mx \cos nx dx = \frac{\sin(m-n)x}{2(m-n)} + \frac{\sin(m+n)x}{2(m+n)} + C; \quad (m \neq n);$

$$\begin{aligned}
7) \int \frac{dx}{1 + \cos x} &= \operatorname{tg} \frac{x}{2} + C; \\
8) \int \frac{dx}{1 - \cos x} &= -\operatorname{ctg} \frac{x}{2} + C; \\
9) \int \frac{dx}{a + b \cos x} &= \\
&= \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}} \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right) + C \\ \quad (\text{если } a^2 > b^2), \\ \frac{1}{\sqrt{b^2 - a^2}} \ln \frac{b + a \cos x + \sqrt{b^2 - a^2} \sin x}{a + b \cos x} + C = \\ = \frac{2}{\sqrt{b^2 - a^2}} \operatorname{Arth} \left(\sqrt{\frac{b-a}{b+a}} \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right) + C \\ \quad (\text{если } a^2 < b^2); \end{cases} \\
10) \int \frac{\cos x \, dx}{a + b \cos x} &= \frac{x}{b} - \frac{a}{b} \int \frac{dx}{a + b \cos x}; \\
11) \int \frac{\sin x \, dx}{a + b \cos x} &= \\
&= -\frac{1}{b} \ln(a + b \cos x) + C; \\
12) \int \sin^n x \, dx &= -\frac{\cos x \sin^{n-1} x}{n} + \\
&\quad + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} x \, dx; \\
13) \int \cos^n x \, dx &= \frac{\sin x \cos^{n-1} x}{n} + \\
&\quad + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x \, dx; \\
14) \int \operatorname{tg}^n x \, dx &= \frac{\operatorname{tg}^{n-1} x}{n-1} - \int \operatorname{tg}^{n-2} x \, dx; \\
15) \int \operatorname{ctg}^n x \, dx &= -\frac{\operatorname{ctg}^{n-1} x}{n-1} - \int \operatorname{ctg}^{n-2} x \, dx; \\
16) \int \frac{dx}{\sin^n x} &= -\frac{\cos x}{(n-1) \sin^{n-1} x} + \\
&\quad + \frac{n-2}{n-1} \int \frac{dx}{\sin^{n-2} x}; \\
17) \int \frac{dx}{\cos^n x} &= \frac{\sin x}{(n-1) \cos^{n-1} x} + \\
&\quad + \frac{n-2}{n-1} \int \frac{dx}{\cos^{n-2} x}; \\
18) \int \sin^p x \cos^q x \, dx &= \frac{\sin^{p+1} x \cos^{q-1} x}{p+q} + \\
&\quad + \frac{q-1}{p+q} \int \sin^p x \cos^{q-2} x \, dx = \\
&= -\frac{\sin^{p-1} x \cos^{q+1} x}{p+q} + \\
&\quad + \frac{p-1}{p+q} \int \sin^{p-2} x \cos^q x \, dx; \\
19) \int \sin^{-p} x \cos^q x \, dx &= \\
&= -\frac{\sin^{-p+1} x \cos^{q+1} x}{p-1} +
\end{aligned}$$

$$+ \frac{p-q-2}{p-1} \int \sin^{-p+2} x \cos^q x \, dx;$$

$$\begin{aligned}
20) \int \sin^p x \cos^{-q} x \, dx &= \frac{\sin^{p+1} x \cos^{-q+1} x}{q-1} + \\
&\quad + \frac{q-p-2}{q-1} \int \sin^p x \cos^{-q+2} x \, dx;
\end{aligned}$$

21) $\int \sin^r x \cos^s x \, dx$ приводится к сумме степенных интегралов подстановкой $\sin x = z$, если $s > 0$ и нечётное, и $\cos x = z$, если $r > 0$ и нечётное.

Пример.

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sin^3 x \, dx}{\sqrt{\cos x}} &= \int \frac{(1 - \cos^2 x) \sin x \, dx}{\sqrt{\cos x}} = \int \frac{1 - z^2}{\sqrt{z}} \, dz = \\
&= -2z^{1/2} + \frac{2}{5} z^{5/2} + C = -2 \cos^{1/2} x + \\
&\quad + \frac{2}{5} \cos^{5/2} x + C.
\end{aligned}$$

В частности, вместо формул 12, 13, 14, 15, 18, 19, 20, если n , p или q нечётные, удобнее употреблять указанную подстановку.

В случае, если оба числа r и s чётные и положительные, можно вместо общей формулы 18 понизить степень, применяя тождества:

$$\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{\cos 2x}{2}, \quad \sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{\cos 2x}{2},$$

$$\sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x;$$

$$\begin{aligned}
22) \int \operatorname{tg}^r x \sec^n x \, dx, \quad \int \operatorname{ctg}^r x \sec^n x \, dx, \\
\int \operatorname{tg}^r x \operatorname{cosec}^n x \, dx, \quad \int \operatorname{ctg}^r x \operatorname{cosec}^n x \, dx,
\end{aligned}$$

где $n > 0$ и чётное, а r — любое, приводятся к сумме степенных интегралов: первые два — подстановкой $\operatorname{tg} x = z$, вторые два — подстановкой $\operatorname{ctg} x = z$ (следует при этом учитывать тождества:

$$\sec^2 x = 1 + \operatorname{tg}^2 x, \quad \operatorname{cosec}^2 x = 1 + \operatorname{ctg}^2 x).$$

В частности, этим способом удобно вычислять интегралы 16 и 17 в случае, если n чётное.

$$\begin{aligned}
\text{Пример.} \quad \int \sqrt{\operatorname{ctg} x} \sec^4 x \, dx &= \int \frac{1 + \operatorname{tg}^2 x}{\sqrt{\operatorname{tg} x}} \sec^2 x \, dx = \\
&= \int \frac{1 + z^2}{\sqrt{z}} \, dz = 2z^{1/2} + \frac{2}{5} z^{5/2} + C = \\
&= 2 \operatorname{tg}^{1/2} x + \frac{2}{5} \operatorname{tg}^{5/2} x + C;
\end{aligned}$$

23) $\int R(\sin x, \cos x) \, dx$, где подинтегральная функция R рациональна относительно $\sin x$ и $\cos x$, приводится к интегралу от рациональной дроби подстановкой $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = z$; при этом:

$$\begin{aligned}
dx &= \frac{2dz}{1+z^2}, \quad \sin x = \frac{2z}{1+z^2}, \\
\cos x &= \frac{1-z^2}{1+z^2}.
\end{aligned}$$

ИНТЕГРИРОВАНИЕ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

- 1) $\int \operatorname{sh}^2 x \, dx = \frac{1}{2} \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x - \frac{1}{2} x + C;$
- 2) $\int \operatorname{ch}^2 x \, dx = \frac{1}{2} \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x + \frac{1}{2} x + C;$
- 3) $\int \operatorname{sh}^n x \, dx = \frac{1}{n} \operatorname{sh}^{n-1} x \operatorname{ch} x - \frac{n-1}{n} \int \operatorname{sh}^{n-2} x \, dx, \quad (n > 0);$
- 4) $\int \operatorname{ch}^n x \, dx = \frac{1}{n} \operatorname{ch}^{n-1} x \operatorname{sh} x + \frac{n-1}{n} \int \operatorname{ch}^{n-2} x \, dx, \quad (n > 0);$
- 5) $\int \frac{dx}{\operatorname{sh} x} = \ln \operatorname{th} \frac{x}{2} + C;$ 6) $\int \frac{dx}{\operatorname{ch} x} = 2 \operatorname{arctg} e^x + C;$
- 7) $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^n x} = \frac{1}{1-n} \operatorname{sh}^{1-n} x \operatorname{ch} x - \frac{n-2}{n-1} \int \frac{dx}{\operatorname{sh}^{n-2} x} \quad (n > 1);$
- 8) $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^n x} = \frac{1}{n-1} \operatorname{ch}^{1-n} x \operatorname{sh} x + \frac{n-2}{n-1} \int \frac{dx}{\operatorname{ch}^{n-2} x} \quad (n > 1);$
- 9) $\int \operatorname{th}^2 x \, dx = x - \operatorname{th} x + C;$
- 10) $\int \operatorname{cth}^2 x \, dx = x - \operatorname{cth} x + C;$
- 11) $\int \operatorname{sh} ax \operatorname{sh} bx \, dx = \frac{1}{2(a+b)} \operatorname{sh}(a+b)x - \frac{1}{2(a-b)} \operatorname{sh}(a-b)x + C \quad (a^2 \neq b^2);$
- 12) $\int \operatorname{ch} ax \operatorname{ch} bx \, dx = \frac{1}{2(a+b)} \operatorname{sh}(a+b)x + \frac{1}{2(a-b)} \operatorname{sh}(a-b)x + C \quad (a^2 \neq b^2);$
- 13) $\int \operatorname{sh} ax \operatorname{ch} bx \, dx = \frac{1}{2(a+b)} \operatorname{ch}(a+b)x + \frac{1}{2(a-b)} \operatorname{ch}(a-b)x + C \quad (a^2 \neq b^2).$

ИНТЕГРИРОВАНИЕ НЕКОТОРЫХ ТРАНСЦЕНДЕНТНЫХ ФУНКЦИЙ

- 1) $\int \arcsin x \, dx = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C;$
- 2) $\int \arccos x \, dx = x \arccos x - \sqrt{1-x^2} + C;$
- 3) $\int \operatorname{arctg} x \, dx = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C;$
- 4) $\int \operatorname{arcctg} x \, dx = x \operatorname{arcctg} x + \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C;$
- 5) $\int x \arcsin x \, dx = \frac{1}{4} [(2x^2-1) \arcsin x + x \sqrt{1-x^2}] + C;$
- 6) $\int x \arccos x \, dx = \frac{1}{4} [(2x^2-1) \arccos x - x \sqrt{1-x^2}] + C;$
- 7) $\int x \operatorname{arctg} x \, dx = \frac{1}{2} [(x^2+1) \operatorname{arctg} x - x] + C;$
- 8) $\int x \operatorname{arcctg} x \, dx = \frac{1}{2} [(x^2+1) \operatorname{arcctg} x + x] + C;$
- 9) $\int x^n \arcsin x \, dx = \frac{1}{n+1} \left(x^{n+1} \arcsin x - \int \frac{x^{n+1} dx}{\sqrt{1-x^2}} \right);$
- 10) $\int x^n \arccos x \, dx = \frac{1}{n+1} \left(x^{n+1} \arccos x + \int \frac{x^{n+1} dx}{\sqrt{1-x^2}} \right);$
- 11) $\int x^n \operatorname{arctg} x \, dx = \frac{1}{n+1} \left(x^{n+1} \operatorname{arctg} x - \int \frac{x^{n+1} dx}{1+x^2} \right);$
- 12) $\int x^n \operatorname{arcctg} x \, dx = \frac{1}{n+1} \left(x^{n+1} \operatorname{arcctg} x + \int \frac{x^{n+1} dx}{1+x^2} \right);$

- 13) $\int \operatorname{Ar sh} x \, dx = x \operatorname{Ar sh} x - \sqrt{1+x^2} + C;$
- 14) $\int \operatorname{Ar ch} x \, dx = x \operatorname{Ar ch} x - \sqrt{x^2-1} + C;$
- 15) $\int \operatorname{Ar th} x \, dx = x \operatorname{Ar th} x + \frac{1}{2} \ln(1-x^2) + C;$
- 16) $\int x \operatorname{Ar sh} x \, dx = \frac{1}{4} [(2x^2+1) \operatorname{Ar sh} x - x \sqrt{1+x^2}] + C;$
- 17) $\int x \operatorname{Ar ch} x \, dx = \frac{1}{4} [(2x^2-1) \operatorname{Ar ch} x - x \sqrt{x^2-1}] + C;$
- 18) $\int \ln x \, dx = x \ln x - x + C;$
- 19) $\int (\ln x)^n \, dx = x (\ln x)^n - n \int (\ln x)^{n-1} \, dx;$
- 20) $\int x^n \ln x \, dx = x^{n+1} \left[\frac{\ln x}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2} \right] + C;$
- 21) $\int \frac{(\ln x)^n}{x} \, dx = \frac{(\ln x)^{n+1}}{n+1} + C;$
- 22) $\int \frac{dx}{x \ln x} = \ln \ln x + C;$
- 23) $\int \sin \ln x \, dx = \frac{x}{2} (\sin \ln x - \cos \ln x) + C;$
- 24) $\int \cos \ln x \, dx = \frac{x}{2} (\sin \ln x + \cos \ln x) + C;$
- 25) $\int x \sin ax \, dx = -\frac{1}{a} x \cos ax + \frac{1}{a^2} \sin ax + C;$
- 26) $\int x \cos ax \, dx = \frac{1}{a} x \sin ax - \frac{1}{a^2} \cos ax + C;$
- 27) $\int x^n \sin ax \, dx = -\frac{1}{a} x^n \cos ax + \frac{n}{a} \int x^{n-1} \cos ax \, dx;$
- 28) $\int x^n \cos ax \, dx = \frac{1}{a} x^n \sin ax - \frac{n}{a} \int x^{n-1} \sin ax \, dx;$
- 29) $\int x \operatorname{sh} ax \, dx = \frac{1}{a} x \operatorname{ch} ax - \frac{1}{a^2} \operatorname{sh} ax + C;$
- 30) $\int x \operatorname{ch} ax \, dx = \frac{1}{a} x \operatorname{sh} ax - \frac{1}{a^2} \operatorname{ch} ax + C;$
- 31) $\int x^n \operatorname{sh} ax \, dx = \frac{1}{a} x^n \operatorname{ch} ax - \frac{n}{a} \int x^{n-1} \operatorname{ch} ax \, dx;$
- 32) $\int x^n \operatorname{ch} ax \, dx = \frac{1}{a} x^n \operatorname{sh} ax - \frac{n}{a} \int x^{n-1} \operatorname{sh} ax \, dx;$
- 33) $\int x e^{ax} \, dx = \frac{e^{ax}}{a^2} (ax-1) + C;$
- 34) $\int x^n e^{ax} \, dx = \frac{1}{a} x^n e^{ax} - \frac{n}{a} \int x^{n-1} e^{ax} \, dx;$
- 35) $\int e^{ax} \sin(\omega x + \varphi) \, dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + \omega^2} [a \sin(\omega x + \varphi) - \omega \cos(\omega x + \varphi)] + C;$
- 36) $\int e^{ax} \cos(\omega x + \varphi) \, dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + \omega^2} [a \cos(\omega x + \varphi) + \omega \sin(\omega x + \varphi)] + C;$
- 37) $\int x e^{ax} \sin(\omega x + \varphi) \, dx = \frac{x e^{ax}}{a^2 + \omega^2} [a \sin(\omega x + \varphi) - \omega \cos(\omega x + \varphi)] -$
 $-\frac{e^{ax}}{(a^2 + \omega^2)^2} [(a^2 - \omega^2) \sin(\omega x + \varphi) - 2a\omega \cos(\omega x + \varphi)] + C;$

$$38) \int x e^{ax} \cos(\omega x + \varphi) dx = \frac{x e^{ax}}{a^2 + \omega^2} [a \cos(\omega x + \varphi) + \omega \sin(\omega x + \varphi)] - \\ - \frac{e^{ax}}{(a^2 + \omega^2)^2} [(a^2 - \omega^2) \cos(\omega x + \varphi) + 2a\omega \sin(\omega x + \varphi)] + C;$$

$$39) \int \operatorname{sh} ax \sin bx dx = \frac{1}{a^2 + b^2} (a \operatorname{ch} ax \sin bx - b \operatorname{sh} ax \cos bx) + C;$$

$$40) \int \operatorname{ch} ax \cos bx dx = \frac{1}{a^2 + b^2} (a \operatorname{sh} ax \cos bx + b \operatorname{ch} ax \sin bx) + C;$$

$$41) \int \operatorname{sh} ax \cos bx dx = \frac{1}{a^2 + b^2} (a \operatorname{ch} ax \cos bx + b \operatorname{sh} ax \sin bx) + C;$$

$$42) \int \operatorname{ch} ax \sin bx dx = \frac{1}{a^2 + b^2} (a \operatorname{sh} ax \sin bx - b \operatorname{ch} ax \cos bx) + C.$$

НЕКОТОРЫЕ ИНТЕГРАЛЫ, НЕ ВЫРАЖАЮЩИЕСЯ ЧЕРЕЗ ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ

$$1) \int \frac{e^x dx}{x} = C + \ln x + x + \frac{x^2}{2 \cdot 2!} + \frac{x^3}{3 \cdot 3!} + \dots;$$

$$2) \int \frac{dx}{\ln x} = C + \ln \ln x + \ln x + \frac{(\ln x)^3}{2 \cdot 2!} + \\ + \frac{(\ln x)^5}{3 \cdot 3!} + \dots;$$

$$3) \int e^{-x^3} dx = C + x - \frac{x^3}{3 \cdot 1!} + \frac{x^6}{5 \cdot 2!} - \frac{x^9}{7 \cdot 3!} + \dots;$$

$$4) \int \frac{\sin x dx}{x} = C + x - \frac{x^3}{3 \cdot 3!} + \frac{x^5}{5 \cdot 5!} - \frac{x^7}{7 \cdot 7!} + \dots;$$

$$5) \int \frac{x dx}{\sin x} = C + x + \frac{x^3}{3 \cdot 3!} + \frac{7x^5}{3 \cdot 5 \cdot 5!} + \frac{31x^7}{3 \cdot 7 \cdot 7!} + \dots;$$

$$6) \int \frac{\cos x dx}{x} = C + \ln x - \frac{x^2}{2 \cdot 2!} + \frac{x^4}{4 \cdot 4!} - \frac{x^6}{6 \cdot 6!} + \dots;$$

$$7) \int \frac{x dx}{\cos x} = C + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4 \cdot 2!} + \frac{5x^6}{6 \cdot 4!} + \frac{61x^8}{8 \cdot 6!} + \dots$$

ОПРЕДЕЛЁННЫЙ ИНТЕГРАЛ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ И ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ

Пусть дана функция $f(x)$, непрерывная на сегменте $[a, b]$, а числа $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ выбраны так, чтобы:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b,$$

если $b > a$;

$$a = x_0 > x_1 > x_2 > \dots > x_{n-1} > x_n = b,$$

если $b < a$.

Выбранные таким образом точки делят отрезок (a, b) на n элементарных промежутков. Внутри или на границе каждого такого элементарного промежутка (x_{i-1}, x_i) выбирается произвольное число ξ_i так, что:

$$x_0 \leq \xi_1 \leq x_1, x_1 \leq \xi_2 \leq x_2, \dots,$$

$$x_{n-1} \leq \xi_n \leq x_n, \text{ если } b > a,$$

$$x_0 \geq \xi_1 \geq x_1, x_1 \geq \xi_2 \geq x_2, \dots,$$

$$x_{n-1} \geq \xi_n \geq x_n, \text{ если } b < a.$$

¹ Этот интеграл приводится к предыдущему подстановкой $x = e^t$.

Положив

$$x_1 - x_0 = \Delta x_1, x_2 - x_1 = \Delta x_2, \dots;$$

$$x_n - x_{n-1} = \Delta x_n,$$

составляют сумму $\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$ (интегральная сумма).

Предел этой суммы, когда наибольшая из величин $|\Delta x_i|$ стремится к нулю (а, следовательно, $n \rightarrow \infty$), называется определённым интегралом функции $f(x)$ в пределах от a до b :

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\max |\Delta x_i| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i.$$

Если функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$, то предел в правой части этого равенства существует и не зависит от выбора чисел:

$$x_1, x_2, \dots, x_{n-1}; \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$$

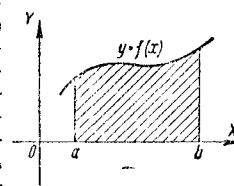
(теорема существования определённого интеграла).

Числа a и b называются соответственно нижним и верхним пределами интеграла, отрезок $[a, b]$ — отрезком интегрирования, $f(x)$ — подинтегральной функцией, $f(x) dx$ — подинтегральным выражением, x — переменной интегрирования.

Величина интеграла не зависит от переменной интегрирования:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt.$$

Если функция $f(x)$ имеет постоянный знак внутри отрезка интегрирования, то $\int_a^b f(x) dx$ может быть геометрически изображён площадью криволинейной трапеции, ограниченной графиком подинтегральной функции $y = f(x)$, осью OX и прямыми $x = a$ и $x = b$ (фиг. 112).



Фиг. 112

При этом $\int_a^b f(x) dx$ положителен, если $f(x) \geq 0$ на отрезке $[a, b]$ и $b > a$ или $f(x) \leq 0$ и $b < a$; если же $f(x) \geq 0$ и $b < a$ или $f(x) \leq 0$ и $b > a$, то $\int_a^b f(x) dx$ отрицателен.

СВОЙСТВА ОПРЕДЕЛЁННОГО ИНТЕГРАЛА

- 1) $\int_a^b dx = b - a$;
- 2) $\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$;
- 3) $\int_a^a f(x) dx = 0$;
- 4) $\int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx$;
- 5) $\int_a^b cf(x) dx = c \int_a^b f(x) dx$ (c — постоянная);
- 6) $\int_a^b [f_1(x) \pm f_2(x)] dx = \int_a^b f_1(x) dx \pm \int_a^b f_2(x) dx$.

Производная определённого интеграла по верхнему пределу

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x);$$

$$\frac{d}{dx} \int_a^{\varphi(x)} f(t) dt = f[\varphi(x)] \varphi'(x).$$

Дифференцирование определённого интеграла по параметру

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \int_a^b f(x, \alpha) dx = \int_a^b \frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha} dx;$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \int_{x(\alpha)}^{X(\alpha)} f(x, \alpha) dx = \int_{x(\alpha)}^{X(\alpha)} \frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha} dx +$$

$$+ f[X(\alpha), \alpha] \frac{\partial X(\alpha)}{\partial \alpha} - f[x(\alpha), \alpha] \frac{\partial x(\alpha)}{\partial \alpha}.$$

1-я теорема о среднем. Если $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны на сегменте $[a, b]$ и, кроме того, $\varphi(x)$ не изменяет знака на этом отрезке, то по крайней мере для одного числа ξ в интервале (a, b) имеет место равенство:

$$\int_a^b f(x) \varphi(x) dx = f(\xi) \int_a^b \varphi(x) dx.$$

В частности, положив $\varphi(x) \equiv 1$, имеем:

$$\int_a^b f(x) dx = (b - a) f(\xi).$$

Геометрически в этом частном случае теорема утверждает равенство площадей криволинейной трапеции $ABCD$ и прямоугольника $AB'C'D$ (фиг. 113).

2-я теорема о среднем. Если $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны на сегменте $[a, b]$ и $\varphi(x)$ — монотонна, то

$$\int_a^b f(x) \varphi(x) dx = \varphi(a) \int_a^{\xi} f(x) dx + \varphi(b) \int_{\xi}^b f(x) dx,$$

где ξ — принадлежит сегменту $[a, b]$.

Вычисление определённого интеграла. Если $F(x)$ — первообразная для функции $f(x)$ [т. е. $F'(x) = f(x)$], то

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Применяя так называемый символ подстановки

$$F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a),$$

получаем:

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b.$$

Правило интегрирования по частям

$$\int_a^b u(x) \frac{dv(x)}{dx} dx =$$

$$= u(x)v(x) \Big|_a^b - \int_a^b v(x) \frac{du(x)}{dx} dx,$$

Пример.

$$\int_0^1 xe^x dx = xe^x \Big|_0^1 - \int_0^1 e^x dx = e - e + 1 = 1.$$

Правило замены переменной. Если $x =$

$$= \varphi(t), \text{ то } \int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt, \text{ где}$$

$$a = \varphi(\alpha), \quad b = \varphi(\beta).$$

Пример. $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx.$

Полагая $x = \sin t$ ($t = \arcsin x$), получаем:

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = \int_{\arcsin 0}^{\arcsin 1} \sqrt{1-\sin^2 t} \cos t dt =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t) dt =$$

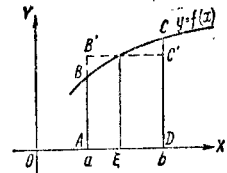
$$= \frac{1}{2} \left(t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}.$$

НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Интегралы с бесконечными пределами

$$\int_a^{\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx.$$

Если указанный в этом определении несобственного интеграла предел существует и конечен, интеграл называется сходящимся; в противном случае говорят, что интеграл расходится.



Фиг. 113

Аналогичным образом определяются интегралы вида

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx \quad \text{и} \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx.$$

Пример 1.

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{dx}{x^2} = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{b} + 1 \right) = 1,$$

интеграл сходится.

Пример 2.

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{dx}{x} = \lim_{b \rightarrow \infty} \ln b = \infty,$$

интеграл расходится.

Интеграл от неограниченной функции. Если функция $f(x)$ неограничена в окрестности точки b , то

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx \quad (\varepsilon > 0).$$

Аналогичным образом определяется несобственный интеграл, если $f(x)$ неограничена в окрестности точки a .

Случай, когда $f(x)$ неограничена в точке c , находящейся внутри интервала интегрирования, сводится к предыдущим при помощи равенства:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx = \\ &= \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0} \int_a^{c-\varepsilon_1} f(x) dx + \lim_{\varepsilon_2 \rightarrow 0} \int_{c+\varepsilon_2}^b f(x) dx, \end{aligned}$$

где $\varepsilon_1 > 0$ и $\varepsilon_2 > 0$.

Пример 1.

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (2 - 2\sqrt{\varepsilon}) = 2,$$

интеграл сходится.

Пример 2.

$$\int_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^1 \frac{dx}{x} = -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \ln \varepsilon = \infty,$$

интеграл расходится.

ПРИЛОЖЕНИЯ К ГЕОМЕТРИИ И МЕХАНИКЕ

Площадь криволинейной трапеции. 1. Трапеция ограничена графиком непрерывной¹ на отрезке $[a, b]$ функции $y=f(x)$, осью OX и прямыми $x=a$ и $x=b$ (см. фиг. 112):

$$S = \int_a^b y dx = \int_a^b f(x) dx.$$

Если уравнения кривой даны в параметрической форме:

$x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ и $a = \varphi(t_1)$, $b = \varphi(t_2)$, то

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \psi(t) \varphi'(t) dt.$$

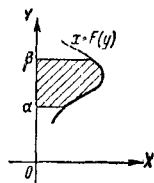
¹ Если $f(x)$ знакопеременна, то формулу для вычисления площади следует применять отдельно для каждого отрезка, где $f(x)$ сохраняет знак, и сложить абсолютные значения полученных величин.

2. Трапеция ограничена графиком функции $x=F(y)$, осью OY и прямыми $y=\alpha$, $y=\beta$ (фиг. 114):

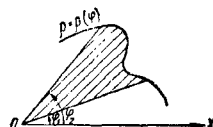
$$S = \int_{\alpha}^{\beta} x dy = \int_{\alpha}^{\beta} F(y) dy.$$

Площадь криволинейного сектора. Площадь ограничена кривой $\rho = \rho(\varphi)$ и лучами $\varphi = \varphi_1$, $\varphi = \varphi_2$ (фиг. 115):

$$S = \frac{1}{2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho^2 d\varphi.$$



Фиг. 114



Фиг. 115

Длина дуги плоской кривой. Уравнение кривой в явной форме:

$$y = f(x) \quad \text{или} \quad x = F(y);$$

в параметрической форме:

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t).$$

Координаты начальной и конечной точек дуги: $A(a, \alpha)$, $B(b, \beta)$ (фиг. 116).

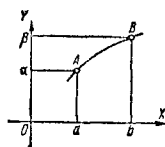
Значения параметра t , соответствующие точкам A и B :

$$t = t_1, \quad t = t_2,$$

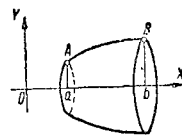
$$\begin{aligned} L &= \int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2} dx = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{1+[F'(y)]^2} dy = \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt. \end{aligned}$$

Уравнение кривой в полярных координатах:

$$\rho = \rho(\varphi).$$



Фиг. 116



Фиг. 117

Значения полярного угла φ в начальной и конечной точках дуги:

$$\varphi = \varphi_1, \quad \varphi = \varphi_2,$$

$$L = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)^2} d\varphi.$$

Площадь поверхности вращения. а) Осью вращения служит ось OX (фиг. 117). Уравнение кривой, образующей поверхность вращения:

$$y = f(x)$$

или в параметрической форме:

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t).$$

Абсциссы начальной и конечной точек дуги: $x = a$, $x = b$. Соответствующие этим точкам значения параметра t :

$$t = t_1, \quad t = t_2,$$

$$S = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx = \\ = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} \psi(t) \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt.$$

а) Осью вращения служит ось OY (фиг. 118). Уравнение кривой, образующей поверхность вращения:

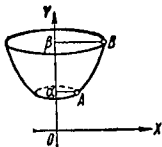
$$x = F(y).$$

Ординаты начальной и конечной точек дуги:

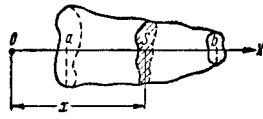
$$y = \alpha, \quad y = \beta,$$

$$S = 2\pi \int_\alpha^\beta F(y) \sqrt{1 + [F'(y)]^2} dy.$$

Объём тела вращения. а) Осью вращения служит ось OX (фиг. 117). Фигура, образу-



Фиг. 118



Фиг. 119

ющая тело вращения, ограничена графиком функции $y = f(x)$, осью OX и прямыми $x = a$ и $x = b$.

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx.$$

б) Осью вращения служит ось OY (фиг. 118). Фигура, образующая тело вращения, ограничена графиком функции $x = F(y)$, осью OY и прямыми $y = \alpha$, $y = \beta$.

$$V = \pi \int_\alpha^\beta [F(y)]^2 dy.$$

Объём тела произвольной формы. Если тело заключено между плоскостями $x = a$ и $x = b$, перпендикулярными к оси OX , и площадь сечения, перпендикулярного к этой оси $S = S(x)$, дана, как функция от x , где x — расстояние плоскости этого сечения от точки O (фиг. 119), то объём тела вычисляется по формуле

$$V = \int_a^b S(x) dx.$$

Путь, пройденный точкой, движущейся со скоростью $v = v(t)$ за время от $t = \tau$ до $t = T$,

$$S = \int_\tau^T v(t) dt.$$

Работа силы $F = F(x)$ при перемещении точки по прямой OX от $x = a$ до $x = b$, если

направление силы совпадает с направлением оси OX ,

$$A = \int_a^b F(x) dx.$$

СТАТИЧЕСКИЕ МОМЕНТЫ, КООРДИНАТЫ ЦЕНТРА ТЯЖЕСТИ И МОМЕНТЫ ИНЕРЦИИ

а) Дуги плоской кривой. Обозначения: уравнение кривой $y = y(x)$ или $x = x(y)$, начальная точка дуги $A(a, \alpha)$, конечная точка $B(b, \beta)$ (фиг. 120).

Статические моменты: относительно оси OX

$$S_x = \int_a^b y(x) \sqrt{1 + [y'(x)]^2} dx = \\ = \int_\alpha^\beta y \sqrt{1 + [x'(y)]^2} dy;$$

относительно оси OY

$$S_y = \int_a^b x \sqrt{1 + [y'(x)]^2} dx = \\ = \int_\alpha^\beta x(y) \sqrt{1 + [x'(y)]^2} dy.$$

Координаты центра тяжести

$$x_c = \frac{S_y}{L}, \quad y_c = \frac{S_x}{L},$$

где L — длина дуги.

Моменты инерции: относительно оси OX

$$I_x = \int_a^b [y(x)]^2 \sqrt{1 + [y'(x)]^2} dx = \\ = \int_\alpha^\beta y^2 \sqrt{1 + [x'(y)]^2} dy;$$

относительно оси OY

$$I_y = \int_a^b x^2 \sqrt{1 + [y'(x)]^2} dx = \\ = \int_\alpha^\beta [x(y)]^2 \sqrt{1 + [x'(y)]^2} dy;$$

относительно начала координат

$$I_o = I_x + I_y = \\ = \int_a^b \{ x^2 + [y(x)]^2 \} \sqrt{1 + [y'(x)]^2} dx = \\ = \int_\alpha^\beta \{ [x(y)]^2 + y^2 \} \sqrt{1 + [x'(y)]^2} dy.$$

б) Площади плоской фигуры. Обозначения: $x = a$ и $x = b$ — наименьшее и наибольшее значения x на границе фигуры, $y = \alpha$ и $y = \beta$ — наименьшее и наибольшее значения y на границе фигуры, $x(y)$ — длина сечения, параллельного оси OX , проведённого на расстоянии y от неё, $y(x)$ — длина сечения, параллельного оси OY , проведённого на расстоянии x от неё (фиг. 121).

Статические моменты: относительно оси OX

$$S_x = \int_a^b yx(y) dy;$$

относительно оси OY

$$S_y = \int_a^b xy(x) dx.$$

Координаты центра тяжести.

$$X_c = \frac{S_y}{S}; \quad y_c = \frac{S_x}{S},$$

где S — площадь фигуры.

Моменты инерции: относительно оси OX

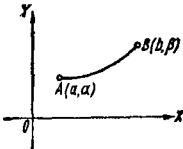
$$I_x = \int_a^b y^2 x(y) dy;$$

относительно оси OY

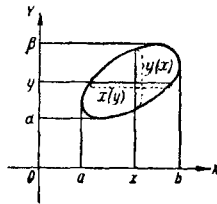
$$I_y = \int_a^b x^2 y(x) dx;$$

относительно начала координат

$$I_0 = I_x + I_y.$$



Фиг. 120



Фиг. 121

1-я теорема Гюльдена. Если дуга плоской кривой длины l вращается около оси, не пересекающей эту дугу и лежащей с ней в одной плоскости, то площадь поверхности образованного при этом тела вращения вычисляется по формуле $S = 2\pi d \cdot l$, где d — расстояние центра тяжести дуги от оси вращения.

2-я теорема Гюльдена. Если плоская фигура площади S вращается около оси, не пересекающей эту фигуру и лежащей с ней в одной плоскости, то объем образованного при этом тела вращения вычисляется по формуле

$$v = 2\pi d \cdot S,$$

где d — расстояние центра тяжести площади фигуры от оси вращения.

НЕКОТОРЫЕ ОПРЕДЕЛЁННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

$$1) \int_0^{\infty} \frac{dx}{ax^2 + b} = \frac{\pi}{2\sqrt{ab}} \quad (a > 0, b > 0);$$

$$2) \int_0^{\infty} \frac{x^{a-1}}{1+x^b} dx = \frac{\pi}{b \sin \frac{a\pi}{b}} \quad (0 < a < b);$$

$$3) \int_0^{\infty} \frac{\sin ax dx}{x} = \frac{\pi}{2} \quad (a > 0);$$

$$4) \int_0^{\infty} \frac{\cos ax}{x} dx = \infty;$$

$$5) \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx = \int_0^{\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x}} dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}};$$

$$6) \int_0^{\infty} \sin x^2 dx = \int_0^{\infty} \cos x^2 dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}};$$

$$7) \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{tg} x}{x} dx = \frac{\pi}{2} \text{ (главное значение);}$$

$$8) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1} x dx = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n}{3 \cdot 5 \cdot 7 \dots (2n+1)} \quad (n > 0 \text{ и целое});$$

$$9) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} x dx = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n} \frac{\pi}{2} \quad (n > 0 \text{ и целое});$$

$$10) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m+1} x \cos^{2n+1} x dx = \frac{m!n!}{2(m+n+1)!} \quad (m > 0, n > 0, m \text{ и } n \text{ — целые});$$

$$11) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2\alpha+1} x \cos^{2\beta+1} x dx = \frac{\Gamma(\alpha+1) \Gamma(\beta+1)}{2 \Gamma(\alpha+\beta+2)}$$

(определение функции Γ см. на стр. 149);

$$12) \int_0^{\infty} e^{-x} dx = 1;$$

$$13) \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2};$$

$$14) \int_0^{\infty} x^n e^{-x} dx = n! \quad (n > 0 \text{ и целое});$$

$$15) \int_0^{\infty} e^{-ax} \sin bx dx = \frac{b}{a^2 + b^2};$$

$$16) \int_0^{\infty} e^{-ax} \cos bx dx = \frac{a}{a^2 + b^2};$$

$$17) \int_0^{\infty} e^{-a^2 x^2} \cos bx dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\frac{b^2}{4a^2}};$$

$$18) \int_0^1 \frac{\ln x \, dx}{x-1} = \frac{\pi^2}{6};$$

$$19) \int_0^1 \frac{\ln x \, dx}{x+1} = -\frac{\pi^2}{12};$$

$$20) \int_0^x \frac{\sin x \, dx}{x} = \text{si } x = \\ = x - \frac{x^3}{3.3!} + \frac{x^5}{5.5!} - \frac{x^7}{7.7!} + \dots$$

(интегральный синус)

$$21) \int_x^\infty \frac{\cos x \, dx}{x} = \text{ci } x = \\ = C + \ln x - \frac{x^2}{2.2!} + \frac{x^4}{4.4!} - \frac{x^6}{6.6!} + \dots$$

(интегральный косинус);

$$22) \int_0^x \frac{dx}{\ln x} = \text{li } x =$$

$$= C + \ln(-\ln x) + \frac{\ln^2 x}{2.2!} + \\ + \frac{\ln^3 x}{3.3!} + \dots \quad (0 < x < 1)$$

(интегральный логарифм),

где $C = 0,5772156649 \dots$ (эйлерова постоянная);

$$23) \int_0^x e^{-ax^2} dx \text{ приводится к интегралу}$$

вероятности (табл. 14) подстановкой

$$x = \frac{t}{\sqrt{2a}}.$$

Интеграл вероятности

Таблица 14

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)
0,00	0,0000	0,40	0,3108	0,80	0,5763	1,20	0,7699	1,60	0,8904	2,00	0,9545
01	0,0080	41	0,3182	81	0,5821	21	0,7737	61	0,8926	05	0,9596
02	0,0160	42	0,3255	82	0,5878	22	0,7775	62	0,8948	10	0,9643
03	0,0239	43	0,3328	83	0,5935	23	0,7813	63	0,8969	15	0,9684
04	0,0319	44	0,3401	84	0,5991	24	0,7850	64	0,8990	20	0,9722
05	0,0399	45	0,3473	85	0,6047	25	0,7887	65	0,9011	25	0,9756
06	0,0478	46	0,3545	86	0,6102	26	0,7923	66	0,9031	30	0,9786
07	0,0558	47	0,3616	87	0,6157	27	0,7959	67	0,9051	35	0,9812
08	0,0638	48	0,3688	88	0,6211	28	0,7995	68	0,9070	40	0,9836
09	0,0717	49	0,3759	89	0,6265	29	0,8029	69	0,9090	45	0,9857
0,10	0,0797	0,50	0,3829	0,90	0,6319	1,30	0,8064	1,70	0,9109	2,50	0,9876
11	0,0876	51	0,3899	91	0,6372	31	0,8098	71	0,9127	55	0,9892
12	0,0955	52	0,3969	92	0,6424	32	0,8132	72	0,9146	60	0,9907
13	0,1034	53	0,4039	93	0,6476	33	0,8165	73	0,9164	65	0,9920
14	0,1113	54	0,4108	94	0,6528	34	0,8198	74	0,9181	70	0,9931
15	0,1192	55	0,4177	95	0,6579	35	0,8230	75	0,9199	75	0,9940
16	0,1271	56	0,4245	96	0,6629	36	0,8262	76	0,9216	80	0,9949
17	0,1350	57	0,4313	97	0,6680	37	0,8293	77	0,9233	85	0,9956
18	0,1428	58	0,4381	98	0,6729	38	0,8324	78	0,9249	90	0,9963
19	0,1507	59	0,4448	99	0,6778	39	0,8355	79	0,9265	95	0,9968
0,20	0,1585	0,60	0,4515	1,00	0,6827	1,40	0,8385	1,80	0,9281	3,00	0,99730
21	0,1663	61	0,4581	01	0,6875	41	0,8415	81	0,9297	10	0,99836
22	0,1741	62	0,4647	02	0,6923	42	0,8444	82	0,9312	20	0,99863
23	0,1819	63	0,4713	03	0,6970	43	0,8473	83	0,9327	30	0,99903
24	0,1897	64	0,4778	04	0,7017	44	0,8501	84	0,9342	40	0,99933
25	0,1974	65	0,4843	05	0,7063	45	0,8529	85	0,9357	50	0,99953
26	0,2051	66	0,4907	06	0,7109	46	0,8557	86	0,9371	60	0,99964
27	0,2128	67	0,4971	07	0,7154	47	0,8584	87	0,9385	70	0,99973
28	0,2205	68	0,5035	08	0,7199	48	0,8611	88	0,9399	80	0,99986
29	0,2282	69	0,5098	09	0,7243	49	0,8633	89	0,9412	90	0,99990
0,30	0,2358	0,70	0,5161	1,10	0,7287	1,50	0,8664	1,90	0,9426	4,00	0,99994
31	0,2434	71	0,5223	11	0,7330	51	0,8690	91	0,9439		
32	0,2510	72	0,5285	12	0,7373	52	0,8715	92	0,9451	4,417	1-10 ⁻⁵
33	0,2586	73	0,5346	13	0,7415	53	0,8740	93	0,9464		
34	0,2661	74	0,5407	14	0,7457	54	0,8764	94	0,9476	4,892	1-10 ⁻⁶
35	0,2737	75	0,5467	15	0,7499	55	0,8789	95	0,9488		
36	0,2812	76	0,5527	16	0,7540	56	0,8812	96	0,9500	5,327	1-10 ⁻⁷
37	0,2886	77	0,5587	17	0,7580	57	0,8836	97	0,9512		
38	0,2961	78	0,5646	18	0,7620	58	0,8859	98	0,9523		
39	0,3035	79	0,5705	19	0,7660	59	0,8882	99	0,9534		

Эллиптические интегралы 1-го рода: $F(k, \varphi)$, $k = \sin \alpha$

Таблица 15

$\varphi \backslash \alpha$	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
0°	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
10	0,1745	0,1746	0,1746	0,1748	0,1749	0,1751	0,1752	0,1753	0,1754	0,1754
20	0,3491	0,3493	0,3499	0,3508	0,3520	0,3533	0,3545	0,3555	0,3561	0,3564
30	0,5236	0,5243	0,5263	0,5294	0,5334	0,5379	0,5422	0,5469	0,5484	0,5493
40	0,6981	0,6997	0,7043	0,7116	0,7213	0,7323	0,7436	0,7535	0,7604	0,7629
50	0,8727	0,8756	0,8842	0,8982	0,9173	0,9401	0,9647	0,9876	1,0044	1,0107
60	1,0472	1,0519	1,0600	1,0896	1,1226	1,1643	1,2125	1,2619	1,3014	1,3170
70	1,2217	1,2286	1,2495	1,2853	1,3372	1,4068	1,4944	1,5959	1,6918	1,7354
80	1,3963	1,4056	1,4344	1,4846	1,5597	1,6660	1,8125	2,0119	2,2653	2,4362
90	1,5708	1,5828	1,6200	1,6858	1,7863	1,9356	2,1565	2,5046	3,1534	∞

Эллиптические интегралы 2-го рода: $E(k, \varphi)$, $k = \sin \alpha$

Таблица 16

$\varphi \backslash \alpha$	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
0°	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
10	0,1745	0,1745	0,1744	0,1743	0,1742	0,1740	0,1739	0,1733	0,1737	0,1736
20	0,3491	0,3489	0,3483	0,3473	0,3462	0,3450	0,3433	0,3429	0,3422	0,3420
30	0,5236	0,5229	0,5209	0,5179	0,5141	0,5100	0,5061	0,5029	0,5007	0,5000
40	0,6981	0,6966	0,6921	0,6851	0,6763	0,6667	0,6575	0,6497	0,6446	0,6423
50	0,8727	0,8698	0,8614	0,8483	0,8317	0,8134	0,7954	0,7801	0,7697	0,7660
60	1,0472	1,0426	1,0290	1,0076	0,9861	0,9493	0,9134	0,8914	0,8728	0,8660
70	1,2217	1,2149	1,1949	1,1632	1,1221	1,0750	1,0266	0,9830	0,9514	0,9397
80	1,3963	1,3870	1,3597	1,3161	1,2550	1,1926	1,1225	1,0565	1,0054	0,9848
90	1,5708	1,5589	1,5238	1,4675	1,3931	1,3055	1,2111	1,1184	1,0401	1,0000

Эллиптические интегралы. Интеграл 1-го рода (табл. 15):

$$24) \int_0^{\sin \varphi} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \int_0^{\varphi} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \theta}} = F(k, \varphi).$$

Интеграл 2-го рода (табл. 16):

$$25) \int_0^{\sin \varphi} \sqrt{\frac{1-k^2x^2}{1-x^2}} dx = \int_0^{\varphi} \sqrt{1-k^2 \sin^2 \theta} d\theta = E(k, \varphi).$$

Эйлеровы интегралы. Интеграл 1-го рода:

$$26) \int_0^1 x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} dx = B(\alpha, \beta).$$

Интеграл 2-го рода (гамма-функция) (табл. 17):

$$27) \int_0^{\infty} x^{t-1} e^{-x} dx = \Gamma(t).$$

Эйлеровы интегралы 1-го и 2-го рода связаны соотношением

$$B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha) \Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)}.$$

Таблица 17
Гамма-функция

x	$\Gamma(x)$	x	$\Gamma(x)$	x	$\Gamma(x)$	x	$\Gamma(x)$
1,00	0,99999	1,25	0,90640	1,50	0,88623	1,75	0,91906
01	0,99433	26	0,90440	51	0,88659	76	0,92137
02	0,98834	27	0,90250	52	0,88704	77	0,92376
03	0,98355	28	0,90072	53	0,88757	78	0,92623
04	0,97844	29	0,89904	54	0,88818	79	0,92877
1,05	0,97350	1,30	0,89747	1,55	0,88887	1,80	0,93138
06	0,96874	31	0,89600	56	0,88964	81	0,93408
07	0,96415	32	0,89464	57	0,89049	82	0,93635
08	0,95973	33	0,89338	58	0,89142	83	0,93969
09	0,95546	34	0,89222	59	0,89243	84	0,94261
1,10	0,95135	1,35	0,89115	1,60	0,89352	1,85	0,94561
11	0,94740	36	0,89018	61	0,89468	86	0,94869
12	0,94359	37	0,88931	62	0,89592	87	0,95184
13	0,93993	38	0,88854	63	0,89724	88	0,95507
14	0,93642	39	0,88785	64	0,89864	89	0,95838
1,15	0,93304	1,40	0,88726	1,65	0,90012	1,90	0,96177
16	0,92980	41	0,88676	66	0,90167	91	0,96523
17	0,92670	42	0,88636	67	0,90330	92	0,96877
18	0,92373	43	0,88604	68	0,90500	93	0,97240
19	0,92089	44	0,88581	69	0,90678	94	0,97610
1,20	0,91817	1,45	0,88566	1,70	0,90864	1,95	0,97988
21	0,91558	46	0,88560	71	0,91057	96	0,98374
22	0,91311	47	0,88563	72	0,91258	97	0,98768
23	0,91075	48	0,88575	73	0,91467	98	0,99171
24	0,90852	49	0,88595	74	0,91683	99	0,99581

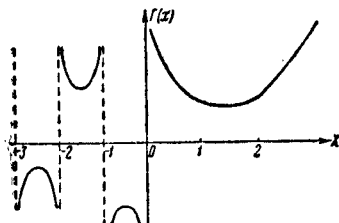
Основные свойства функции $\Gamma(x)$:

$$\Gamma(1) = 1; \Gamma(x+1) = x\Gamma(x);$$

$$\Gamma(n+1) = n!, \text{ если } n > 0 \text{ и целое;}$$

$$\Gamma(-n) = \pm \infty \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots).$$

График функции $\Gamma(x)$ см. на фиг. 122.



Фиг. 122

КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Двойной (двукратный) интеграл функции $f(x, y)$, распространённый на область (S) плоскости OXY . [обозначение:

$\iint_{(S)} f(x, y) dS$], определяется таким образом.

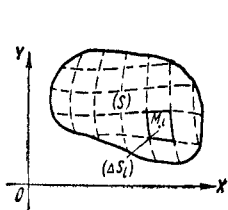
Область (S) разбивается произвольно на элементарные части, площади которых обозначаются через $\Delta S_1, \Delta S_2, \dots, \Delta S_n$ (фиг. 123); внутри или на границе каждой такой элементарной области с площадью ΔS_i выбирается произвольная точка $M_i(x_i, y_i)$ и составляется сумма (интегральная сумма)

$$\sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \Delta S_i.$$

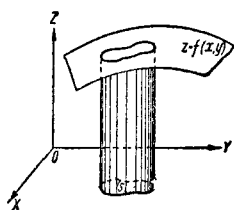
Предел, к которому стремится эта сумма, когда наибольший из диаметров¹ элементарных площадок стремится к нулю, и называется двойным интегралом:

$$\iint_{(S)} f(x, y) dS = \lim \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \Delta S_i.$$

Если функция $f(x, y)$ во всех точках области (S) имеет одинаковый знак, то $\iint_{(S)} f(x, y) dS$ даёт величину объёма тела, ограниченного поверхностью $z = f(x, y)$, плоскостью OXY и цилиндрической поверхно-



Фиг. 123



Фиг. 124

стью с образующей, параллельной оси OZ , пересекающей плоскость OXY вдоль границы области (S) (фиг. 124).

Тройным (трёхкратным) интегралом функции $f(x, y, z)$, распространённым на трёхмерную область (V) , называется число, определяемое следующим образом.

Область (V) произвольно разбивается на элементарные части с объёмами $\Delta V_1, \Delta V_2, \dots, \Delta V_n$; внутри или на границе эле-

¹ Диаметр фигуры называется наибольшее расстояние между двумя точками, находящимися на её границе.

ментарной области с объёмом ΔV_i выбирается точка $M_i(x_i, y_i, z_i)$, и вычисляется предел суммы $\sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \Delta V_i$ при условии, что наибольший из диаметров элементарных областей стремится к нулю:

$$\iiint_{(V)} f(x, y, z) dV = \lim \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \Delta V_i.$$

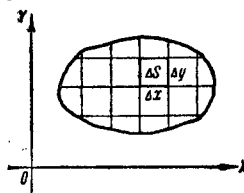
ВЫЧИСЛЕНИЕ ДВОЙНОГО ИНТЕГРАЛА

Вычисление двойного интеграла сводится к последовательному вычислению двух определённых интегралов, причём способ вычисления зависит от выбора системы координат.

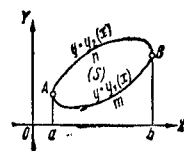
Вычисление двойного интеграла в декартовых координатах. Вместо символа $\iint_{(S)} f(x, y) dS$ обычно употребляют символ

$$\iint_{(S)} f(x, y) dx dy.$$

Это объясняется тем, что способ вычисления в декартовых координатах основан на разбиении области интегрирования (S) на элементарные площади прямыми, параллельными оси OX и оси OY , при этом $\Delta S = \Delta x \Delta y$ (фиг. 125).



Фиг. 125



Фиг. 126

Если A и B — точки контура области (S) с наименьшим и наибольшим значениями x ($x = a$ и $x = b$), а $y = y_1(x)$ и $y = y_2(x)$ — уравнения частей этого контура AmB и AnB (фиг. 126), то

$$\iint_{(S)} f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy.$$

Первое (внутреннее) интегрирование производится при постоянном x .

Если C и D — точки контура области (S) с наименьшим и наибольшим значениями y ($y = \alpha$ и $y = \beta$), а $x = x_1(y)$ и $x = x_2(y)$ — уравнения частей этого контура CpD и CqD (фиг. 127), то

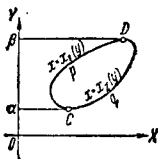
$$\iint_{(S)} f(x, y) dx dy = \int_{\alpha}^{\beta} dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y) dx.$$

Первая из указанных формул применима, если всякая прямая, параллельная оси OX (за исключением, быть может, конечного числа таких прямых), пересекает контур области (S) не более, чем в двух точках; вторая, если всякая прямая, параллельная оси OY , пересекает контур области (S) не более, чем в двух точках.

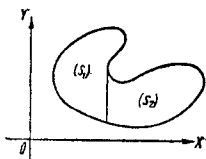
Если ни одно из указанных условий не выполнено, то следует область (S) разбить

на две или несколько частей (фиг. 128) и воспользоваться равенством

$$\begin{aligned} \iint_{(S)} f(x, y) dx dy &= \\ &= \iint_{(S_1)} f(x, y) dx dy + \iint_{(S_2)} f(x, y) dx dy. \end{aligned}$$



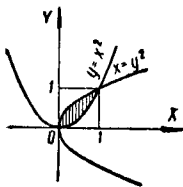
Фиг. 127



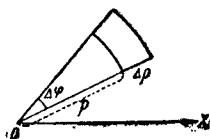
Фиг. 128

Пример. Вычислить $\iint_{(S)} (x^2 + y) dx dy$, если область (S) заключена между параболлами $y = x^2$ и $x = y^2$ (фиг. 129):

$$\begin{aligned} \iint_{(S)} (x^2 + y) dx dy &= \int_0^1 dx \int_{x^2}^{\sqrt{x}} (x^2 + y) dy = \\ &= \int_0^1 dx \left(x^2 y + \frac{y^2}{2} \right) \Big|_{x^2}^{\sqrt{x}} = \\ &= \int_0^1 \left(x^2 \sqrt{x} + \frac{x}{2} - x^4 - \frac{x^4}{2} \right) dx = \\ &= \left(\frac{2}{7} x^{7/2} + \frac{1}{4} x^2 - \frac{3}{10} x^5 \right) \Big|_0^1 = \frac{33}{140}. \end{aligned}$$



Фиг. 129



Фиг. 130

Вычисление двойного интеграла в полярных координатах. Элементарная площадь в полярных координатах выражается формулой

$$\Delta S \approx \rho d\rho d\varphi \quad (\text{фиг. 130}).$$

Заменив x и y в подынтегральной функции по формулам

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi,$$

получаем:

$$f(x, y) = f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) = F(\rho, \varphi)$$

и

$$\iint_{(S)} f(x, y) dx dy = \iint_{(S)} F(\rho, \varphi) \rho d\rho d\varphi.$$

Если A и B — точки контура области (S) с наименьшим и наибольшим значениями φ ($\varphi = \varphi_1$ и $\varphi = \varphi_2$), а $\rho = \rho_1(\varphi)$ и $\rho = \rho_2(\varphi)$ — уравнения частей AmB и AnB контура (фиг. 131), то

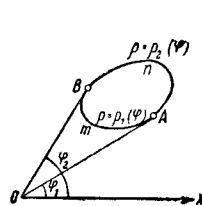
$$\iint_{(S)} F(\rho, \varphi) \rho d\rho d\varphi = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} F(\rho, \varphi) \rho d\rho.$$

ВЫЧИСЛЕНИЕ ТРОЙНОГО ИНТЕГРАЛА

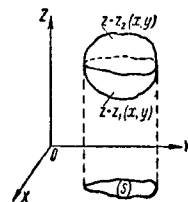
а) В декартовых координатах

$$\begin{aligned} \iiint_{(V)} f(x, y, z) dV &= \iiint_{(V)} f(x, y, z) dx dy dz = \\ &= \iint_{(S)} dx dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz = \\ &= \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz, \end{aligned}$$

где (S) — проекция области (V) на плоскость OXY, $z = z_1(x, y)$ и $z = z_2(x, y)$ — уравнения нижней и верхней частей поверхности, ограничивающей область (S) (фиг. 132).



Фиг. 131



Фиг. 132

б) В цилиндрических координатах (стр. 187)

$$\begin{aligned} \iiint_{(V)} f(x, y, z) dV &= \iiint_{(V)} F(\rho, \varphi, z) \rho d\rho d\varphi dz = \\ &= \iint_{(S)} \rho d\rho d\varphi \int_{z_1(\rho, \varphi)}^{z_2(\rho, \varphi)} F(\rho, \varphi, z) dz = \\ &= \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} \rho d\rho \int_{z_1(\rho, \varphi)}^{z_2(\rho, \varphi)} F(\rho, \varphi, z) dz, \end{aligned}$$

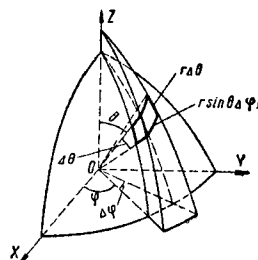
где (S) — проекция области (V) на плоскость OXY, $z = z_1(\rho, \varphi)$ и $z = z_2(\rho, \varphi)$ — уравнения нижней и верхней частей поверхности, ограничивающей область (V), и

$$F(\rho, \varphi, z) = f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi, z).$$

в) В сферических координатах (стр. 187)

Элементарный объем

$$\Delta V \approx r^2 \sin \theta \Delta \varphi \Delta \theta \Delta r \quad (\text{фиг. 133})$$



Фиг. 133

и

$$\begin{aligned} \iiint_{(V)} f(x, y, z) dV &= \\ &= \iiint_{(V)} F(r, \varphi, \theta) r^2 \sin \theta d\varphi d\theta dr = \\ &= \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{\theta_1(\varphi)}^{\theta_2(\varphi)} \sin \theta d\theta \int_{r_1(\varphi, \theta)}^{r_2(\varphi, \theta)} F(r, \varphi, \theta) r^2 dr, \end{aligned}$$

где $F(r, \varphi, \theta) = f(r \sin \theta \cos \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \theta)$.

Приложения двойных интегралов

Таблица 18

	Общая формула	В декартовых координатах	В полярных координатах
Площадь плоской фигуры	$S = \iint_{(S)} dS$	$\iint_{(S)} dx dy$	$\iint_{(S)} \rho d\varphi d\rho$
Площадь поверхности	$S = \iint_{(S)} \frac{dS^2}{\cos \gamma}$	$\iint_{(S)} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy$	$\iint_{(S)} \sqrt{\rho^2 + \rho \left(\frac{\partial z}{\partial \rho}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2} d\varphi d\rho$
Объём тела ¹	$V = \iint_{(S)} z dS$	$\iint_{(S)} z dx dy$	$\iint_{(S)} z \rho d\varphi d\rho$
Момент инерции плоской фигуры относительно оси OX	$I_x = \iint_{(S)} y^2 dS$	$\iint_{(S)} y^2 dx dy$	$\iint_{(S)} \rho^2 \sin^2 \varphi d\varphi d\rho$
Момент инерции плоской фигуры относительно полюса O	$I_o = \iint_{(S)} \rho^2 dS$	$\iint_{(S)} (x^2 + y^2) dx dy$	$\iint_{(S)} \rho^3 d\varphi d\rho$
Масса плоской фигуры с переменной плотностью δ	$M = \iint_{(S)} \delta dS$	$\iint_{(S)} \delta dx dy$	$\iint_{(S)} \delta \rho d\varphi d\rho$
Координаты центра тяжести однородной плоской фигуры	$x_c = \frac{\iint_{(S)} x dS}{S}$ $y_c = \frac{\iint_{(S)} y dS}{S}$	$\frac{\iint_{(S)} x dx dy}{\iint_{(S)} dx dy}$ $\frac{\iint_{(S)} y dx dy}{\iint_{(S)} dx dy}$	$\frac{\iint_{(S)} \rho^2 \cos \varphi d\varphi d\rho}{\iint_{(S)} \rho d\varphi d\rho}$ $\frac{\iint_{(S)} \rho^2 \sin \varphi d\varphi d\rho}{\iint_{(S)} \rho d\varphi d\rho}$

¹ В данном случае (S) — проекция поверхности на плоскость OXY , γ — угол, образованный нормалью к элементу поверхности с осью OZ (угол между элементом поверхности и плоскостью OXY).

² Имеется в виду объём тела, форма которого указана на фиг. 124.

КРИВОЛИНЕЙНЫЙ ИНТЕГРАЛ

Криволинейным интегралом выражения $P(x, y) dx + Q(x, y) dy$ вдоль дуги (l) [обозначение: $\int_{(l)} P(x, y) dx + Q(x, y) dy$]

называется число, получаемое следующим образом (фиг. 134): если $A(a, \alpha)$ начальная, а $B(b, \beta)$ конечная точка дуги (l) , то, обозначив $a = x_0$, $b = x_n$, $\alpha = y_0$, $\beta = y_n$, делят дугу (l) на n элементарных частей точками $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$, ..., $M_{n-1}(x_{n-1}, y_{n-1})$ (нумерацию производят так, что точка M_i следует за точкой M_{i-1} , если двигаться по дуге от точки A к точке B).

Внутри или на границе каждой элементарной дуги $M_{i-1} M_i$ выбирают произвольную точку $N_i(\xi_i, \eta_i)$, составляют сумму

$$\sum_{i=1}^n [P(\xi_i, \eta_i) \Delta x_i + Q(\xi_i, \eta_i) \Delta y_i],$$

где

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$$

и

$$\Delta y_i = y_i - y_{i-1},$$

и находят предел, к которому стремится эта сумма, когда длина наибольшей из элементарных дуг стремится к нулю:

$$\int_{(l)} P(x, y) dx + Q(x, y) dy =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n [P(\xi_i, \eta_i) \Delta x_i + Q(\xi_i, \eta_i) \Delta y_i].$$

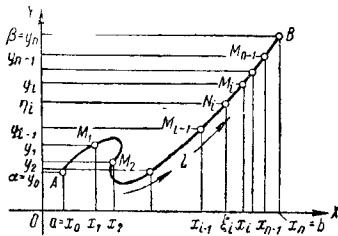
Если $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ — проекции вектора силы $F(x, y)$, приложенного в точке

Таблица 19

Приложения тройных интегралов

	Общая формула	В декартовых координатах	В цилиндрических координатах	В сферических координатах
Объём тела	$V = \iiint_{(V)} dV$	$\iiint_{(V)} dx dy dz$	$\iiint_{(V)} \rho d\varphi d\rho dz$	$\iiint_{(V)} r^2 \sin\theta d\varphi d\theta dr$
Момент инерции тела относительно оси OZ	$I_z = \iiint_{(V)} \rho^2 dV$	$\iiint_{(V)} (x^2 + y^2) dx dy dz$	$\iiint_{(V)} \rho^3 d\varphi d\rho dz$	$\iiint_{(V)} r^4 \sin^3\theta d\varphi d\theta dr$
Момент инерции тела относительно полюса O	$I_0 = \iiint_{(V)} r^2 dV$	$\iiint_{(V)} (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz$	$\iiint_{(V)} (\rho^2 + z^2) \rho d\varphi d\rho dz$	$\iiint_{(V)} r^4 \sin\theta d\varphi d\theta dr$
Масса тела с переменной плотностью δ	$M = \iiint_{(V)} \delta dV$	$\iiint_{(V)} \delta dx dy dz$	$\iiint_{(V)} \delta \rho d\varphi d\rho dz$	$\iiint_{(V)} \delta r^2 \sin\theta d\varphi d\theta dr$
Координаты центра тяжести однородного тела	$x_c = \frac{\iiint_{(V)} x dV}{V}$ $y_c = \frac{\iiint_{(V)} y dV}{V}$ $z_c = \frac{\iiint_{(V)} z dV}{V}$	$\frac{\iiint_{(V)} x dx dy dz}{\iiint_{(V)} dx dy dz}$ $\frac{\iiint_{(V)} y dx dy dz}{\iiint_{(V)} dx dy dz}$ $\frac{\iiint_{(V)} z dx dy dz}{\iiint_{(V)} dx dy dz}$		

(x, y) , на координатные оси (фиг. 135), взятые со знаком + или — в зависимости от того, совпадает ли направление проекции с



Фиг. 134

направлением соответствующей координатной оси или нет, то

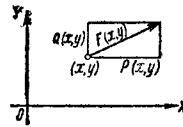
$$\int_{(l)} P(x, y) dx + Q(x, y) dy$$

даёт величину работы силы F при передвижении точки по дуге (l) из положения A в положение B .

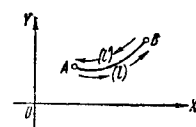
Определение криволинейного интеграла

$$\int_{(l)} P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz$$

для дуги (l) пространственной кривой совершенно аналогично определению для дуги плоской кривой (см. стр. 152).



Фиг. 135



Фиг. 136

Простейшие свойства криволинейного интеграла

1. При изменении направления движения по дуге интеграл изменяет знак (фиг. 136):

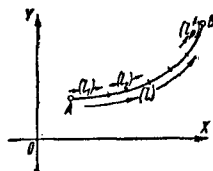
$$\begin{aligned} \int_{(l')} P(x, y) dx + Q(x, y) dy &= \\ &= - \int_{(l)} P(x, y) dx + Q(x, y) dy. \end{aligned}$$

2. Если дуга (l) состоит из дуг $(l_1), (l_2), \dots, (l_p)$, то

$$\int_{(l)} = \int_{(l_1)} + \int_{(l_2)} + \dots + \int_{(l_p)}$$

(подинтегральное выражение одно и то же для всех интегралов) (фиг. 137).

Вычисление криволинейного интеграла. Если плоская дуга (l) пересекается всякой прямой, параллельной любой координатной оси, не более чем в одной точке, то её уравнение может быть разрешено как относительно x [$x = x(y)$], так и относительно y [$y = y(x)$].



Фиг. 137

Если при этом $A(a, \alpha)$ — начальная, а $B(b, \beta)$ — конечная точки дуги, то

$$\begin{aligned} \int_{(l)} P(x, y) dx + Q(x, y) dy &= \\ &= \int_a^b P[x, y(x)] dx + \int_\alpha^\beta Q[x(y), y] dy. \end{aligned}$$

Если дуга (l) не удовлетворяет приведённому выше условию, то её следует разбить на несколько частей и применять указанную формулу к каждой части в отдельности.

Если уравнения дуги даны в параметрической форме $x = x(t)$, $y = y(t)$, τ и T — значения параметра t , соответствующие точкам A и B , то

$$\begin{aligned} \int_{(l)} P(x, y) dx + Q(x, y) dy &= \\ &= \int_\tau^T \{ P[x(t), y(t)] x'(t) + \\ &\quad + Q[x(t), y(t)] y'(t) \} dt. \end{aligned}$$

Аналогичным образом для пространственной кривой $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$:

$$\begin{aligned} \int P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz &= \\ &= \int_\tau^T \{ P[x(t), y(t), z(t)] x'(t) + \\ &\quad + Q[x(t), y(t), z(t)] y'(t) + \\ &\quad + R[x(t), y(t), z(t)] z'(t) \} dt. \end{aligned}$$

Пример. Вычислить $\int_{(l)} y dx - x dy$, где (l) — окружность радиуса r с центром в начале координат (направление обхода обратное ходу часовой стрелки).

Уравнение окружности $x = r \cos t$, $y = r \sin t$

$$\begin{aligned} \int_{(l)} y dx - x dy &= \int_0^{2\pi} [r \sin t (-r \sin t) - \\ &\quad - r \cos t \cdot r \cos t] dt = - \int_0^{2\pi} r^2 dt = -2\pi r^2. \end{aligned}$$

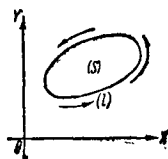
Связь между криволинейным и двойным интегралами. Если (l) — замкнутый контур, обходимый в положительном направлении (положительным направлением обхода замкнутого контура будем считать такое направление, при котором ограниченная контуром область остаётся слева), (S) — область, огра-

ниченная контуром (l) (фиг. 138), функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ непрерывны вместе со своими частными производными в области (S) , то

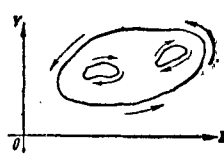
$$\begin{aligned} \int_{(l)} P(x, y) dx + Q(x, y) dy &= \\ &= \iint_{(S)} \left[\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} \right] dx dy \end{aligned}$$

(формула Грина).

Если область (S) не односвязная¹ и её граница состоит из нескольких контуров, то под (l) в формуле Грина следует понимать совокупность всех этих контуров, причём направление обхода на каждом контуре выбирается так, чтобы область (S) находилась слева (фиг. 139).



Фиг. 138



Фиг. 139

Для того чтобы криволинейный интеграл

$$\int_{AB} P(x, y) dx + Q(x, y) dy,$$

где функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ и их частные производные непрерывны в области (S) , имел одно и то же значение для всех путей, лежащих в односвязной области (S) и идущих от точки $A(x_0, y_0)$ к точке $B(x_1, y_1)$, необходимо и достаточно, чтобы подинтегральное выражение $P(x, y) dx + Q(x, y) dy$ было полным дифференциалом, т. е. чтобы²

$$\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}.$$

В этом случае

$$\begin{aligned} \int_{(l)} P(x, y) dx + Q(x, y) dy &= \\ &= U(x_1, y_1) - U(x_0, y_0), \end{aligned}$$

где

$$dU(x, y) = P(x, y) dx + Q(x, y) dy.$$

Независимость интеграла от пути интегрирования в области (S) равносильна равенству нулю интеграла по всякому замкнутому контуру, лежащему в этой области.

Если подинтегральное выражение является полным дифференциалом, но внутри контура имеется особая точка, в которой нарушается непрерывность функций $P(x, y)$ или $Q(x, y)$ или их частных производных, то интеграл по такому контуру может оказаться не равным нулю, но в этом случае интеграл по всякому замкнутому контуру, окружающему одно и то же число раз одну и ту же особую точку, сохраняет постоянное значение.

¹ Конечная область (S) называется односвязной, если все точки, лежащие внутри любого замкнутого контура, проведенного в этой области, принадлежат области (S) .

² Условие независимости криволинейного интеграла по пространственному контуру от пути интегрирования см. на стр. 155.

Пример. Найти $\int_{(I)} \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2}$ вдоль пути (I),

окружающего один раз начало координат (начало координат — особая точка). Воспользовавшись параметрическими уравнениями окружности $x = r \cos t$, $y = r \sin t$, имеем

$$\int_{(I)} \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2} = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi.$$

При помощи криволинейного интеграла можно вычислить площадь S области (S) по формуле

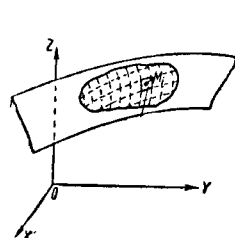
$$S = \frac{1}{2} \int_{(I)} x dy - y dx,$$

где (I) — контур области (S).

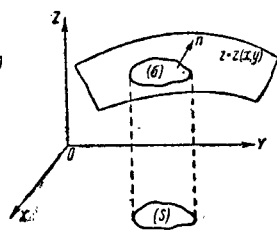
ИНТЕГРАЛ ПО ПОВЕРХНОСТИ

Интегралом функции $f(x, y, z)$ по области (σ), расположенной на некоторой поверхности, называется число, определяемое следующим образом.

Область (σ) разбивается произвольно на элементарные области с площадями $\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \dots, \Delta\sigma_n$ (фиг. 140), внутри или на



Фиг. 140



Фиг. 141

границе каждой элементарной области выбирается точка $M_i(x_i, y_i, z_i)$, составляется сумма

$$\sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \Delta\sigma_i$$

и находится предел, к которому стремится эта сумма, когда наибольший из диаметров элементарных областей стремится к нулю:

$$\iint_{(\sigma)} f(x, y, z) d\sigma = \lim_{\Delta\sigma \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \Delta\sigma_i.$$

Если область (σ) состоит из нескольких частей $(\sigma_1), (\sigma_2), \dots, (\sigma_p)$, то

$$\iint_{(\sigma)} f(x, y, z) d\sigma = \iint_{(\sigma_1)} f(x, y, z) d\sigma + \iint_{(\sigma_2)} f(x, y, z) d\sigma + \dots + \iint_{(\sigma_p)} f(x, y, z) d\sigma.$$

Вычисление интеграла по поверхности. Вычисление интеграла по поверхности сводится к вычислению двойного интеграла при помощи формулы

$$\iint_{(\sigma)} f(x, y, z) d\sigma = \iint_{(S)} \frac{f(x, y, z(x, y))}{|\cos(n, z)|} dS,$$

где (S) — проекция области (σ) на плоскость OXY (фиг. 141), $z = z(x, y)$ — уравнение по-

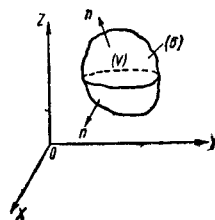
верхности, на которой расположена область (σ), (n, z) — угол между нормалью к поверхности и осью OZ, и, следовательно:

$$|\cos(n, z)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left[\frac{\partial z(x, y)}{\partial x}\right]^2 + \left[\frac{\partial z(x, y)}{\partial y}\right]^2}}.$$

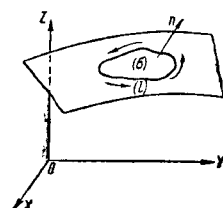
Связь интеграла по поверхности с криволинейным и тройным интегралами. Если (σ) — замкнутая поверхность, ограничивающая трёхмерную область (V), n — нормаль к поверхности (σ), направленная вне области (V) (внешняя нормаль) (фиг. 142), то

$$\begin{aligned} \iiint_{(V)} \left[\frac{\partial P(x, y, z)}{\partial x} + \frac{\partial Q(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial R(x, y, z)}{\partial z} \right] dV = \\ = \iint_{(\sigma)} [P(x, y, z) \cos(n, x) + \\ + Q(x, y, z) \cos(n, y) + R(x, y, z) \cos(n, z)] d\sigma \end{aligned}$$

(формула Остроградского).



Фиг. 142



Фиг. 143

Если (σ) — область, лежащая на некоторой поверхности, ограниченная контуром (I), n — нормаль к поверхности, направленная так, что она образует острый угол с осью OZ (фиг. 143), то

$$\begin{aligned} \int_{(I)} P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz = \\ = \iint_{(\sigma)} \left\{ \left[\frac{\partial R(x, y, z)}{\partial y} - \frac{\partial Q(x, y, z)}{\partial z} \right] \cos(n, x) + \right. \\ \left. + \left[\frac{\partial P(x, y, z)}{\partial z} - \frac{\partial R(x, y, z)}{\partial x} \right] \cos(n, y) + \right. \\ \left. + \left[\frac{\partial Q(x, y, z)}{\partial x} - \frac{\partial P(x, y, z)}{\partial y} \right] \cos(n, z) \right\} d\sigma \end{aligned}$$

(формула Стокса).

В случае, если область (σ) многосвязна, под (I) следует понимать совокупность контуров, составляющих её границу.

Условия независимости криволинейного интеграла по пространственной кривой от пути интегрирования, получаемые из формулы Стокса, следующие:

$$\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y};$$

при этих условиях подынтегральное выражение является полным дифференциалом некоторой функции $U(x, y, z)$:

$$P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz = dU(x, y, z).$$

БЕСКОНЕЧНЫЕ РЯДЫ

ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

Частной суммой S_n числового ряда

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$$
называется сумма его первых n членов

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n.$$

Если $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ существует и конечен, то ряд называется сходящимся и указанный предел называется суммой ряда

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n.$$

Если $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ не существует или бесконечен, то ряд называется расходящимся. Отбрасывание любого конечного числа членов ряда (или изменение величин этих членов) не нарушает сходимости или расходимости ряда.

Остатком сходящегося ряда называется разность между его суммой и частной суммой

$$R_n = S - S_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \dots$$

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ПРОГРЕССИЯ

Бесконечная геометрическая прогрессия со знаменателем q

$$a + aq + aq^2 + \dots + aq^n + \dots$$

сходится, если $-1 < q < 1$ и расходится, если $|q| \geq 1$.

Сумма сходящейся бесконечной геометрической прогрессии вычисляется по формуле

$$S = \frac{a}{1-q}.$$

НЕОБХОДИМЫЙ ПРИЗНАК СХОДИМОСТИ РЯДА

Если ряд сходится, то предел его общего члена равен нулю:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

Этот признак недостаточен. Так, например, гармонический ряд

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$$

расходится, хотя необходимый признак выполнен, так как

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

ДОСТАТОЧНЫЕ ПРИЗНАКИ СХОДИМОСТИ И РАСХОДИМОСТИ ЗНАКОПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ РЯДОВ

а) Сравнение рядов. Пусть даны два знакоположительных ряда:

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots, \\ b_1 + b_2 + \dots + b_n + \dots \end{aligned}$$

Если первый ряд сходится и $b_n \leq a_n$, то второй ряд тоже сходится.

Если первый ряд расходится и $b_n \geq a_n$, то второй ряд тоже расходится.

Если отношение $\frac{a_n}{b_n}$ ограничено снизу и

сверху (т. е. существуют такие положительные постоянные α и β , что $\alpha \leq \frac{a_n}{b_n} \leq \beta$), то оба ряда сходятся или расходятся одновременно.

Пример 1. Ряд

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \dots$$

расходится, так как его члены больше соответствующих членов гармонического ряда.

Пример 2. Ряд

$$1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots$$

сходится, так как его члены равны или меньше соответствующих членов сходящейся геометрической прогрессии

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} + \dots$$

б) Признак Лобачевского. Если члены ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$$

монотонно убывают, то этот ряд сходится или расходится одновременно с рядом

$$\sum_{m=1}^{\infty} p_m 2^{-m},$$

где p_m определяется из неравенств:

$$f(p_m) > 2^{-m},$$

$$f(p_m + 1) \leq 2^{-m}.$$

Можно также определить p_m из равенства

$$f(p_m) = 2^{-m},$$

если функция $f(x)$ монотонна и определена для любых значений x .

Пример.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Из уравнения

$$\frac{1}{p_m^2} = 2^{-m};$$

определяем $p_m = 2^{\frac{m}{2}}$

и составляем ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_m 2^{-m} = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-\frac{m}{2}}.$$

Этот ряд является сходящейся геометрической прогрессией и, следовательно, ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

также сходится.

в) Признак Даламбера. Если существует такая постоянная $q < 1$, что, начиная с некоторого n имеет место неравенство $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q < 1$, то ряд сходится.

Если, начиная с некоторого n , выполнено неравенство $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$, то ряд расходится.

Особенно удобно пользоваться признаком Даламбера, когда существует

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = k.$$

В этом случае ряд сходится, если $k < 1$, и расходится, если $k > 1$; если же $k = 1$, то ряд может сходиться или расходиться.

Пример. Ряд

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \dots + \frac{n}{3^n} + \dots \text{сходится.}$$

Здесь:

$$a_n = \frac{n}{3^n}; \quad a_{n+1} = \frac{n+1}{3^{n+1}}$$

и

$$k = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{3} < 1.$$

г) **Признак Коши.** Ряд сходится, если, начиная с некоторого n ,

$$\sqrt[n]{a_n} \leq q < 1$$

и расходится, если $\sqrt[n]{a_n} > 1$.

В частности, если существует

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = k,$$

то ряд сходится при $k < 1$ и расходится при $k > 1$; в случае, когда $k = 1$, ряд может как сходиться, так и расходиться.

Пример. Ряд

$$\frac{1}{3} + \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{7}\right)^3 + \dots + \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n + \dots$$

сходится, так как

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{2} < 1.$$

д) **Интегральный признак сходимости.** Общий член a_n ряда $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$ является функцией своего номера n :

$$a_n = f(n).$$

Если определенная таким образом функция $f(x)$ непрерывна и монотонна при всех значениях $x \geq \alpha$ (α — любое число), то данный ряд сходится, если сходится интеграл

$$\int_{\alpha}^{\infty} f(x) dx,$$

и расходится, если этот интеграл расходится (стр. 144).

Пример. Ряд

$$1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \dots + \frac{1}{n^p} + \dots$$

сходится при $p > 1$ и расходится при $p < 1$, так как функция $f(x) = \frac{1}{x^p}$ монотонна и непрерывна при $x \geq 1$ (и даже при $x > 0$) и интеграл

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p} = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_1^A \frac{dx}{x^p} = \lim_{A \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{p-1} - \frac{1}{(p-1)A^{p-1}} \right]$$

сходится (и равен $\frac{1}{p-1}$) при $p > 1$ и расходится (и равен ∞) при $p < 1$.

При $p = 1$ ряд тоже расходится (в этом случае мы имеем гармонический ряд), так как

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_1^A \frac{dx}{x} = \lim_{A \rightarrow \infty} \ln A = \infty.$$

Таким образом наш ряд сходится при $p > 1$ и расходится при $p \leq 1$.

е) **Признак Ермакова.** Если при $x \geq \alpha$ (α — любое число) функция $f(x)$ монотонна и непрерывна, то ряд с общим членом

$$a_n = f(n)$$

сходится, если существует такая постоянная $q < 1$, что при всяком $x > \alpha$

$$\frac{\varphi'(x) f[\varphi(x)]}{f(x)} \leq q < 1$$

и расходится, если при всяком $x > \alpha$

$$\frac{\varphi'(x) f[\varphi(x)]}{f(x)} > 1,$$

где $\varphi(x)$ — произвольная дифференцируемая функция, удовлетворяющая условию $\varphi(x) > x$, при $x > \alpha$.

Если существует

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\varphi'(x) f[\varphi(x)]}{f(x)} = K,$$

то ряд сходится при $K < 1$ и расходится при $K > 1$.

Признак Даламбера может быть получен из признака Ермакова, если положить $\varphi(x) = x + 1$.

Пример. Приняв при исследовании сходимости ряда

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \dots + \frac{1}{(2n-1)2n} + \dots$$

$\varphi(x) = e^x$, получаем:

$$f(x) = \frac{1}{(2x-1)2x}; \quad f[\varphi(x)] = \frac{1}{(2e^x-1)2e^x};$$

$$\varphi'(x) = e^x$$

и

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\varphi'(x) f[\varphi(x)]}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x(2x-1)}{2e^x-1} = 0 < 1.$$

Следовательно, данный ряд сходится.

ЗНАКОЧЕРЕДУЮЩИЕСЯ РЯДЫ

Достаточный признак сходимости знакопеременного ряда

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \dots + (-1)^{n+1} u_n + \dots$$

(здесь через u_1, u_2, \dots обозначены абсолютные величины членов ряда) содержится в следующей теореме (теорема Лейбница).

Если $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ и, начиная с некоторого n (т. е. для всех $n \geq N$), абсолютная величина члена ряда изменяется монотонно:

$$u_n \geq u_{n+1} \geq \dots,$$

то знакопеременный ряд сходится.

Если ряд удовлетворяет условиям теоремы Лейбница, то абсолютная величина остатка ряда при $n \geq N$ не превосходит абсолютной величины первого отброшенного члена ряда:

$$|R_n| \leq u_{n+1}.$$

Например, ряд

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

сходится, так как оба условия, входящие в признак Лейбница, выполнены. Подсчитав сумму первых четырех членов ряда, найдем

$$S_4 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{7}{12} = 0,58333\dots$$

Остаток ряда удовлетворяет неравенству

$$|R_n| < \frac{1}{5} = 0,2.$$

Следовательно, величина суммы ряда отличается от найденной нами величины S_4 не больше, чем на 0,2.

АБСОЛЮТНАЯ И УСЛОВНАЯ СХОДИМОСТЬ

Если ряд

$$|a_1| + |a_2| + \dots + |a_n| + \dots,$$

составленный из абсолютных величин членов данного ряда

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$$

сходится, то данный ряд тоже сходится и называется **абсолютно сходящимся** рядом.

Например, ряд

$$1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots$$

сходится абсолютно, так как ряд, членами которого являются абсолютные величины членов этого ряда, сходится, как было установлено выше, с помощью интегрального признака.

Может случиться, что знакопеременный ряд сходится, тогда как ряд, составленный из абсолютных величин его членов, расходится. Такой ряд называется **не абсолютно** (или **условно**) **сходящимся**.

Например, ряд

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

сходится (по теореме Лейбница), в то время как ряд, составленный из абсолютных величин его членов (гармонический ряд), расходится; следовательно, данный ряд является **условно сходящимся**.

При исследовании сходимости знакопеременного ряда иногда полезно составить два вспомогательных знакостоянных ряда: один, составленный из одних положительных членов данного ряда, другой — из одних отрицательных членов. Если оба упомянутых ряда сходятся, то данный ряд сходится и притом абсолютно; если один из них сходится, а другой расходится, то данный ряд расходится; если же оба составленных нами ряда расходятся, то данный ряд либо сходится (условно), либо расходится.

Пример 1. Ряд

$$1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4!} - \dots$$

сходится абсолютно, так как ряды

$$1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots$$

и

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots$$

сходятся.

Пример 2. Ряд

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4!} - \dots$$

расходится, так как ряд

$$1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots$$

сходится, в то время как ряд

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

расходится.

Пример 3. Если для рядов

$$1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

и

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

составить вспомогательные ряды из положительных и отрицательных членов, то мы легко установим, что обе пары этих рядов расходятся, в то время как первый из данных рядов расходится ($\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$), а второй сходится условно (по теореме Лейбница).

Свойства абсолютно и условно сходящихся рядов. Переместительное свойство сложения, имеющее место для конечных сумм, распространяется только на абсолютно сходящиеся ряды: произвольная перестановка членов абсолютно сходящегося ряда не может ни нарушить сходимость этого ряда, ни изменить его сумму. В то же время для условно сходящегося ряда имеет место следующее предположение (теорема Римана): соответствующей перестановкой членов условно сходящегося ряда можно его сумму сделать равной любому наперед заданному числу и даже превратить этот ряд в расходящийся.

Сочетательное свойство имеет место для всякого сходящегося ряда.

ДЕЙСТВИЯ НАД РЯДАМИ

Суммой (разностью) рядов:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$$

$$b_1 + b_2 + \dots + b_n + \dots$$

называется ряд:

$$(a_1 \pm b_1) + (a_2 \pm b_2) + \dots + (a_n \pm b_n) + \dots$$

Если данные ряды сходятся, то их сумма (разность) тоже является сходящимся рядом и притом сумма этого ряда равна сумме (разности) сумм данных рядов; сумма (разность) абсолютно сходящихся рядов есть тоже ряд абсолютно сходящийся.

Примечание. Если данные ряды расходятся, то их сумма (разность) может быть тем не менее сходящимся (и даже абсолютно сходящимся) рядом: если же один из данных рядов сходится, а другой расходится, то их сумма (разность) есть всегда ряд расходящийся.

Произведением рядов:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots,$$

$$b_1 + b_2 + \dots + b_n + \dots,$$

называется ряд

$$c_1 + c_2 + \dots + c_n + \dots$$

с общим членом

$$c_n = a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \dots + a_n b_1.$$

Если каждый из двух данных рядов сходится и при этом по крайней мере один из них сходится абсолютно, то их произведение является сходящимся рядом, сумма которого равна произведению сумм данных рядов. Если оба ряда сходятся абсолютно, то их произведение — тоже абсолютно сходящийся ряд.

СУММЫ НЕКОТОРЫХ ЧИСЛОВЫХ РЯДОВ

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots = \ln 2;$$

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = \frac{\pi}{4};$$

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6};$$

$$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \dots = \frac{\pi^2}{8};$$

$$1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots = \frac{\pi^2}{12};$$

$$1 - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{7^2} + \dots = \frac{\pi^2}{32};$$

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots = e;$$

$$1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \dots = \frac{1}{e};$$

$$1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{7!} + \dots = \sin 1;$$

$$1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{6!} + \dots = \cos 1.$$

РЯДЫ ФУНКЦИЙ

ОБЛАСТЬ СХОДИМОСТИ

Областью сходимости функционального ряда

$$f_0(x) + f_1(x) + \dots + f_n(x) + \dots$$

называется совокупность всех значений аргумента x , при которых этот ряд сходится.

Пример. Область сходимости ряда

$$1 + \frac{1}{2^x} + \frac{1}{3^x} + \dots + \frac{1}{n^x} + \dots$$

состоит из всех значений x , определяемых неравенством $x > 1$ (стр. 157).

Суммой ряда функций называется

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = S(x),$$

где

$$S_n(x) = f_0(x) + f_1(x) + \dots + f_n(x).$$

Областью сходимости степенного ряда

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots$$

всегда является интервал (интервал сходимости) с центром в точке $x = 0$, причём во всех внутренних точках этого интервала ряд сходится абсолютно; на концах интервала сходимости ряд может или сходиться или расходиться. Половина длины интервала сходимости называется радиусом сходимости ряда. Радиус сходимости r степенного ряда определяется формулой

$$\frac{1}{r} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

(если этот предел существует или бесконечен).

Если радиус сходимости равен нулю, то ряд сходится только в точке $x = 0$; если

радиус сходимости бесконечен, то ряд сходится при всех значениях аргумента ($-\infty < x < \infty$).

Для степенного ряда более общего вида

$$a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \dots + a_n(x-a)^n + \dots$$

центром интервала сходимости является точка $x = a$.

Можно, не прибегая к приведённой выше формуле для радиуса сходимости (которая к тому же не всегда применима), для определения интервала сходимости степенного ряда непосредственно пользоваться признаками сходимости знакоположительных рядов, применяя эти признаки к ряду, составленному из абсолютных величин членов исследуемого степенного ряда; достаточно при этом использовать признак Коши или Даламбера. При исследовании сходимости на концах интервала признаки Коши и Даламбера чаще всего не решают вопроса о сходимости и здесь следует прибегать к другим признакам (интегральный, признак Лейбница и т. п.).

Пример. Определить интервал сходимости ряда

$$\frac{x+1}{2 \cdot 1} + \frac{(x+1)^2}{2^2 \cdot 2} + \frac{(x+1)^3}{2^3 \cdot 3} + \dots$$

Общий член ряда имеет вид:

$$u_n = \frac{(x+1)^n}{2^n \cdot n}.$$

Применяя признак Даламбера к ряду, составленному из абсолютных величин членов данного ряда, получаем:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(x+1)^{n+1} \cdot 2^n \cdot n}{(x+1)^n \cdot 2^{n+1} (n+1)} \right| = \frac{|x+1|}{2} < 1.$$

Решая неравенство, определяем интервал сходимости:

$$-3 < x < 1.$$

При $x = 1$ получаем гармонический ряд

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots,$$

который расходится, а при $x = -3$ — ряд

$$-1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots,$$

который сходится (условно) по теореме Лейбница. Итак, ряд сходится, если $-3 < x < 1$.

РАВНОМЕРНАЯ СХОДИМОСТЬ.

ИНТЕГРИРОВАНИЕ И ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ РЯДОВ

Ряд функций

$$f_0(x) + f_1(x) + \dots + f_n(x) + \dots$$

называется равномерно сходящимся в некоторой области, если, каково бы ни было число $\varepsilon > 0$, всегда можно найти такое $N(\varepsilon)$, что при $n > N(\varepsilon)$ для всех значений x , принадлежащих рассматриваемой области, имеет место неравенство

$$|R_n(x)| < \varepsilon,$$

где

$$R_n(x) = f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \dots$$

Если абсолютные величины членов данного функционального ряда не превосходят в некоторой области величин соответствующих членов сходящегося числового (поло-

жительного) ряда, то данный ряд сходится в этой области равномерно (признак Вейерштрасса). Если ряд сходится равномерно на некотором отрезке, то его сумма $S(x)$ непрерывна и этот ряд можно на данном отрезке почленно интегрировать, т. е. для всех значений x и a , принадлежащих рассматриваемому отрезку, имеет место равенство

$$\int_a^x S(x) dx = \int_a^x f_0(x) dx + \int_a^x f_1(x) dx + \dots + \int_a^x f_n(x) dx + \dots,$$

причём сходимость ряда, стоящего в правой части равенства, равномерна.

Если в некоторой области производные членов данного функционального ряда непрерывны и ряд, составленный из этих производных, сходится равномерно, то сумма этого последнего ряда равна производной от суммы исходного ряда, т. е.

$$S'(x) = f'_0(x) + f'_1(x) + \dots + f'_n(x) + \dots$$

Степенной ряд сходится равномерно на всяком отрезке, лежащем целиком внутри интервала сходимости этого ряда.

При дифференцировании и интегрировании степенного ряда интервал сходимости не изменяется.

РЯДЫ ТЭЙЛОРА И МАКЛОРЕНА

Ряд Тэйлора позволяет представить заданную функцию $f(x)$ как сумму степенного ряда

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \dots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \dots$$

Эта формула справедлива, если остаточный член ряда

$$R_n(x) = f(x) - S_n(x)$$

стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$.

Формулы для остаточного члена:

$$R_n(x) = \frac{1}{n!} \int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt -$$

интегральная форма;

$$R_n(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}[a + \theta(x-a)];$$

$(0 < \theta < 1)$ — форма Лагранжа;

$$R_n(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{n!} (1-\theta)^n f^{(n+1)}[a + \theta(x-a)]; \quad (0 < \theta < 1) - \text{форма Коши.}$$

Ряд Маклорена получается из ряда Тэйлора при $a = 0$:

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \dots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + \dots$$

Формулы для остаточного члена:

$$\begin{aligned} R_n(x) &= \frac{1}{n!} \int_0^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt = \\ &= \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta_1 x) = \\ &= \frac{x^{n+1}}{n!} (1-\theta_2)^n f^{(n+1)}(\theta_2 x) \\ &\quad (0 < \theta_1 < 1; \quad 0 < \theta_2 < 1). \end{aligned}$$

Ряд Тэйлора для функции многих переменных. Для функции двух переменных:

$$\begin{aligned} f(x+h, y+k) &= f(x, y) + \\ &+ \frac{1}{1!} \left[\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} h + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} k \right] + \\ &+ \frac{1}{2!} \left[\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} h^2 + 2 \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} hk + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} k^2 \right] + \dots \end{aligned}$$

или (в символической записи):

$$\begin{aligned} f(x+h, y+k) &= f(x, y) + \\ &+ \frac{1}{1!} \left(\frac{\partial}{\partial x} h + \frac{\partial}{\partial y} k \right) f(x, y) + \\ &+ \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial}{\partial x} h + \frac{\partial}{\partial y} k \right)^2 f(x, y) + \\ &+ \dots + \frac{1}{n!} \left(\frac{\partial}{\partial x} h + \frac{\partial}{\partial y} k \right)^n f(x, y) + \dots \end{aligned}$$

Остаточный член ряда

$$R_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} \left(\frac{\partial}{\partial x} h + \frac{\partial}{\partial y} k \right)^{n+1} f(x + \theta_1 h; y + \theta_2 k) \quad (0 < \theta_1 < 1; \quad 0 < \theta_2 < 1).$$

В общем случае (для функции n переменных)

$$\begin{aligned} f(x+h, y+k, z+l, \dots) &= f(x, y, z, \dots) + \\ &+ \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i!} \left(\frac{\partial}{\partial x} h + \frac{\partial}{\partial y} k + \frac{\partial}{\partial z} l + \dots \right)^i f(x, y, z, \dots). \end{aligned}$$

Остаточный член

$$\begin{aligned} R_n(x) &= \frac{1}{(n+1)!} \left(\frac{\partial}{\partial x} h + \frac{\partial}{\partial y} k + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial}{\partial z} l + \dots \right)^{n+1} f(x + \theta_1 h, y + \theta_2 k, z + \theta_3 l, \dots). \end{aligned}$$

Оценка остаточного члена. При помощи разложения функции в степенной ряд вычисляются приближённые значения алгебраических и трансцендентных функций. Ошибка, совершаемая при замене суммы ряда его частной суммой, равна остаточному члену ряда. При такого рода вычислениях требуется уметь решить следующие три основные задачи:

1. Оценить ошибку, зная число членов частной суммы, принятой за приближённое численное значение функции, т. е. оценить $|R_n(x)|$ при данных значениях n и x .

2. Задавись максимально допустимой величиной ошибки, найти число членов частной суммы, которую можно принять за искомое численное значение функции, т. е.

РАЗЛОЖЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ФУНКЦИЙ В СТЕПЕННЫЙ РЯД

Разложение в ряд	Область сходимости ряда к заданной функции
$(a+x)^m = a^m + ma^{m-1}x + \dots + \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!} a^{m-n} x^n + \dots$	$- a < x < + a $
$a^x = 1 + \frac{x \ln a}{1!} + \frac{x^2 \ln^2 a}{2!} + \dots + \frac{x^n \ln^n a}{n!} + \dots$	$-\infty < x < +\infty$
$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$	$-\infty < x < \infty$
$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots$	$-\infty < x < \infty$
$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots$	$-\infty < x < \infty$
$\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \frac{62x^9}{2835} + \dots$	$-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$
$\operatorname{ctg} x = \frac{1}{x} - \left\{ \frac{x}{3} - \frac{x^3}{45} + \frac{2x^5}{945} - \frac{x^7}{4725} + \dots \right\}$	$-\pi < x < \pi$, кроме $x=0$
$\arcsin x = x + \frac{1 \cdot x^3}{2 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 3 \cdot x^5}{2 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot x^7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} + \dots + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)x^{2n+1}}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n) \cdot (2n+1)} + \dots$	$-1 < x < 1$
$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots$	$-1 < x < 1$
$\operatorname{sh} x = \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots$	$-\infty < x < \infty$
$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots$	$-\infty < x < \infty$
$\operatorname{th} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} - \frac{17x^7}{315} + \dots$	$-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$
$\operatorname{cth} x = \frac{1}{x} + \frac{x}{3} - \frac{x^3}{45} + \frac{2x^5}{945} - \frac{x^7}{4725} + \dots$	$-\pi < x < \pi$, кроме $x=0$
$\operatorname{Arsh} x = x + \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 3 \cdot x^5}{2 \cdot 4 \cdot 5} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot x^7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} + \dots + (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)x^{2n+1}}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n) \cdot (2n+1)} + \dots$	$-1 < x < 1$
$\operatorname{Arth} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots$	$-1 < x < 1$
$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots$	$-1 < x < 1$
$\ln x = 2 \left[\frac{x-1}{x+1} + \frac{1}{3} \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^5 + \dots + \frac{1}{2n+1} \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^{2n+1} + \dots \right]$	$x > 0$
$\ln \frac{1+x}{1-x} = 2 \left[x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots \right]$	$-1 < x < 1$
$\ln \frac{x+1}{x-1} = 2 \left[\frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{5x^5} + \dots + \frac{1}{(2n+1)x^{2n+1}} + \dots \right]$	$x < -1, x > 1$
$\int_0^x \frac{\sin x}{x} dx = \frac{x}{1 \cdot 1!} - \frac{x^3}{3 \cdot 3!} + \frac{x^5}{5 \cdot 5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!} + \dots$	$-\infty < x < \infty$
$\int_0^x e^{-x^2} dx = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3 \cdot 1!} + \frac{x^5}{5 \cdot 2!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)n!} + \dots$	$-\infty < x < \infty$

найти n из неравенства $|R_n(x)| < \delta$, где x и δ даны.

3. Определить, для каких значений аргумента приближенная формула, полученная заменой суммы ряда его частной суммой с определённым числом членов, даёт ошибку, не превышающую заданной величины, т. е. найти x из неравенства $|R_n(x)| < \delta$, где n и δ известны.

Пример 1. Какова величина допущенной ошибки, если положить

$$e \approx 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!}?$$

В разложении функции e^x остаточный член в форме Лагранжа имеет вид:

$$R_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta x};$$

$n = 4$, а так как $x = 1$, то

$$e^{\theta x} < e < 3,$$

и

$$|R_4(1)| < \frac{3}{5!} = 0,025.$$

Пример 2. Сколько нужно взять членов ряда

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots,$$

чтобы вычислить число e с точностью до 0,0001?

$$R_n(1) = \frac{e^{\theta}}{(n+1)!}, \quad e^{\theta} < e < 3.$$

Следовательно, достаточно взять n , удовлетворяющее неравенству $\frac{3}{(n+1)!} < 0,0001$ или $(n+1)! > 30\,000$; наименьшее значение, удовлетворяющее этому неравенству $n=7$ ($8! = 40\,320$); итак, с точностью до 0,0001

$$e \approx 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \frac{1}{7!}.$$

Пример 3. При каких значениях x приближенная формула

$$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}$$

даёт ошибку, не превышающую 0,001?

Здесь $n = 3$,

$$R_3(x) = \frac{\cos \theta x}{4!} x^4;$$

так как

$$|\cos \theta x| < 1,$$

то

$$|R_3(x)| < \frac{x^4}{4!}.$$

Решив неравенство $\frac{x^4}{4!} < 0,001$, получаем:

$$|x| < \sqrt[4]{0,024} \approx 0,394 \text{ (радиан)} \approx 22^\circ 33'.$$

РЯДЫ ФУРЬЕ

РАЗЛОЖЕНИЕ В РЯД ФУРЬЕ

Если функция $f(x)$, определённая в интервале $(-\pi, \pi)$, удовлетворяет так называемым условиям Дирихле, т. е. если она в этом интервале:

а) равномерно ограничена (т. е. существует такая постоянная M , что $|f(x)| < M$ во всех точках интервала);

б) имеет не более, чем конечное число точек разрыва и притом только первого рода (стр. 130);

в) имеет не более, чем конечное число точек максимума и минимума,

то она может быть разложена в ряд Фурье, т. е. тригонометрический ряд вида:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \sin x + \\ &\quad + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x + \dots \\ &\quad + a_n \cos nx + b_n \sin nx + \dots = \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \end{aligned}$$

где числа $a_0, a_1, b_1, \dots, a_n, b_n, \dots$ (коэффициенты Фурье) определяются по формулам:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots); \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx \quad (n = 1, 2, \dots). \end{aligned}$$

Ряд Фурье можно также записать в форме:

$$\begin{aligned} f(x) &= C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin(nx + \varphi_n) = \\ &= C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos\left(nx + \varphi_n - \frac{\pi}{2}\right), \end{aligned}$$

где

$$C_0 = \frac{a_0}{2}; \quad C_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}; \quad \operatorname{tg} \varphi_n = \frac{a_n}{b_n}.$$

В интервале $(-\pi, \pi)$ сумма этого ряда $S(x)$ равна:

а) значению функции $f(x)$ в каждой точке, где $f(x)$ непрерывна;

б) среднему арифметическому предельных значений $f(x)$ слева и справа (стр. 129) во всякой точке разрыва (фиг. 144), т. е.

$$S(x) = \frac{f(x-0) + f(x+0)}{2},$$

где

$$f(x-0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f(x-\varepsilon)$$

и

$$f(x+0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f(x+\varepsilon) \quad (\varepsilon > 0).$$

Вне интервала $(-\pi, \pi)$ сумма ряда представляет собой периодическое (с периодом 2π) продолжение определённой выше функции $S(x)$.

Если функция $f(x)$ чётная, т. е.

$$f(-x) = f(x),$$

то

$$b_n = 0 \quad (n = 1, 2, \dots)$$

и она разлагается в неполный ряд Фурье по косинусам кратных дуг:

$$\frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \dots + a_n \cos nx + \dots,$$

где коэффициенты a_n могут быть вычислены по формулам:

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx \, dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Если функция $f(x)$ нечётная, т. е.

$$f(-x) = -f(x),$$

то

$$a_n = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

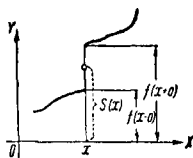
и она разлагается в неполный ряд Фурье по синусам кратных дуг:

$$b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + \dots + b_n \sin nx + \dots,$$

где коэффициенты b_n могут быть вычислены по формулам:

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx \, dx \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Функция, заданная в интервале $(0, \pi)$, может быть продолжена в интервал $(-\pi, 0)$

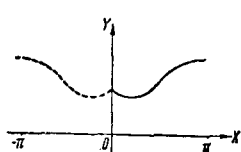


Фиг. 144

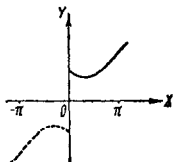
либо как чётная функция (фиг. 145), либо как нечётная (фиг. 146), по нашему усмотрению; если, следовательно, она удовлетворяет условиям Дирихле в интервале, на котором она определена, то её можно разложить, по

желанию, в неполный ряд Фурье по одним синусам или по одним косинусам кратных дуг.

В более общем случае, если функция $f(x)$ определена и удовлетворяет условиям Дирих-



Фиг. 145



Фиг. 146

ле в интервале $(-l, l)$, то её можно разложить в ряд вида:

$$\begin{aligned} & \frac{a_0}{2} + a_1 \cos \frac{\pi x}{l} + b_1 \sin \frac{\pi x}{l} + \\ & + a_2 \cos \frac{2\pi x}{l} + b_2 \sin \frac{2\pi x}{l} + \dots + \\ & + a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} + \dots, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} \, dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \\ b_n &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} \, dx \quad (n = 1, 2, \dots). \end{aligned}$$

Сумма такого ряда Фурье $S(x)$ определяется так же, как и в предыдущем частном случае.

Если функции $f(x)$ чётная, то

$$b_n = 0 \quad (n = 1, 2, \dots)$$

и

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} \, dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Если же функция $f(x)$ нечётная, то

$$a_n = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

и

$$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} \, dx \quad (n = 1, 2, \dots).$$

СВОЙСТВА КОЭФИЦИЕНТОВ ФУРЬЕ

Если некоторая функция $f(x)$ приближённо заменена на интервале (a, b) функцией $\varphi(x)$, то средней квадратической погрешностью такого приближения называется число δ , определяемое равенством:

$$\delta^2 = \frac{1}{b-a} \int_a^b [f(x) - \varphi(x)]^2 \, dx.$$

Коэффициенты Фурье функции $f(x)$ обладают следующим экстремальным свойством: средняя квадратическая погрешность приближённого выражения функции $f(x)$ при помощи тригонометрического полинома n -го порядка

$$\begin{aligned} & \frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + \\ & + b_2 \sin 2x + \dots + a_n \cos nx + b_n \sin nx \end{aligned}$$

будет наименьшей, если коэффициенты такого многочлена взять равными соответствующим коэффициентам Фурье функции $f(x)$.

Коэффициенты Фурье функции $f(x)$ связаны со средней квадратичной величиной (средним квадратичным отклонением от нуля) этой функции:

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x)]^2 \, dx,$$

или, соответственно, в общем случае

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) = \frac{1}{l} \int_{-l}^l [f(x)]^2 \, dx.$$

Если функция $f(x)$ удовлетворяет на любом конечном интервале условиям Ди-

рихле и интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| \, dx$ сходится

(см. стр. 144), то имеет место предельная (при $l \rightarrow \infty$) формула разложения функции в ряд Фурье (интеграл Фурье):

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} ds \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos s(t-x) \, dt.$$

РАЗЛОЖЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ФУНКЦИЙ В РЯД ФУРЬЕ

Функция	Разложение в ряд	Область сходимости ряда к заданной функции	График суммы ряда
$y=x$	$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left(\cos x + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \dots \right)$	$0 < x < \pi$	
$y=x$	$2 \left(\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \dots \right)$	$-\pi < x < \pi$	
$y=x$	$\pi - 2 \left(\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \dots \right)$	$0 < x < 2\pi$	
$y=a$	$\frac{4a}{\pi} \left(\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \dots \right)$	$0 < x < \pi$	
$y=0$ при $0 \leq x < \alpha$ и при $\pi - \alpha < x < \pi$; $y=a$ при $\alpha < x < \pi - \alpha$	$\frac{4a}{\pi} \left(\cos \alpha \sin x + \frac{1}{3} \cos 3\alpha \sin 3x + \dots \right) + \frac{1}{5} \cos 5\alpha \sin 5x + \dots$	$0 < x < \pi$ кроме $x=\alpha$ и $x=\pi-\alpha$	
$y=x^2$	$\frac{\pi^2}{3} - 4 \left(\frac{\cos x}{1^2} - \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} - \dots \right)$	$-\pi \leq x \leq \pi$	
$y=x(\pi-x)$	$\frac{\pi^2}{6} - \left(\frac{\cos 2x}{1^2} + \frac{\cos 4x}{2^2} + \frac{\cos 6x}{3^2} + \dots \right)$	$0 < x < \pi$	
$y=x(\pi-x)$	$\frac{8}{\pi} \left(\sin x + \frac{\sin 3x}{3^3} + \frac{\sin 5x}{5^3} + \dots \right)$	$0 < x < \pi$	
$y=\sin x$	$\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \left(\frac{\cos 2x}{1 \cdot 3} + \frac{\cos 4x}{3 \cdot 5} + \frac{\cos 6x}{5 \cdot 7} + \dots \right)$	$0 < x < \pi$	
$y=\cos x$	$\frac{8}{\pi} \left(\frac{\sin 2x}{1 \cdot 3} + \frac{2 \sin 4x}{3 \cdot 5} + \frac{3 \sin 6x}{5 \cdot 7} + \dots \right)$	$0 < x < \pi$	
$y=e^x$	$\frac{1}{\pi} \operatorname{sh} \pi + \frac{2}{\pi} \operatorname{sh} \pi \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\cos kx - k \sin kx}{1+k^2}$	$-\pi < x < \pi$	

ДИФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Обыкновенным дифференциальным уравнением называется уравнение, содержащее аргумент, искомую функцию этого аргумента и её производные различных порядков:

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0.$$

Наивысший порядок производной искомой функции в данном уравнении называется порядком этого уравнения.

Всякая функция, которая, будучи вместе со своими производными соответствующих порядков подставлена в дифференциальное уравнение вместо искомой функции и её производных, обращает уравнение в тождество (удовлетворяет уравнению), называется решением (интегралом) дифференциального уравнения.

Решение дифференциального уравнения может содержать произвольные постоянные. Для определения этих произвольных постоянных требуются дополнительные, так называемые начальные условия.

УРАВНЕНИЯ 1-ГО ПОРЯДКА

Теорема Коши. Если в некоторой области плоскости OXY функция $f(x, y)$ непрерывна и удовлетворяет условию Липшица:

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| < A |y_1 - y_2|$$

(A постоянно для данной области), то существует, и притом только одна, непрерывная в рассматриваемой области функция $y = \varphi(x)$, являющаяся решением уравнения $y' = f(x, y)$ и удовлетворяющая начальному условию

$$y = y_0 \text{ при } x = x_0,$$

где (x_0, y_0) — произвольная точка данной области.

Всякое решение, о котором идёт речь в теореме Коши (при заданных значениях x_0 и y_0), называется частным решением дифференциального уравнения.

Совокупность всех частных решений называется общим решением. Общее решение уравнения 1-го порядка содержит одну произвольную постоянную. Решение уравнения, не содержащее произвольной постоянной и не являющееся частным решением (и, следовательно, не получаемое из общего решения ни при каких значениях входящей в него произвольной постоянной), называется особым¹.

График решения дифференциального уравнения называется интегральной кривой этого уравнения. Общее решение уравнения 1-го порядка изображается, следовательно, однопараметрическим семейством интегральных кривых.

Дифференциальное уравнение

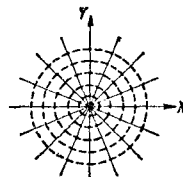
$$y' = f(x, y)$$

задаёт угловой коэффициент касательной к интегральной кривой, как функцию координат

точки касания. Совокупность точек, в которых определена функция $f(x, y)$, и отрезков, направленных по касательным к интегральным кривым, проходящим через эти точки, образует так называемое поле направлений данного дифференциального уравнения.

Кривые $f(x, y) = C$ называются изоклинами. Во всех точках каждой изоклины касательные к проведённым через эти точки интегральным кривым параллельны между собой. На фиг. 147 изображены интегральные кривые (окружности $x^2 + y^2 = C$) и изоклины ($y = Cx$) для уравнения

$$y' = -\frac{x}{y}.$$



Фиг. 147

Уравнения в полных дифференциалах. Уравнение

$$M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0$$

в случае, если имеет место тождество

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x},$$

называется уравнением в полных (точных) дифференциалах.

Общее решение такого уравнения определяется равенством

$$u(x, y) = C,$$

где

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = M(x, y)$$

и

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = N(x, y),$$

т. е.

$$du(x, y) = M(x, y) dx + N(x, y) dy.$$

Функция $u(x, y)$ определяется при этом формулой

$$u(x, y) = \int M(x, y) dx + \varphi(y),$$

где $\varphi(y)$ находится (при помощи интегрирования) из уравнения

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[\int M(x, y) dx + \varphi(y) \right] = N(x, y).$$

Если условие $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ не выполнено, то

можно найти такую функцию $\mu(x, y)$ (интегрирующий множитель), что уравнение $Mdx + Ndy = 0$ обратится в уравнение в полных дифференциалах после умножения на $\mu(x, y)$.

В качестве интегрирующего множителя можно выбрать любое частное решение уравнения

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x}$$

или

$$N \frac{\partial \ln \mu}{\partial x} - M \frac{\partial \ln \mu}{\partial y} = \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}.$$

¹ Во всех точках кривой, изображающей особое решение, нарушаются условия теоремы Коши.

Если, в частности, выражение $\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}$

зависит только от x , то при отыскании интегрирующего множителя можно предположить, что он тоже зависит только от x .

Пример. Решить уравнение $(x^3 + y) dx - x dy = 0$.
Здесь

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = -\frac{2}{x};$$

полагая $\mu = \mu(x)$, составляем для отыскания μ уравнение

$$-x \frac{d \ln \mu}{dx} = 2,$$

откуда

$$\mu = \frac{1}{x^2}.$$

После умножения на $\mu = \frac{1}{x^2}$ получаем уравнение в полных дифференциалах

$$\left(1 + \frac{y}{x^3}\right) dx - \frac{1}{x} dy = 0.$$

Его общее решение

$$x - \frac{y}{x} = C.$$

Уравнения с разделяющимися переменными. Уравнение вида

$$y' = \varphi(x) \psi(y)$$

называется уравнением с разделяющимися переменными.

Преобразовав его к виду (разделив переменные):

$$\frac{dy}{\psi(y)} - \varphi(x) dx = 0,$$

мы найдём общий интеграл¹:

$$\int \frac{dy}{\psi(y)} - \int \varphi(x) dx = C.$$

Пример. Найти частное решение уравнения

$$y' = -\sqrt{y} \sin x,$$

удовлетворяющее начальному условию:

$$y = \frac{1}{4} \text{ при } x = 0.$$

Разделив переменные, получим

$$\sin x dx + \frac{dy}{\sqrt{y}} = 0$$

и общий интеграл определяется равенством:

$$-\cos x + 2\sqrt{y} = C;$$

из начального условия определяем C :

$$C = -\cos 0 + 2\sqrt{\frac{1}{4}} = 0$$

и искомое решение:

$$-\cos x + 2\sqrt{y} = 0$$

или

$$y = \frac{1}{4} \cos^2 x.$$

Однородные уравнения. Однородное уравнение имеет вид:

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right).$$

Оно сводится к уравнению с разделяющимися переменными подстановкой $y = ux$ (тогда $y' = u'x + u$).

¹ Следует иметь в виду, что при умножении или делении обеих частей дифференциального уравнения на выражение, содержащее искомую функцию, могут быть приобретены или потеряны решения.

Пример.

$$y' = e^{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}.$$

Выполнив подстановку, получим:

$$u'x + u = e^u + u,$$

$$e^{-u} du = \frac{dx}{x},$$

$$-e^{-u} = \ln x - \ln C,$$

$$u = -\ln \ln \frac{C}{x},$$

$$\frac{y}{x} = -\ln \ln \frac{C}{x},$$

$$y = -x \ln \ln \frac{C}{x}.$$

Уравнения вида

$$y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right)$$

приводятся к однородным, в случае если

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0,$$

подстановкой

$$x = u + \alpha, \quad y = v + \beta,$$

где α и β определяются из системы уравнений:

$$a_1\alpha + b_1\beta + c_1 = 0,$$

$$a_2\alpha + b_2\beta + c_2 = 0.$$

Если же

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0,$$

то, положив

$$a_1x + b_1y = t;$$

получим уравнение с разделяющимися переменными.

Линейные уравнения. Линейным дифференциальным уравнением 1-го порядка называется уравнение вида

$$y' = P(x)y + Q(x),$$

линейное относительно y и y' .

Его общее решение находится по формуле

$$y = e^{\int P(x) dx} \left[\int Q(x) e^{-\int P(x) dx} dx + C \right].$$

Пример.

$$y' = y \operatorname{tg} x + \cos x.$$

$$y = e^{\int \operatorname{tg} x dx} \left[\int \cos x e^{-\int \operatorname{tg} x dx} dx + C \right] =$$

$$= e^{-\ln \cos x} \left[\int \cos x e^{\ln \cos x} dx + C \right] =$$

$$= \frac{1}{\cos x} \left[\int \cos^2 x dx + C \right] = \frac{1}{2} x + \frac{1}{4} \sin 2x + C.$$

Если известно одно частное решение линейного уравнения $y = y_1(x)$, то общее решение находится при помощи одной квадратуры (одного интегрирования):

$$y = y_1(x) + C e^{\int P(x) dx}.$$

Если известны два линейно независимых частных решения (стр. 169)

$$y = y_1(x) \text{ и } y = y_2(x),$$

то общее решение находится без квадратур:

$$y = y_1(x) + C [y_2(x) - y_1(x)].$$

Уравнения Бернулли. Уравнение вида $y' = P(x)y + Q(x)y^n$ (уравнение Бернулли)

приводится к линейному с помощью подстановки $y^{1-n} = t$.

Уравнения Риккати. Общее решение уравнения Риккати

$$y' = P(x)y^2 + Q(x)y + R(x)$$

не может быть в общем виде получено с помощью квадратур.

Если известно одно частное решение уравнения Риккати $y = y_1(x)$, то подстановка $y = y_1(x) + \frac{1}{z}$ приводит к линейному

уравнению. Зная, кроме того, ещё одно частное решение $y = y_2(x)$ уравнения Риккати, можно найти частное решение $z = \frac{1}{y_2(x) - y_1(x)}$ упомянутого выше линейного уравнения. Если, наконец, известны три частных решения уравнения Риккати: $y = y_1(x)$, $y = y_2(x)$ и $y = y_3(x)$, то его общее решение определяется равенством

$$\frac{y - y_2(x)}{y - y_1(x)} : \frac{y_3(x) - y_2(x)}{y_3(x) - y_1(x)} = C.$$

Уравнения высших степеней. Степенью уравнения

$$F(x, y, y') = 0$$

алгебраического относительно y' называется наибольший из показателей степеней y' (предполагается, что все показатели степеней y' целые и положительные).

Разрешив уравнение n -ой степени относительно y' , получим, вообще говоря, n уравнений вида

$$y' = f_i(x, y) \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Совокупность решений этих уравнений определяет общее решение данного уравнения n -ой степени.

Пример.

$y^2 - \frac{y^3}{x^2} = 0$, отсюда $y' = \frac{y}{x}$ или $y' = -\frac{y}{x}$. Интегрируя, получают $y = Cx$ и $y = \frac{C}{x}$. Общее решение данного уравнения можно также записать в форме

$$(y - Cx) \left(y - \frac{C}{x} \right) = 0.$$

Уравнения Клеро. Общее решение уравнения Клеро

$$y = xy' + \psi(y')$$

имеет вид:

$$y = Cx + \psi(C).$$

Особое решение этого уравнения определяется в параметрической форме равенствами:

$$\begin{cases} y = Cx + \psi(C); \\ 0 = x + \psi'(C). \end{cases}$$

Интегральная кривая, соответствующая особому решению, является огибающей (стр. 198) семейства прямых, определяемого общим решением (фиг. 148).

Пример. Общее решение уравнения $y = xy' + y'^2$ имеет вид: $y = Cx + C^2$; исключая C из системы $y = Cx + C^2$, $0 = x + 2C$, получаем особое решение в явном виде:

$$y = -\frac{x^2}{4}.$$

Уравнения Лагранжа. Уравнение Клеро является частным видом уравнения Лагранжа:

$$y = x\varphi(y') + \psi(y').$$

Произведя замену $y' = p$ и продифференцировав затем полученное равенство по x , приходим к системе уравнений:

$$\begin{cases} y = x\varphi(p) + \psi(p); \\ \frac{dx}{dp} = \frac{x\varphi'(p) + \psi'(p)}{p - \varphi(p)}. \end{cases}$$

Второе из этих уравнений [$p - \varphi(p) \neq 0$] является линейным и его общее решение совместно с первым уравнением определяет в параметрической форме общий интеграл уравнения Лагранжа.

Пример.

$$y = 2xy' + \frac{1}{y'};$$

$$y = 2px + \frac{1}{p};$$

$$\frac{dx}{dp} = \frac{2x - \frac{1}{p^2}}{-p} = -\frac{2}{p}x + \frac{1}{p^3}.$$

Решив это уравнение, найдём $x = \frac{1}{p^2}(\ln p + C)$ и, следовательно, искомое общее решение определяется в параметрической форме равенствами:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{p^2}(\ln p + C), \\ y = 2px + \frac{1}{p}, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} x = \frac{1}{p^2}(\ln p + C); \\ y = \frac{1}{p}(1 + 2 \ln p + 2C). \end{cases}$$

УРАВНЕНИЯ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

Теорема Коши

Для того чтобы уравнение

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

имело единственное решение $y = \varphi(x)$, непрерывное в окрестности точки x_0 и удовлетворяющее начальным условиям: $y = y_0$, $y' = y'_0, \dots, y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)}$ при $x = x_0$, достаточно, чтобы функция

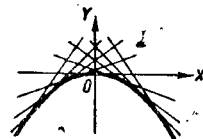
$$f(x, y, y_1, \dots, y_{n-1})$$

(где $x, y, y_1, \dots, y_{n-1}$ — независимые между собой аргументы) в некоторой окрестности точки $(x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)})$, т. е. для всех значений аргументов, удовлетворяющих системе неравенств:

$$x_0 - h < x < x_0 + h, \quad y_0 - k < y < y_0 + k,$$

$$y'_0 - k_1 < y'_1 < y'_0 + k_1, \dots,$$

$$y_0^{(n-1)} - k_{n-1} < y_{n-1} < y_0^{(n-1)} + k_{n-1},$$



Фиг. 148

где $h, k, k_1, \dots, k_{n-1}$ — некоторые положительные постоянные, была непрерывна и удовлетворяла условию Липшица:

$$|f(x, \bar{y}, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_{n-1}) - f(x, y, y_1, \dots, y_{n-1})| < A(|\bar{y} - y| + |\bar{y}_1 - y_1| + \dots + |\bar{y}_{n-1} - y_{n-1}|).$$

Общее решение уравнения

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

содержит n произвольных постоянных C_1, C_2, \dots, C_n и геометрически изображается n -параметрическим семейством интегральных кривых. Всякая система начальных условий вида

$$y = y_0; y' = y'_0, \dots, y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)}$$

при $x = x_0$,

в случае, если выполнены условия теоремы Коши, позволяет найти значения C_1, C_2, \dots, C_n , определяющие соответствующее частное решение.

Уравнения, допускающие понижение порядка

Понижая порядок при помощи подстановки $y' = p$, можно получить общие решения для некоторых дифференциальных уравнений второго порядка.

1) Уравнение

$$y'' = f(x).$$

Общее решение

$$y = \int dx \int f(x) dx + C_1 x + C_2.$$

2) Уравнение

$$y'' = f(y).$$

Общее решение

$$x = \pm \int \frac{dy}{\sqrt{2 \int f(y) dy + C_1}} + C_2.$$

3) Уравнение

$$y'' = f(y').$$

Общее решение

$$x = \int \frac{dy}{\varphi(y, C_1)} + C_2,$$

где для отыскания функции $p = \varphi(y, C_1)$ следует разрешить равенство

$$y = \int \frac{p dp}{f(p)} + C_1$$

относительно p .

4) Уравнение

$$y'' = f(x, y').$$

Общее решение

$$y = \int \varphi(x, C_1) dx + C_2,$$

где $p = \varphi(x, C_1)$ — общее решение уравнения

$$\frac{dp}{dx} = f(x, p).$$

5) Уравнение

$$y'' = f(y, y').$$

Общее решение

$$x = \int \frac{dy}{\varphi(y, C_1)} + C_2,$$

где $p = \varphi(y, C_1)$ — общее решение уравнения

$$p \frac{dp}{dy} = f(y, p).$$

Общее решение уравнения $y^{(n)} = f(x)$ находится последовательным n -кратным интегрированием.

Пример.

$$y''' = x + \sin x.$$

Последовательно интегрируя, получаем;

$$y'' = \frac{x^2}{2} - \cos x + C_1,$$

$$y' = \frac{x^3}{6} - \sin x + C_1 x + C_2;$$

$$y = \frac{x^4}{24} + \cos x + C_1 x^2 + C_2 x + C_3.$$

Уравнение

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f\left(\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}\right)$$

приводится подстановкой

$$\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} = p; \quad \frac{d^n y}{dx^n} = \frac{dp}{dx}$$

к уравнению с разделяющимися переменными

$$\frac{dp}{dx} = f(p).$$

Пример.

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = 3 \frac{d^2 y}{dx^2};$$

полагая

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = p,$$

имеем:

$$\frac{dp}{dx} = 3p; \quad \ln p = 3x + \ln C_1; \quad p = C_1 e^{3x};$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = C_1 e^{3x}; \quad \frac{dy}{dx} = C_1 e^{3x} + C_2;$$

$$y = C_1 e^{3x} + C_2 x + C_3.$$

Порядок уравнения, не содержащего иско- мой функции y :

$$f\left(x, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2 y}{dx^2}, \dots, \frac{d^n y}{dx^n}\right) = 0,$$

понижается на единицу с помощью подста- новки

$$\frac{dy}{dx} = p; \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{dp}{dx} \text{ и т. д.}$$

Если в уравнении отсутствуют кроме y также производные до порядка $(k-1)$ включительно $(y', y'', \dots, y^{(k-1)})$, то следует при- нять подстановку $y^{(k)} = p$.

Пример.

$$y'' = xy''' + (y''')^2 = 0.$$

Положив, $y'' = p$, получаем уравнение Клеро:

$$p = xp' - (p')^2,$$

с общим решением

$$p = C_1 x - C_1^2,$$

откуда

$$y'' = C_1 x - C_1^2$$

и

$$y = \frac{C_1 x^3}{6} - \frac{C_1^2 x^2}{2} + C_2 x + C_3.$$

Для понижения порядка уравнения, не содержащего аргумента x ,

$$f\left(y, \frac{dy}{dx}, \dots, \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0$$

полагают

$$\frac{dy}{dx} = p; \quad \frac{d^2y}{dx^2} = p \frac{dp}{dy} \text{ и т. д.}$$

Пример.

$$yy'' - y'^2 = 0;$$

$$\frac{dy}{dx} = p; \quad \frac{d^2y}{dx^2} = p \frac{dp}{dy}; \quad yp \frac{dp}{dy} - p^2 = 0;$$

$$p = C_1 y; \quad \frac{dy}{dx} = C_1 y;$$

$$y = C_2 e^{C_1 x}.$$

Линейные уравнения

Линейным дифференциальным уравнением называется уравнение вида

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + a_2(x)y^{(n-2)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x),$$

линейное относительно искомой функции и её производных.

Если правая часть уравнения $f(x)$ тождественно равна нулю, уравнение называют однородным (или уравнением без правой части).

Если функции $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ являются частными решениями линейного однородного уравнения и если эти функции линейно независимы, то общее решение такого уравнения имеет вид:

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \dots + C_n y_n(x).$$

Функции $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ называются линейно-независимыми, если тождество $\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + \dots + \alpha_n y_n(x) = 0$, где α_i — постоянные, может иметь место только при $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$. Для этого необходимо и достаточно, чтобы так называемый определитель Вронского (вронскиан)

$$W = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

был отличен от нуля. Определитель Вронского, составленный для n частных решений линейного уравнения n -го порядка (если коэффициенты $a_1(x), a_2(x), \dots, a_n(x)$ этого уравнения непрерывны), может обращаться в нуль только тождественно.

Если $Y(x)$ — решение неоднородного линейного уравнения, а $u(x)$ — общее решение соответствующего однородного уравнения, то функция $u(x) + Y(x)$ является общим решением данного неоднородного уравнения. Если $Y_1(x)$ и $Y_2(x)$ — решения двух линейных уравнений с одной и той же левой частью и с правыми частями $f_1(x)$ и $f_2(x)$, то функция $Y_1(x) + Y_2(x)$ является решением уравнения с той же левой частью и с правой частью $f_1(x) + f_2(x)$.

Линейные однородные уравнения с постоянными коэффициентами. Для отыскания общего решения линейного однородного уравнения с постоянными коэффициентами

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = 0$$

(a_1, a_2, \dots, a_n — вещественные постоянные) следует составить так называемое характеристическое уравнение:

$$k^n + a_1 k^{n-1} + \dots + a_{n-1} k + a_n = 0$$

и найти его корни, после чего n линейно-независимых частных решений $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ уравнения находятся (в вещественной форме) по следующим правилам:

1) каждому действительному корню k кратности p соответствует p линейно-независимых частных решений:

$$e^{kx}, x e^{kx}, x^2 e^{kx}, \dots, x^{p-1} e^{kx};$$

2) каждой паре взаимно сопряжённых комплексных корней $\alpha \pm \beta i$ кратности q соответствует $2q$ линейно-независимых частных решений:

$$e^{\alpha x} \cos \beta x, e^{\alpha x} \sin \beta x, x e^{\alpha x} \cos \beta x, x e^{\alpha x} \sin \beta x, \dots, x^{q-1} e^{\alpha x} \cos \beta x, x^{q-1} e^{\alpha x} \sin \beta x,$$

и общее решение выражается равенством

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \dots + C_n y_n(x).$$

Пример 1.

$$y'' + 4y = 0.$$

Решая характеристическое уравнение $k^2 + 4 = 0$, находим $k = \pm 2i$ и общее решение:

$$y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x.$$

Пример 2.

$$y''' - 4y'' + 4y' = 0;$$

$$k^3 - 4k^2 + 4k = 0;$$

$$k_1 = 0, k_{2,3} = 2;$$

$$y = C_1 + e^{2x} (C_2 + C_3 x).$$

Пример 3.

$$y^{(4)} + y'' - y'' - y = 0;$$

$$k^4 + k^2 - k^2 - 1 = 0;$$

$$k_1 = -1; k_2 = 1; k_{3,4} = i; k_{5,6} = -i;$$

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^x + (C_3 + C_4 x) \cos x + (C_5 + C_6 x) \sin x.$$

Линейные неоднородные уравнения с постоянными коэффициентами. Если найдено какое-либо частное решение $Y(x)$ неоднородного линейного уравнения

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x),$$

а $u(x)$ — общее решение соответствующего однородного уравнения, то (см. выше)

$$y = u(x) + Y(x)$$

— общее решение данного неоднородного уравнения. Если, в частности

$$f(x) = P(x) e^{ax} \cos bx$$

или

$$f(x) = P(x) e^{ax} \sin bx,$$

где $P(x)$ — некоторый многочлен степени m , то частное решение следует искать в виде

$$Y(x) = x^p e^{ax} [Q_1(x) \cos bx + Q_2(x) \sin bx],$$

где $Q_1(x)$ и $Q_2(x)$ — многочлены степени m с неопределёнными коэффициентами, p — кратность корня характеристического уравнения, равного $a + bi$ (если число $a + bi$ не является корнем характеристического уравнения, то $p = 0$).

Уравнение Бесселя. Линейное уравнение с переменными коэффициентами вида

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2) y = 0$$

называется уравнением Бесселя. Общее решение его не может быть, в общем случае, выражено при помощи элементарных функций.

Одним из частных решений уравнения Бесселя при заданном ν является бесселева функция 1-го рода порядка ν :

$$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2k}}{k! \Gamma(\nu+k+1)}$$

(о функции $\Gamma(x)$ см. стр. 149).

Функция $J_{-\nu}(x)$ тоже является решением уравнения Бесселя и, если ν не целое, то функции $J_\nu(x)$ и $J_{-\nu}(x)$ линейно независимы и общее решение уравнения Бесселя имеет вид

$$y = C_1 J_\nu(x) + C_2 J_{-\nu}(x).$$

Если $\nu = n$, где n — целое, то $J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$ и в этом случае общее решение определяется равенством

$$y = C_1 J_n(x) + C_2 Y_n(x),$$

где $Y_n(x)$ — бесселева функция 2-го рода, которая выражается через бесселевы функции 1-го рода при помощи формулы

$$Y_n(x) = \lim_{\nu \rightarrow n} \frac{J_\nu(x) \cos \nu\pi - J_{-\nu}(x)}{\sin \nu\pi}.$$

Между бесселевыми функциями имеют место следующие основные соотношения:

$$J_\nu(x) Y_{\nu-1}(x) - Y_\nu(x) J_{\nu-1}(x) = \frac{2}{\pi x};$$

$$J_{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x} J_\nu(x) - J_{\nu-1}(x);$$

$$Y_{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x} Y_\nu(x) - Y_{\nu-1}(x);$$

$$J'_\nu(x) = J_{\nu-1}(x) - \frac{\nu}{x} J_\nu(x);$$

$$Y'_\nu(x) = Y_{\nu-1}(x) - \frac{\nu}{x} Y_\nu(x).$$

Функции Бесселя порядка $n + \frac{1}{2}$ (n — целое) являются элементарными. При помощи приведённых выше формул они выражаются через $J_{\frac{1}{2}}(x)$ и $J_{-\frac{1}{2}}(x)$, причём

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x;$$

$$J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x.$$

Функции Бесселя целых порядков при помощи тех же формул могут быть выражены через $J_0(x)$, $J_1(x)$, $Y_0(x)$, $Y_1(x)$. Таблицы этих функций даны на стр. 81.

ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Преобразование Лапласа

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-px} f(x) dx$$

ставит в соответствие функции $f(x)$ функцию $F(p)$ параметра p .

В силу соотношений:

$$\int_0^{\infty} e^{-px} f'(x) dx = pF(p) - f(0);$$

$$\int_0^{\infty} e^{-px} f''(x) dx = p^2 F(p) - [pf'(0) + f'(0)];$$

$$\dots \dots \dots \int_0^{\infty} e^{-px} f^{(n)}(x) dx =$$

$$= p^n F(p) - [p^{n-1} f(0) + p^{n-2} f'(0) + \dots + p f^{(n-2)}(0) + f^{(n-1)}(0)],$$

преобразование Лапласа переводит линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами

$$y^{(n)}(x) + a_1 y^{(n-1)}(x) + \dots + a_{n-1} y'(x) + a_n y(x) = f(x),$$

в котором искомая функция $y(x)$ удовлетворяет начальным условиям $y(0) = y'(0) = \dots = y^{(n-1)}(0) = 0$ (так называемое нормальное частное решение), в алгебраическое уравнение

$$(p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n) Y(p) = F(p),$$

где $Y(p)$ — результат преобразования Лапласа над функцией $y(x)$, т. е.

$$Y(p) = \int_0^{\infty} e^{-px} y(x) dx.$$

Разрешая это уравнение относительно $Y(p)$, имеем

$$Y(p) = \frac{F(p)}{p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n}.$$

Таким образом, теперь следует найти функцию $y(x)$, зная ее лапласово преобразование $Y(p)$, что при определённых условиях выполняется однозначно. После того как функция $y(x)$ найдена, можно, прибавляя к ней общее решение соответствующего однородного уравнения, найти общее, а следовательно, и любое частное решение данного неоднородного уравнения.

Как видно из приведённой ниже таблицы, если правая часть уравнения $f(x)$ имеет, в частности, вид

$$f(x) = P(x) e^{ax} \sin bx$$

или

$$f(x) = P(x) e^{ax} \cos bx,$$

где $P(x)$ — многочлен, то функция $F(p)$, а следовательно, и $Y(p)$ является правильной рациональной дробью. $Y(p)$ можно представить в виде суммы простейших рациональных дробей. Функции, лапласовы преобразования

которых имеют такой вид, могут быть найдены из прилагаемой таблицы:

№ по п.р.	$f(x)$	$F(p)$
1	$f_1(x)+f_2(x)$	$F_1(p)+F_2(p)$
2	$Cf(x)$	$CF(p)$
3	$f'(x)$	$pF(p)-f(0)$
4	$f^{(n)}(x)$	$p^n F(p)-[p^{n-1}f(0)+p^{n-2}f'(0)+\dots+p f^{(n-2)}(0)+f^{(n-1)}(0)]$
5	$e^{-ax}f(x)$	$F(p+a)$
6	1	$\frac{1}{p}$
7	$\frac{x^n}{n!}$	$\frac{1}{p^{n+1}}$
8	e^{-ax}	$\frac{1}{p+a}$
9	$\frac{x^n}{n!} e^{-ax}$	$\frac{1}{(p+a)^{n+1}}$
10	$\sin ax$	$\frac{a}{p^2+a^2}$
11	$\cos ax$	$\frac{p}{p^2+a^2}$
12	$\operatorname{sh} ax$	$\frac{a}{p^2-a^2}$
13	$\operatorname{ch} ax$	$\frac{p}{p^2-a^2}$
14	$\frac{x}{2a} \sin ax$	$\frac{p}{(p^2+a^2)^2}$
15	$\frac{1}{2a} (\sin ax - ax \cos ax)$	$\frac{a^2}{(p^2+a^2)^3}$
16	$\frac{1}{2^n n! a} x^n \sin ax$	$\frac{p^n}{(p^2+a^2)^{n+1}}$
17	$e^{-ax} \sin bx$	$\frac{b}{(p+a)^2+b^2}$
18	$e^{-ax} \cos bx$	$\frac{p+a}{(p+a)^2+b^2}$

Пример. Найти нормальное частное и общее решения уравнения

$$y'''' + 2y'' + y' + 2y = \sin x.$$

Преобразование Лапласа приводит к алгебраическому уравнению:

$$(p^4 + 2p^2 + p + 2)Y(p) = \frac{1}{p^2+1},$$

откуда

$$Y(p) = \frac{1}{(p^2+1)(p^2+2p^2+p+2)} = \frac{1}{(p^2+1)^2(p+2)}.$$

Разложив на сумму простейших дробей, получим

$$Y(p) = \frac{-\frac{1}{5}p + \frac{2}{5}}{(p^2+1)^2} + \frac{-\frac{1}{5}p + \frac{2}{5}}{p^2+1} + \frac{\frac{1}{5}}{p+2}$$

и, воспользовавшись приведённой таблицей, найдём нормальное решение:

$$y(x) = -\frac{1}{5} \cdot \frac{x}{2} \sin x + \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{2} (\sin x - x \cos x) - \frac{1}{25} \cos x + \frac{2}{25} \sin x + \frac{1}{25} e^{-2x},$$

или

$$y(x) = \frac{1}{25} e^{-2x} - \frac{1}{25} \cos x + \frac{7}{25} \sin x - \frac{x}{10} (2 \cos x + \sin x).$$

Общее решение соответствующего однородного уравнения имеет вид:

$$y = C_1 e^{-2x} + C_2 \cos x + C_3 \sin x.$$

и, следовательно, общее решение данного уравнения:

$$y = C_1 e^{-2x} + C_2 \cos x + C_3 \sin x - \frac{x}{10} (2 \cos x + \sin x).$$

При нахождении только общего решения уравнения вычисления значительно упрощаются, так как достаточно, учитывая вид общего решения однородного уравнения, иметь в виду только первую из простых дробей в выражении для $Y(p)$.

СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФИЦИЕНТАМИ

Однородная система 1-го порядка, состоящая из n уравнений с неизвестными функциями $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$:

$$\alpha_{11} y_1' + \alpha_{12} y_2' + \dots + \alpha_{1n} y_n' + \beta_{11} y_1 + \beta_{12} y_2 + \dots + \beta_{1n} y_n = 0;$$

$$\alpha_{21} y_1' + \alpha_{22} y_2' + \dots + \alpha_{2n} y_n' + \beta_{21} y_1 + \beta_{22} y_2 + \dots + \beta_{2n} y_n = 0;$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\alpha_{n1} y_1' + \alpha_{n2} y_2' + \dots + \alpha_{nn} y_n' + \beta_{n1} y_1 + \beta_{n2} y_2 + \dots + \beta_{nn} y_n = 0$$

в случае, если

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{vmatrix} \neq 0,$$

может быть разрешена относительно y_i' и приведена к так называемому нормальному виду:

$$y_1' + a_{11} y_1 + a_{12} y_2 + \dots + a_{1n} y_n = 0;$$

$$y_2' + a_{21} y_1 + a_{22} y_2 + \dots + a_{2n} y_n = 0;$$

$$\dots \dots \dots$$

$$y_n' + a_{n1} y_1 + a_{n2} y_2 + \dots + a_{nn} y_n = 0.$$

Характеристическим уравнением такой системы называется уравнение:

$$\begin{vmatrix} a_{11} + k & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} + k & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} + k \end{vmatrix} = 0.$$

Всякому действительному корню k характеристического уравнения кратности m соответствует система решений вида:

$$y_1 = A_1(x) e^{kx};$$

$$y_2 = A_2(x) e^{kx};$$

$$\dots \dots \dots$$

$$y_n = A_n(x) e^{kx},$$

где $A_1(x), A_2(x), \dots, A_n(x)$ — многочлены степени не выше $m-1$. Все коэффициенты этих многочленов могут быть выражены через m из них. Для этого следует выражения для y_1, y_2, \dots, y_n , где $A_1(x), A_2(x), \dots, A_n(x)$ — многочлены степени $m-1$ с неопре-

делёнными коэффициентами, подставить в данную систему дифференциальных уравнений. Оставшиеся неопределёнными m коэффициентов принимаются за произвольные постоянные.

Всякой комплексной паре $a \pm bi$ корней характеристического уравнения кратности p соответствует система решений вида:

$$\begin{aligned} y_1 &= e^{ax} [P_1(x) \cos bx + Q_1(x) \sin bx]; \\ y_2 &= e^{ax} [P_2(x) \cos bx + Q_2(x) \sin bx]; \\ &\dots \dots \dots \\ y_n &= e^{ax} [P_n(x) \cos bx + Q_n(x) \sin bx], \end{aligned}$$

где $P_1(x), P_2(x), \dots, P_n(x); Q_1(x), Q_2(x), \dots, Q_n(x)$ — многочлены степени $p-1$.

Коэффициенты этих многочленов тем же способом, как и в предыдущем случае, могут быть выражены через p произвольных постоянных.

Сложив найденные таким образом для каждой из неизвестных функций решения, соответствующие различным корням характеристического уравнения, мы получим общее решение данной однородной системы линейных дифференциальных уравнений. Это решение будет содержать n произвольных постоянных.

Пример.

$$\begin{aligned} y_1' - 2y_1 - 2y_2 + y_3 &= 0; \\ y_2' + 2y_1 - 4y_2 - y_3 &= 0; \\ y_3' + 3y_1 - 8y_2 - 2y_3 &= 0. \end{aligned}$$

Решив характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} k-2 & -2 & 1 \\ 2 & k-4 & -1 \\ 3 & -8 & k-2 \end{vmatrix} = 0,$$

находим $k_1 = 6, k_{2,3} = 1$.

Корню $k_1 = 6$ соответствует система решений:

$$\begin{aligned} y_1 &= A_1 e^{6x}; \\ y_2 &= A_2 e^{6x}; \\ y_3 &= A_3 e^{6x}. \end{aligned}$$

Подстановка этих решений в систему дифференциальных уравнений приводит к равенствам:

$$\begin{aligned} 4A_1 - 2A_2 + A_3 &= 0; \\ 2A_1 + 2A_2 - A_3 &= 0; \\ 3A_1 - 8A_2 + 4A_3 &= 0, \end{aligned}$$

откуда $A_1 = 0, A_3 = 2A_2$; положив $A_2 = C_1$, имеем $A_1 = 0, A_2 = C_1, A_3 = 2C_1$.

Корню $k_{2,3} = 1$ соответствуют решения:

$$\begin{aligned} y_1 &= (B_1 + D_1 x) e^x; \\ y_2 &= (B_2 + D_2 x) e^x; \\ y_3 &= (B_3 + D_3 x) e^x. \end{aligned}$$

Для определения B_i и D_i получим уравнения:

$$\begin{aligned} -D_1 - 2D_2 + D_3 &= 0; \quad D_1 - B_1 - 2B_2 + B_3 = 0; \\ 2D_1 - 3D_2 - D_3 &= 0; \quad 2B_1 + D_1 - 3B_2 - B_3 = 0; \\ 3D_1 - 8D_2 - D_3 &= 0; \quad 3B_1 - 8B_2 + D_3 - B_3 = 0, \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} D_1 &= 5C_2; \quad D_3 = C_2; \quad D_2 = 7C_2; \\ B_1 &= 5C_2 - 6C_3; \quad B_2 = C_2; \quad B_3 = 7C_2 - 11C_3, \end{aligned}$$

и общее решение системы таково:

$$\begin{aligned} y_1 &= (5C_2 - 6C_3 + 5C_1 x) e^x; \\ y_2 &= C_1 e^{6x} + (C_2 + C_3 x) e^x; \\ y_3 &= 2C_1 e^{6x} + (7C_2 - 11C_3 + 7C_1 x) e^x. \end{aligned}$$

Если $Y_1(x), Y_2(x), \dots, Y_n(x)$ — какая-либо система частных решений неоднородной системы:

$$\begin{aligned} y_1' + a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \dots + a_{1n}y_n &= f_1(x); \\ y_2' + a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{2n}y_n &= f_2(x); \\ &\dots \dots \dots \\ y_n' + a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \dots + a_{nn}y_n &= f_n(x), \end{aligned}$$

а

$$\begin{aligned} y_1 &= y_1(x, C_1, \dots, C_n); \\ y_2 &= y_2(x, C_1, \dots, C_n); \\ &\dots \dots \dots \\ y_n &= y_n(x, C_1, \dots, C_n) \end{aligned}$$

— общее решение соответствующей однородной системы, то общее решение данной неоднородной системы имеет вид:

$$\begin{aligned} y_1 &= y_1(x, C_1, \dots, C_n) + Y_1(x), \\ y_2 &= y_2(x, C_1, \dots, C_n) + Y_2(x); \\ &\dots \dots \dots \\ y_n &= y_n(x, C_1, \dots, C_n) + Y_n(x). \end{aligned}$$

Для отыскания общего решения неоднородной системы по методу вариации произвольных постоянных следует в выражениях для y_1, y_2, \dots, y_n , взятых из общего решения соответствующей однородной системы, заменить произвольные постоянные C_1, C_2, \dots, C_n через неизвестные функции $C_1(x), C_2(x), \dots, C_n(x)$. После такой замены подстановка y_1, y_2, \dots, y_n в данную неоднородную систему дифференциальных уравнений приводит к алгебраической линейной системе уравнений для $C_1'(x), C_2'(x), \dots, C_n'(x)$, при помощи которой можно определить все неизвестные функции $C_1(x), C_2(x), \dots, C_n(x)$ (в выражении для каждой из них войдёт при этом одна произвольная постоянная).

Пример

$$\begin{aligned} y_1' + 8y_1 - 3y_2 &= 5e^{-x}; \\ y_2' + 18y_1 - 7y_2 &= 12e^{-x}. \end{aligned}$$

Общее решение соответствующей однородной системы:

$$\begin{aligned} y_1 &= C_1 e^x + C_2 e^{-2x}; \\ y_2 &= 3C_1 e^x + 2C_2 e^{-2x}. \end{aligned}$$

Частное решение неоднородной системы ищем в виде

$$Y_1 = A_1 e^{-x}, \quad Y_2 = A_2 e^{-x}.$$

Подстановка в систему даёт:

$$\begin{aligned} -A_1 e^{-x} + 8A_1 e^{-x} - 3A_2 e^{-x} &= 5e^{-x}, \\ -A_2 e^{-x} + 18A_1 e^{-x} - 7A_2 e^{-x} &= 12e^{-x}, \end{aligned}$$

или

$$7A_1 - 3A_2 = 5; \quad 9A_1 - 4A_2 = 6,$$

откуда

$$A_1 = 2, \quad A_2 = 3$$

и

$$Y_1 = 2e^{-x}, \quad Y_2 = 3e^{-x}.$$

Следовательно, искомое общее решение:

$$\begin{aligned} y_1 &= C_1 e^x + C_2 e^{-2x} + 2e^{-x}; \\ y_2 &= 3C_1 e^x + 2C_2 e^{-2x} + 3e^{-x}. \end{aligned}$$

Можно применить к решению той же системы метод вариации произвольных постоянных.

Положив

$$\begin{aligned} y_1 &= C_1(x) e^x + C_2(x) e^{-2x}, \\ y_2 &= 3C_1(x) e^x + 2C_2(x) e^{-2x}. \end{aligned}$$

после подстановки в систему, получим, произведя упрощения:

$$\begin{aligned} C_1' e^x + C_2' e^{-2x} &= 5e^{-x}; \\ 3 C_1' e^x + 2 C_2' e^{-2x} &= 12 e^{-x}, \end{aligned}$$

откуда

$$C_1' = 2 e^{-2x}, \quad C_2' = 3 e^x$$

и

$$\begin{aligned} C_1 &= -e^{-2x} + \bar{C}_1, \\ C_2 &= 3e^x + \bar{C}_2. \end{aligned}$$

Общее решение, таким образом, имеет вид:

$$\begin{aligned} y_1 &= (-e^{-2x} + \bar{C}_1) e^x + (3e^x + \bar{C}_2) e^{-2x}; \\ y_2 &= 3(-e^{-2x} + \bar{C}_1) e^x + 2(3e^x + \bar{C}_2) e^{-2x}, \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} y_1 &= \bar{C}_1 e^x + \bar{C}_2 e^{-2x} + 2e^{-x}; \\ y_2 &= 3\bar{C}_1 e^x + 2\bar{C}_2 e^{-2x} + 3e^{-x}. \end{aligned}$$

Всякая система дифференциальных уравнений выше 1-го порядка может быть приведена к системе 1-го порядка. Так, например, система

$$\begin{aligned} \alpha_{11} y_1''' + \alpha_{12} y_2''' + \beta_{11} y_1'' + \beta_{12} y_2'' + \gamma_{11} y_1' + \gamma_{12} y_2' + \delta_{11} y_1 + \delta_{12} y_2 &= 0, \\ \alpha_{21} y_1''' + \alpha_{22} y_2''' + \beta_{21} y_1'' + \beta_{22} y_2'' + \gamma_{21} y_1' + \gamma_{22} y_2' + \delta_{21} y_1 + \delta_{22} y_2 &= 0 \end{aligned}$$

равносильна системе:

$$y_1' = u_1;$$

$$u_1' = v_1;$$

$$y_2' = u_2;$$

$$u_2' = v_2;$$

$$\begin{aligned} \alpha_{11} v_1' + \alpha_{12} v_2' + \beta_{11} v_1 + \beta_{12} v_2 + \gamma_{11} u_1 + \gamma_{12} u_2 + \delta_{11} y_1 + \delta_{12} y_2 &= 0, \\ \alpha_{21} v_1' + \alpha_{22} v_2' + \beta_{21} v_1 + \beta_{22} v_2 + \gamma_{21} u_1 + \gamma_{22} u_2 + \delta_{21} y_1 + \delta_{22} y_2 &= 0. \end{aligned}$$

УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Для отыскания общего решения линейного однородного уравнения

$$\begin{aligned} X_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \frac{\partial z}{\partial x_1} + X_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \frac{\partial z}{\partial x_2} + \\ + \dots + X_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \frac{\partial z}{\partial x_n} = 0 \end{aligned}$$

составляем систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \dots = \frac{dx_n}{X_n}.$$

Если общее решение этой системы представить в виде:

$$\begin{aligned} \varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_n) &= C_1; \\ \varphi_2(x_1, x_2, \dots, x_n) &= C_2; \\ &\dots \\ \varphi_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_n) &= C_{n-1}, \end{aligned}$$

то общий интеграл данного уравнения в частных производных выразится равенством:

$$z = \Phi(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-1}),$$

где Φ — произвольная функция.

В случае неоднородного уравнения

$$\begin{aligned} X_1(x_1, x_2, \dots, x_n, z) \frac{\partial z}{\partial x_1} + \dots + \\ + X_n(x_1, x_2, \dots, x_n, z) \frac{\partial z}{\partial x_n} = Z(x_1, x_2, \dots, x_n, z) \end{aligned}$$

составляют систему:

$$\frac{dx_1}{X_1} = \dots = \frac{dx_n}{X_n} = \frac{dz}{Z}.$$

Её общее решение имеет вид:

$$\begin{aligned} \varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_n, z) &= C_1; \\ \varphi_2(x_1, x_2, \dots, x_n, z) &= C_2; \\ &\dots \\ \varphi_n(x_1, x_2, \dots, x_n, z) &= C_n, \end{aligned}$$

и общий интеграл неоднородного уравнения выражается неявно при помощи равенства

$$\Phi(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n) = 0,$$

где Φ — произвольная функция.

В частности общий интеграл уравнения

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f(x, y, z)$$

имеет вид:

$$\varphi[x, y, z, C(y)] = 0,$$

где $C(y)$ — произвольная функция, а

$$\varphi(x, y, z, C) = 0$$

общее решение обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{dz}{dx} = f(x, y, z),$$

в котором y рассматривается, как параметр.

ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

В случае двух независимых переменных линейное уравнение второго порядка имеет вид:

$$\begin{aligned} A \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + D \frac{\partial z}{\partial x} + \\ + E \frac{\partial z}{\partial y} + Fz = G(x, y), \end{aligned}$$

где A, B, C, D, E, F могут зависеть от x и y .

Интегральные кривые обыкновенного дифференциального уравнения

$$A dy^2 - 2B dx dy + C dx^2 = 0$$

или

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B \pm \sqrt{B^2 - AC}}{A}$$

называются характеристиками данного уравнения в частных производных.

Если $AC - B^2 < 0$, уравнение принадлежит к гиперболическому типу и имеет два семейства действительных характеристик.

Если $AC - B^2 = 0$, оба семейства характеристик совпадают и уравнение принадлежит к параболическому типу.

Если $AC - B^2 > 0$, характеристики мнимые и уравнение принадлежит к эллиптическому типу.

Приведение к канонической форме. Уравнение гиперболического типа приводится к каноническому виду:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}} + a \frac{\partial z}{\partial \bar{x}} + b \frac{\partial z}{\partial \bar{y}} + cz = g(\bar{x}, \bar{y})$$

при помощи замены

$$\bar{x} = \varphi(x, y), \quad \bar{y} = \psi(x, y),$$

где $\varphi(x, y) = \text{const}$ и $\psi(x, y) = \text{const}$ — уравнения характеристик.

Уравнение параболического типа можно привести к виду:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \bar{x}^2} + a \frac{\partial z}{\partial \bar{x}} + b \frac{\partial z}{\partial \bar{y}} + cz = g(\bar{x}, \bar{y})$$

с помощью преобразования

$$\bar{x} = \varphi(x, y), \quad \bar{y} = \psi(x, y),$$

где $\psi(x, y) = \text{const}$ — уравнение характеристик, а $\varphi(x, y)$ — произвольная функция, не выражающаяся через $\psi(x, y)$.

Уравнение эллиптического типа принимает каноническую форму:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial \bar{y}^2} + a \frac{\partial z}{\partial \bar{x}} + b \frac{\partial z}{\partial \bar{y}} + cz = g(\bar{x}, \bar{y})$$

после замены

$$\bar{x} = \varphi(x, y), \quad \bar{y} = \psi(x, y),$$

где $\varphi(x, y) \pm i\psi(x, y) = \text{const}$ — уравнения характеристик.

Задача Коши. Метод Римана. Требуется найти решение однородного уравнения гиперболического типа:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + a \frac{\partial z}{\partial x} + b \frac{\partial z}{\partial y} + cz = 0,$$

если вдоль некоторой кривой Γ (не являющейся характеристикой) известны значения искомой функции z и одной из её частных производных (задача Коши).

Для решения этой задачи следует найти функцию Римана $U(x, y; \xi, \eta)$, зависящую от четырёх переменных x, y, ξ, η и определяемую следующими условиями:

1) как функция переменных ξ и η , функция u должна удовлетворять так называемому сопряжённому уравнению:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{\partial (au)}{\partial \xi} - \frac{\partial (bu)}{\partial \eta} + cu = 0;$$

2) при $\xi = x$ должно иметь место тождество

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = a(x, \eta) u$$

и при $\eta = y$ аналогично

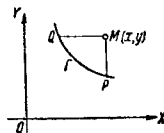
$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = b(\xi, y) u;$$

3) $u = 1$ при $\xi = x, \eta = y$.

После того как функция Римана найдена, решение задачи Коши даётся равенством:

$$z_{xy} = \frac{(uz)_P + (uz)_Q}{2} + \int_{PQ} uz(a d\eta - b d\xi) + \\ + \frac{1}{2} \int_{PQ} u \left(\frac{\partial z}{\partial \eta} d\eta - \frac{dz}{\partial \xi} d\xi \right) + \\ + \frac{1}{2} \int_{PQ} z \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} d\xi - \frac{\partial u}{\partial \eta} d\eta \right).$$

Здесь ξ и η — текущие координаты вдоль кривой Γ (фиг. 149), P и Q — точки пересечения с кривой Γ прямых, параллельных осям, проведённых через точку $M(x, y)$. Значения $z(\xi, \eta)$ и одной из частных производных $\frac{\partial z}{\partial \xi}$ или $\frac{\partial z}{\partial \eta}$



Фиг. 149

вдоль Γ известны из условий, и, следовательно, другая частная производная тоже может быть определена.

Пример 1. Телеграфное уравнение

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = a_0 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + 2b_0 \frac{\partial v}{\partial t} + c_0 v$$

после подстановки $v = e^{-\frac{b_0}{a_0} t} \cdot z$ принимает вид:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + b^2 z; \quad \left(a^2 = \frac{1}{a_0}, \quad b^2 = \frac{b_0^2 - a_0 c_0}{a_0^2} \right),$$

и после замены

$$\bar{x} = \frac{b}{a}(x + at), \quad \bar{y} = \frac{b}{a}(x - at)$$

приводится к канонической форме:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}} + \frac{z}{4} = 0.$$

Функция Римана $u(\bar{x}, \bar{y}; \xi, \eta)$ должна удовлетворять условиям: $\frac{\partial u}{\partial \eta} = 0$ при $\xi = \bar{x}$, $\frac{\partial u}{\partial \xi} = 0$ при $\eta = \bar{y}$ и $u(\bar{x}, \bar{y}; \bar{x}, \bar{y}) = 1$.

Функцию Римана ищем в виде

$$u = \varphi(\sqrt{(\xi - \bar{x})(\eta - \bar{y})}).$$

Обозначив $\sqrt{(\xi - \bar{x})(\eta - \bar{y})}$ через λ и подставив $\varphi(\lambda)$ в дифференциальное уравнение (которое совпадает в данном случае с ему сопряжённым), получаем для определения $\varphi(\lambda)$ уравнение Бесселя (стр. 171) нулевого порядка:

$$\varphi''(\lambda) + \frac{1}{\lambda} \varphi'(\lambda) + \varphi(\lambda) = 0,$$

и, следовательно, можно принять

$$u(\bar{x}, \bar{y}; \xi, \eta) = J_0(\sqrt{(\xi - \bar{x})(\eta - \bar{y})}).$$

Если начальные условия таковы, что $z = f(x)$ и $\frac{\partial z}{\partial t} = F(x)$ при $t = 0$ (в плоскости \bar{x}, \bar{y} прямой $t = 0$ соответствует биссектриса координатного угла и вдоль неё $\xi = \eta$), то, подставив в формулу Римана найденную функцию u , воспользовавшись начальными условиями и возвратившись к переменным x и t , найдём

$$z(x, t) = \frac{f(x + at) + f(x - at)}{2} - \\ - \frac{bt}{2} \int_{x-at}^{x+at} f(\xi) \frac{J_0 \left[\frac{b}{a} \sqrt{(\xi - x)^2 - a^2 t^2} \right]}{V(\xi - x)^2 - a^2 t^2} d\xi + \\ + \frac{1}{2} \frac{1}{a} \int_{x-at}^{x+at} F(\xi) J_0 \left[\frac{b}{a} \sqrt{(\xi - x)^2 - a^2 t^2} \right] d\xi.$$

Пример 2. Уравнение свободных колебаний струны имеет вид:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}.$$

Характеристиками этого уравнения являются прямые:

$$x - at = \text{const}$$

и

$$x + at = \text{const}.$$

Положив

$$\bar{x} = x - at, \quad \bar{y} = x + at,$$

придём к канонической форме:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0.$$

Общее решение этого уравнения (получаемое с помощью квадратур):

$$z = \theta_1(\bar{x}) + \theta_2(\bar{y}),$$

или

$$z = \theta_1(x - at) + \theta_2(x + at),$$

где θ_1 и θ_2 — произвольные функции.

Решение, соответствующее начальным условиям $z = f(x)$, $\frac{\partial z}{\partial t} = F(x)$ при $t = 0$, имеет вид (после обращения к переменным x и t):

$$z = \frac{f(x - at) + f(x + at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x - at}^{x + at} F(\xi) d\xi.$$

Задача Дирихле. Метод Грина. Требуется найти в некоторой области функцию, удовлетворяющую однородному уравнению эллиптического типа:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + a \frac{\partial z}{\partial x} + b \frac{\partial z}{\partial y} + cz = 0$$

и принимающую на границе этой области заданные значения (внутренняя задача Дирихле).

Для решения задачи Дирихле следует найти функцию Грина $G(x, y; \xi, \eta)$, определяемую следующими условиями:

1) как функция ξ и η , функция G должна удовлетворять сопряжённому уравнению

$$\frac{\partial^2 G}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial \eta^2} - \frac{\partial(aG)}{\partial \xi} - \frac{\partial(bG)}{\partial \eta} + cG = 0,$$

всюду, кроме точки $\xi = x$, $\eta = y$;

2) на границе данной области (ξ и η — текущие координаты на границе)

$$G(x, y; \xi, \eta) = 0;$$

3) функция $G(x, y; \xi, \eta) + \ln r$ [где $r = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2}$] непрерывна в рассматриваемой области вместе со своими производными 1-го и 2-го порядков.

После того как функция Грина найдена, решение задачи Дирихле выражается формулой

$$z(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} z(\xi, \eta) \frac{\partial}{\partial n} G(x, y; \xi, \eta) ds,$$

где Γ — контур, ограничивающий данную область, ds — дифференциал дуги на этом контуре, n — направление внутренней нормали к контуру.

Уравнение Лапласа. Решение задачи Дирихле для круга и шара. Функции, удовлетворяющие уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

(на плоскости) или

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

(в пространстве) называются гармоническими.

Уравнение Лапласа совпадает с ему сопряжённым.

Функция, дающая решение задачи Дирихле для круга (т. е. гармоническая внутри круга и принимающая на окружности этого

круга заданные граничные значения) может быть выражена при помощи интеграла Пуассона:

$$z(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - \rho^2}{R^2 + \rho^2 - 2R\rho \cos(\varphi - \theta)} z(\varphi) d\varphi,$$

где ρ и θ — полярные координаты точки (x, y) , если полюс находится в центре данного круга ($x = \rho \cos \theta$, $y = \rho \sin \theta$), R — радиус этого круга, $z(\varphi)$ — заданная на окружности круга функция, определяющая граничные значения функции $z(x, y)$.

Формула Пуассона, определяющая значение гармонической функции внутри шара через её граничные значения на сфере, имеет вид:

$$u(M) = \frac{1}{4\pi R} \iint_{(S)} u(P) \frac{R^2 - r^2}{r^3} dS,$$

где (S) — поверхность сферы, функция $u(P)$ определяет заданные значения функции u на поверхности сферы, ρ — расстояние точки M от центра шара, R — радиус шара и r — расстояние между точками M и P .

Метод Фурье. Уравнение теплопроводности. Во многих случаях удаётся найти частные решения линейного однородного дифференциального уравнения в частных производных в виде произведения функций, каждая из которых зависит только от одного аргумента и является решением некоторого обыкновенного дифференциального уравнения. Взяв линейную комбинацию полученных таким образом частных решений (являющуюся также решением данного уравнения), которая в результате предельного перехода даёт некоторый ряд или интеграл, являющийся решением уравнения¹, можно определить из начальных условий остающиеся неопределёнными величины и функции.

Метод Фурье можно применить к отысканию решения уравнения теплопроводности (уравнение параболического типа):

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

удовлетворяющего начальному условию: $u = f(x)$ при $t = 0$.

Положив $u = T(t) \cdot X(x)$ и подставив в данное уравнение, получаем: $\frac{T'}{a^2 T} = \frac{X''}{X}$ или $\frac{T'}{a^2 T} = -\lambda^2$, $\frac{X''}{X} = -\lambda^2$, откуда

$$T = e^{-\lambda^2 a^2 t}; \quad X = A(\lambda) \cos \lambda x + B(\lambda) \sin \lambda x,$$

$$u = e^{-\lambda^2 a^2 t} [A(\lambda) \cos \lambda x + B(\lambda) \sin \lambda x].$$

Проинтегрировав по λ , получим решение уравнения теплопроводности в виде

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda^2 a^2 t} [A(\lambda) \cos \lambda x + B(\lambda) \sin \lambda x] d\lambda.$$

¹ Следует, конечно, проверить, приводит ли действительно указанный предельный переход к решению данного уравнения.

Начальному условию $u = f(x)$ при $t = 0$ можно удовлетворить, положив

$$A(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \cos \lambda \xi d\xi,$$

$$B(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \sin \lambda \xi d\xi$$

(см. интеграл Фурье, стр. 163) и, следовательно, искомое решение имеет вид:

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) d\xi \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda^2 a^2 t} \cos \lambda (\xi - x) d\lambda$$

или (стр. 147, формула 17)

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2 t}} d\xi.$$

ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Расстоянием между двумя кривыми $y = y(x)$ и $\bar{y} = \bar{y}(x)$ на отрезке $a \leq x \leq \alpha$ называется наибольшее значение величины $|\bar{y}(x) - y(x)|$ на этом отрезке; ϵ -окрестностью кривой $y = y(x)$ называется совокупность кривых $\bar{y} = \bar{y}(x)$, расстояния которых от кривой $y = y(x)$ меньше ϵ (фиг. 150).

ПРОСТЕЙШАЯ ЗАДАЧА

Дана функция $F(x, y, y')$, зависящая от трёх аргументов x, y и y' , которая, вместе со своими частными производными до второго порядка включительно по всем аргументам, непрерывна при всех значениях x и y , принадлежащих некоторой области (S) плоскости OXY , и при всех значениях аргумента y' .

Требуется найти в области (S) дугу, соединяющую точки $A(a, b)$ и $B(\alpha, \beta)$ такой кривой $y = y(x)$ [функция $y(x)$ непрерывна вместе со своей производной $y'(x)$ на отрезке $a \leq x \leq \alpha$], которая даёт интегралу

$$I = \int_a^\alpha F(x, y, y') dx$$

наибольшее или наименьшее значение по сравнению со всеми кривыми $\bar{y} = \bar{y}(x)$ некоторой ϵ -окрестности кривой $y = y(x)$ (сильный экстремум)¹.

Кривая $y = y(x)$, дающая экстремум интегралу I , должна удовлетворять уравнению Эйлера

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) = 0$$

или

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} y'' + \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'} y' + \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y'} - \frac{\partial F}{\partial y} = 0.$$

Уравнение Эйлера — обыкновенное дифференциальное уравнение 2-го порядка; его общее решение $y = y(x, C_1, C_2)$ зависит от двух произвольных постоянных, которые должны быть определены так, чтобы кривая проходила через точки $A(a, b)$ и $B(\alpha, \beta)$.

Интегральные кривые уравнения Эйлера называются экстремальями.

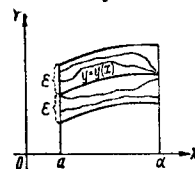
¹ Кривые $\bar{y} = \bar{y}(x)$, о которых идёт речь, должны удовлетворять тем же требованиям, что и кривая $y = y(x)$, т. е. должны проходить через точки A и B и функции $y(x)$ вместе со своими производными $y'(x)$ должны быть непрерывны на отрезке $a \leq x \leq \alpha$.

Для того чтобы экстремаль давала экстремум интегралу I , необходимо, чтобы вдоль экстремали выполнялось условие Лежандра:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} \geq 0$$

(в случае минимума) или

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} \leq 0$$



Фиг. 150

(в случае максимума).

Простейшие достаточные условия для того, чтобы экстремаль давала минимум (максимум) интегралу, следующие:

- 1) $\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} > 0$ $\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} < 0 \right)$;
- 2) $\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'} \right)^2 > 0$

для всех значений x и y , принадлежащих некоторой ϵ -окрестности экстремали и для любых значений аргумента y' .

Пример 1. Среди всех дуг, имеющих концы в данных точках $A(a, b)$ и $B(\alpha, \beta)$, найти ту, которая при вращении около оси OX образует поверхность с минимальной площадью.

Здесь

$$I = 2\pi \int_a^\alpha y \sqrt{1 + y'^2} dx,$$

уравнение Эйлера имеет вид:

$$\frac{yy''}{(1 + y'^2)^{3/2}} + \frac{y'^2}{V 1 + y'^2} - V 1 + y'^2 = 0.$$

Его общее решение даёт семейство экстремалей:

$$y = C_1 \operatorname{ch} \frac{x - C_2}{C_1}.$$

Постоянные C_1 и C_2 должны быть определены из того условия, что кривая проходит через точки $A(a, b)$ и $B(\alpha, \beta)$.

Пример 2. Определить траекторию, соединяющую точку A с точкой B , двигаясь по которой под действием силы тяжести, материальная точка пройдет путь AB в кратчайшее время (задача о брахистохроме).

Принимая точку A за начало координат и обозначая координаты точки B через (x_1, y_1) , получаем:

$$v = \frac{ds}{dt} = \sqrt{2gy}; \quad ds = \sqrt{1 + y'^2} dx;$$

$$dt = \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{2gy}} dx$$

и

$$T = \int_0^{x_1} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gy}} dx.$$

Составив и решив уравнение Эйлера, найдём уравнения искомой кривой:

$$\begin{aligned} x &= C_1 (u - \sin u) + C_2; \\ y &= C_1 (1 - \cos u). \end{aligned}$$

Кривая проходит через начало координат и, следовательно, $C_2 = 0$; постоянную C_1 можно найти, подставив в уравнения кривой координаты точки B . Найденная кривая — циклоида.

ЗАДАЧА С ПОДВИЖНЫМИ КОНЦАМИ

В более общем случае требуется найти экстремум интеграла

$$I = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y') dx,$$

причём концы рассматриваемых дуг должны находиться на заданных кривых: $y = \varphi(x)$ и $y = \psi(x)$ (x_0 и x_1 — абсциссы концов этой дуги тоже подлежат определению).

В этом случае уравнение искомой дуги $y = y(x)$ должно, кроме уравнения Эйлера, удовлетворять дополнительным условиям:

$$F + (\varphi' - y') \frac{\partial F}{\partial y'} = 0 \text{ при } x = x_0;$$

$$F + (\psi' - y') \frac{\partial F}{\partial y'} = 0 \text{ при } x = x_1,$$

(условия трансверсальности).

Условия трансверсальности устанавливают зависимость между угловыми коэффициентами касательных к экстремали и к граничным кривым в точках $x = x_0$ и $x = x_1$. В случае, если функция F имеет вид:

$$F(x, y, y') = A(x, y) \sqrt{1+y'^2},$$

эти условия требуют ортогональности экстремали к этим кривым. Так, например, обстоит дело в задачах о кратчайшем расстоянии между двумя линиями, между точкой и линией, где требуется дать минимум интегралу

$$\int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1+y'^2} dx.$$

Если один из концов дуги неподвижен, то условие трансверсальности должно соблюдаться только для другого конца.

ПРОСТРАНСТВЕННАЯ ЗАДАЧА

Требуется найти дугу пространственной кривой $y = y(x)$, $z = z(x)$, соединяющую точку $A(a, b, c)$ с точкой $B(\alpha, \beta, \gamma)$ и дающую экстремум интегралу

$$I = \int_a^\alpha F(x, y, y', z, z') dx.$$

Искомая кривая определяется решением системы:

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial z'} \right) = 0$$

при начальных условиях, следующих из того, что кривая должна проходить через точки A и B .

СЛУЧАЙ ПРОИЗВОДНЫХ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

Если решается задача об экстремуме интеграла

$$I = \int_a^\alpha F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) dx,$$

то уравнение Эйлера принимает вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) + \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{\partial F}{\partial y''} \right) - \dots + \\ + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} \left(\frac{\partial F}{\partial y^{(n)}} \right) = 0. \end{aligned}$$

Это уравнение имеет порядок $2n$ и его общее решение $y = y(x, C_1, C_2, \dots, C_{2n})$ содержит $2n$ произвольных постоянных. Произвольные постоянные определяются из того условия, что в точках $x = a$ и $x = \alpha$ заданы значения искомой функции и её производных до порядка $n-1$ включительно.

ИЗОПЕРИМЕТРИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА

Среди функций $\bar{y} = \bar{y}(x)$, для которых ин-

теграл $K = \int_a^\alpha G(x, y, y') dx$ принимает за-

данное значение l и для которых $\bar{y}(a) = b$ и $\bar{y}(\alpha) = \beta$, требуется найти такую функцию $y = y(x)$, которая даёт экстремум интегралу

$$I = \int_a^\alpha F(x, y, y') dx.$$

Для решения изопериметрической задачи следует искать обычный (безусловный) экстремум интеграла

$$L = \int_a^\alpha (F + \lambda G) dx,$$

где λ — неопределённая постоянная.

Проинтегрировав уравнение Эйлера для интеграла L , найдём $y = y(x, C_1, C_2, \lambda)$. Постоянные C_1, C_2 и λ определяются из условия $K = l$ и из начальных условий.

УСЛОВНЫЙ ЭКСТРЕМУМ

Требуется найти кривую $y = y(x)$, $z = z(x)$, соединяющую две данные точки A и B , которая среди всех кривых, расположенных на данной поверхности $\varphi(x, y, z) = 0$ и удовлетворяющих тем же начальным условиям, даёт экстремум интегралу

$$I = \int_a^\alpha F(x, y, z, y', z') dx.$$

Для решения этой задачи требуется составить функцию

$$\Phi(x, y, z, y', z') = F + \lambda(x) \varphi$$

и искать безусловный экстремум интеграла

$$\int_a^\alpha \Phi dx.$$

Уравнения Эйлера дадут систему:

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial y} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) &= 0; \\ \frac{\partial F}{\partial z} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial z'} \right) &= 0\end{aligned}$$

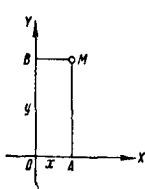
с тремя неизвестными функциями: $y(x)$, $z(x)$ и $\lambda(x)$, которая совместно с соотношением $\varphi(x, y, z) = 0$ позволит определить эти функции, причём решение будет содержать две произвольные постоянные, определяемые из начальных условий.

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

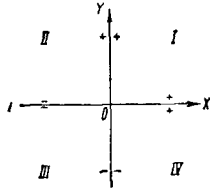
АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ НА ПЛОСКОСТИ

МЕТОД КООРДИНАТ НА ПЛОСКОСТИ

Между всеми точками плоскости с одной стороны и парами чисел, взятых в определённом порядке, с другой стороны, можно установить взаимное соответствие при помощи метода координат. Наиболее употребительны две координатные системы: прямоугольная декартова и полярная. Реже применяются косоугольная и другие системы координат.



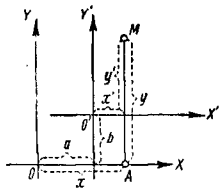
Фиг. 151



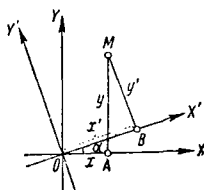
Фиг. 152

Декартова прямоугольная система координат. Две взаимно-перпендикулярные прямые OX и OY на плоскости (фиг. 151) называются координатными осями (ось OX — осью абсцисс, ось OY — осью ординат), точка O пересечения осей — началом координат. Если выбрать длину некоторого отрезка за единицу масштаба и положительное направление на оси OX — вправо от начала координат, а на оси OY — вверх, то положение любой точки M на плоскости может быть определено при помощи двух чисел x и y , соответственно выражающих расстояния от точки M до оси ординат и до оси абсцисс в выбранном масштабе. Запись: $M(x, y)$.

Числа x и y называются координатами (абсциссой и ординатой) точки M и берутся с определённым знаком (+) или (—), в зависимости от того, сов-



Фиг. 153



Фиг. 154

падают ли направления отрезков OA и OB с положительным направлением на оси OX и OY или не совпадают.

На фиг. 152 дана схема распределения знаков координат во всех четырёх квадрантах, на которые координатные оси делят всю плоскость.

Преобразование прямоугольных координат. Переход от одной прямоугольной системы координат к другой состоит из двух преобразований:

1) преобразование параллельного переноса осей (фиг. 153), при котором координаты $x (= OA)$ и $y (= AM)$ точки M в системе OXY связаны с координатами x' и y' той же точки M в системе $OX'Y'$ соотношениями:

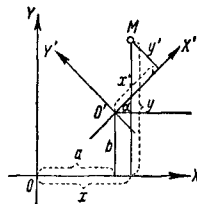
$$\begin{aligned}x &= x' + a; \\ y &= y' + b,\end{aligned}$$

где a и b — координаты нового начала координат O' в системе координат OXY ;

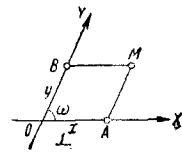
2) преобразование поворота осей (фиг. 154), при котором координаты $x (= OA)$ и $y (= AM)$ в системе OXY связаны с координатами $x' (= OB)$ и $y' (= BM)$ той же точки M в системе $OX'Y'$ соотношениями:

$$\begin{aligned}x &= x' \cos \alpha - y' \sin \alpha; \\ y &= x' \sin \alpha + y' \cos \alpha,\end{aligned}$$

где α — угол между осью OX' и осью OX .



Фиг. 155



Фиг. 156

Поэтому в общем случае преобразования координат (фиг. 155) имеют место соотношения:

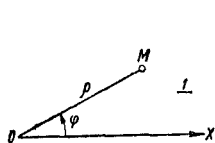
$$\begin{aligned}x &= x' \cos \alpha - y' \sin \alpha + a; \\ y &= x' \sin \alpha + y' \cos \alpha + b.\end{aligned}$$

Косоугольная система координат. Угол между осями координат называется координатным углом. Если выбрать координатный угол ω острым или тупым, то мы получим так называемую косоугольную систему координат (фиг. 156). За координаты x и y точки M в этой системе принимаются длины отрезков OA и OB , отсекаемых на осях прямыми, проходящими через точку M и параллельными координатным осям. Точка M с косоугольными координатами x и y записывается, как и в прямоугольной системе, в виде: $M(x, y)$.

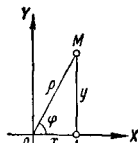
Полярная система координат. Полу-прямая OX называется полярной осью,

точка O на ней — полюсом (фиг. 157). Если выбрать длину некоторого отрезка за единицу масштаба, то положение любой точки M на плоскости определяется двумя числами: радиусом-вектором $\rho = OM$, выражающим длину отрезка OM (в выбранном масштабе), и полярным углом $\varphi = \angle MOX$ (в радианной мере). При этом полярный угол считается положительным, если он отсчитывается от полярной оси в направлении, обратном движению часовой стрелки, и отрицательным — в направлении движения часовой стрелки. Числа ρ и φ называются полярными координатами точки M . Принято записывать¹ точку M с полярными координатами ρ и φ в виде $M(\rho, \varphi)$.

Связь между декартовыми прямоугольными и полярными координатами. Если выбрать полярную систему координат таким образом, чтобы её полюс совпал с началом



Фиг. 157



Фиг. 158

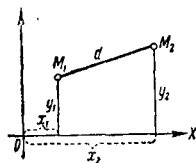
координат прямоугольной координатной системы, а полярная ось совпала с положительной частью оси абсцисс (фиг. 158), то между прямоугольными координатами $x (=OA)$ и $y (=AM)$ и полярными координатами $\rho (=OM)$ и $\varphi (= \angle AOM)$ точки M имеют место следующие соотношения, дающие возможность перехода от прямоугольной системы координат к полярной и обратно:

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \varphi; \quad y = \rho \sin \varphi; \\ \rho &= \sqrt{x^2 + y^2}; \quad \varphi = \arctg \frac{y}{x}. \end{aligned}$$

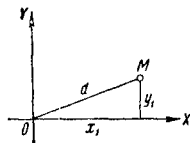
НЕКОТОРЫЕ ПРОСТЕЙШИЕ ЗАДАЧИ НА ПЛОСКОСТИ

Расстояние между двумя точками. В прямоугольной системе координат расстояние между двумя точками плоскости $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ (фиг. 159) определяется по формуле

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$



Фиг. 159



Фиг. 160

В частном случае, когда одна из точек (например, M_2) совпадает с началом координат (фиг. 160), имеем

$$d = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}.$$

¹ Можно условиться придавать координате ρ также и отрицательные значения, считая точку $(-\rho, \varphi)$ совпадающей с точкой $(\rho, \varphi \pm \pi)$.

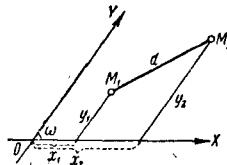
В косоугольной системе координат расстояние между двумя точками $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ (фиг. 161) определяется по формуле

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 - 2(x_2 - x_1)(y_2 - y_1) \cos \omega},$$

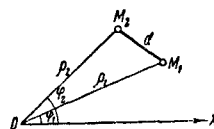
где ω — координатный угол.

В полярной системе координат расстояние между двумя точками $M_1(\rho_1, \varphi_1)$ и $M_2(\rho_2, \varphi_2)$ (фиг. 162) определяется по формуле

$$d = \sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2 - 2\rho_1\rho_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}.$$



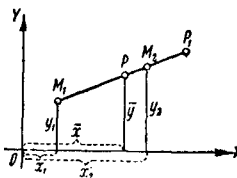
Фиг. 161



Фиг. 162

Деление отрезка прямой в данном отношении. Прямоугольные координаты точки $P(\bar{x}, \bar{y})$, делящей расстояние между начальной точкой $M_1(x_1, y_1)$ и конечной $M_2(x_2, y_2)$ внутренним образом в отношении $\frac{M_1P}{PM_2} = \lambda$ (фиг. 163), определяются по формулам:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}; \quad \bar{y} = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}.$$



Фиг. 163

В частном случае, когда точка P находится посередине ($\lambda = 1$), формулы деления отрезка M_1M_2 пополам принимают вид:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2}{2}; \quad \bar{y} = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Для деления отрезка внешним образом (точка деления P_1) применяются те же формулы, но λ принимается отрицательным.

Площадь треугольника. Площадь треугольника, заданного своими вершинами: $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ и $C(x_3, y_3)$ (фиг. 164), определяется по формуле

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} [x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)],$$

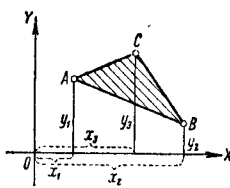
или посредством определителя

$$2S_{\Delta} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \cdot \frac{1}{2}.$$

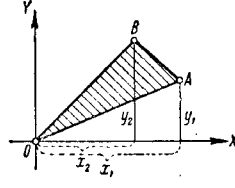
При этом положительным значениями S_{Δ} соответствует обход вершин треугольника A , B и C в направлении движения против часовой стрелки, а отрицательным — по часовой стрелке.

В частном случае, когда одна из вершин (C) совпадает с началом координат (фиг. 165), формула принимает вид:

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} (x_1 y_2 - x_2 y_1)$$



Фиг. 164



Фиг. 165

или

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}.$$

Площадь многоугольника. Площадь многоугольника, заданного своими вершинами: $A_1(x_1, y_1), A_2(x_2, y_2), A_3(x_3, y_3), \dots, A_n(x_n, y_n)$, определяется по формуле

$$S = \frac{1}{2} \left[(x_1 - x_2)(y_1 + y_2) + (x_2 - x_3)(y_2 + y_3) + \dots + (x_n - x_1)(y_n + y_1) \right].$$

ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ УРАВНЕНИЯ С ДВУМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ

Уравнение $F(x, y) = 0$ или $y = f(x)$, связывающее две переменные x и y , является уравнением некоторой действительной или мнимой линии (геометрического места точек) в декартовых координатах, если декартовы координаты любой точки этой линии удовлетворяют данному уравнению (т. е. обращают его в тождество при подстановке вместо x и y , а координаты всех точек, не принадлежащих линии, не удовлетворяют этому уравнению).

Порядком кривой называется степень уравнения этой кривой (если это уравнение алгебраическое).

Подобно этому уравнение $F(\rho, \varphi) = 0$ или $\rho = f(\varphi)$, связывающее две переменные ρ и φ , геометрически представляет собой также линию в полярных координатах.

ПРЯМАЯ ЛИНИЯ

В декартовой системе координат прямая линия выражается аналитически уравнением, линейным относительно координат x и y . Различают следующие основные формы уравнения прямой.

Общее уравнение прямой:

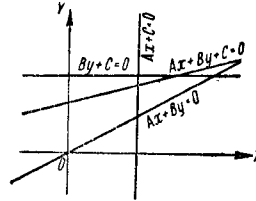
$$Ax + By + C = 0,$$

где коэффициенты A, B и C — постоянные величины. При $C = 0$ прямая проходит через начало координат, при $B = 0$ прямая параллельна оси OY , а при $A = 0$ — параллельна оси OX (фиг. 166).

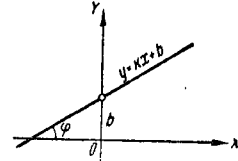
Уравнение прямой с угловым коэффициентом:

$$y = kx + b,$$

где угловым коэффициент k равен тангенсу угла, образованного прямой с положительным направлением оси OX ($k = \tan \varphi$), а параметр b , называемый также начальной ординатой, есть отрезок, отсекаемый прямой на оси OY , взятый со знаком $(+)$, если он расположен над осью OX , и со знаком $(-)$ в противном случае (фиг. 167). Уравнение



Фиг. 166



Фиг. 167

прямой с угловым коэффициентом может изображать любую прямую, за исключением прямой, параллельной оси OY ($k = \tan \frac{\pi}{2} = \infty$).

Чтобы общее уравнение прямой, не параллельной оси OY , привести к уравнению с угловым коэффициентом, нужно его решить относительно y :

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B} \\ \left(k = -\frac{A}{B}; b = -\frac{C}{B} \right).$$

Уравнение прямой в отрезках, отсекаемых на координатных осях:

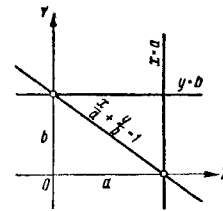
$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1,$$

где параметры a и b , взятые со знаком $(+)$ или $(-)$, суть длины отрезков, отсекаемых прямой на координатных осях (фиг. 168). Если $b = \infty$ (прямая параллельна оси OY), то уравнение прямой $x = a$; если $a = \infty$ (прямая параллельна оси OX), то уравнение прямой $y = b$.

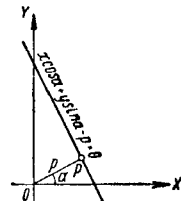
Нормальное уравнение прямой:

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0,$$

где α — угол, образованный перпендикуляром, опущенным из начала координат на прямую,



Фиг. 168



Фиг. 169

с положительным направлением оси OX , а параметр $p = OP$ — длина этого перпендикуляра (фиг. 169).

Общее уравнение прямой $Ax + By + C = 0$ может быть приведено к нормальному виду путём умножения на нормирующий

множитель $\lambda = \pm \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}$, где знак в правой части выбирается таким образом, чтобы он был обратен знаку свободного члена C .

Между коэффициентами A , B и C и параметрами α и p имеют место соотношения:

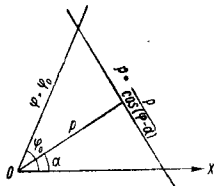
$$\cos \alpha = \pm \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \quad \sin \alpha = \pm \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}},$$

$$p = \pm \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

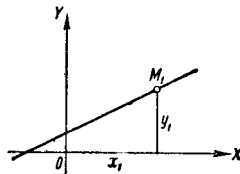
В полярной системе координат уравнение прямой, не проходящей через полюс (фиг. 170), имеет вид:

$$\rho = \frac{p}{\cos(\varphi - \alpha)},$$

где p — длина перпендикуляра, опущенного из полюса на прямую, α — угол между этим перпендикуляром и полярной осью; $\varphi = \varphi_0$ — уравнение луча, выходящего из полюса и образующего с полярной осью угол φ_0 (фиг. 170).



Фиг. 170



Фиг. 171

Ниже приводятся формулы, для решения некоторых, наиболее часто встречающихся, задач на прямую линию.

1. Уравнение прямой, проходящей через данную точку $M_1(x_1, y_1)$ в заданном направлении (фиг. 171):

$$y - y_1 = k(x - x_1),$$

где k — угловой коэффициент ($k = \operatorname{tg} \varphi$).

Если рассматривать угловой коэффициент k как произвольный параметр, то это уравнение представляет собой уравнение пучка прямых, проходящих через точку $M_1(x_1, y_1)$, называемую центром пучка (фиг. 172).

2. Уравнение прямой, проходящей через две данные точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ (фиг. 173):

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1},$$

$$\text{или } \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Угловой коэффициент в этом случае определяется по формуле

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Условие нахождения трёх точек $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ и $M_3(x_3, y_3)$ на одной прямой:

$$\frac{y_3 - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_1}$$

или

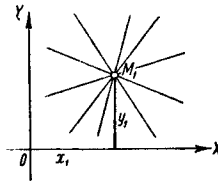
$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

3. Угол θ между двумя прямыми, заданными уравнениями в общем виде:

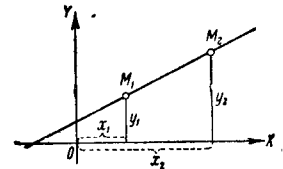
$A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$, определяется по формуле

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{A_1B_2 - A_2B_1}{A_1A_2 + B_1B_2}.$$

Угол θ отсчитывается от первой прямой ко второй в направлении против движения часовой стрелки (фиг. 174).



Фиг. 172



Фиг. 173

Если прямые заданы уравнениями с угловыми коэффициентами:

$$y = k_1x + b_1 \text{ и } y = k_2x + b_2,$$

то соответствующая формула принимает вид:

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_2k_1}.$$

Условие параллельности двух прямых:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \text{ или } k_1 = k_2.$$

Условие перпендикулярности двух прямых:

$$A_1A_2 + B_1B_2 = 0 \text{ или } k_2 = -\frac{1}{k_1}.$$

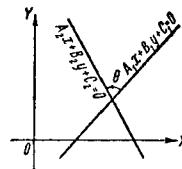
4. Расстояние $d = M_1N$ от точки $M_1(x_1, y_1)$ до прямой, заданной нормальным уравнением

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0,$$

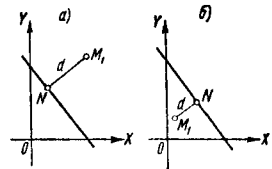
определяется по формуле

$$d = \pm (x_1 \cos \alpha + y_1 \sin \alpha - p)$$

(в левую часть нормального уравнения прямой надо подставить вместо текущих координат координаты данной точки; если прямая задана общим уравнением, то его следует предварительно привести к нормальному виду).



Фиг. 174



Фиг. 175

Для получения положительной величины $d = M_1N$ следует брать выражение для d со знаком (+), если точка $M_1(x_1, y_1)$ и начало координат расположены по разные стороны от прямой (фиг. 175a), и со знаком (—), если — по одну сторону (фиг. 175b).

5. Координаты точки пересечения $M_0(x_0, y_0)$ двух прямых

$A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ определяются путём совместного решения этих уравнений по формулам:

$$x_0 = \frac{\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}; y_0 = \frac{\begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}},$$

причём предположено, что

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

В случае, если

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = 0,$$

а

$$\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} \neq 0 \text{ (или } \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix} \neq 0),$$

то прямые параллельны.

Если же

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix} = 0,$$

т. е. выполнены условия:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2},$$

то прямые сливаются друг с другом (имеют бесчисленное множество общих точек).

6. Условие прохождения трёх прямых

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0, \quad A_2x + B_2y + C_2 = 0, \\ A_3x + B_3y + C_3 = 0$$

через одну точку:

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = 0.$$

7. Уравнение пучка прямых, проходящих через точку пересечения двух данных прямых

$A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$, имеет вид:
 $(A_1x + B_1y + C_1) + \mu(A_2x + B_2y + C_2) = 0$,
 где множитель μ произволен. Изменяя множитель μ , можно получить любую прямую пучка, не совпадающую со второй из данных прямых.

ОКРУЖНОСТЬ

Уравнение окружности в декартовых координатах:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2,$$

где R — радиус окружности, а a и b — координаты центра O_1 (фиг. 176).

Если центр находится в начале координат, уравнение окружности принимает вид:

$$x^2 + y^2 = R^2$$

(в параметрической форме:

$$x = R \cos t; y = R \sin t).$$

Уравнение окружности радиуса R , проходящей через начало координат с центром на оси OX :

$$x^2 + y^2 = 2Rx.$$

Уравнение окружности радиуса R , проходящей через начало координат с центром на оси OY :

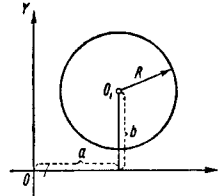
$$x^2 + y^2 = 2Ry.$$

Общее уравнение 2-й степени относительно x и y :

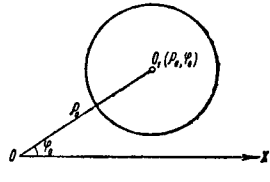
$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

представляет собой уравнение окружности при условии, что $A = C$ и $B = 0$, т. е. когда оно может быть приведено к виду:

$$x^2 + y^2 + 2D'x + 2E'y + F' = 0.$$



Фиг. 176



Фиг. 177

Радиус и координаты центра окружности при этом определяются по формулам:

$$R = \sqrt{D'^2 + E'^2 - F'}, \quad a = -D', \quad b = -E'.$$

Если $D'^2 + E'^2 - F' > 0$, то мы имеем действительную окружность, если

$D'^2 + E'^2 - F' < 0$ — мнимую окружность, а если

$$D'^2 + E'^2 - F' = 0 \text{ — точку.}$$

В полярных координатах уравнение окружности (фиг. 177) имеет вид:

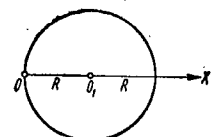
$$\rho^2 - 2\rho\rho_0 \cos(\varphi - \varphi_0) + \rho_0^2 = R^2,$$

где R — радиус окружности, а ρ_0 и φ_0 — полярные координаты центра O_1 .

Если окружность проходит через полюс и центр лежит на полярной оси (фиг. 178), то уравнение окружности принимает вид:

$$\rho = 2R \cos \varphi.$$

Уравнение окружности, центр которой совпадает с полюсом:
 $\rho = R.$



Фиг. 178

Уравнение касательной в точке $M_1(x_1, y_1)$ окружности, заданной общим уравнением в декартовых координатах:

$$(x - a)(x_1 - a) + (y - b)(y_1 - b) = R^2,$$

а уравнение нормали в этой же точке:

$$\frac{y - b}{y_1 - b} = \frac{x - a}{x_1 - a}.$$

В случае, когда центр окружности находится в начале координат, уравнение касательной в точке $M_1(x_1, y_1)$ принимает вид:

$$xx_1 + yy_1 = R^2,$$

а уравнение нормали в той же точке

$$y_1x - x_1y = 0.$$

ЭЛЛИПС

Эллипсом (фиг. 179) называется геометрическое место точек $M(x, y)$, сумма расстояний которых от двух данных точек F_1 и F_2 , называемых фокусами, есть величина постоянная:

$$r_1 + r_2 = 2a.$$

Если фокусы эллипса находятся на оси OX , а начало координат является серединой отрезка F_1F_2 , то уравнение эллипса имеет вид:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ (каноническое уравнение),}$$

где a и b — полуоси эллипса.

Параметрические уравнения эллипса:

$$x = a \cos t; y = b \sin t.$$

Большая полуось эллипса $a = OA$, малая полуось $b = OB$, полуфокальное расстояние $c = OF_1$; соотношение между этими величинами:

$$b^2 = a^2 - c^2.$$

Эксцентриситет эллипса $e = \frac{c}{a}$ меньше единицы.

Радиусы-векторы точки эллипса с абсциссой x вычисляются по формулам:

$$r_1 = a - ex; r_2 = a + ex.$$

Директрисами эллипса называются прямые, параллельные малой полуоси и отстоящие от неё на расстоянии $\frac{a}{e}$ в обе стороны. Уравнения директрис:

$$x = \pm \frac{a}{e}.$$

Основное свойство директрис: отношение радиуса-вектора любой точки эллипса к расстоянию от этой точки до соответствующей директрисы есть величина постоянная, равная эксцентриситету эллипса

$$\frac{r_1}{d_1} = e \text{ и } \frac{r_2}{d_2} = e.$$

Диаметром кривой, сопряжённым данному семейству параллельных хорд, называется геометрическое место середин этих хорд.

Диаметром эллипса является всякая хорда, проходящая через центр эллипса; он делится в центре пополам. Два диаметра называются взаимно сопряжёнными (фиг. 180), если каждый из них делит пополам хорды, параллельные другому.

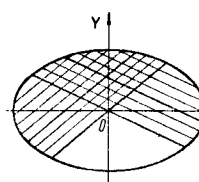
Связь между угловыми коэффициентами двух взаимно сопряжённых диаметров эллипса

$$kk' = -\frac{b^2}{a^2}.$$

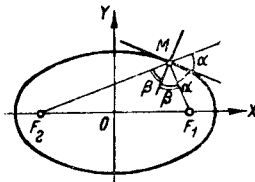
Между двумя сопряжёнными диаметрами эллипса, равными по длине соответственно $2a_1$ и $2b_1$ и образующими между собой угол φ , существуют следующие соотношения (теорема Аполлония):

$$a_1^2 + b_1^2 = a^2 + b^2; a_1 b_1 \sin \varphi = ab.$$

Оси эллипса являются взаимно сопряжёнными и взаимно перпендикулярными диаметрами (главные диаметры).



Фиг. 180



Фиг. 181

Уравнение касательной к эллипсу в заданной на нём точке $M(x_1, y_1)$:

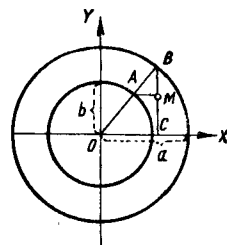
$$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1.$$

Уравнение нормали в той же точке:

$$\frac{x - x_1}{b^2 x_1} - \frac{y - y_1}{a^2 y_1} = 0.$$

Нормаль к эллипсу (фиг. 181) является биссектрисой внутреннего угла, образованного радиусами-векторами точки эллипса, а касательная — биссектрисой соответствующего внешнего угла.

Построение точек эллипса по заданным его полуосям (фиг. 182). Вычерчивают два круга с общим центром в точке O радиусами, равными полуосям эллипса a и b . Если провести луч из центра O , пересекающий окружности в точках A и B , и затем точку A спроектировать на перпендикуляр BC , опущенный из точки B на ось OX , то проекция A (точка M) будет точкой эллипса.



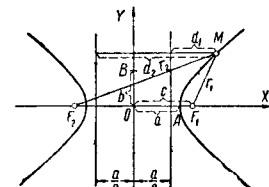
Фиг. 182

ГИПЕРБОЛА

Гиперболой (фиг. 183) называется геометрическое место точек $M(x, y)$, разность расстояний которых от двух данных точек F_1 и F_2 , называемых фокусами, есть величина постоянная:

$$r_1 - r_2 = \pm 2a.$$

Если фокусы F_1 и F_2 находятся на оси OX , а начало координат является серединой отрезка F_1F_2 , то уравнение гиперболы имеет вид:



Фиг. 183

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (\text{каноническое уравнение}),$$

где a и b — полуоси гиперболы.

Параметрические уравнения:

$$x = a \operatorname{ch} t; \quad y = b \operatorname{sh} t.$$

Действительная полуось гиперболы $a = OA$; мнимая полуось $b = OB$; полуфокальное расстояние $c = OF_1$. Соотношение между этими величинами:

$$b^2 = c^2 - a^2.$$

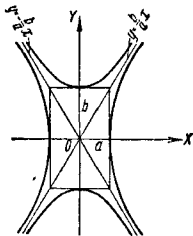
Эксцентриситет гиперболы $e = \frac{c}{a}$

больше единицы.

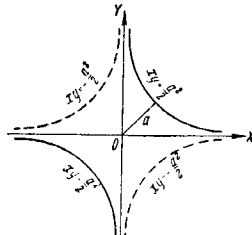
Радиусы-векторы точки гиперболы с абсциссой x вычисляются по формулам:

$$\left. \begin{aligned} r_1 &= -a + ex \\ r_2 &= a + ex \end{aligned} \right\} \text{ для точек правой ветви гиперболы,}$$

$$\left. \begin{aligned} r_1 &= a - ex \\ r_2 &= -a - ex \end{aligned} \right\} \text{ для точек левой ветви гиперболы.}$$



Фиг. 184



Фиг. 185

Директрисами гиперболы называются прямые, параллельные мнимой оси и отстоящие от неё на расстоянии $\frac{a}{e}$ в обе стороны. Уравнения директрис:

$$x = \pm \frac{a}{e}.$$

Основное свойство директрис: отношение радиуса-вектора любой точки гиперболы к расстоянию от этой точки до соответствующей директрисы есть величина постоянная, равная эксцентриситету гиперболы

$$\frac{r_1}{d_1} = e \quad \text{и} \quad \frac{r_2}{d_2} = e.$$

Прямые $y = \pm \frac{b}{a} x$ (фиг. 184) являются асимптотами гиперболы (стр. 196).

Гипербола $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$ называется сопряжённой гиперболой $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Сопряжённые гиперболы имеют общие асимптоты; действительная ось одной из них является мнимой осью другой, и наоборот.

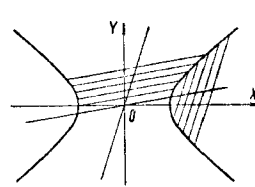
Гипербола $x^2 - y^2 = a^2$, у которой полуоси a и b равны между собой, называется равноосной. Её асимптоты взаимно перпендикулярны.

Если за оси координат принять асимптоты равноосной гиперболы (фиг. 185), то её уравнение будет

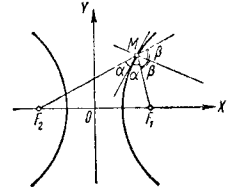
$$xy = \pm \frac{a^2}{2}.$$

Диаметрами гиперболы являются прямые, проходящие через центр гиперболы (фиг. 186). Связь между угловыми коэффициентами двух взаимно сопряжённых диаметров (т. е. таких, каждый из которых делит пополам хорды, параллельные другому) гиперболы:

$$\kappa \kappa_1 = \frac{b^2}{a^2}.$$



Фиг. 186



Фиг. 187

Оси гиперболы являются взаимно сопряжёнными и взаимно перпендикулярными диаметрами (главные диаметры).

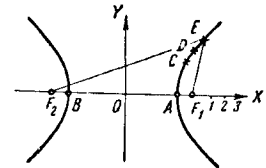
Уравнение касательной к гиперболе в заданной на ней точке $M_1(x_1, y_1)$:

$$\frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} = 1.$$

Уравнение нормали в той же точке:

$$\frac{x - x_1}{b^2 x_1} + \frac{y - y_1}{a^2 y_1} = 0.$$

Касательная к гиперболе (фиг. 187) является биссектрисой внутреннего угла, образованного радиусами-векторами точки гиперболы, а нормаль — биссектрисой соответствующего внешнего угла.



Фиг. 188

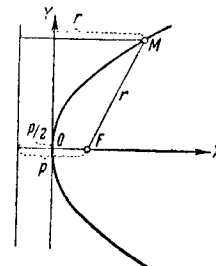
Построение точек гиперболы по заданным её полуосям (фиг. 188). Определив с по данным полуосям a и b и построив на оси Ox вершины A, B и фокусы F_1, F_2 , берут на ней ряд точек 1, 2, 3 и т. д.; из фокуса F_1 радиусами $A1, A2, A3$ и т. д. описывают дуги.

Точки C, D, E пересечения этих дуг с дугами, описанными из фокуса F_2 радиусами $B1, B2, B3$ и т. д., будут точками гиперболы.

ПАРАБОЛА

Параболой (фиг. 189) называется геометрическое место точек $M(x, y)$, равноудалённых от данной точки F , называемой фокусом, и данной прямой, называемой директрисой.

Если ось Ox проведена через фокус перпендикулярно директрисе, а начало координат является серединой отрезка оси Ox между фокусом и директрисой, то уравнение параболы имеет вид:



Фиг. 189

$y^2 = 2px$ (каноническое уравнение), где p — параметр параболы, равный расстоянию между фокусом F и директрисой.

Вершина параболы, заданной уравнением в канонической форме, совпадает с началом координат. Эксцентриситет параболы равен единице. В отличие от эллипса и гиперболы парабола не имеет центра.

Радиус-вектор точки параболы с абсциссой x вычисляется по формуле

$$r = x + \frac{p}{2}.$$

Уравнение директрисы параболы:

$$x = -\frac{p}{2}.$$

Все диаметры параболы (фиг. 190) параллельны оси параболы. Уравнение диаметра параболы, сопряжённого параллельным хордам с угловым коэффициентом k

$$y = \frac{p}{k}.$$

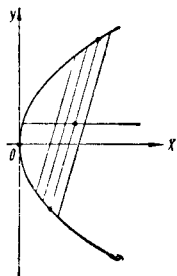
Уравнение касательной к параболе в заданной на ней точке $M_1(x_1, y_1)$:

$$yy_1 = p(x + x_1).$$

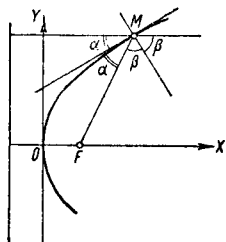
Уравнение нормали в той же точке:

$$y - y_1 = -\frac{y_1}{p}(x - x_1).$$

Касательная к параболе (фиг. 191) является биссектрисой внутреннего угла,



Фиг. 190



Фиг. 191

образованного радиусом-вектором точки параболы и перпендикуляром, опущенным из этой точки на директрису, а нормаль — биссектрисой соответствующего внешнего угла.

Уравнение

$$y = ax^2 + bx + c,$$

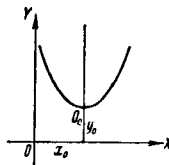
правая часть которого есть квадратичный трёхчлен, является уравнением параболы (фиг. 192) с осью, параллельной оси OY .

Параметр её $p = \frac{1}{2a}$. При $a > 0$ парабола обращена вогнутостью вверх, при $a < 0$ — вниз. Координаты вершины параболы

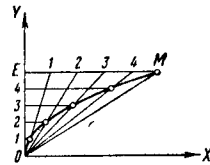
$$x_0 = -\frac{b}{2a}; y_0 = \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

Построение точек параболы. Даны: ось симметрии параболы OX , вершина O и какая-нибудь точка параболы M (фиг. 193).

Разделив ординату OE точки M и её абсциссу EM на одинаковое число равных частей, соединяют лучами вершину O с точками деления абсциссы, затем в точках деления ординаты восстанавливают перпендикуляры, продолжая каждый из них до пересечения с лучом соответствующего ему номера. Полученные точки пересечения будут точками параболы.



Фиг. 192



Фиг. 193

ОБЩАЯ ТЕОРИЯ КРИВЫХ 2-ГО ПОРЯДКА

Общее уравнение кривой 2-го порядка: $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$ определяет эллипс (в частности окружность), гиперболу, параболу или пару прямых (распадающаяся кривая 2-го порядка).

Кривая, имеющая определённый центр (центр симметрии), называется центральной. Центральными кривыми 2-го порядка являются эллипс, гипербола и пара пересекающихся прямых.

Инварианты кривой 2-го порядка:

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}; \delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2; S = A + C.$$

Эти величины не изменяются при переносе и повороте осей координат, т. е., если после преобразования координат уравнение кривой примет вид:

$$A'x'^2 + 2B'x'y' + C'y'^2 + 2D'x' + 2E'y' + F' = 0,$$

то величины Δ , δ и S , вычисленные для новых значений коэффициентов, сохраняют первоначальные значения.

Общие свойства кривых 2-го порядка. Конус второго порядка, в частности прямой круговой конус, при пересечении с плоскостью образует на ней коническое сечение. Если секущая плоскость не проходит через вершину конуса, то сечение будет гиперболой, параболой или эллипсом в зависимости от того, пересечётся ли конус с плоскостью, параллельной данной и проходящей через вершину, по двум образующим, по одной образующей или в одной точке. При пересечении конуса с плоскостью, проходящей через его вершину, получаются распадающиеся конические сечения ($\Delta = 0$, см. табл. 20). Параллельные прямые получают, если конус вырождается в цилиндр.

Геометрическим местом точек, отношение расстояний которых до данной точки (фокуса) и до данной прямой (директрисы) есть величина постоянная, равная e , является кривая 2-го порядка с эксцентриситетом, равным e , а именно: эллипс, если $e < 1$, парабола, если $e = 1$, и гипербола, если $e > 1$.

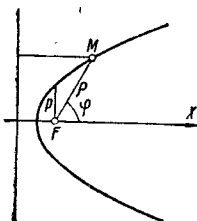
Схема приведения общего уравнения кривой 2-го порядка к каноническому виду дана в табл. 20.

Т а б л и ц а 20
Приведение общего уравнения кривой второго порядка к каноническому виду

			Вид кривой	Преобразование координат	Каноническое уравнение кривой после преобразования
Центральные кривые $\delta \neq 0$	$\delta > 0$	$\Delta \neq 0$	Эллипс а) $\Delta \cdot S < 0$ — действительный б) $\Delta \cdot S > 0$ — мнимый	1) Перенос начала в центр кривой с координатами $x_0 = \frac{BE-CD}{\delta}, y_0 = \frac{BD-AE}{\delta}$.	$A'x'^2 + C'y'^2 + \frac{\Delta}{\delta} = 0;$
		$\Delta = 0$	Пара мнимых прямых, имеющих общую действительную точку	2) Поворот осей на угол α , определяемый уравнением $tg\ 2\alpha = \frac{2B}{A-C},$ причём знак $\sin\ 2\alpha$ должен совпадать со знаком $2B$. Угловой коэффициент новой оси x' : $k = \frac{C-A + \sqrt{(C-A)^2 + 4B^2}}{2B}$	$A' = \frac{A+C + \sqrt{(A-C)^2 + 4B^2}}{2},$ $C' = \frac{A+C - \sqrt{(A-C)^2 + 4B^2}}{2},$ (A' и C' являются корнями квадратного уравнения $\sigma^2 - S\sigma + \delta = 0$)
	$\delta < 0$	$\Delta \neq 0$	Гипербола		
		$\Delta = 0$	Пара пересекающихся прямых		
Параболические кривые ¹ $\delta = 0$	$\Delta \neq 0$	Парабола	1) Поворот осей на угол α , определяемый уравнением $tg\ \alpha = -\frac{A}{B},$ причём знак $\sin\ \alpha$ должен быть обратен знаку A . 2) Перенос начала в вершину параболы, координаты которой x_0 и y_0 определяются из уравнений: $Sy_0 + \frac{AD+BE}{\sqrt{A^2+B^2}} = 0;$ $\frac{2(BD-AE)}{\sqrt{A^2+B^2}}x_0 + \frac{AD+BE}{\sqrt{A^2+B^2}}y_0 + F = 0$	$y'^2 = 2px';$ $p = \frac{AE-BD}{S\sqrt{A^2+B^2}}$	
			$\Delta = 0$	Пара параллельных прямых, если $D^2 - AF > 0$; сливающихся, если $D^2 - AF = 0$; мнимых, если $D^2 - AF < 0$	Поворот осей на угол α , определяемый уравнением $tg\ \alpha = -\frac{A}{B},$ причём знак $\sin\ \alpha$ должен быть обратен знаку A .

¹ Имеется в виду, что ни один из старших коэффициентов (A, B, C) не равен нулю. Если два коэффициента (A и B или B и C) равны нулю, то упрощение уравнения сводится к параллельному переносу осей; при этом уравнение $Sy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$ преобразуется к виду $(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0)$ и $Ax^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$ — к виду $(x - x_0)^2 = 2p(y - y_0)$.

Полярное уравнение конического сечения.
Если полюс находится в фокусе, а направление полярной оси противоположно направлению от фокуса к ближайшей вершине (фиг. 194), то уравнение конического сечения в полярных координатах имеет вид:



Фиг. 194

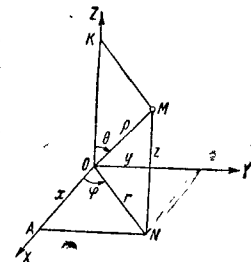
$$\rho = \frac{p}{1 - e \cos \varphi},$$

где p (параметр кривой) — отрезок прямой, параллельной директрисе, от фокуса до пересечения с кривой; e — эксцентриситет.

1) абсциссой $x = OA$, ординатой $y = AN$ и аппликатой $z = NM$ (прямоугольные декартовы координаты);

2) радиусом-вектором $\rho = OM$; углом $\varphi = \angle AON$ и углом $\theta = \angle KOM$ (сферические или полярные координаты), причём: $\rho \geq 0$; $0 \leq \varphi < 2\pi$; $0 \leq \theta \leq \pi$.

3) радиусом-вектором $r = ON$; углом $\varphi = \angle AON$ и аппликатой $z = NM$ (цилиндрические координаты), причём:



Фиг. 195

$$r \geq 0; 0 \leq \varphi < 2\pi.$$

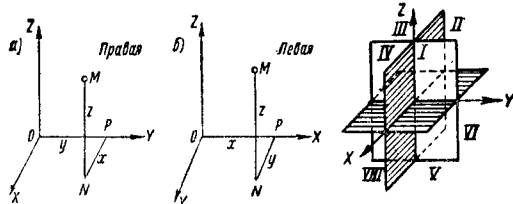
АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

МЕТОД КООРДИНАТ В ПРОСТРАНСТВЕ

Положение точки M в пространстве (фиг. 195) чаще всего определяют:

Декартовыми прямоугольными координатами точки M являются числа x, y и z , выражающие взятые в выбранном масштабе

и с определёнными знаками расстояния этой точки до трёх взаимно перпендикулярных координатных плоскостей или, иначе, проекции радиуса-вектора ρ точки M на три взаимно перпендикулярные оси. В зависимости от выбора положительных направлений на координатных осях различают правую (фиг. 196а) и левую (фиг. 196б) координатные системы.



Фиг. 196

Фиг. 197

В дальнейшем применяется правая координатная система.

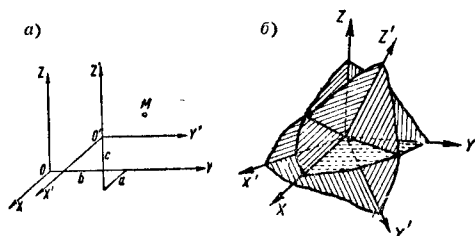
Координатные плоскости делят пространство на 8 октантов (фиг. 197). Знаки координат зависят от октанта, в котором находится точка, и приведены в табл. 21.

Таблица 21

Октанты	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
Координаты								
x	+	+	+	+	+	+	+	+
y	+	+	+	+	+	+	+	+
z	+	+	+	+	+	+	+	+

Преобразование прямоугольных координат.

В случае параллельного переноса осей координаты x , y и z точки M в системе $OXYZ$ (фиг. 198а) связаны с координатами



Фиг. 198

тами x' , y' и z' той же точки в системе $O'X'Y'Z'$ соотношениями:

$$\begin{aligned}x &= x' + a, \\y &= y' + b, \\z &= z' + c,\end{aligned}$$

где a , b , c — координаты нового начала координат O' в системе $OXYZ$.

В случае поворота осей координаты x , y , z точки M в системе $OXYZ$ связаны с координатами x' , y' , z' той же точки в системе $O'X'Y'Z'$ (фиг. 198б) соотношениями:

$$\begin{aligned}x &= x' \cos \alpha_1 + y' \cos \alpha_2 + z' \cos \alpha_3; \\y &= x' \cos \beta_1 + y' \cos \beta_2 + z' \cos \beta_3; \\z &= x' \cos \gamma_1 + y' \cos \gamma_2 + z' \cos \gamma_3,\end{aligned}$$

где $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ — углы, образованные осью OX' , $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ — осью OY' и $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ — осью OZ' со старыми осями:

	OX'	OY'	OZ'
OX	α_1	α_2	α_3
OY	β_1	β_2	β_3
OZ	γ_1	γ_2	γ_3

Эти девять углов связаны соотношениями:

$$\begin{aligned}\cos^2 \alpha_1 + \cos^2 \beta_1 + \cos^2 \gamma_1 &= 1, \\ \cos^2 \alpha_2 + \cos^2 \beta_2 + \cos^2 \gamma_2 &= 1, \\ \cos^2 \alpha_3 + \cos^2 \beta_3 + \cos^2 \gamma_3 &= 1, \\ \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 + \cos \beta_1 \cos \beta_2 + \cos \gamma_1 \cos \gamma_2 &= 0, \\ \cos \alpha_2 \cos \alpha_3 + \cos \beta_2 \cos \beta_3 + \cos \gamma_2 \cos \gamma_3 &= 0, \\ \cos \alpha_3 \cos \alpha_1 + \cos \beta_3 \cos \beta_1 + \cos \gamma_3 \cos \gamma_1 &= 0.\end{aligned}$$

Общее преобразование. При одновременном переносе начала координат в точку $O'(a, b, c)$ и повороте осей

$$\begin{aligned}x &= x' \cos \alpha_1 + y' \cos \alpha_2 + z' \cos \alpha_3 + a; \\y &= x' \cos \beta_1 + y' \cos \beta_2 + z' \cos \beta_3 + b; \\z &= x' \cos \gamma_1 + y' \cos \gamma_2 + z' \cos \gamma_3 + c.\end{aligned}$$

Переход от одной системы координат к другой. Переход от прямоугольных координат к сферическим и обратно:

$$\begin{aligned}x &= \rho \sin \theta \cos \varphi; \\y &= \rho \sin \theta \sin \varphi; \\z &= \rho \cos \theta; \\ \rho &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}; \\ \operatorname{tg} \theta &= \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}; \\ \operatorname{tg} \varphi &= \frac{y}{x}.\end{aligned}$$

Переход от прямоугольных координат к цилиндрическим и обратно:

$$\begin{aligned}x &= r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = z, \\ r &= \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}, \quad z = z.\end{aligned}$$

НЕКОТОРЫЕ ПРОСТЕЙШИЕ ЗАДАЧИ В ПРОСТРАНСТВЕ

Расстояние между двумя точками. Расстояние между точками $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$ определяется по формуле $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$; в частности, расстояние точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ от начала координат

$$d = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}.$$

Деление отрезка прямой в данном отношении. Координаты точки $M(x, y, z)$, лежащей отрезок прямой M_1M_2 , ограниченный точками $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$, в

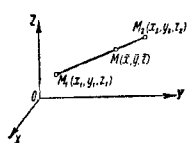
отношении $\frac{M_1 M}{M M_2} = \lambda$ (фиг. 199), определяются по формулам:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}; \quad \bar{y} = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}; \quad \bar{z} = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}.$$

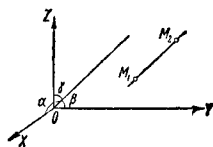
Если точка M — середина отрезка $M_1 M_2$, то:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2}{2}; \quad \bar{y} = \frac{y_1 + y_2}{2}; \quad \bar{z} = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

Направляющие косинусы прямой. Если прямая проходит через точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$



Фиг. 199



Фиг. 200

и $M_2(x_2, y_2, z_2)$ и образует с осями координат углы α, β и γ (фиг. 200), то

$$\cos \alpha = \frac{x_2 - x_1}{d}; \quad \cos \beta = \frac{y_2 - y_1}{d};$$

$$\cos \gamma = \frac{z_2 - z_1}{d},$$

где

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Направляющие косинусы прямой связаны между собой соотношением

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1.$$

Объём тетраэдра. Объём треугольной пирамиды с вершинами $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$ и $M_4(x_4, y_4, z_4)$ определяется по формуле

$$V = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} x_1 - x_4 & y_1 - y_4 & z_1 - z_4 \\ x_2 - x_4 & y_2 - y_4 & z_2 - z_4 \\ x_3 - x_4 & y_3 - y_4 & z_3 - z_4 \end{vmatrix}.$$

При этом объём V по этой формуле получается со знаком $(+)$ или $(-)$ в зависимости от того, образуют ли векторы $\overline{M_1 M_2}$, $\overline{M_1 M_3}$ и $\overline{M_1 M_4}$ правую или левую связку.

ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ УРАВНЕНИЯ С ТРЕМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ

Уравнение $F(x, y, z) = 0$ или $z = f(x, y)$, связывающее три переменные x, y, z , являющееся уравнением некоторой поверхности (действительной или мнимой), если рассматривать x, y и z как декартовы координаты точек этой поверхности. При этом координаты любой точки поверхности удовлетворяют данному уравнению, а координаты всех точек, не принадлежащих поверхности, не удовлетворяют этому уравнению.

Уравнение цилиндрической поверхности с образующими, параллельными оси OX , не содержит координаты x , т. е. имеет вид $F(y, z) = 0$ (аналогично в отношении других осей — OY и OZ).

На плоскости OYZ это же уравнение $F(y, z) = 0$ изображает линию пересечения ци-

линдрической поверхности с данной координатной плоскостью.

Уравнение конической поверхности с вершиной в начале координат имеет вид: $F(x, y, z) = 0$, где F — однородная функция переменных x, y и z , т. е. удовлетворяет условию:

$$F(tx, ty, tz) = t^n F(x, y, z).$$

Уравнение поверхности вращения плоской кривой $z = f(x)$ (в плоскости OXZ) вокруг оси OZ имеет вид:

$$z = f(\sqrt{x^2 + y^2})$$

(аналогично в отношении вращения вокруг оси OX).

Два уравнения:

$$F_1(x, y, z) = 0 \text{ и } F_2(x, y, z) = 0,$$

заданные совместно, определяют некоторую пространственную линию, а именно линию пересечения поверхностей, заданных этими уравнениями. Например, уравнения:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \\ z = c, \text{ где } c < a, \end{cases}$$

определяют окружность (пересечение сферы с плоскостью).

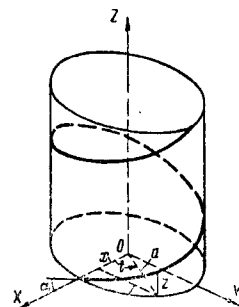
В параметрической форме уравнения пространственной кривой имеют вид:

$$x = \varphi_1(t); \quad y = \varphi_2(t); \quad z = \varphi_3(t).$$

Пример. Прямая в плоскости OXZ , проходящая через точку $A(a, 0, 0)$ и образующая с осью OX угол α такой, что $\operatorname{tg} \alpha = \frac{b}{a}$, накладывается (без растяжения) на прямой круговой цилиндр радиуса a , осью которого является ось OZ так, что аппликаты её точек не изменяются, а точка $(a, 0, 0)$ остаётся неподвижной (фиг. 201). Образованная таким образом на поверхности цилиндра линия (винтовая линия) имеет уравнения:

$$x = a \cos t; \quad y = a \sin t; \quad z = bt,$$

где t — угол между осью OX и проекцией на плоскость OXY радиуса-вектора точки винтовой линии.



Фиг. 201

ПЛОСКОСТЬ В ПРОСТРАНСТВЕ

В декартовой системе координат уравнение плоскости — линейное относительно координат x, y и z . Различают следующие основные формы уравнения плоскости.

Общее уравнение плоскости:

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

При $D = 0$ плоскость проходит через начало координат. При $A = 0$ (или $B = 0$, или $C = 0$) плоскость параллельна оси OX (или OY , или OZ). При $A = B = 0$ (или $A = C = 0$, или $B = C = 0$) плоскость параллельна плоскости OXY (или OXZ , или OYZ).

Уравнение плоскости в отрезках, отсекаемых на координатных осях:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1,$$

где a , b , c — взятые с соответствующим знаком отрезки, отсекаемые плоскостью на осях OX , OY и OZ (фиг. 202).

Если $b = c = \infty$ (плоскость параллельна плоскости OYZ), то уравнение плоскости $x = a$.

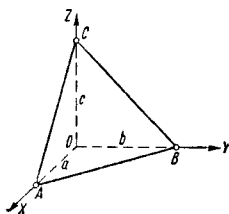
Если $a = c = \infty$ (плоскость параллельна плоскости OXZ), то уравнение плоскости $y = b$.

Если $a = b = \infty$ (плоскость параллельна плоскости OXY), то уравнение плоскости $z = c$.

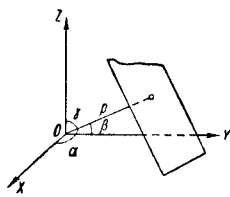
Нормальное уравнение плоскости

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p = 0,$$

где α , β , γ — углы, образованные перпендикуляром, опущенным из начала координат на плоскость, с положительными направлениями координатных осей, а p — длина этого перпендикуляра (фиг. 203).



Фиг. 202



Фиг. 203

Чтобы общее уравнение плоскости привести к нормальному виду, надо все члены его умножить на нормирующий множитель

$$\lambda = \pm \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

причём знак λ обратен знаку D .

Параметры p , $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ вычисляются по коэффициентам общего уравнения с помощью формул:

$$\begin{aligned} p &= \pm \frac{D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}; \\ \cos \alpha &= \pm \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}; \\ \cos \beta &= \pm \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}; \\ \cos \gamma &= \pm \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \end{aligned}$$

Ниже приводятся формулы для решения некоторых задач.

1. Уравнение связки плоскостей, проходящей через данную точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

2. Уравнение пучка плоскостей, проходящих через прямую, заданную системой уравнений:

$$\begin{aligned} Ax + By + Cz + D &= 0, \\ A_1x + B_1y + C_1z + D_1 &= 0, \end{aligned}$$

имеет вид:

$$\begin{aligned} (Ax + By + Cz + D) + \\ + \lambda (A_1x + B_1y + C_1z + D_1) &= 0. \end{aligned}$$

3. Уравнение плоскости, проходящей через три данные точки: $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ и $M_3(x_3, y_3, z_3)$:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

4. Угол φ между двумя плоскостями, данными нормальными уравнениями:

$$\begin{aligned} x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p &= 0, \\ x \cos \alpha_1 + y \cos \beta_1 + z \cos \gamma_1 - p_1 &= 0, \end{aligned}$$

определяется по формуле

$$\cos \varphi = \cos \alpha \cos \alpha_1 + \cos \beta \cos \beta_1 + \cos \gamma \cos \gamma_1.$$

Если уравнения даны в общем виде:

$$Ax + By + Cz + D = 0;$$

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$$

то

$$\cos \varphi = \pm \frac{AA_1 + BB_1 + CC_1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}}.$$

Условия параллельности двух плоскостей:

$$\cos \alpha = \cos \alpha_1; \cos \beta = \cos \beta_1; \cos \gamma = \cos \gamma_1$$

или

$$\frac{A}{A_1} = \frac{B}{B_1} = \frac{C}{C_1}.$$

Условие перпендикулярности двух плоскостей:

$$\cos \alpha \cos \alpha_1 + \cos \beta \cos \beta_1 + \cos \gamma \cos \gamma_1 = 0$$

или

$$AA_1 + BB_1 + CC_1 = 0.$$

5. Чтобы найти расстояние от точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ до плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$, надо привести уравнение плоскости к нормальному виду и заменить в левой части полученного уравнения текущие координаты координатами данной точки; найденное число даст искомое расстояние d :

$$d = \pm (x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p).$$

При этом для получения положительной величины d следует брать выражение для d со знаком (+), если точка M_1 и начало координат расположены по разные стороны от плоскости (фиг. 204), и со знаком (—), если — по одну сторону (фиг. 205).

6. Для отыскания координат точки пересечения трёх плоскостей, заданных уравнениями:

$$\begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 &= 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 &= 0, \\ A_3x + B_3y + C_3z + D_3 &= 0, \end{aligned}$$

надо решить совместно данную систему уравнений.

7. Условия нахождения четырёх точек $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$ и $M_4(x_4, y_4, z_4)$ в одной плоскости:

$$\begin{vmatrix} x_1 - x_2 & y_1 - y_2 & z_1 - z_2 \\ x_1 - x_3 & y_1 - y_3 & z_1 - z_3 \\ x_1 - x_4 & y_1 - y_4 & z_1 - z_4 \end{vmatrix} = 0.$$

ПРЯМАЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

Прямая в пространстве определяется как пересечение двух плоскостей и задаётся системой двух уравнений:

$$\begin{aligned} Ax + By + Cz + D &= 0, \\ A_1x + B_1y + C_1z + D_1 &= 0. \end{aligned}$$

При определении положения прямой пересечением плоскостей, проектирующих её на координатные плоскости OXZ и OYZ , её уравнения примут вид:

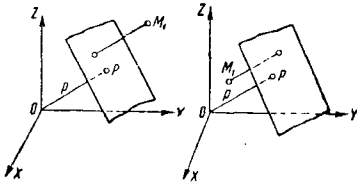
$$\begin{aligned} x &= mz + a; \\ y &= nz + b, \end{aligned}$$

где a и b — координаты точки пересечения её с плоскостью OXY .

Нормальные уравнения прямой:

$$\frac{x - x_1}{\cos \alpha} = \frac{y - y_1}{\cos \beta} = \frac{z - z_1}{\cos \gamma},$$

где x_1, y_1, z_1 — координаты одной из точек прямой, а α, β, γ — углы прямой с осями координат.



Фиг. 204

Фиг. 205

Канонические уравнения прямой:

$$\frac{x - x_1}{m} = \frac{y - y_1}{n} = \frac{z - z_1}{p},$$

где x_1, y_1, z_1 — координаты одной из точек прямой, а m, n, p — числа, пропорциональные направляющим косинусам:

$$m : n : p = \cos \alpha : \cos \beta : \cos \gamma.$$

Для перехода от общих уравнений прямой к каноническим уравнениям нужно подобрать x_1, y_1 и z_1 так, чтобы они удовлетворяли общим уравнениям, а числа m, n, p определить по формулам:

$$p = \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}; m = \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}; n = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}.$$

Чтобы канонические уравнения прямой привести к нормальному виду, надо знаменатели умножить на нормирующий множитель:

$$M = \pm \frac{1}{\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}$$

и, следовательно:

$$\cos \alpha = \pm \frac{m}{\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}};$$

$$\cos \beta = \pm \frac{n}{\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}};$$

$$\cos \gamma = \pm \frac{p}{\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}.$$

Знак нормирующего множителя определяет направление прямой.

Параметрические уравнения прямой:

$x = x_0 + mt; y = y_0 + nt; z = z_0 + pt$,
где t — параметр.

Некоторые частные случаи. Уравнения прямой, параллельной плоскости OXY :

$$\frac{x - x_1}{m} = \frac{y - y_1}{n} = \frac{z - z_1}{0}$$

$$\text{или} \begin{cases} \frac{x - x_1}{m} = \frac{y - y_1}{n}, \\ z = z_1. \end{cases}$$

Уравнения прямой, параллельной оси OX :

$$\frac{x - x_1}{m} = \frac{y - y_1}{0} = \frac{z - z_1}{0}$$

$$\text{или} \begin{cases} y = y_1, \\ z = z_1. \end{cases}$$

Уравнения оси OX :

$$\frac{x}{m} = \frac{y}{0} = \frac{z}{0}$$

$$\text{или} \begin{cases} y = 0, \\ z = 0. \end{cases}$$

Формулы для решения основных задач

1. Уравнения прямой, проходящей через точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

2. Если прямые даны уравнениями:

$$\frac{x - x_1}{\cos \alpha} = \frac{y - y_1}{\cos \beta} = \frac{z - z_1}{\cos \gamma};$$

$$\frac{x - x_2}{\cos \alpha_1} = \frac{y - y_2}{\cos \beta_1} = \frac{z - z_2}{\cos \gamma_1},$$

то угол между ними определяется формулой $\cos \varphi = \cos \alpha \cos \alpha_1 + \cos \beta \cos \beta_1 + \cos \gamma \cos \gamma_1$. Если прямые даны уравнениями:

$$\frac{x - x_1}{m} = \frac{y - y_1}{n} = \frac{z - z_1}{p};$$

$$\frac{x - x_2}{m_1} = \frac{y - y_2}{n_1} = \frac{z - z_2}{p_1},$$

то

$$\cos \varphi = \pm \frac{mm_1 + nn_1 + pp_1}{\sqrt{m^2 + n^2 + p^2} \sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2}}.$$

Условия параллельности двух прямых:
 $\cos \alpha = \cos \alpha_1; \cos \beta = \cos \beta_1; \cos \gamma = \cos \gamma_1$
или

$$\frac{m}{m_1} = \frac{n}{n_1} = \frac{p}{p_1}.$$

Условие перпендикулярности двух прямых:

$$\cos \alpha \cos \alpha_1 + \cos \beta \cos \beta_1 + \cos \gamma \cos \gamma_1 = 0$$

или

$$mm_1 + nn_1 + pp_1 = 0.$$

3. Прямые, данные уравнениями:

$$\frac{x - x_1}{m} = \frac{y - y_1}{n} = \frac{z - z_1}{p};$$

$$\frac{x - x_2}{m_1} = \frac{y - y_2}{n_1} = \frac{z - z_2}{p_1},$$

лежат в одной плоскости (компланарны), если выполнено условие:

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ m & n & p \\ m_1 & n_1 & p_1 \end{vmatrix} = 0.$$

4. Если прямая и плоскость даны уравнениями:

$$\frac{x - x_1}{m} = \frac{y - y_1}{n} = \frac{z - z_1}{p};$$

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

то угол φ между ними определяется формулой

$$\sin \varphi = \frac{Am + Bn + Cp}{\sqrt{m^2 + n^2 + p^2} \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Условие параллельности прямой и плоскости:

$$Am + Bn + Cp = 0.$$

Условия перпендикулярности прямой и плоскости:

$$\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}.$$

5. Прямая $\frac{x - x_1}{m} = \frac{y - y_1}{n} = \frac{z - z_1}{p}$ лежит в плоскости

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

если выполнены условия:

$$Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0$$

(прямая и плоскость имеют общую точку) и

$$Am + Bn + Cp = 0$$

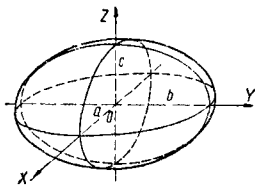
(прямая и плоскость параллельны).

КАНОНИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ 2-го ПОРЯДКА

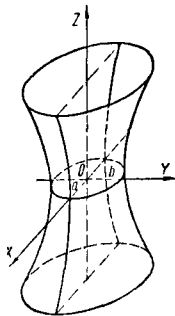
1. Эллипсоид (фиг. 206):

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Если $a = b$, то



Фиг. 206



Фиг. 207

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ — эллипсоид вращения

(поверхность вращения эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ вокруг оси OZ).

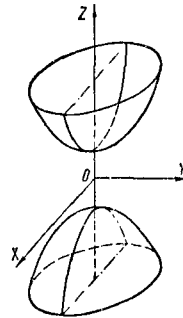
Если $a = b = c$, то $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ — сфера радиуса a .

2. Однополостный гиперболоид (фиг. 207):

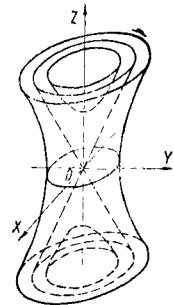
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Если $a = b$, то

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ — однополостный гиперболоид вращения (поверхность вращения гиперболы $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ вокруг оси OZ).



Фиг. 208



Фиг. 209

3. Двуполостный гиперболоид (фиг. 208):

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1.$$

Если $a = b$, то $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$ — двуполостный гиперболоид вращения

(поверхность вращения гиперболы $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$ вокруг оси OZ).

4. Конус 2-го порядка (фиг. 209):

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.$$

Его образующие являются асимптотами гиперболоидов:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = \pm 1;$$

по отношению к этим гиперболоидам конус называется асимптотическим.

5. Эллиптический параболоид (фиг. 210):

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z.$$

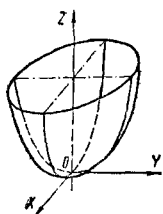
Если $p = q$, то $x^2 + y^2 = 2pz$ — параболоид вращения (поверхность вращения параболы $x^2 = 2pz$ вокруг оси OZ).

6. Гиперболический параболоид (фиг. 211):

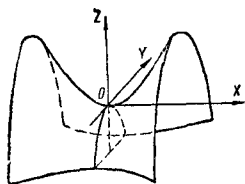
$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z.$$

7. Цилиндры с образующими, параллельными оси OZ :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \text{эллиптический цилиндр}$$



Фиг. 210



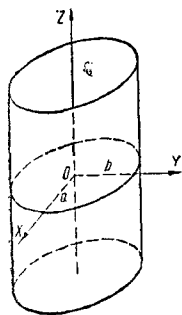
Фиг. 211

(фиг. 212), в частности, при $a = b$ — круговой цилиндр;

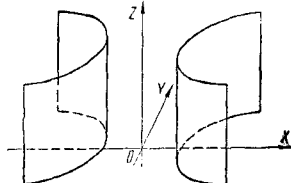
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 - \text{гиперболический цилиндр (фиг. 213);}$$

$$y^2 = 2px - \text{параболический цилиндр (фиг. 214).}$$

Прямолинейные образующие поверхностей 2-го порядка. Прямолинейной образующей поверхности называется прямая линия, которая целиком находится на поверхности; таковы, например, образующие цилиндрической и конической поверхностей.



Фиг. 212



Фиг. 213

Из поверхностей 2-го порядка имеют прямолинейные образующие (кроме цилиндров и конуса) однополостный гиперболоид и гиперболический параболоид.

Однополостный гиперболоид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

имеет два семейства прямолинейных образующих (фиг. 215, а, на чертеже показано только одно семейство):

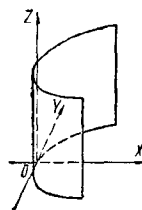
$$\left. \begin{aligned} \frac{x}{a} + \frac{z}{c} &= u \left(1 + \frac{y}{b} \right), \\ \frac{x}{a} - \frac{z}{c} &= \frac{1}{u} \left(1 - \frac{y}{b} \right), \end{aligned} \right\} \text{ I}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{x}{a} + \frac{z}{c} &= v \left(1 - \frac{y}{b} \right), \\ \frac{x}{a} - \frac{z}{c} &= \frac{1}{v} \left(1 + \frac{y}{b} \right), \end{aligned} \right\} \text{ II}$$

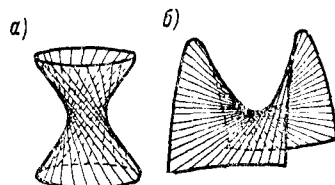
где u и v — произвольные параметры.

13 Том I

Гиперболический параболоид $\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z$ также имеет два семейства прямолинейных



Фиг. 214



Фиг. 215

образующих (фиг. 215, б, на чертеже показано только одно семейство):

$$\left. \begin{aligned} \frac{x}{\sqrt{p}} + \frac{y}{\sqrt{q}} &= 2u, \\ \frac{x}{\sqrt{p}} - \frac{y}{\sqrt{q}} &= \frac{z}{u}, \end{aligned} \right\} \text{ I}$$

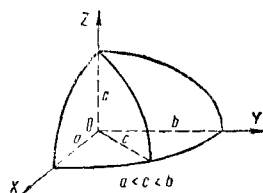
$$\left. \begin{aligned} \frac{x}{\sqrt{p}} - \frac{y}{\sqrt{q}} &= 2v, \\ \frac{x}{\sqrt{p}} + \frac{y}{\sqrt{q}} &= \frac{z}{v}, \end{aligned} \right\} \text{ II}$$

где u и v — произвольные параметры.

Через каждую точку поверхности однополостного гиперболоида или гиперболического параболоида проходят по одной образующей из каждого семейства.

Круговые сечения. Если какое-либо сечение поверхности 2-го порядка плоскостью есть круг, то все сечения плоскостями, параллельными данной, тоже круговые.

Всякая поверхность 2-го порядка, являющаяся поверхностью вращения (кроме сферы, у которой все плоские сечения — круговые), имеет одно семейство круговых сечений (образуемое плоскостями, перпендикулярными



Фиг. 216

к оси вращения). В общем же случае эллипсоид, гиперболоиды, эллиптический параболоид, эллиптический цилиндр и конус имеют по два семейства круговых сечений. На фиг. 216 показано одно из круговых сечений эллипсоида.

ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ 2-ГО ПОРЯДКА

Вид поверхности 2-го порядка, заданной общим уравнением:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{23}yz + 2a_{13}xz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0,$$

определяется, как показано в табл. 22, знаками величин (здесь $a_{ij} = a_{ji}$):

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}; \delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$S = a_{11} + a_{22} + a_{33}; T = a_{22}a_{33} + a_{33}a_{11} + a_{11}a_{22} - a_{23} - a_{31} - a_{12},$$

являющихся инвариантами этого уравнения (эти величины не изменяются при преобразовании системы координат).

Таблица 22

Исследование вида поверхности 2-го порядка		
I. $\delta \neq 0$ (центральные поверхности)		
$S \delta > 0; T > 0$	$S \delta$ и T не оба > 0	
$\Delta < 0$	Эллипсоид	Двуполостный гиперболоид
$\Delta > 0$	Мнимый эллипсоид	Однополостный гиперболоид
$\Delta = 0$	Мнимый конус (с действительной вершиной)	Конус
II. $\delta = 0$ (параболоиды, цилиндры и пары плоскостей)		
$T > 0$	$T < 0$	
$\Delta \neq 0$	Эллиптический параболоид	Гиперболический параболоид
$\Delta = 0$	Цилиндрическая поверхность, направляющей которой служит кривая 2-го порядка. В зависимости от вида этой кривой цилиндр будет эллиптическим (при $T > 0$), гиперболическим (при $T < 0$), параболическим (при $T = 0$) или поверхность распадается на две плоскости (действительные, мнимые или сливающиеся).	

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

ПЛОСКИЕ КРИВЫЕ

Уравнение плоской кривой обычно задано в одном из следующих видов:

а) в декартовых координатах:
явное

$$y = f(x);$$

неявное

$$F(x, y) = 0;$$

в параметрической форме $x = x(t); y = y(t);$

б) в полярных координатах:
явное

$$\rho = f(\varphi);$$

неявное

$$F(\rho, \varphi) = 0.$$

Если не оговорено противное, то функции, входящие в эти уравнения, вместе с их производными тех порядков, о которых будет идти речь, предполагаются непрерывными.

ДИФФЕРЕНЦИАЛ ДУГИ

Дифференциал дуги плоской кривой выражается при помощи одной из следующих формул:

а) в декартовых координатах

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

или

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx,$$

если кривая задана явным уравнением;

$$ds = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt,$$

если уравнения кривой заданы в параметрической форме;

б) в полярных координатах

$$ds = \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)^2} d\varphi.$$

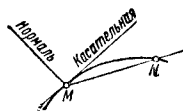
За положительное направление отсчёта дуг принимается такое направление, в котором дифференциал дуги положителен.

КАСАТЕЛЬНАЯ И НОРМАЛЬ

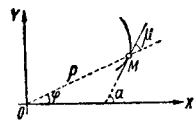
Касательной в точке M называется предельное положение секущей MN (N — произвольная точка кривой, фиг. 217), когда $N \rightarrow M$; нормалью называется перпендикуляр к касательной, проведённый через точку касания.

Вид уравнения кривой	Уравнение касательной	Уравнение нормали
Неявный . . .	$\frac{\partial F}{\partial x}(X-x) + \frac{\partial F}{\partial y}(Y-y) = 0$	$\frac{X-x}{\frac{\partial F}{\partial x}} = \frac{Y-y}{\frac{\partial F}{\partial y}}$
Явный	$Y-y = \frac{dy}{dx}(X-x)$	$Y-y = -\frac{X-x}{\frac{dy}{dx}}$
Параметрический . . .	$\frac{Y-y}{y'} = \frac{X-x}{x'}$	$x'(X-x) + y'(Y-y) = 0$

Здесь X, Y — текущие координаты; x, y — координаты точки на кривой, через которую проведена касательная или нормаль.



Фиг. 217



Фиг. 218

Положительное направление на касательной совпадает с положительным направлением на кривой в точке касания.

Направление касательной определяется углом α между положительным направлением оси OX (в декартовых координатах) и положительным направлением касательной или (в полярных координатах) углом μ между радиусом-вектором $OM = \rho$ и положительным направлением касательной (фиг. 218).

Углы α и μ определяются по формулам:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{dy}{dx}; \quad \cos \alpha = \frac{dx}{ds}; \quad \sin \alpha = \frac{dy}{ds};$$

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{\rho}{\frac{d\rho}{d\varphi}}; \quad \cos \mu = \frac{d\rho}{ds}; \quad \sin \mu = \rho \frac{d\varphi}{ds}.$$

Углом между двумя кривыми называется угол между касательными к этим кривым в их общей точке.

Если кривые заданы уравнениями:

$$y = f_1(x), \quad y = f_2(x),$$

то угол φ между ними в точке пересечения $M(x_0, y_0)$ определяется по формуле

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{f_2'(x_0) - f_1'(x_0)}{1 + f_1'(x_0)f_2'(x_0)}.$$

В декартовой системе координат с касательной и нормалью связаны длины следующих отрезков (фиг. 219):

$$MT = \left| \frac{y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}{\frac{dy}{dx}} \right| \quad (\text{отрезок касательной});$$

$$MN = \left| y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \right| \quad (\text{отрезок нормали});$$

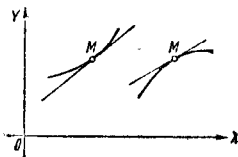
$$PT = \left| \frac{y}{\frac{dy}{dx}} \right| \quad (\text{подкасательная});$$

$$PN = \left| y \frac{dy}{dx} \right| \quad (\text{поднормаль}).$$

ВЫПУКЛОСТЬ И ВОГНУТОСТЬ; ТОЧКИ ПЕРЕГИБА

Говорят, что в точке M кривая $y = f(x)$ обращена выпуклостью вниз (или вогнутостью вверх), если в некоторой окрестности этой точки касательная проходит ниже кривой; если же касательная проходит выше кривой, то кривая обращена выпуклостью вверх (фиг. 220).

Выпуклость направлена вверх во всякой точке, где $f''(x) < 0$, и вниз во всякой точке, где $f''(x) > 0$.



Фиг. 220



Фиг. 221

Точка, в которой касательная переходит с одной стороны кривой на другую (фиг. 221), называется точкой перегиба. В точке перегиба $f''(x) = 0$ (или $f''(x)$ не существует).

Находить точки перегиба можно следующим образом: решив уравнение $f''(x) = 0$, следует исследовать знак $f''(x)$ в окрестности каждого корня x_i . Если найдется такая ок-

рестность точки x_i , что во всех точках этой окрестности слева от x_i знак $f''(x)$ один, а справа противоположный, то точка $x = x_i$ является точкой перегиба; если указанные знаки одинаковы, то точка $x = x_i$ не является точкой перегиба.

Другой, более простой способ исследования применим, если при $x = x_i$ (x_i — корень уравнения $f''(x) = 0$) существуют производные более высоких порядков функции $f(x)$.

Если $f'''(x_i) \neq 0$, то x_i — точка перегиба, если $f'''(x_i) = 0$ и $f^{IV}(x_i) \neq 0$, то x_i — не точка перегиба. Вообще если $f^{(n)}(x_i)$ — первая из неравных нулю производных, то x_i является точкой перегиба, если n нечетное, и не является точкой перегиба, если n четное.

Если уравнение кривой дано в неявном виде $F(x, y) = 0$, то координаты точки перегиба должны удовлетворять системе уравнений:

$$F(x, y) = 0; \quad \begin{vmatrix} F_{xx} & F_{xy} & F'_x \\ F_{xy} & F_{yy} & F'_y \\ F'_x & F'_y & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Для кривой, заданной в параметрической форме $x = x(t)$, $y = y(t)$, значения параметра t , соответствующие точкам перегиба, удовлетворяют уравнению:

$$\begin{vmatrix} \frac{dx}{dt} & \frac{dy}{dt} \\ \frac{d^2x}{dt^2} & \frac{d^2y}{dt^2} \end{vmatrix} = 0.$$

Если кривая дана уравнением в полярных координатах $\rho = f(\varphi)$, то значения аргумента φ , соответствующие точкам перегиба, удовлетворяют уравнению

$$\rho^2 + 2 \left(\frac{d\rho}{d\varphi} \right)^2 - \rho \frac{d^2\rho}{d\varphi^2} = 0.$$

Пример 1.

$$y = \frac{1}{1+x^2};$$

$$f''(x) = -2 \frac{1-3x^2}{(1+x^2)^3}; \quad x_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}};$$

$$x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}; \quad f'''(x_1) \neq 0; \quad f'''(x_2) \neq 0;$$

обе точки являются точками перегиба.

Пример 2.

$$y = (x-1)^4; \quad f''(x) = 12(x-1)^2;$$

$$x_{1,2} = 1; \quad f'''(1) = 0; \quad f^{IV}(1) \neq 0;$$

точек перегиба нет.

Пример 3.

$$\rho = \frac{1}{\sqrt{\varphi}}; \quad \rho^2 + 2 \left(\frac{d\rho}{d\varphi} \right)^2 - \rho \frac{d^2\rho}{d\varphi^2} = \frac{1}{4\varphi^3} (4\varphi^2 - 1);$$

$$\varphi = \pm \frac{1}{2};$$

значению $\varphi = -\frac{1}{2}$ соответствует миним. ρ и точка перегиба определяется полярным углом $\varphi = \frac{1}{2}$.

КРИВИЗНА КРИВОЙ

Кривизной K кривой в точке M называется предел отношения угла между положительными направлениями касательных

в точках M и N (угол смежности) к длине дуги MN , когда $N \rightarrow M$ (фиг. 222):

$$K = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \alpha}{\Delta s} = \frac{d\alpha}{ds},$$

где α — угол между положительными направлениями касательной в точке M и оси OX .

Радиусом кривизны R называется величина, обратная кривизне: $R = \frac{1}{K}$. Кривыми постоянной кривизны являются окружность ($K = \frac{1}{a}$, где a — радиус окружности) и прямая ($K = 0$).

Формулы для вычисления кривизны и радиуса кривизны:

$$K = \frac{1}{R} = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}$$

(для уравнения в явной форме);

$$K = \frac{1}{R} = \frac{\begin{vmatrix} F''_{xx} & F''_{xy} & F'_x \\ F''_{xy} & F''_{yy} & F'_y \\ F'_x & F'_y & 0 \end{vmatrix}}{(F'^2_x + F'^2_y)^{3/2}}$$

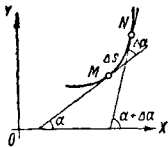
(для уравнения в неявной форме);

$$K = \frac{1}{R} = \frac{\begin{vmatrix} \frac{dx}{dt} & \frac{dy}{dt} \\ \frac{d^2x}{dt^2} & \frac{d^2y}{dt^2} \end{vmatrix}}{\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right]^{3/2}}$$

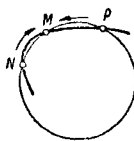
(для уравнений в параметрической форме);

$$K = \frac{1}{R} = \frac{\rho^2 + 2\left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)^2 - \rho \frac{d^2\rho}{d\varphi^2}}{\left[\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)^2\right]^{3/2}}$$

(для уравнения в полярных координатах).



Фиг. 222



Фиг. 223

Точки кривой, в которых кривизна имеет максимум или минимум, называются вершинами кривой.

Кругом кривизны кривой в точке M называется предельное положение круга, проведенного через точку M и две другие точки кривой N и P (фиг. 223), когда $N \rightarrow M$ и $P \rightarrow M$.

Радиус круга кривизны равен радиусу кривизны, а центр круга кривизны (центр кривизны) расположен на нормали к

кривой, проведенной в точке M в сторону вогнутости кривой.

Координаты (X, Y) центра кривизны кривой $y = f(x)$ вычисляются по формулам:

$$\begin{aligned} X &= x - \frac{\frac{dy}{dx} \left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]}{\frac{d^2y}{dx^2}}, \\ Y &= y + \frac{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}}. \end{aligned} \quad (*)$$

Эволюта кривой — геометрическое место центров кривизны.

Если в формулах для определения координат центра кривизны рассматривать X и Y , как текущие координаты точки на эволюте, то эти формулы дают параметрические уравнения эволюты.

Пример. Найти уравнение эволюты параболы $y = x^2$.
Здесь

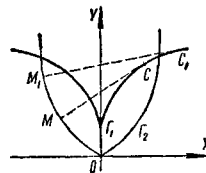
$$X = -4x^2, \quad Y = \frac{1+6x^2}{2}$$

и, исключив параметр x , найдём уравнение эволюты в явном виде:

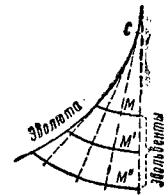
$$Y = \frac{1}{2} + 3\left(\frac{X}{4}\right)^{\frac{2}{3}}.$$

Эвольвента (инвольта) кривой — такая кривая, для которой данная является эволютой.

Нормаль MC эвольвенты Γ_2 является касательной к эволюте Γ_1 (фиг. 224), длина дуги CC_1 эволюты равна соответствующему приращению радиуса кривизны эвольвенты $\overline{CC_1} = M_1C_1 - MC$; поэтому эвольвенту Γ_2 называют также развёрткой кривой Γ_1 , получающейся разматыванием натянутой нити, намотанной на Γ_1 . Каждая кривая имеет бесчисленное множество эвольвент, соответствующих различным первоначальным длинам нити (фиг. 225).



Фиг. 224



Фиг. 225

Если $X = X(t)$, $Y = Y(t)$ — параметрические уравнения кривой, то формулы (*) дают систему дифференциальных уравнений, решения которой $x = x(t, C)$, $y = y(t, C)$ определяют семейство эвольвент.

АСИМПТОТЫ

Если расстояние до некоторой прямой от точки, удаляющейся в бесконечность по данной кривой, стремится к нулю, то эта прямая называется асимптотой данной

¹ Хотя бы одна из координат этой точки стремится к ∞ .

кривой. Асимптота может либо не пересекать (фиг. 226, а), либо пересекать кривую (фиг. 226, б).

Кривая $y = f(x)$ имеет горизонтальную асимптоту, если существует предел

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b \quad \text{или} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \beta.$$

В этом случае $y = b$ (или, соответственно, $y = \beta$) — уравнение этой асимптоты.

Если $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm \infty$, прямая $x = a$ — вертикальная асимптота.



Фиг. 226

Для отыскания наклонной асимптоты следует вычислить пределы

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} \quad \left(\text{или} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} \right)$$

и

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - kx]$$

(соответственно $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - kx]$).

Если пределы, определяющие величины k и b , существуют, то прямая $y = kx + b$ — асимптота данной кривой.

Для отыскания асимптоты кривой, заданной параметрически $x = x(t)$, $y = y(t)$, следует найти такое значение $t = \tau$, чтобы

$$\lim_{t \rightarrow \tau} x(t) = \pm \infty \quad \text{или} \quad \lim_{t \rightarrow \tau} y(t) = \pm \infty;$$

если при этом

$$\lim_{t \rightarrow \tau} x(t) = \pm \infty, \quad \text{а} \quad \lim_{t \rightarrow \tau} y(t) = b,$$

то $y = b$ — асимптота (горизонтальная).

Если

$$\lim_{t \rightarrow \tau} y(t) = \pm \infty, \quad \text{а} \quad \lim_{t \rightarrow \tau} x(t) = a,$$

то $x = a$ — асимптота (вертикальная).

Если $\lim_{t \rightarrow \tau} x(t) = \pm \infty$ и $\lim_{t \rightarrow \tau} y(t) = \pm \infty$ и, кроме того, существуют пределы

$$k = \lim_{t \rightarrow \tau} \frac{y(t)}{x(t)} \quad \text{и} \quad b = \lim_{t \rightarrow \tau} [y(t) - kx(t)],$$

то прямая $y = kx + b$ является асимптотой данной кривой.

Пример.

$$y = \frac{x^3 + 2x^2 + 6}{x^2 + 3};$$

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x^3 + 2x^2 + 6)}{(x^2 + 3)x} = 1;$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3 + 2x^2 + 6}{x^2 + 3} - x \right) = 2;$$

асимптота имеет уравнение $y = x + 2$.

ОСОБЫЕ ТОЧКИ

Особая точка кривой $F(x, y) = 0$ называется кратной (двойной, тройной и т. д.), если её координаты x_0, y_0 удовлетворяют системе уравнений

$$F(x_0, y_0) = 0; F_x(x_0, y_0) = 0; F_y(x_0, y_0) = 0.$$

Если при этом не обращается в нуль хотя бы одна из производных второго порядка:

$$A = F''_{xx}(x_0, y_0); \quad B = F''_{xy}(x_0, y_0); \\ C = F''_{yy}(x_0, y_0),$$

то точка называется двойной.

Двойная точка является:

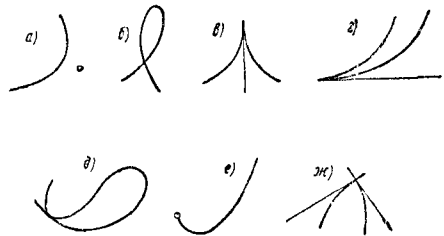
а) изолированной (т. е. в некоторой её окрестности нет других точек данной кривой), если $\Delta = AC - B^2 > 0$ (фиг. 227, а);
б) узловой, если $\Delta < 0$ (фиг. 227, б);
в) точкой возврата 1-го (фиг. 227, в) или 2-го (фиг. 227, г) рода или точкой самосоприкосновения (фиг. 227, д), если $\Delta = 0$.

Если кривая алгебраическая¹, то, перейдя при помощи параллельного переноса к системе координат OXY , начало которой находится в исследуемой особой точке, получим уравнение кривой в форме

$$AX^2 + 2BXY + CY^2 + R(X, Y) = 0,$$

где многочлен $R(X, Y)$ содержит только члены порядка выше второго относительно X и Y .

В этом случае $AX^2 + 2BXY + CY^2 = 0$ есть уравнение пары касательных в особой точке, и, следовательно, эта точка будет узловой, если имеются две действительные касательные (т. е. $AC - B^2 < 0$), изолированной, если обе касательные мнимые (т. е. $AC - B^2 > 0$), и точкой возврата 1-го или 2-го рода или точкой самосоприкосновения, если обе касательные совпадают (т. е. $AC - B^2 = 0$). Если в особой точке обращаются в нуль все частные производные второго порядка функции $F(x, y)$, но не обращается в нуль хотя бы одна производная третьего порядка, то такая точка называется тройной, и т. д.



Фиг. 227

У неалгебраических кривых, кроме перечисленных особых (кратных) точек, могут быть особенности другой природы, например, точки прекращения (фиг. 227, е), находящиеся на границе области существования функции $y = f(x)$, определяющей кривую, или в точках разрыва 1-го рода (см. стр. 130) этой функции, угловые точки (фиг. 227, ж), где левый и правый пределы (см. стр. 129) производной $f'(x)$ существуют и различны, и некоторые другие.

¹ Т. е. $F(x, y)$ — многочлен.

ОГИБАЮЩИЕ СЕМЕЙСТВА КРИВЫХ

Огибающей семейства плоских кривых называется кривая (или совокупность нескольких кривых), которой касаются все линии данного семейства, причём каждой дуги этой кривой касается бесконечное множество линий рассматриваемого семейства.

Если зависящее от одного параметра семейство кривых

$$F(x, y, \alpha) = 0$$

имеет огибающую, то параметрические уравнения последней определяются из системы

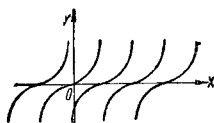
$$F(x, y, \alpha) = 0; \quad F'_\alpha(x, y, \alpha) = 0.$$

Если из этой системы исключить параметр α , то получим неявное уравнение $D(x, y) = 0$.

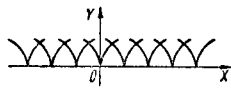
Кривая $D(x, y) = 0$ (дискриминантная кривая) наряду с огибающей, если таковая имеется, может содержать также геометрическое место особых точек, не являющееся огибающей.

Пример 1. Дискриминантная кривая семейства $y = (x - \alpha)^2$ (фиг. 228) $y = 0$ (ось OX) является геометрическим местом точек перегиба и огибающей.

Пример 2. Дискриминантная кривая семейства $y^2 = (x - \alpha)^2$ (фиг. 229) $y = 0$ является геометрическим местом точек возврата и огибающей.



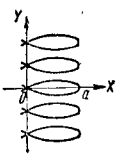
Фиг. 228



Фиг. 230



Фиг. 229



Фиг. 231

Пример 3. Дискриминантная кривая семейства $y^2 = (x - \alpha)^3$ (фиг. 230) $y = 0$ есть геометрическое место точек возврата и не является огибающей.

Пример 4. Дискриминантная кривая семейства строфоида

$$(a + x)(y - a)^2 = x^2(a - x)$$

(фиг. 231) распадается на прямые $x = 0$ (геометрическое место узловых точек) и $x = a$ (огибающая).

НЕКОТОРЫЕ ПЛОСКИЕ КРИВЫЕ

Кубическая парабола (фиг. 232):

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d.$$

Точки пересечения с осью OX определяются действительными корнями уравнения $y = 0$; их может быть одна, две (в этом случае в одной из точек происходит касание), или три: A_1, A_2, A_3 . Точка пересечения с осью OY : $B(0, d)$. Экстремумы

$$C, D \left(-\frac{b \pm \sqrt{-\Delta}}{3a}, d + \frac{2b^3 - 9abc \pm (6ac - 2b^2)\sqrt{-\Delta}}{27a^2} \right),$$

где $\Delta = 3ac - b^2$.

¹ См. (2) на стр. 266 и (59) на стр. 267.

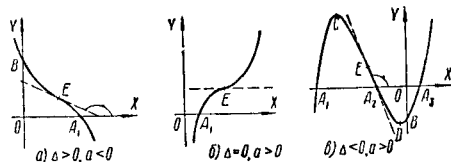
Точка перегиба, совпадающая с центром симметрии кривой

$$E \left(-\frac{b}{3a}, \frac{2b^2 - 9abc}{27a^2} + d \right).$$

График многочлена n -й степени (фиг. 233)

$$y = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n.$$

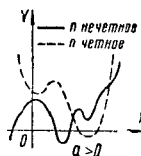
Кривая пересекает ось OX не более n раз. Если n нечётное, то эта функция или совсем не имеет экстремумов, или имеет



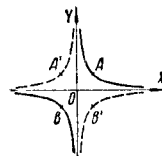
Фиг. 232

чётное число (от 2 до $n - 1$) экстремумов, максимумы и минимумы чередуются; точек перегиба — нечётное число (от 1 до $n - 2$). Если n чётное, то функция имеет нечётное число экстремумов (от 1 до $n - 1$), максимумы и минимумы чередуются; точек перегиба — чётное число (от 0 до $n - 2$). Асимптот и особых точек нет.

Равноосная гипербола. 1) $y = \frac{a}{x}$ (на фиг. 234 сплошная линия для $a > 0$ и пунк-



Фиг. 233



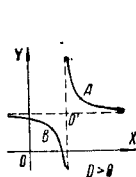
Фиг. 234

тирная для $a < 0$). Асимптоты — оси координат. Вершины гиперболы

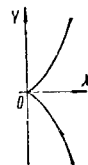
$$A, B, A_1, B_1 (\pm \sqrt{|a|}, \pm \sqrt{|a|}).$$

Экстремумов нет.

$$2) y = \frac{a_1x + b_1}{a_2x + b_2} \text{ (фиг. 235).}$$



Фиг. 235



Фиг. 236

Асимптоты параллельны осям координат; центр

$$O' \left(-\frac{b_2}{a_2}, \frac{a_1}{a_2} \right);$$

вершины гиперболы

$$A, B \left(-\frac{b_2 \pm \sqrt{|D|}}{a_2}, \frac{a_1 \pm \sqrt{|D|}}{a_2} \right);$$

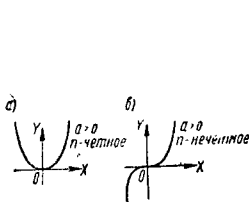
где $D = a_1b_2 - a_2b_1$.

Полукубическая парабола (фиг. 236): $y = ax^{2/3}$ (уравнения в параметрической форме: $x = t^2$, $y = at^3$). Асимптот не имеет.

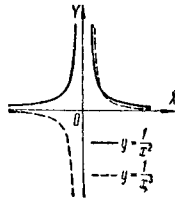
В начале координат — точка возврата 1-го рода.

Длина L кривой от начала до произвольной точки $M(x, y)$:

$$L = \frac{1}{27a^2} [(4 + 9a^2x)^{3/2} - 8].$$



Фиг. 237



Фиг. 238

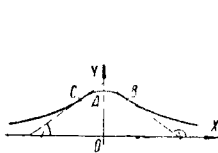
График степенной функции. а) $y = ax^n$ ($n > 1$ и целое) — парабола n -го порядка (фиг. 237, а и б).

При n чётном кривая симметрична относительно оси OY и имеет в начале координат экстремум, при n нечётном симметрична относительно начала координат, являющегося точкой перегиба. Асимптот нет.

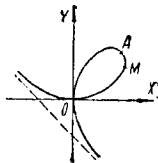
б) $y = \frac{a}{x^n} = ax^{-n}$ (n — целое положительное) (фиг. 238) — кривая гиперболического типа.

Асимптоты — координатные оси. Эстремумов нет. При n нечётном кривая симметрична относительно начала координат, а при n чётном — относительно оси OY .

Локон Аньези (фиг. 239). $y = \frac{a^3}{a^2 + x^2}$. Асимптота — ось OX . Максимум $A(0, a)$; радиус кривизны в нём $\frac{a}{2}$. Точки перегиба $B, C(\pm \frac{a}{\sqrt{3}}, \frac{3a}{4})$. Площадь между кривой и асимптотой πa^2 .



Фиг. 239



Фиг. 240

Декартов лист (фиг. 240). $x^3 + y^3 = 3axy$ (уравнения в параметрической форме:

$$x = \frac{3at}{1+t^3}, \quad y = \frac{3at^2}{1+t^3},$$

где $t = \tan MOX$).

В начале координат — узловая точка с касательными — осями координат; радиус кривизны ветвей в нём $\frac{3a}{8\sqrt{2}}$. Асимптота $x + y + a = 0$. Вершина $A(\frac{3}{2}a, \frac{3}{2}a)$. Пло-

щадь петли $\frac{3}{2}a^2$; площадь между кривой и асимптотой $\frac{3}{2}a^2$.

Циссоида (фиг. 241). Геометрическое место точек M , для которых $OM = PQ$ (P — точка производящего круга с диаметром a).

Уравнение: $y^2 = \frac{x^3}{a-x}$; в параметрической форме

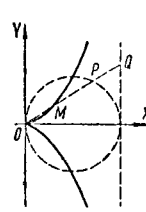
$$x = \frac{at^2}{1+t^2}, \quad y = \frac{at^3}{1+t^2} \quad (t = \tan MOX);$$

в полярных координатах

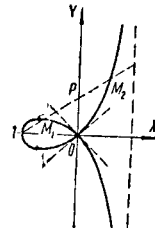
$$\rho = \frac{a \sin^2 \varphi}{\cos \varphi}.$$

В начале координат — точка возврата 1-го рода. Асимптота $x = a$. Площадь между кривой и асимптотой $\frac{3}{4}\pi a^2$.

Строфоида (фиг. 242). Геометрическое место точек M_1 и M_2 , для которых $PM_1 = PM_2 = OP$.



Фиг. 241



Фиг. 242

Уравнение:

$$y^2 = x^2 \left(\frac{a+x}{a-x} \right);$$

в параметрической форме

$$x = a \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1}, \quad y = at \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1} \quad (t = \tan MOX);$$

в полярных координатах

$$\rho = -\frac{\cos 2\varphi}{\cos \varphi}.$$

В начале координат — узловая точка (касательные $y = \pm x$). Асимптота $x = a$. Вершина $A(-a, 0)$. Площадь петли $a^2 - \frac{\pi a^2}{4}$, площадь между кривой и асимптотой $a^2 + \frac{\pi a^2}{4}$.

Конхоида (фиг. 243). Геометрическое место точек M , для которых $OM = OP \pm l$, причём для знака $(+)$ внешняя ветвь, для знака $(-)$ внутренняя.

Уравнение:

$$(x-a)^2(x^2+y^2) - l^2x^2 = 0;$$

в параметрической форме

$$x = a + l \cos \varphi, \quad y = atg \varphi + l \sin \varphi;$$

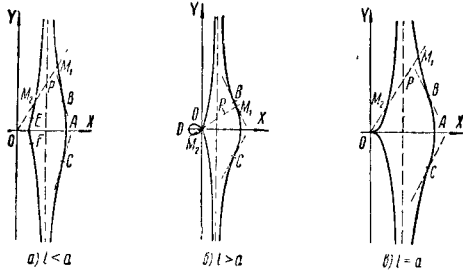
в полярных координатах

$$\rho = \frac{a}{\cos \varphi} \pm l.$$

Внешняя ветвь: асимптота $x = l$; вершина $A(a + l, 0)$; две точки перегиба B, C (x равен наибольшему из корней уравнения $x^3 - 3a^2x + 2a(a^2 - l^2) = 0$). Площадь между ветвью и асимптотой бесконечна.

Внутренняя ветвь: асимптота $x = l$; вершина $D(a - l, 0)$; в начале координат — двойная точка:

а) при $l < a$ — изолированная точка (фиг. 243, а). Точки перегиба E и F (x равен второму по величине положительному корню уравнения $x^3 - 3a^2x + 2a(a^2 - l^2) = 0$);



Фиг. 243

б) при $l > a$ — узловая точка (фиг. 243, б). Максимум и минимум при $x = a - \sqrt[3]{al^2}$. Наклон касательных в начале координат:

$$\operatorname{tg} \alpha = \pm \frac{\sqrt{l^2 - a^2}}{a},$$

радиус кривизны $\frac{l \sqrt{l^2 - a^2}}{a}$;

в) при $l = a$ — точка возврата (фиг. 243, в).

Улитка Паскаля (фиг. 244). $OM = OP \pm l$. Уравнение:

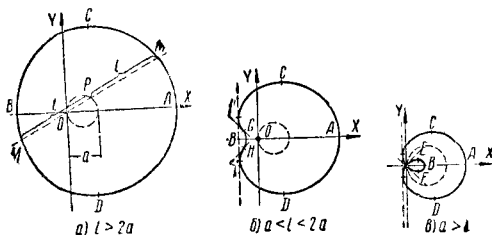
$$(x^2 + y^2 - ax)^2 = l^2(x^2 + y^2);$$

в параметрической форме $x = a \cos^2 \varphi + l \cos \varphi$, $y = a \cos \varphi \sin \varphi + l \sin \varphi$; в полярных координатах

$$\rho = a \cos \varphi + l.$$

Вершины $A, B(a \pm l, 0)$. Четыре экстремума, если $a > l$, и два, если $a \leq l$:

$$C, D, E, F \left(\cos \varphi = \frac{-l \pm \sqrt{l^2 + 8a^2}}{4a} \right).$$



Фиг. 244

Точки перегиба G, H ($\cos \varphi = -\frac{2a^2 + l^2}{3al}$), если $a < l < 2a$. Начало координат — двойная точка: изолированная при $a < l$, узловая при $a > l$ (наклон касательных в ней

$\operatorname{tg} \alpha = \pm \frac{\sqrt{a^2 - l^2}}{l}$, радиус кривизны $\sqrt{a^2 - l^2}$) и точка возврата при $a = l$ (в последнем случае кривая — кардиоида).

Площадь улитки

$$\frac{\pi a^2}{2} + \pi l^2$$

(в случае фиг. 244, в площадь внутренней петли при вычислении по этой формуле считается дважды).

Кардиоида (фиг. 245). Частный случай улитки Паскаля: $OM = OP \pm a$.

Уравнение:

$$(x^2 + y^2)^2 - 2ax(x^2 + y^2) = a^2y^2;$$

в параметрической форме

$x = a \cos \varphi (1 + \cos \varphi)$, $y = a \sin \varphi (1 + \cos \varphi)$; в полярных координатах

$$\rho = a(1 + \cos \varphi).$$

Начало координат — точка возврата. Вершина $A(2a, 0)$.

Максимум и минимум при $\varphi = \pm \frac{\pi}{3}$:

$$C, D \left(\frac{3}{4}a, \pm \frac{3\sqrt{3}}{4}a \right).$$

Площадь $\frac{3}{2}\pi a^2$; длина $8a$.

Овал Кассини (фиг. 246).

Геометрическое место точек M , для которых произведение расстояний от данных точек $F_1(c, 0)$ и $F_2(-c, 0)$ (фокусов) постоянно и равно a^2 .

Уравнение:

$$(x^2 + y^2)^2 - 2c^2(x^2 - y^2) = a^4 - c^4;$$

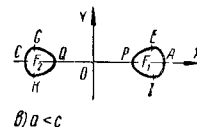
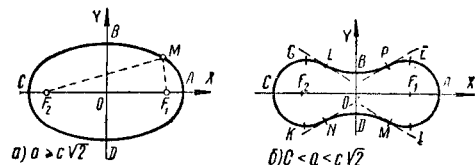
в полярных координатах

$$\rho^2 = c^2 \cos 2\varphi \pm \sqrt{c^4 \cos^2 2\varphi + (a^4 - c^4)}.$$

а) $a \geq c\sqrt{2}$ — выпуклый овал (фиг. 246, а).

Точки пересечения с осью OX :

$$A, C(\pm \sqrt{a^2 + c^2}, 0);$$



Фиг. 246

точки пересечения с осью OY :

$$B, D(0, \pm \sqrt{a^2 - c^2}).$$

Если $a = c\sqrt{2}$, то в точках B и D кривизна равна нулю.

б) $c < a < c\sqrt{2}$ (фиг. 246, б).

Точки пересечения с осями те же, что и в случае а); максимумы и минимумы:

$$B, D(0, \pm \sqrt{a^2 - c^2});$$

$$E, G, K, I \left(\pm \frac{\sqrt{4c^4 - a^4}}{2c}, \pm \frac{a^2}{2c} \right).$$

Точки перегиба

$$P, L, M, N \left(\pm \sqrt{\frac{1}{2}(m-n)}, \mp \sqrt{\frac{1}{2}(m+n)} \right),$$

где

$$m = \frac{a^4 - c^4}{3c^2}, \quad n = \sqrt{\frac{a^4 - c^4}{3}}.$$

в) $a < c$ — два овала (фиг. 246, в). Точки пересечения с осью OX :

$A, C(\pm \sqrt{a^2 + c^2}, 0)$ и $P, Q(\sqrt{c^2 - a^2}, 0)$; максимумы и минимумы:

$$E, G, K, I \left(\pm \frac{\sqrt{4c^4 - a^4}}{2c}, \pm \frac{a^2}{2c} \right).$$

г) $a = c$ — лемниската Бернулли (см. ниже). Лемниската Бернулли (фиг. 247). Частный случай овала Кассини при $a = c$.

Уравнение:

$$(x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) = 0;$$

в полярных координатах

$$\rho^2 = 2a^2 \cos 2\varphi.$$

Начало координат является точкой перегиба и узловой точкой с касательными $y = \pm x$.

Точки пересечения кривой с осью OX $A, C(\pm a\sqrt{2}, 0)$; максимумы и минимумы

$$E, G, K, I \left(\pm \frac{a\sqrt{3}}{2}, \pm \frac{a}{2} \right); \varphi = \pm \frac{\pi}{6}.$$

Площадь каждой петли a^2 .

Циклоида (фиг. 248). Траектория точки окружности, катящейся без скольжения по прямой.

Уравнение:

$$x + \sqrt{y(2a - y)} = a \arccos \frac{a - y}{a}$$

(a — радиус окружности); в параметрической форме:

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t),$$

где $t = \angle MC_1B$.

Точки возврата

$O, O_1, O_2, \dots (OO_1 = O_1O_2 = \dots = 2\pi a)$. Вершины $A_1, A_2, \dots [(2k+1)\pi a, 2a]$.

Длина одной ветви $8a$, площадь между ней и осью OX $3\pi a^2$. Радиус кривизны в вершинах $4a$. Эволюта циклоиды — такая же циклоида (отмечена пунктиром).

Удлиненная (фиг. 249, а) и укороченная (фиг. 249, б) циклоиды («трохоиды»). Траектория точки, лежащей вне или внутри окружности, которая катится без скольжения по прямой линии.

Уравнения в параметрической форме:

$$x = a(t - \lambda \sin t), \quad y = a(1 - \lambda \cos t),$$

где a — радиус окружности, $t = \angle MC_1B$, $\lambda a = C_1M$ (для удлиненной циклоиды $\lambda > 1$,

для укороченной $\lambda < 1$); $OO_1 = 2\pi a$; максимумы

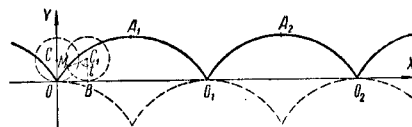
$$A_1, A_2, \dots [(2k+1)\pi a, (1+\lambda)a],$$

минимумы

$$B_0, B_1, B_2, \dots [2k\pi a, (1-\lambda)a].$$

Для удлиненной циклоиды — узловые точки

$D_0, D_1, D_2, \dots [2k\pi a, a(1 - \sqrt{\lambda^2 - t_0^2})]$, где t_0 — наименьший положительный корень уравнения $t = \lambda \sin t$.



Фиг. 248

Для укороченной циклоиды — точки перегиба

$E_1, E_2, \dots [a(\arccos \lambda - \lambda \sqrt{1 - \lambda^2}), a(1 - \lambda^2)]$.

Площадь, заштрихованная на фиг. 249, $\pi a^2(2 + \lambda^2)$. Радиус кривизны в точках максимума $a \frac{(1+\lambda)^2}{\lambda}$, а в точках минимума $a \frac{(1-\lambda)^2}{\lambda}$.

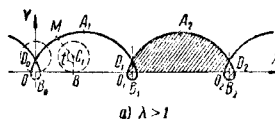
Эпициклоида (фиг. 250). Траектория точки M окружности, катящейся без скольжения по другой окружности вне её.

Уравнения в параметрической форме:

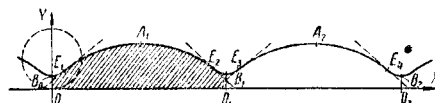
$$x = (A + a) \cos \varphi - a \cos \frac{A + a}{a} \varphi,$$

$$y = (A + a) \sin \varphi - a \sin \frac{A + a}{a} \varphi$$

(A — радиус неподвижного, a — подвижного круга; $\varphi = \angle COX$).



а) $\lambda > 1$



б) $\lambda < 1$

Фиг. 249

При $m = \frac{A}{a} = 1$ — кардиоид.

а) При m целом кривая замкнута и состоит из m одинаковых частей (фиг. 250, а); точки возврата A_1, A_2, \dots, A_m :

$$\rho = A, \quad \varphi = \frac{2k\pi}{m} \quad (k = 0, 1, \dots, m-1).$$

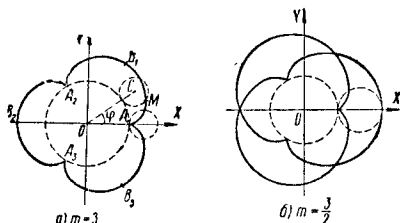
Вершины B_1, B_2, \dots, B_m :

$$\rho = A + a, \quad \varphi = \frac{2\pi}{m} \left(k + \frac{1}{2} \right).$$

б) При m дробном (рациональном) (фиг. 250, б) кривая тоже замкнутая, но самопересекающаяся.

Длина одной ветви

$$L_{A_1 B_1 A_2} = \frac{8(A+a)}{m},$$



Фиг. 250

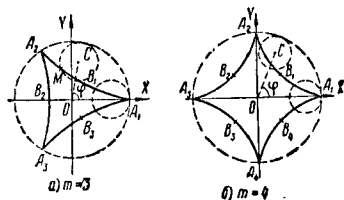
при m целом длина всей кривой $8(A+a)$. Площадь сектора $A_1 B_1 A_2 A$ (без сектора неподвижного круга)

$$\pi a^2 \left(\frac{3A+2a}{A} \right).$$

Радиус кривизны в вершинах $\frac{4a(A+a)}{2a+A}$.

Гипоциклоида (фиг. 251). Траектория точки окружности, катящейся без скольжения по другой окружности внутри неё. При любом $m (m > 1)$ уравнение гипоциклоиды получается из соответствующего уравнения эписциклоиды заменой a на $-a$.

При $m=2$ кривая вырождается в диаметр неподвижного круга.



Фиг. 251

При $m=3$ (фиг. 251, а)

$$x = a(2 \cos \varphi + \cos 2\varphi), \quad y = a(2 \sin \varphi - \sin 2\varphi).$$

Длина $16a$; площадь $2\pi a^2$.

При $m=4$ (фиг. 251, б) (астроида)

$$x = A \cos^3 \varphi, \quad y = A \sin^3 \varphi;$$

(или $x^{2/3} + y^{2/3} = A^{2/3}$). Длина $24a$ (или $6A$);

площадь $6a^2$ (или $\frac{3}{8}A^2$).

Архимедова спираль (фиг. 252). Траектория точки, движущейся с постоянной скоростью v по лучу, вращающемуся около полюса O с постоянной угловой скоростью ω .

Уравнение в полярных координатах

$$\rho = a\varphi,$$

где

$$a = \frac{v}{\omega}.$$

Кривая состоит из двух ветвей, симметричных относительно оси OX . Луч OR пересекает кривую в точках $O, A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$, находящихся друг от друга на постоянном расстоянии $A_i A_{i+1} = 2\pi a$.

Длина дуги OM (M —любая точка спирали)

$$\frac{a}{2} (\varphi \sqrt{\varphi^2 + 1} + \operatorname{Ar sh} \varphi).$$

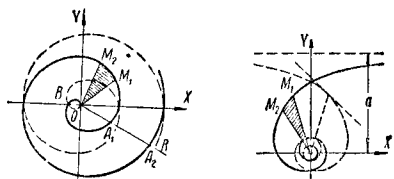
Площадь сектора $M_1 OM_2$:

$$\frac{a^2}{6} (\varphi_2^3 - \varphi_1^3).$$

Радиус кривизны в начале координат $\frac{a}{2}$.

Гиперболическая спираль (фиг. 253): $\rho = \frac{a}{\varphi}$.

Кривая состоит из двух ветвей, симметрич-



Фиг. 252

Фиг. 253

ных относительно оси OY . Асимптота $y = a$. Начало координат — асимптотическая точка. Площадь сектора $M_1 OM_2$

$$\frac{a^2}{2} \left(\frac{1}{\varphi_1} - \frac{1}{\varphi_2} \right).$$

Логарифмическая спираль (фиг. 254). Кривая пересекает все лучи, выходящие из полюса O , под одним и тем же углом α .

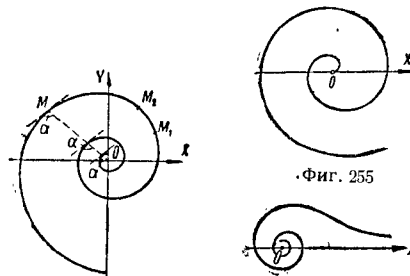
Уравнение в полярных координатах

$$\rho = ae^{k\varphi}$$

($k = \operatorname{ctg} \alpha$; если $\alpha = \frac{\pi}{2}$, то $k=0$ и кривая — окружность). Начало координат — асимптотическая точка. Длина дуги $M_1 M_2$

$$\frac{a \sqrt{1+k^2}}{k} (\rho_2 - \rho_1).$$

Параболическая спираль (фиг. 255): $\rho^2 = a\varphi$. Полюс — точка прекращения.



Фиг. 254

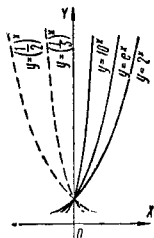
Фиг. 255

Жезл (фиг. 256): $\rho^2 = \frac{a}{\varphi}$. Полюс — асимптотическая точка. Полярная ось — асимптота.

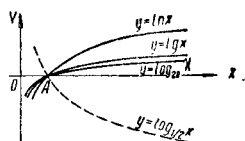
Показательная кривая (фиг. 257):

$$y = a^x \quad (a > 0).$$

При $a = e$ — натуральная показательная кривая $y = e^x$. Функция y принимает только положительные значения. Асимптота — ось OX .



Фиг. 257



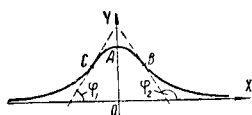
Фиг. 258

Логарифмическая кривая (фиг. 258):

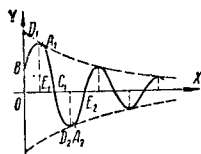
$$y = \log_a x \quad (a > 0).$$

При $a = e$ — натуральная логарифмическая кривая $y = \ln x$. Функция y существует только при $x > 0$. Асимптота — ось OY .

График функции $y = e^{-(ax)^2}$ (фиг. 259). Кривая симметрична относительно оси OY . Асим-



Фиг. 259



Фиг. 260

птота — ось OX . Максимум в точке $A(0, 1)$; точки перегиба B и $C \left(\pm \frac{1}{a\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{e}} \right)$, наклоны касательных в них:

$$\operatorname{tg} \varphi = \mp a \sqrt{\frac{2}{e}}.$$

К этому виду относится кривая нормального закона распределения ошибок (кривая Гаусса):

$$y = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x^2} \quad (\text{стр. 227}).$$

Кривая затухающего колебания (фиг. 260):

$$y = Ae^{-ax} \sin(\omega x + \varphi_0).$$

Она заключена между кривыми $y = \pm Ae^{-ax}$, которых касается в точках:

$$A_1, A_2, \dots \left[\frac{\left(k + \frac{1}{2}\right)\pi - \varphi_0}{\omega}, (-1)^k Ae^{-ax} \right].$$

Асимптота — ось OX .

Точки пересечения с осями координат:

$$B(0, A \sin \varphi_0) \text{ и } C_1, C_2, \dots \left(\frac{k\pi - \varphi_0}{\omega}, 0 \right).$$

$$\text{Экстремумы } D_1, D_2, \dots \left(x = \frac{k\pi - \varphi_0 + \alpha}{\omega} \right).$$

Точки перегиба

$$E_1, E_2, \dots \left(x = \frac{k\pi - \varphi_0 - 2\alpha}{\omega}, \text{ где } \operatorname{tg} \alpha = \frac{\omega}{a} \right).$$

Величина

$$\delta = \ln \left| \frac{y_i}{y_{i+1}} \right| = a \frac{\pi}{\omega}$$

(где y_i и y_{i+1} — ординаты двух соседних экстремумов) называется логарифмическим декрементом затухания.

Цепная линия (фиг. 261):

$$y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a} = a \frac{e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}}{2}.$$

Линия равновесия гибкой тяжёлой нерастяжимой нити, подвешенной в двух точках.

Кривая симметрична относительно оси OY .

Вершина $A(0, a)$. Длина дуги AM $a \operatorname{sh} \frac{x}{a}$;

площадь $OAMP$ $a^2 \operatorname{sh} \frac{x}{a}$.

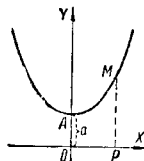
Трактриса (фиг. 262):

$$x = a \operatorname{ar} \operatorname{ch} \frac{a}{y} - \sqrt{a^2 - y^2}$$

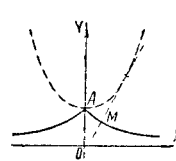
$$\left(= a \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y} - \sqrt{a^2 - y^2} \right).$$

Эвольвента цепной линии (развёртывание начинается в вершине A).

Асимптота — ось OX . Точка возврата (с вертикальной касательной) $A(0, a)$. Кривая



Фиг. 261



Фиг. 262

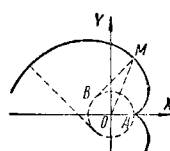
симметрична относительно оси OY . Длина дуги AM $a \ln \frac{a}{y}$.

Развёртка (эвольвента) окружности (фиг. 263). Траектория конца натянутой нити, разматывающейся с окружности ($\widehat{AB} = BM$).

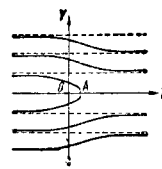
Уравнение в параметрической форме:

$$x = a \cos \varphi + a \varphi \sin \varphi, \quad y = a \sin \varphi - a \varphi \cos \varphi$$

(a — радиус круга, $\varphi = \angle MOX$).



Фиг. 263



Фиг. 264

Кривая имеет две ветви, симметричные относительно оси OX . Точка возврата

$A(a, 0)$. Длина дуги AM $\frac{1}{2} a \varphi^2$.

Квадратриса Динострата (фиг. 264):

$$x = y \operatorname{ctg} \frac{y}{a};$$

в полярных координатах: $\rho \sin \varphi = a \varphi$.

Асимптоты $y = na\pi$ ($n = \pm 1, \pm 2, \dots$). Вершина $A(a, 0)$. Все остальные точки, для которых $x = a$ — точки перегиба.

ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ КРИВЫЕ

Кривая в пространстве может быть задана как линия пересечения двух поверхностей

$$F(x, y, z) = 0; \quad \Phi(x, y, z) = 0,$$

либо в параметрической форме:

$$x = x(t); \quad y = y(t); \quad z = z(t).$$

В частности, если параметр t совпадает с одной из текущих координат точки на кривой (например $t = x$), то уравнения кривой принимают вид:

$$y = y(x); \quad z = z(x).$$

Иногда удобно в качестве параметра выбрать длину s дуги кривой от некоторой начальной точки A (соответствующей значению $t = t_0$) до текущей точки M

$$\left(s = \int_{t_0}^t \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} dt \right),$$

тогда уравнения кривой имеют вид:

$$x = x(s); \quad y = y(s); \quad z = z(s).$$

Дифференциал дуги кривой выражается формулой

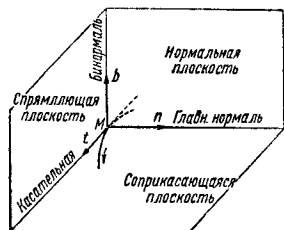
$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}.$$

Сопровождающий трёхгранник

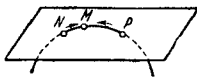
В каждой точке M пространственной кривой, где хотя бы одна из производных $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$ не равна нулю, определяются три взаимно перпендикулярные прямые и три взаимно перпендикулярные плоскости, каждая из которых проходит через две из трёх упомянутых прямых. Эти прямые и плоскости, образующие так называемый сопровождающий трёхгранник (фиг. 265), следующие:

1) касательная — определяется так же, как и для плоской кривой (стр. 194);

2) нормальная плоскость, — перпендикулярная к касательной. Прямые, лежащие в этой плоскости и проходящие через точку M , называются нормальными к кривой;



Фиг. 265



Фиг. 266

3) соприкасающаяся плоскость — предельное положение плоскости, проходящей через точку M и две другие точки кривой N и P , когда $N \rightarrow M$ и $P \rightarrow M$ (фиг. 266);

4) главная нормаль — та из нормалей, которая лежит в соприкасающейся

плоскости (линия пересечения нормальной и соприкасающейся плоскостей);

5) бинормаль — нормаль, перпендикулярная к соприкасающейся плоскости;

6) спрямляющая плоскость — проходящая через касательную и бинормаль.

Положительное направление на касательной устанавливается так же, как и для плоской кривой (стр. 194), и определяется единичным вектором \mathbf{t} (стр. 208); на главной нормали — идёт в сторону вогнутости кривой и определяется единичным вектором \mathbf{n} ; на бинормали определяется единичным вектором $\mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{n}$ (стр. 209).

Если кривая задана в форме

$$F(x, y, z) = 0; \quad \Phi(x, y, z) = 0,$$

то касательная имеет уравнения:

$$\frac{X-x}{\frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial \Phi}{\partial z}} = \frac{Y-y}{\frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial \Phi}{\partial x}} = \frac{Z-z}{\frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial \Phi}{\partial y}},$$

а нормальная плоскость

$$\begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial x} & \frac{\partial \Phi}{\partial y} & \frac{\partial \Phi}{\partial z} \end{vmatrix} = 0,$$

где x, y, z — координаты точки M , а X, Y, Z — текущие координаты на касательной или, соответственно, на нормальной плоскости.

Уравнения элементов сопровождающего трёхгранника, когда кривая задана параметрическими уравнениями, следующие:

$$\frac{X-x}{x'} = \frac{Y-y}{y'} = \frac{Z-z}{z'};$$

нормальная плоскость

$$x'(X-x) + y'(Y-y) + z'(Z-z) = 0;$$

соприкасающаяся плоскость

$$\begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix} = 0,$$

бинормаль

$$\frac{X-x}{y' z''} = \frac{Y-y}{z' x''} = \frac{Z-z}{x' y''},$$

спрямляющая плоскость

$$\begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ x' & y' & z' \\ l & m & n \end{vmatrix} = 0,$$

где

$$l = y' z'' - y'' z',$$

$$m = z' x'' - z'' x',$$

$$n = x' y'' - x'' y';$$

главная нормаль

$$\frac{X-x}{y' z'} = \frac{Y-y}{z' x'} = \frac{Z-z}{x' y'},$$

где x, y, z попрежнему координаты точки M , а X, Y, Z — текущие координаты.

В случае, когда за параметр принята длина дуги s , уравнения главной нормали и спрямляющей плоскости упрощаются:

$$\frac{X-x}{x'} = \frac{Y-y}{y'} = \frac{Z-z}{z'} \quad (\text{главная нормаль});$$

$$x''(X-x) + y''(Y-y) + z''(Z-z) = 0$$

(спрямляющая плоскость).

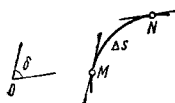
КРИВИЗНА И КРУЧЕНИЕ

Кривизной K кривой в точке M называется предел, к которому стремится отношение угла δ между положительными направлениями касательных к кривой в точках M и N (угол смежности) к длине Δs дуги MN , когда $N \rightarrow M$:

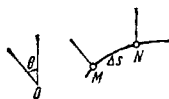
$$K = \lim_{N \rightarrow M} \frac{\delta}{\Delta s}.$$

$$T = \frac{1}{\tau} = -\rho^2 \frac{\begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix}}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^3} = -\frac{\begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix}}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)(x''^2 + y''^2 + z''^2) - (x'x'' + y'y'' + z'z'')^2}.$$

Так как касательные в точках M и N , вообще говоря, не пересекаются, то угол δ измеряется, как угол между прямыми, проходящими через произвольную точку пространства O параллельно этим касательным (фиг. 267).



Фиг. 267



Фиг. 268

Радиусом кривизны ρ называется величина, обратная кривизне $\rho = \frac{1}{K}$.

Если кривая задана параметрическими уравнениями, то

$$K = \frac{1}{\rho} = \frac{\sqrt{(x'^2 + y'^2 + z'^2)(x''^2 + y''^2 + z''^2) - (x'x'' + y'y'' + z'z'')^2}}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^{3/2}}.$$

В частности, если параметром является длина дуги s , то

$$K = \frac{1}{\rho} = \sqrt{x''^2 + y''^2 + z''^2}.$$

Пример. Для винтовой линии (стр. 189)

$$x = a \cos t; \quad y = a \sin t; \quad z = bt,$$

приняв за начальную точку $t = 0$, имеем

$$s = \int_0^t \sqrt{a^2 + b^2} dt = t \sqrt{a^2 + b^2},$$

откуда

$$x = a \cos \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}; \quad y = a \sin \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}};$$

$$z = \frac{bs}{\sqrt{a^2 + b^2}};$$

$$K = \frac{1}{\rho} = \frac{a}{a^2 + b^2} \quad (\text{кривизна постоянна}).$$

Кручением T (второй кривизной) кривой в точке M называется предел, к которому стремится отношение угла θ между положительными направлениями би-нормалей (или, что то же, между соприкасающимися плоскостями) в точках M и N к длине Δs дуги MN , когда $N \rightarrow M$:

$$T = \lim_{N \rightarrow M} \frac{\theta}{\Delta s}.$$

Для измерения угла θ следует из произвольной точки O провести прямые, параллельные упомянутым би-нормальям (фиг. 268).

Радиусом кручения τ называется величина, обратная кручению $\tau = \frac{1}{T}$. Если кривая задана параметрическими уравнениями, то

Если параметром является длина дуги s , то

$$T = \frac{1}{\tau} = -\frac{\begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix}}{x''^2 + y''^2 + z''^2}.$$

Пример. Для винтовой линии

$$T = \frac{1}{\tau} = \frac{b}{a^2 + b^2} \quad (\text{кручение постоянно}).$$

Формулы Серре-Френе. Производные единичных векторов \mathbf{t} , \mathbf{n} и \mathbf{b} по длине дуги s выражаются через эти единичные векторы с помощью радиуса кривизны ρ и радиуса кручения τ посредством формул:

$$\frac{d\mathbf{t}}{ds} = \frac{\mathbf{n}}{\rho}; \quad \frac{d\mathbf{n}}{ds} = \frac{\mathbf{t}}{\rho} - \frac{\mathbf{b}}{\tau}; \quad \frac{d\mathbf{b}}{ds} = -\frac{\mathbf{n}}{\tau}.$$

ПОВЕРХНОСТИ

Неявная форма уравнения поверхности:

$$F(x, y, z) = 0.$$

Параметрическая форма уравнений:

$$x = x(u, v); \quad y = y(u, v); \quad z = z(u, v).$$

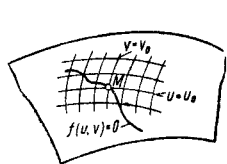
В частности, если в качестве параметров выбраны какие-либо две координаты (например, x и y), то уравнение поверхности имеет вид: $z = z(x, y)$ (явная форма).

Всякая зависимость между параметрами $f(u, v) = 0$ или $u = u(t)$ и $v = v(t)$ вместе с уравнениями поверхности определяет кривую на поверхности; в частности, уравнения $u = \text{const}$ и $v = \text{const}$ определяют на поверхности два семейства так называемых координатных линий, соответствующих данному выбору параметров.

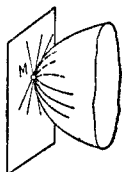
Всякая пара значений $u = u_0$; $v = v_0$ определяет на поверхности некоторую точку $M(u_0, v_0)$ — гауссовы координаты этой точки; через точку M проходят две координатные линии: $u = u_0$ и $v = v_0$ (фиг. 269).

КАСАТЕЛЬНАЯ ПЛОСКОСТЬ И НОРМАЛЬ

Если в точке $M(x, y, z)$ поверхности $F(x, y, z) = 0$ хотя бы одна из производных $F'_x(x, y, z)$; $F'_y(x, y, z)$; $F'_z(x, y, z)$ не обращается в нуль, то касательные ко всем кривым, лежащим на поверхности и проходящим через точку M , лежат в одной плоскости, называемой касательной плоскостью (фиг. 270). Перпендикуляр, проведён-



Фиг. 269



Фиг. 270

ный через точку M к касательной плоскости, называется нормалью к поверхности.

Если r_1 и r_2 — единичные векторы, определяющие положительные направления на координатных линиях $v = \text{const}$ и $u = \text{const}$ в точке M , то положительное направление на нормали к поверхности определяется единичным вектором:

$$N = \frac{r_1 \times r_2}{|r_1 \times r_2|}.$$

Всякая плоскость, проходящая через нормаль к поверхности, называется нормальной плоскостью.

Если в некоторой точке на поверхности $F'_x = F'_y = F'_z = 0$, то касательные к различным кривым, лежащим на поверхности и проходящим через точку M , не лежат в одной плоскости и образуют коническую поверхность.

ПЕРВАЯ КВАДРАТИЧНАЯ ФОРМА

Дифференциал ds дуги, лежащей на поверхности, проходящей через точку $M(u, v)^1$ (линейный элемент поверхности), находится по формуле

$$ds^2 = Edu^2 + 2F du dv + G dv^2,$$

где

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2;$$

$$F = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v};$$

$$G = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2.$$

Эта формула называется первой квадратичной формой поверхности; её коэффициенты зависят только от положения точки M на поверхности.

Длина дуги линии $u = u(t)$; $v = v(t)$, лежащей на поверхности

$$s = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{E \left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2F \frac{du}{dt} \frac{dv}{dt} + G \left(\frac{dv}{dt}\right)^2} dt,$$

где t_0 и t_1 — значения параметра t , соответствующие концам дуги.

Две различные поверхности, имеющие одну и ту же первую квадратичную форму, могут быть наложены одна на другую путём изгибания (т. е. без изменения длин дуг на поверхности).

Элементарная площадь, ограниченная линиями $u = \alpha$; $u + du = \alpha$; $v = \beta$; $v + dv = \beta$ (фиг. 271), находится по формуле

$$dS = \sqrt{EG - F^2} du dv.$$

КРИВИЗНА

Две кривые, проходящие через точку M на поверхности и имеющие в ней общую соприкасающуюся плоскость, имеют в этой точке одинаковую кривизну (в частности одна из этих кривых может быть

¹ u и v — гауссовы координаты точки M .

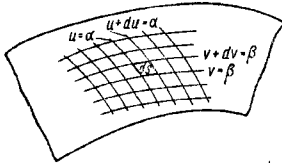
Уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности

Вид уравнения поверхности	Касательная плоскость	Нормаль
Неявный	$\frac{\partial F}{\partial x}(X-x) + \frac{\partial F}{\partial y}(Y-y) + \frac{\partial F}{\partial z}(Z-z) = 0$	$\frac{X-x}{\frac{\partial F}{\partial x}} = \frac{Y-y}{\frac{\partial F}{\partial y}} = \frac{Z-z}{\frac{\partial F}{\partial z}}$
Явный	$Z-z = -\frac{\partial z}{\partial x}(X-x) + \frac{\partial z}{\partial y}(Y-y)$	$\frac{X-x}{\frac{\partial z}{\partial x}} = \frac{Y-y}{\frac{\partial z}{\partial y}} = \frac{Z-z}{-1}$
Параметрический	$\begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} = 0$	$\frac{X-x}{\begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}} = \frac{Y-y}{\begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial v} \end{vmatrix}} = \frac{Z-z}{\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}}$

Примечание. Здесь x, y, z — координаты точки M , а X, Y, Z — текущие координаты.

плоской, т. е. целиком лежать в соприкасающейся плоскости).

Если ρ — радиус кривизны некоторой кривой на поверхности в точке M , а R — радиус кривизны в точке M кривой, полученной в сечении поверхности нормальной



Фиг. 271

плоскостью, проведённой через эту точку и через касательную к данной кривой (нормальное сечение), то $\rho = R \cos \alpha$, где α — угол между положительными направлениями главной нормали к данной кривой и нормали к поверхности; R следует брать положительным, если единичный вектор N нормали к поверхности направлен в сторону вогнутости нормального сечения, и отрицательным — в противном случае.

Нормальные сечения, проходящие через точку M с наименьшим и наибольшим радиусами кривизны, называются главными сечениями, а соответствующие радиусы кривизны R_1 и R_2 — главными радиусами кривизны.

Плоскости главных сечений взаимно перпендикулярны. Радиус кривизны любого нормального сечения выражается через главные радиусы кривизны с помощью формулы Эйлера:

$$\frac{1}{R} = \frac{\cos^2 \omega}{R_1} + \frac{\sin^2 \omega}{R_2},$$

где ω — угол между плоскостью рассматриваемого нормального сечения и плоскостью одного из главных сечений.

Если R_1 и R_2 в точке M одинакового знака, то поверхность (в некоторой окрестности точки M) расположена по одну сторону от касательной плоскости и точка M называется эллиптической (таковы, между прочим, все точки эллипсоида). В частности, если $R_1 = R_2$, то точка M — круговая.

Если R_1 и R_2 противоположных знаков, то поверхность пересекается в точке M касательной плоскостью и точка M — гиперболическая (таковы, в частности, все точки однополостного гиперболоида).

Если $R_1 = \infty$ или $R_2 = \infty$, то для одного из главных сечений точка M является точкой перегиба или это главное сечение — прямая. Точка M в этом случае — параболическая (таковы все точки цилиндра).

Выражение $H = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$ называется средней кривизной поверхности в данной точке; выражение $K = \frac{1}{R_1 R_2}$ — полной или гауссовой кривизной.

Линии кривизны и геодезические линии. Кривые на поверхности, имеющие в каждой точке направление главных сечений, называются линиями кривизны.

Кривые на поверхности, для которых в каждой точке главная нормаль совпадает с нормалью к поверхности, называются геодезическими линиями.

Из всех дуг, лежащих на поверхности и соединяющих две данные точки, наименьшую длину имеет дуга геодезической линии.

Пример. Геодезическими линиями на поверхности круглого цилиндра являются винтовые линии, на плоскости — прямые, на шаровой поверхности — окружности больших кругов.

ВЕКТОРНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

Величины, которые характеризуются одним положительным или отрицательным числом, называются скалярными или скалярами (длина, температура, масса, работа и т. д.). Величины, для определения которых необходимо знать размеры и их направление в пространстве, называются векторными или векторами (сила, скорость, ускорение и т. д.). Геометрически векторная величина изображается направленным отрезком AB и обозначается $AB = a$ (фиг. 272). Точка A называется началом (точкой приложения), а B — концом вектора. Длина вектора a обозначается через $|a|$ или a . Она называется также его модулем. Прямая, по которой направлен вектор, называется линией действия или носителем вектора.

Различают следующие векторы:

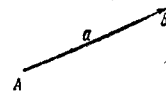
1) свободные, которые могут быть перенесены параллельно самим себе так, чтобы начало вектора совпало с любой точкой пространства (например, скорость поступательного движения твёрдого тела);

2) скользящие, которые могут перемещаться только вдоль линии своего действия (например, сила в твёрдом теле);

3) неподвижные — связанные с точкой приложения (например, скорость движения частицы жидкости в движущемся потоке).

Нуль-вектор (0) — вектор, у которого начало и конец совпадают; его длина равна нулю, а направление неопределённое.

Всё дальнейшее относится к свободным векторам и поэтому два вектора считаются равными ($a = b$), если равны их длины $|a| = |b|$ и они одинаково направлены; векторы с параллельными линиями действия называются коллинеарными, при этом, если их направления совпадают, они называются также параллельными, если не совпадают — антипараллельными. Векторы называются взаимно противоположными, если они равны по длине и антипараллельны: $\overline{AB} = a$,



Фиг. 272

$\overline{BA} = -a$. Векторы, расположенные в одной или в параллельных плоскостях, называются компланарными.

Ортом или единичным вектором вектора a называется вектор, совпадающий с ним по направлению и имеющий длину, равную единице (обозначение: a^0).

Орты положительных координатных осей обозначаются через i, j, k .

Проекции вектора a на оси прямоугольной прямолинейной системы координат¹ (фиг. 273) связаны с длиной вектора и его направляющими косинусами соотношениями:

$$a_x = |a| \cos(\widehat{a, x});$$

$$a_y = |a| \cos(\widehat{a, y});$$

$$a_z = |a| \cos(\widehat{a, z}).$$

Вектор вполне определен тремя скалярами—своими проекциями на оси координат.

Проекции a_x, a_y, a_z называются также координатами вектора в прямоугольной системе $OXYZ$.

Если x_1, y_1, z_1 — координаты начала вектора, а x_2, y_2, z_2 — координаты его конца, то $a_x = x_2 - x_1, a_y = y_2 - y_1, a_z = z_2 - z_1$.

Длина вектора a и его направляющие косинусы определяются через проекции вектора по формулам:

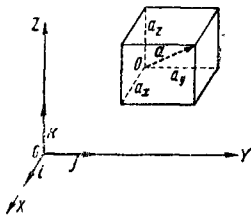
$$|a| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2};$$

$$\cos(\widehat{a, x}) = \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}};$$

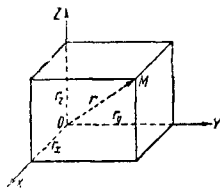
$$\cos(\widehat{a, y}) = \frac{a_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}};$$

$$\cos(\widehat{a, z}) = \frac{a_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}.$$

Вектор $OM = r$ называется радиусом-вектором точки M , если начало его совпадает с началом координат, а конец с



Фиг. 273



Фиг. 274

точкой $M(x, y, z)$; при этом проекции радиуса-вектора r (фиг. 274) совпадают с координатами точки M :

$$r_x = x; r_y = y; r_z = z.$$

Суммой двух векторов $a = \overline{AB}$ и $b = \overline{BC}$ называется вектор $c = \overline{AC}$ (фиг. 275), сое-

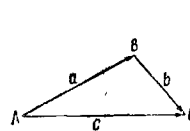
диняющий начало A первого слагаемого вектора a с концом C второго слагаемого b :

$$c = a + b.$$

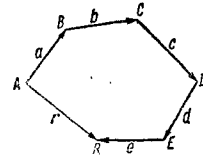
Модуль вектора-суммы связан с модулями векторов-слагаемых соотношением

$$c^2 = a^2 + b^2 + 2ab \cos(\widehat{a, b}).$$

Понятие суммы векторов (геометрической суммы) может быть обобщено и на случай любого конечного числа слагаемых.



Фиг. 275



Фиг. 276

Сумма векторов a, b, \dots, e (фиг. 276) есть вектор $r = \overline{AR}$, представляющий собой замыкающую ломаной $ABC \dots R$, составленной из векторов-слагаемых

$$r = a + b + c + \dots + e.$$

Векторная сумма обладает следующими двумя основными свойствами:

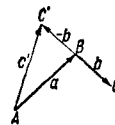
1) свойством переместительности (коммутативности)

$$a + b = b + a;$$

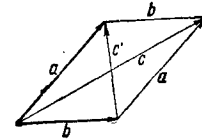
2) свойством сочетательности (ассоциативности)

$$(a + b) + c = a + (b + c).$$

Разностью двух векторов $a = \overline{AB}$ и $b = \overline{BC}$ (фиг. 277) называется вектор $c' = \overline{AC'}$, соединяющий начало A вектора a с



Фиг. 277



Фиг. 278

концом C' вектора $-b$, противоположного вектору b ($BC' = BC$). Эта разность является суммой векторов a и $-b$:

$$c = a - b = a + (-b).$$

Сумма и разность двух векторов a и b (фиг. 278) могут быть получены, как два вектора-диагонали параллелограмма c и c' , построенного на векторах a и b .

Длины вектора-суммы и вектора-разности двух векторов связаны с длинами составляющих векторов неравенствами:

$$|a| - |b| \leq |a \pm b| \leq |a| + |b|.$$

Произведение скаляра m на вектор a есть вектор, коллинеарный с a , имеющий длину $|m| \cdot |a|$ и направление, совпадающее с a при $m > 0$ и противоположное a при $m < 0$.

Если вектор b коллинеарен вектору a , то $b = m a$.

Если векторы a, b и c компланарны, то один из них является линейной комбинацией

¹ Проекции положительны или отрицательны в зависимости от того, совпадают ли их направления с положительными направлениями соответствующих координатных осей или нет.

ей двух других, т. е. $c = ma + nb$ (m и n — скаляры).

Всякий вектор a выражается через свой единичный вектор a^0 следующим образом:

$$a = |a| a^0.$$

Выражение вектора a через орты координатных осей:

$$a = a_x i + a_y j + a_z k,$$

где a_x, a_y, a_z — проекции вектора на координатные оси.

Векторы $a_x i, a_y j, a_z k$ называются составляющими, или компонентами, вектора a по координатным осям.

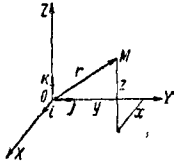
В частности, для радиуса-вектора r точки $M(x, y, z)$ (фиг. 279) имеем:

$$r = xi + yj + zk.$$

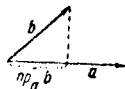
Основные свойства:

$$m a = a m; \quad m n a = n m a; \quad (m + n) a = m a + n a; \\ m(a + b) = m a + m b.$$

Координаты вектора-суммы и вектора-разности двух векторов равны соответствен-



Фиг. 279



Фиг. 280

но сумме и разности координат составляющих векторов, т. е. если $c = a \pm b$, то:

$$c_x = a_x \pm b_x; \quad c_y = a_y \pm b_y; \quad c_z = a_z \pm b_z.$$

Скалярное (внутреннее) произведение двух векторов a и b [обозначение: (a, b) или ab] есть величина скалярная, равная произведению длин векторов-сомножителей на косинус угла между ними или, иначе, равная произведению длины одного из векторов-сомножителей на проекцию второго (фиг. 280) на направление первого:

$$(a, b) = ab = |a| |b| \cos(\widehat{a, b}) = \\ = |a| np_a b = |b| np_b a.$$

Скалярное произведение двух векторов обладает следующими свойствами:

- 1) $ab = ba$;
- 2) $m \cdot ab = ma \cdot b = a \cdot mb$;
- 3) $a(b + c) = ab + ac$.

Скалярные произведения координатных ортов дают

$$ii = jj = kk = 1; \quad ij = jk = ki = 0.$$

Выражение скалярного произведения двух векторов через координаты векторов-сомножителей:

$$ab = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

Угол между векторами a и b определяется по формуле

$$\cos(\widehat{a, b}) = \frac{ab}{|a| |b|} = \\ = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}.$$

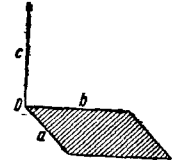
Условие перпендикулярности двух векторов

$$ab = 0$$

или в координатах

$$a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0.$$

Векторное (внешнее) произведение двух векторов a и b (обозначение: $[a, b]$ или $a \times b$) есть вектор c (фиг. 281) с длиной, численно равной площади параллелограмма, построенного на векторах-сомножителях, и направленный перпендикулярно к плоскости параллелограмма таким образом, чтобы векторы a, b и c образовали правую связку, т. е. чтобы кратчайший поворот от a к b , если смотреть с конца вектора c , совершался против направления движения часовой стрелки.



Фиг. 281

Длина векторного произведения связана с длинами векторов-сомножителей равенством

$$|c| = |a \times b| = |a| |b| \sin(\widehat{a, b}).$$

При перестановке местами векторов-сомножителей векторное произведение изменяет знак на противоположный

$$b \times a = -a \times b.$$

Векторное произведение обладает свойствами ассоциативности и дистрибутивности

$$m(a \times b) = ma \times b = a \times mb; \\ a \times (b + c) = a \times b + a \times c.$$

Векторные произведения координатных ортов дают:

$$i \times i = j \times j = k \times k = 0; \\ i \times j = k; \quad j \times k = i; \quad k \times i = j; \\ j \times i = -k; \quad k \times j = -i; \quad i \times k = -j.$$

Выражение векторного произведения через координаты векторов-сомножителей

$$c = a \times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

и

$$c_x = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}; \quad c_y = \begin{vmatrix} a_z & a_x \\ b_z & b_x \end{vmatrix}; \quad c_z = \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}.$$

Площадь параллелограмма, построенного на векторах a и b , может быть вычислена по формуле

$$S = |a \times b| =$$

$$= \sqrt{\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_z & a_x \\ b_z & b_x \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}^2}.$$

Условие коллинеарности двух векторов:

$$a \times b = 0,$$

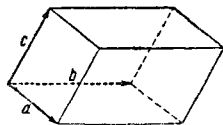
а в координатах:

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = 0.$$

или

$$\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}.$$

Смешанное (векторно-скалярное) произведение трёх векторов a , b и c (фиг. 282) [обозначение: $(a \times b) \cdot c$ или abc] есть скаляр, численно равный



Фиг. 282

объёму параллелепипеда, построенного на векторах a , b и c , как на рёбрах. Смешанное произведение положительно, если векторы a , b и c образуют правую связку, и отрицательно, если они образуют левую связку.

Смешанное произведение трёх векторов при перестановке двух сомножителей изменяет знак; при циклической (круговой) перестановке всех трёх сомножителей не изменяет знака:

$$abc = bca = cab = -acb = -bac = -cba.$$

Выражение смешанного произведения трёх векторов через координаты векторов-сомножителей:

$$abc = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

По этой формуле производится вычисление объёма параллелепипеда, построенного на векторах a , b , c .

Условие компланарности трёх векторов:

$$abc = 0$$

или в координатах:

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 0.$$

Двойное векторное произведение трёх векторов [обозначение: $a \times (b \times c)$] есть вектор, компланарный векторам b и c ; он может быть вычислен по формуле

$$a \times (b \times c) = b(ac) - c(ab).$$

ДИФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ВЕКТОР-ФУНКЦИИ СКАЛЯРНОГО АРГУМЕНТА

Если вектор a изменяется по длине и направлению в зависимости от некоторого скалярного аргумента t , то он называется вектор-функцией скалярного аргумента

$$a = a(t).$$

Вектор-функция $a = a(t)$ может быть определена, если заданы три скалярные функции — её проекции на координатные оси:

$$a_x = a_x(t); \quad a_y = a_y(t); \quad a_z = a_z(t).$$

В этом случае выражение вектор-функции в координатах будет

$$a = a_x(t) i + a_y(t) j + a_z(t) k.$$

Если за начало переменного вектора $r = r(t)$ выбрать некоторую неподвижную точку O , то конец вектор-функции $r = r(t)$ опишет кривую в пространстве (фиг. 283), называемую **годографом** вектора r .

Уравнение годографа в координатной (параметрической) форме:

$$x = x(t); \quad y = y(t); \quad z = z(t),$$

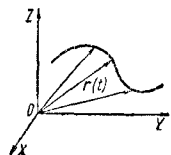
где $r = xi + yj + zk$.

Производная вектор-функции $a = a(t)$ по скалярному аргументу t представляет собой новую вектор-функцию $\frac{da(t)}{dt}$ и определяется по формуле

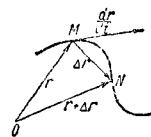
$$\begin{aligned} \frac{da(t)}{dt} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{a(t + \Delta t) - a(t)}{\Delta t} = \\ &= a'_x(t) i + a'_y(t) j + a'_z(t) k. \end{aligned}$$

Производная радиуса-вектора $\frac{dr(t)}{dt} =$

$= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta r(t)}{\Delta t}$ представляет собой вектор (фиг. 284), касательный к годографу в соответствующей точке.



Фиг. 283



Фиг. 284

Длина вектора $\frac{dr}{dt}$ зависит от выбора параметра t ; если t есть длина дуги годографа, отсчитываемой от некоторой начальной точки годографа до точки M , то длина $\frac{dr}{dt}$ равна единице.

Основные правила дифференцирования вектор-функции скалярного аргумента:

$$1) \frac{d}{dt}(a + b - c) = \frac{da}{dt} + \frac{db}{dt} - \frac{dc}{dt};$$

$$2) \frac{d(\varphi a)}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} a + \varphi \frac{da}{dt},$$

где $\varphi = \varphi(t)$ — скалярная функция от t ;

$$3) \frac{d(ab)}{dt} = \frac{da}{dt} b + a \frac{db}{dt};$$

$$4) \frac{d}{dt}(a \times b) = \frac{da}{dt} \times b + a \times \frac{db}{dt};$$

$$5) \frac{d}{dt} a[\varphi(t)] = \frac{da}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt}.$$

Для единичного вектора и вообще для вектора r постоянной длины имеет место соотношение

$$r \frac{dr}{dt} = 0,$$

которое показывает, что касательная к годографу перпендикулярна к радиусу-вектору; в этом случае годограф представляет собой кривую на поверхности сферы.

ТЕОРИЯ ПОЛЯ

Скалярная функция $f(x, y, z)$, определённая во всех точках пространства, может рассматриваться, как функция точки $P(x, y, z)$ этого пространства [обозначение: $f(P)$] и определяет в пространстве некоторое скалярное поле. Поверхности $f(x, y, z) = c$ ($c = \text{const}$) называются поверхностями уровня данного скалярного поля (в случае функции двух переменных — функции точки на плоскости — кривые $f(x, y) = c$ — линии уровня).

Через всякую точку $M(x_0, y_0, z_0)$ проходит поверхность уровня, для которой значение c определяется равенством

$$c = f(M) = f(x_0, y_0, z_0).$$

Производная функции $f(x, y, z)$ в точке M по всякому направлению (стр. 133), лежащему в касательной плоскости к поверхности уровня [по направлению касательной к линии уровня для функции $f(x, y)$], проходящей через точку M , равна нулю. Наибольшее (по абсолютной величине) значение имеет производная по направлению нормали к поверхности уровня.

Градиентом функции $f(x, y, z)$ [обозначение: $\text{grad } f(x, y, z)$] в данной точке $M(x, y, z)$ называется вектор, направленный по нормали n к поверхности уровня [для функции $f(x, y)$ к линии уровня], проходящей через эту точку, в сторону возрастания функции, и по длине равный производной данной функции по этому направлению:

$$|\text{grad } f(x, y, z)| = \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial n}.$$

Таким образом, при помощи скалярного поля функции $f(x, y, z)$ определяется векторное поле градиента этой функции.

Если l — произвольное направление, выходящее из точки M , то производная $\frac{\partial f}{\partial l}$ равна проекции градиента на направление l : $\frac{\partial f}{\partial l} = \frac{\partial f}{\partial n} \cos(l, n) = |\text{grad } f| \cos(l, n) = \text{grad}_l f$.

В частности

$$\text{grad}_x f = \frac{\partial f}{\partial x}; \quad \text{grad}_y f = \frac{\partial f}{\partial y}; \quad \text{grad}_z f = \frac{\partial f}{\partial z}.$$

Пример. Построить поле градиента функции

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2.$$

Поверхности уровня этой функции $x^2 + y^2 + z^2 = c$ — сферические поверхности с центром в начале координат.

Далее

$$\text{grad}_x f = 2x, \quad \text{grad}_y f = 2y, \quad \text{grad}_z f = 2z$$

и

$$|\text{grad } f| = 2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Таким образом, градиент в каждой точке направлен по радиусу-вектору этой точки (нормально к поверхности сферы $x^2 + y^2 + z^2 = c$) и по модулю равен удвоенному радиусу-вектору.

Если дано векторное поле $A(x, y, z)$, то в каждой точке (x, y, z) известны скалярные функции $A_x(x, y, z)$; $A_y(x, y, z)$; $A_z(x, y, z)$ — проекции вектора A на координатные оси (обратно: A_x, A_y, A_z определяют некоторое векторное поле).

Дивергенцией вектора $A(x, y, z)$ (обозначение: $\text{div } A$) называется скаляр:

$$\frac{\partial A_x(x, y, z)}{\partial x} + \frac{\partial A_y(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial A_z(x, y, z)}{\partial z}$$

(для вектор-функции $A(x, y)$, зависящей от двух переменных,

$$\text{div } A = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y}).$$

Векторное поле $A(x, y, z)$ определяет скалярное поле дивергенции вектора A .

Вихрем вектора $A(x, y, z)$ называется такой вектор $B(x, y, z)$ (обозначение: $B = \text{rot } A$ или $B = \text{curl } A$), проекции которого на координатные оси B_x, B_y, B_z выражаются через проекции вектора A при помощи равенств:

$$B_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}; \quad B_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x};$$

$$B_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}.$$

В случае вектор-функции $A(x, y)$, зависящей от двух аргументов:

$$B_x = B_y = 0, \quad B_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \quad \text{и вихрь } B =$$

$= \text{rot } A$ направлен всегда по оси OZ ; в этом случае иногда удобно вихрь считать скаляром

$$B = B_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}.$$

Векторное поле A определяет, таким образом, другое векторное поле $\text{rot } A$.

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ СООТНОШЕНИЯ

Циркуляцией вектора $A(x, y, z)$ (циркуляцией векторного поля) по замкнутому пространственному контуру (C) называется криволинейный интеграл

$$\int_{(C)} A_s ds,$$

где ds — дифференциал дуги контура (C) , а A_s — проекция вектора A на положительное направление касательной к контуру (C) .

Если ds — вектор, длина которого равна дифференциалу дуги контура (C) и который направлен по касательной к контуру (C) в положительную сторону (dx, dy, dz — проекции вектора ds на координатные оси), то

$$A_s ds = A dx + B dy + C dz.$$

Циркуляция вектора A по контуру (C) может быть записана в форме

$$\int_{(C)} A ds \quad \text{или} \quad \int_{(C)} A_x dx + A_y dy + A_z dz$$

[для плоского векторного поля $A(x, y)$ циркуляция выражается при помощи криволинейного интеграла

$$\int_{(C)} A_s ds = \int_{(C)} A ds = \int_{(C)} A_x dx + A_y dy].$$

Потоком вектора $A(x, y, z)$ (потоком векторного поля) через поверхность (S) называется интеграл по поверхности

$$\iint_{(S)} A_n dS, \quad 14^*$$

где A_n — проекция вектора A на выбранное на нормали к поверхности направление n .

Если dS вектор, длина которого численно равна элементарной площади dS поверхности и который направлен по нормали к поверхности в положительную сторону, то $A_n dS = A dS$ и поток вектора через поверхность можно записать в виде

$$\iint_{(S)} A dS$$

или
$$\iint_{(S)} [A_x \cos(n, x) + A_y \cos(n, y) + A_z \cos(n, z)] dS.$$

В случае, если вектор $A(x, y)$ определяет плоское поле, потоком поля через дугу (C) называется криволинейный интеграл

$$\begin{aligned} \int_{(C)} A_n ds &= \int_{(C)} A dn = \\ &= \int_{(C)} [A_x \cos(n, x) + A_y \cos(n, y)] ds = \\ &= \int_{(C)} A_x dy - A_y dx, \end{aligned}$$

где dn — вектор, длина которого равна ds и который направлен по нормали к контуру в положительную сторону.

Формулы Стокса (для плоского поля — формула Грина) и Остроградского связывают циркуляцию и поток вектора с вихрем и дивергенцией:

$$\int_{(C)} A_s ds = \iint_{(S)} \operatorname{rot}_n A dS,$$

где (C) — замкнутый контур, ограничивающий поверхность (S) , а n — внешняя нормаль к поверхности (формула Стокса);

$$\iint_{(S)} A_n dS = \iiint_{(V)} \operatorname{div} A dv,$$

где (S) — замкнутая поверхность, ограничивающая область (V) , а n — внешняя нормаль к поверхности (S) (формула Остроградского).

Следующие векторные равенства связывают скалярную функцию f с её градиентом и вектор A с его вихрем:

$$\begin{aligned} \iint_{(S)} f dS &= \iiint_{(V)} \operatorname{grad} f dv; \\ \iint_{(S)} A \times dS &= - \iiint_{(V)} \operatorname{rot} A dv, \end{aligned}$$

где (S) — замкнутая поверхность, а (V) — объём, ею ограниченный.

Поле вектора A называется потенциальным, или безвихревым, если вектор A является градиентом некоторой

функции $f(x, y, z)$, называемой потенциальной функцией: $A = \operatorname{grad} f$; в этом случае

$$A_x = \frac{\partial f}{\partial x}; \quad A_y = \frac{\partial f}{\partial y}; \quad A_z = \frac{\partial f}{\partial z}$$

и выражение

$$A_x dx + A_y dy + A_z dz = df$$

является полным дифференциалом; для этого необходимо и достаточно, чтобы

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} &= 0; \quad \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} = 0; \\ \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} &= 0, \end{aligned}$$

т. е. чтобы вихрь поля $\operatorname{rot} A$ равнялся нулю в каждой точке. В потенциальном поле циркуляция вектора по любому замкнутому контуру (C) равна нулю:

$$\int_{(C)} A_s ds = 0.$$

Поле вектора A называется соленоидальным, если в каждой точке поля

$$\operatorname{div} A = 0,$$

т. е.

$$\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = 0;$$

в этом случае поток вектора через любую замкнутую поверхность равен нулю.

Если поле является одновременно потенциальным и соленоидальным, то $\operatorname{div} \operatorname{grad} f = 0$ (f — потенциальная функция) и потенциальная функция является гармонической, т. е. удовлетворяет уравнению Лапласа:

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$$

($\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ — оператор Лапласа).

Для записи формул векторного анализа удобно пользоваться оператором Гамильтона ∇ (набла), где ∇ — символический вектор:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} k.$$

Так, например,

$$\begin{aligned} \operatorname{grad} f &= \nabla f; \quad \operatorname{div} A = \nabla A, \\ \operatorname{rot} A &= \nabla \times A; \quad \nabla \nabla = \Delta. \end{aligned}$$

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

РЯДЫ С КОМПЛЕКСНЫМИ ЧЛЕНАМИ

Ряд с комплексными членами

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots \quad (1)$$

называется сходящимся, если существует конечный предел¹ его частной суммы

¹ Определение предела то же, что и в случае действительных величин (стр. 128); в этом определении следует лишь понятие абсолютной величины заменить понятием модуля.

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

при $n \rightarrow \infty$.

Этот предел называется суммой ряда:

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n.$$

Если

$$a_n = \alpha_n + i\beta_n \quad (\alpha_n \text{ и } \beta_n \text{ — действительные числа}),$$

то ряд (1) сходится тогда и только тогда, когда сходятся ряды:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n + \dots, \\ \beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_n + \dots$$

Если сходится ряд

$$|a_1| + |a_2| + \dots + |a_n| + \dots,$$

членами которого являются модули соответствующих членов ряда (1), то ряд (1) тоже сходится и называется абсолютно сходящимся рядом (стр. 158).

Правила действия над абсолютно сходящимися рядами с действительными членами распространяются и на тот случай, когда члены ряда комплексные.

Областью сходимости степенного ряда

$$c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots + c_n z^n + \dots$$

является круг (к р у г с х о д и м о с т и) $|z| < \rho$ с центром в точке $z = 0$. Радиус этого круга (р а д и у с с х о д и м о с т и) определяется по формуле

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}}, \quad (2)$$

если этот предел существует.

Ряд сходится абсолютно во всякой точке внутри круга сходимости и равномерно (стр. 159) во всякой области, лежащей целиком внутри круга сходимости.

Радиус сходимости ряда

$$c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \dots + c_n(z-a)^n + \dots$$

определяется формулой (2), центр круга сходимости находится в точке $z = a$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОСНОВНЫХ ТРАНСЦЕНДЕНТНЫХ ФУНКЦИЙ

Показательная и тригонометрические функции определяются при помощи рядов, сходящихся во всей плоскости комплексного аргумента z (см. стр. 161).

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \dots;$$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots;$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots$$

Показательная функция связана с тригонометрическими функциями при помощи формулы Эйлера:

$$e^{zt} = \cos z + i \sin z.$$

Показательная функция—периодическая—с периодом $2\pi i$

$$e^{z+2k\pi i} = e^z \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

В частности:

$$e^{2k\pi i} = 1; \quad e^{(2k+1)\pi i} = -1;$$

$$e^{\frac{\pi}{2}i+2k\pi i} = i; \quad e^{\frac{3\pi}{2}i+2k\pi i} = -i.$$

Логарифмическая функция определяется как обратная показательной: если

$$z = e^w,$$

то

$$w = \ln z.$$

Логарифмическая функция многозначна:

$$\ln z = \ln |z| + i \arg z + 2k\pi i \\ (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots),$$

где $\ln |z|$ — действительное число.

Главные значения логарифма принято определять условиями:

$$k = 0; \quad -\pi < \arg z \leq \pi.$$

При любом основании a , по определению,

$$a^z = e^{z \ln a}.$$

Соотношения между показательной, тригонометрическими и гиперболическими функциями, а также между логарифмической, обратными тригонометрическими и обратными гиперболическими функциями приведены на стр. 126. Эти соотношения справедливы для любых комплексных значений аргумента.

ДИФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО АРГУМЕНТА

Производная функции $w = f(z)$

$$\frac{dw}{dz} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

существует, если выполнены условия Коши—Римана:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x},$$

где u и v — действительная и мнимая части функции w , а x и y — действительная и мнимая части аргумента z

$$(w = u + iv, \quad z = x + iy).$$

Пример:

$$w = e^z = e^x + iy = e^x (\cos y + i \sin y);$$

$$u = e^x \cos y, \quad v = e^x \sin y.$$

Здесь

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y = \frac{\partial v}{\partial y};$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \sin y = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Условия Коши—Римана выполнены.

Формулы для дифференцирования элементарных функций — те же, что и в случае действительного аргумента.

Функция, дифференцируемая во всех точках некоторой области, называется аналитической в этой области. Производная любого порядка от аналитической функции также является функцией аналитической. Сумма степенного ряда является аналитической функцией внутри круга сходимости. Действительная часть $u(x, y)$ и мнимая часть $v(x, y)$ функции, аналитической в некоторой области, являются в этой области гармоническими функциями (стр. 176 и 212).

Если существует такая окрестность точки a (т. е. область, для которой эта точка является внутренней), в которой функция $f(z)$ — аналитическая, то функция $f(z)$ называется аналитической в точке a , а точка a — правильной точкой функции $f(z)$; в противном случае точка a называется особой точкой функции $f(z)$.

Точка $z = \infty$ (бесконечно удалённая точка) называется правильной или особой точкой функции $f(z)$ в зависимости от того, является ли точка $z = 0$ правильной или особой для функции $f\left(\frac{1}{z}\right)$. Окрестностью точки $z = \infty$ называется область, лежащая вне круга достаточно большого радиуса.

ВАЖНЕЙШИЕ СВОЙСТВА АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Если функция $f(z)$ — аналитическая в некоторой области, то точки, в которых значение $|f(z)|$ наибольшее (по сравнению со значениями $|f(z)|$ в остальных точках области), находятся на границе этой области (принцип максимума модуля).

Если функция $f(z)$ — аналитическая для любых конечных значений z (во всей плоскости) и существует такая постоянная M , что всюду



то $|f(z)| < M$,
то $f(z) = \text{const}$ (теорема Лиувилля).

Если две функции $f(z)$ и $\varphi(z)$, аналитические в некоторой области G , имеют одинаковые значения в точках $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$, причём $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ и точка a тоже находится в области G (фиг. 285), то во всей области G имеет место тождество $f(z) \equiv \varphi(z)$ (теорема единственности).

ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПО КОМПЛЕКСНОМУ АРГУМЕНТУ

Криволинейным интегралом функции $f(z)$ по дуге C называется число, определяемое следующим образом.

Дуга C произвольным образом разделяется на элементарные дуги (фиг. 286) при помощи точек, изображающих комплексные числа $z_0, z_1, z_2, \dots, z_n$ (z_0 — начальная, z_n — конечная точки данной дуги); на каждой элементарной дуге с конечными точками z_k и z_{k+1} выбирается по одной точке ζ_k ; составляется сумма

$$f(\zeta_1) \Delta z_1 + f(\zeta_2) \Delta z_2 + \dots + f(\zeta_n) \Delta z_n,$$

где

$$\Delta z_1 = z_1 - z_0, \Delta z_2 = z_2 - z_1, \dots, \Delta z_n = z_n - z_{n-1},$$

и вычисляется предел этой суммы при условии, что наибольшая из величин $|\Delta z_k|$ стремится к нулю:

$$\int_C f(z) dz = \lim_{\max |\Delta z_k| \rightarrow 0} [f(\zeta_1) \Delta z_1 + f(\zeta_2) \Delta z_2 + \dots + f(\zeta_n) \Delta z_n].$$

Основные свойства криволинейного интеграла:

1. Если дуги C и \bar{C} совпадают, но имеют противоположные направления, то

$$\int_C f(z) dz = - \int_{\bar{C}} f(z) dz.$$

2. Если дуга C состоит из дуг C_1 и C_2 , то

$$\int_C f(z) dz = \int_{C_1} f(z) dz + \int_{C_2} f(z) dz.$$

3. Если $|f(z)| \leq M$ во всех точках дуги C , то

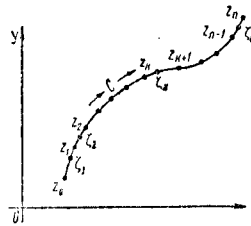
$$\left| \int_C f(z) dz \right| \leq ML,$$

где l — длина дуги C .

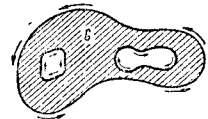
Если C — замкнутый кусочно-гладкий контур (т. е. в каждой точке контура, за исключением конечного числа угловых точек, имеется определённая касательная) и если функция $f(z)$ — аналитическая как на контуре C , так и в области G , ограниченной этим контуром, то

$$\int_C f(z) dz = 0 \quad (\text{теорема Коши}).$$

В случае, когда (фиг. 287) область G многосвязна (стр. 154), под C следует пони-



Фиг. 286



Фиг. 287

мать совокупность контуров, образующих границу этой области, причём на каждом из этих контуров направление обхода выбирается так, чтобы область G оставалась слева (положительное направление обхода).

Из теоремы Коши следует, что если $f(z)$ — функция, аналитическая в односвязной области G , а l — дуга, расположенная в этой области и соединяющая точки z_0 и z , то интеграл

$$\int_l f(z) dz = \int_{z_0}^z f(z) dz$$

не зависит от вида дуги l . Если

$$F'(z) = f(z),$$

то

$$\int_{z_0}^z f(z) dz = F(z) - F(z_0).$$

Если функция $f(z)$ — аналитическая на замкнутом контуре C и в области G , ограниченной этим контуром, то значение $f(z)$ в любой точке z области G выражается через значения этой функции на контуре C при помощи формулы Коши

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(t) dt}{t - z}.$$

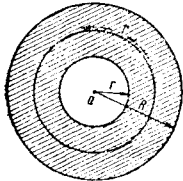
В случае, когда область G многосвязна, под C следует, как и выше, понимать совокупность контуров (фиг. 287), составляющих границу области G .

РАЗЛОЖЕНИЕ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ В СТЕПЕННОЙ РЯД

Если функция $f(z)$ — аналитическая и однозначная в окрестности точки a , то в круге $|z-a| < \rho$ с центром в точке a имеет место разложение $f(z)$ в ряд Тейлора

$$f(z) = c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \dots + c_n(z-a)^n + \dots$$

Радиус ρ круга сходимости определяется по формуле (2) (стр. 213) и равен расстоянию точки a до ближайшей особой точки функции $f(z)$.



Фиг. 288

Коэффициенты ряда Тейлора могут быть вычислены либо так же, как было указано для функции действительного аргумента (стр. 160):

$$c_0 = f(a), c_1 = \frac{f'(a)}{1!}, \dots, c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}, \dots$$

либо по формулам

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{(C)} \frac{f(t) dt}{(t-a)^{n+1}},$$

где C — любой контур, лежащий внутри круга сходимости и окружающий точку a , обходимый в положительном направлении (т. е. в направлении против хода часовой стрелки).

Если

$$|f(z)| \leq M$$

в круге сходимости, то

$$|c_n| \leq \frac{M}{\rho^n},$$

где ρ — радиус сходимости.

Точка a называется нулём порядка m функции $f(z)$, если

$$c_0 = c_1 = \dots = c_{m-1} = 0; c_m \neq 0.$$

Функция $f(z)$, аналитическая в круговом кольце (фиг. 288)

$$r < |z-a| < R,$$

разлагается в этом кольце в ряд Лорана:

$$f(z) = c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \dots + c_n(z-a)^n + \dots + \frac{b_1}{z-a} + \frac{b_2}{(z-a)^2} + \dots + \frac{b_n}{(z-a)^n} + \dots$$

Коэффициенты ряда Лорана вычисляются по формулам

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{(V)} \frac{f(t) dt}{(t-a)^{n+1}}, \quad (3)$$

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{(V)} f(t) (t-a)^{n-1} dt,$$

где Γ — любой замкнутый контур, содержащий окружность $|z|=r$ и расположенный в данном кольце.

Ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$$

называется правильной частью, а ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n(z-a)^{-n}$$

главной частью ряда Лорана.

Если a — изолированная особая точка функции $f(z)$ (т. е. если в некоторой окрестности точки a нет других особых точек этой функции), то $f(z)$ можно разложить в ряд Лорана, сходящийся во всех точках внутри некоторого круга с центром в точке a , кроме самой точки a (разложение функции в окрестности изолированной особой точки).

Радиус этого круга равен расстоянию точки a до ближайшей к ней особой точки функции $f(z)$, а коэффициенты ряда вычисляются по формулам (3), где Γ — любой замкнутый контур, лежащий внутри круга сходимости и окружающий точку a .

В случае, когда точка a — правильная,

$$b_1 = b_2 = \dots = b_n = \dots = 0$$

и ряд Лорана превращается в ряд Тейлора.

Разложение в ряд Лорана функции $f(z)$, аналитической при $|z| > R$, в окрестности бесконечно удалённой точки имеет вид:

$$f(z) = c_0 + c_1z + c_2z^2 + \dots + c_nz^n + \dots + \frac{b_1}{z} + \frac{b_2}{z^2} + \dots + \frac{b_n}{z^n} + \dots$$

Коэффициенты этого ряда вычисляются по формулам (3), где Γ — любой контур, содержащий окружность $|z|=R$.

Ряд $c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^{-n}$ называется при этом

правильной частью, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n$ — главной частью разложения.

Бесконечно удалённая точка — правильная, если

$$c_1 = c_2 = \dots = c_n = \dots = 0.$$

ОСОБЫЕ ТОЧКИ

Изолированная особая точка $z=a$ функции $f(z)$ называется полюсом, если главная часть разложения $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности этой точки содержит лишь конечное число отличных от нуля членов; в противном случае точка $z=a$ называется существенно особой точкой.

Разложение $f(z)$ в ряд в окрестности полюса имеет вид

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n + \frac{b_1}{z-a} + \frac{b_2}{(z-a)^2} + \dots + \frac{b_m}{(z-a)^m};$$

где $b_m \neq 0$.

Если $m=1$, полюс называется простым; если $m>1$, полюс — кратный; число m — порядок полюса.

Разложение функции $f(z)$, для которой бесконечно удалённая точка является полюсом порядка m в окрестности этой точки, имеет вид

$$f(z) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^{-n} + c_1 z + c_2 z^2 + \dots + c_m z^m,$$

где $c_m \neq 0$.

Если точка $z=a$ — полюс функции $f(z)$, то

$$\lim_{z \rightarrow a} f(z) = \infty.$$

Точка $z=a$, являющаяся нулём порядка m функции $f(z)$, является в то же время полюсом порядка m функции $\frac{1}{f(z)}$; если точка $z=a$ — полюс порядка m функции $f(z)$, то она является в то же время нулём порядка m функции $\frac{1}{f(z)}$.

В сколь угодно малой окрестности существенно особой точки функция $f(z)$ принимает значения, сколь угодно близкие к любому числу (теорема Вейерштрасса).

Если C — замкнутый контур, обходимый в положительном направлении, а функция $f(z)$ — аналитическая на контуре C и во всех точках внутри этого контура, кроме точки $z=a$, то значение

$$\operatorname{res}_a f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(C)} f(z) dz$$

называется вычетом функции $f(z)$ относительно особой точки a .

В частности, если C — любой замкнутый контур, содержащий точку a , то

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{(C)} \frac{dz}{z-a} = 1;$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{(C)} \frac{dz}{(z-a)^n} = 0 \quad (n=2, 3, \dots).$$

Вообще, если в окрестности точки a

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n (z-a)^{-n},$$

то

$$\operatorname{res}_a f(z) = b_1.$$

Для функции $f(z)$, аналитической на замкнутом контуре C и во всех точках внутри этого контура, кроме точек a_1, a_2, \dots, a_k , величина

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{(C)} f(z) dz$$

равна сумме вычетов функции $f(z)$ относительно точек a_1, a_2, \dots, a_k (основная теорема теории вычетов).

Величина

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{(C)} \frac{f'(z) dz}{f(z)}$$

называется логарифмическим вычетом функции $f(z)$ относительно контура C .

Если функция $f(z)$ не имеет на контуре C ни нулей, ни особых точек, единственными особыми точками $f(z)$ внутри C являются полюсы a_1, a_2, \dots, a_k , порядки которых равны соответственно $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$, и если нулями функции $f(z)$ внутри C являются точки b_1, b_2, \dots, b_m , причём порядки этих нулей равны соответственно $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$, то

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{(C)} \frac{f'(z) dz}{f(z)} = N - P,$$

где

$$N = \beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_m;$$

$$P = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k.$$

КОНФОРМНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

Функция комплексного аргумента $w=f(z)$, где

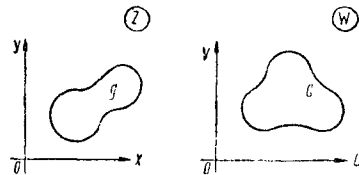
$$z = x + iy \text{ и } w = u + iv,$$

определяет две функции действительных аргументов

$$u = u(x, y), \quad (4)$$

$$v = v(x, y).$$

При помощи равенства $w=f(z)$ каждой точке z плоскости Oxy (плоскости переменной z) соответствует определённая точка w плоскости Ouv (плоскости переменной w). Если при этом функция $f(z)$ непрерывна, то совокупности точек z , образующих область g , соответствует (фиг. 289) совокуп-

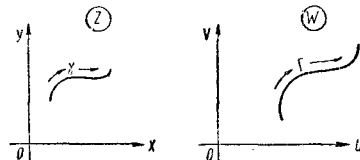


Фиг. 289

ность точек w , образующих некоторую область G (область g отображается на область G).

В случае, когда не только каждой точке области g соответствует определённая точка области G , но и, наоборот, каждой точке области G соответствует единственная точка области g , отображение называется взаимно-однозначным.

Когда точка z движется по линии γ , соответствующая точка w описывает (фиг. 290)



Фиг. 290

некоторую линию Γ : функция $w=f(z)$ осуществляет отображение линии γ плоскости переменной z на линию Γ плоскости переменной w . Если при этом уравнение линии γ

$$\varphi(x, y) = 0 \quad (5)$$

или, в параметрической форме,

$$\begin{aligned} x &= x(t), \\ y &= y(t), \end{aligned} \quad (6)$$

то уравнение линии Γ может быть получено исключением x и y из (4) и (5) или (4) и (6).

Пример

$$w = z^2 = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy.$$

Здесь

$$u = x^2 - y^2; v = 2xy.$$

Прямые $x = c$ отображаются (фиг. 291) в параболы, уравнения которых

$$v^2 = -4c^2(u - c^2)$$

или в параметрической форме

$$u = c^2 - y^2, v = 2cy.$$

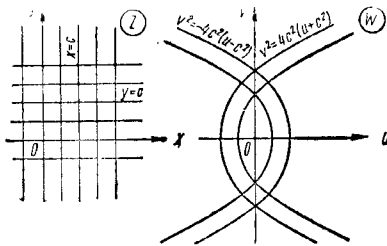
Прямые $y = c$ отображаются в параболы

$$v^2 = 4c^2(u + c^2)$$

или

$$u = x^2 - c^2, v = 2cx.$$

Если при отображении, осуществляемом при помощи аналитической функции $w = f(z)$,

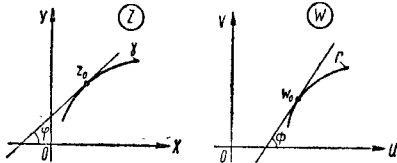


Фиг. 291

точке z_0 соответствует точка w_0 , а линии γ плоскости переменной z , проходящей через точку z_0 , линия Γ плоскости переменной w , то

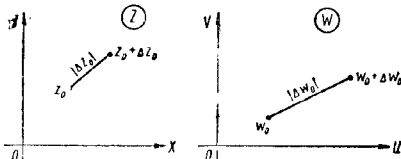
$$\arg f'(z_0) = \Phi - \varphi,$$

где φ и Φ — углы, образованные с положительными направлениями соответствующих действительных осей касательными к линиям γ и Γ в точках z_0 и w_0 (фиг. 292).



Фиг. 292

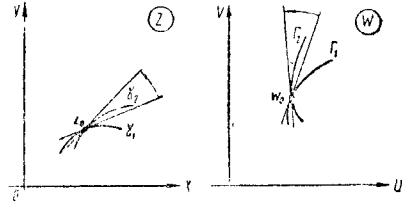
Величина $|f'(z_0)|$ является коэффициентом растяжения в точке z_0 , т. е. пределом к которому стремится отношение расстоя-



Фиг. 293

ния $|\Delta w_0|$ между точками w_0 и $w_0 + \Delta w_0$ плоскости w к расстоянию $|\Delta z_0|$ между соответствующими точками z_0 и $z_0 + \Delta z_0$ плоскости z (фиг. 293), когда $\Delta z_0 \rightarrow 0$.

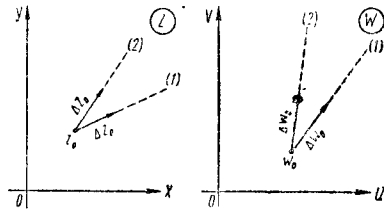
Во всякой точке z_0 , где $f'(z_0) \neq 0$, отображение, осуществляемое при помощи аналитической функции, является конформным, т. е. обладает двумя свойствами:



Фиг. 294

1. Если линии γ_1 и γ_2 плоскости z (фиг. 294), проходящие через точку z_0 , отображаются в линии Γ_1 и Γ_2 плоскости w , проходящие через соответствующую точку w_0 , то угол между касательными к γ_1 и γ_2 в точке z_0 равен углу между Γ_1 и Γ_2 в точке w_0 (свойство консерватизма углов).

2. Коэффициент растяжения в точке z_0 одинаков во всех направлениях, т. е. не зависит от направления (фиг. 295) вектора Δz_0 (свойство постоянства растяжений).



Фиг. 295

Если функция $t = \varphi_1(z)$ осуществляет конформное и взаимно-однозначное отображение некоторой области g плоскости переменной z на область S плоскости переменной t , а функция $t = \varphi_2(w)$ отображает конформно и взаимно-однозначно область G плоскости переменной w на ту же область S , то, разрешив относительно w равенство

$$\varphi_2(w) = \varphi_1(z),$$

мы определим функцию $w = f(z)$, осуществляющую конформное и взаимно-однозначное отображение области g на область G . Таким образом, если для каждой из нескольких данных областей известна функция, отображающая конформно и взаимно-однозначно эту область на некоторую «стандартную» область S , то можно вышеуказанным способом найти функции, отображающие любую из этих областей на любую другую. В качестве такой «стандартной» области обычно берут (если речь идёт об односвязных областях) круг с центром в начале координат и радиусом, равным единице (единичный круг), или полуплоскость, ограниченную действительной осью и расположенную выше этой оси (верхняя полуплоскость).

ДРОБНО-ЛИНЕЙНАЯ ФУНКЦИЯ

Дробно-линейная функция

$$w = \frac{az + b}{cz + d}$$

в случае, когда $ad - bc \neq 0$ (если $ad - bc = 0$, то $w = \text{const}$), осуществляет взаимно-однозначное и конформное отображение всей плоскости переменной z на всю плоскость переменной w , при этом точке $z = \infty$ соответствует точка $w = \frac{a}{c}$ и точке $z = -\frac{d}{c}$ точка $w = \infty$. Значения z , для которых $w = z$, находятся из уравнения

$$z = \frac{az + b}{cz + d}$$

и определяют так называемые неподвижные точки дробно-линейного преобразования.

Так как

$$\frac{az + b}{cz + d} = \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c} \cdot \frac{1}{cz + d},$$

то в самом общем случае отображение, осуществляемое при помощи дробно-линейной функции, может быть получено последовательным применением следующих простейших отображений (для наглядности на чертежах плоскости переменных z и w совмещены так, что действительная ось Ox совпадает с действительной осью Ou , а мнимая ось Oy с мнимой осью Ov).

1. $w = z + b$.

Каждая точка z переносится в соответствующую точку w (фиг. 296) при помощи вектора, изображающего комплексное число b (преобразование параллельного переноса).

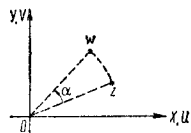
2. $w = e^{i\alpha} z$.

Здесь

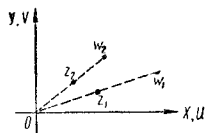
$$|w| = |z| \text{ и } \arg w = \arg z + \alpha;$$

всякая точка z переходит в соответствующую точку w (фиг. 297) при помощи поворота около начала координат на угол α (преобразование поворота).

3. $w = rz$ (r — действительное, положительное число).



Фиг. 296



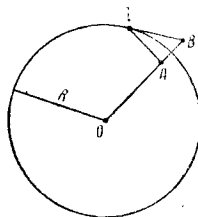
Фиг. 297

Здесь $\arg w = \arg z$ и $|w| = r|z|$; всякая точка z перемещается (фиг. 298) в точку w по лучу, выходящему из начала координат и проходящему через точку z , причём отношение $\frac{|w|}{|z|} = r$ одинаково для всех точек (преобразование подобия с центром подобия в начале координат; r — коэффициент подобия).

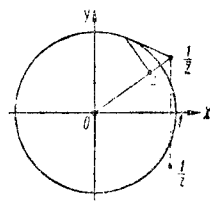
$$4. w = \frac{1}{z}.$$

Здесь $|w| = \frac{1}{|z|}$ и $\arg w = -\arg z$.

Опишем из начала координат O (фиг. 299), как из центра, окружность радиуса R . Выбрав внутри этой окружности какую-либо точку A , проведём луч OA и перпендикуляр AT к этому лучу; из точки T пересечения этого перпендикуляра с окружностью проведём касательную TB к окружности, пересекающую в точке B луч OA . Точки A и B называются взаимно симметричными и относительно данной окружности. В частности, всякая точка, лежащая на окружности, симметрична сама себе, а центр окружности симметричен бесконечно удалённой точке. Если одна из точек A или B



Фиг. 299



Фиг. 300

определяется комплексным числом z , то другая соответствует числу $\frac{R^2}{\bar{z}}$, где \bar{z} — комплексное число, сопряжённое числу z (стр. 99). В частности точки z и $\frac{1}{\bar{z}}$ взаимно симметричны относительно окружности с центром в нулевой точке и радиусом, равным единице (фиг. 300).

Точка $w = \frac{1}{z}$ симметрична точке $\frac{1}{\bar{z}}$ относительно действительной оси (фиг. 300). Таким образом, преобразование $w = \frac{1}{z}$ состоит из двух симметричных преобразований: симметричного преобразования (инверсии) относительно окружности $|z| = 1$ и симметричного преобразования относительно действительной оси; при этом внутренность единичного круга отображается конформно и взаимно-однозначно на область, внешнюю по отношению к этому кругу.

Линейная функция $w = az + b$ может быть преобразована в общем случае к виду

$$w = re^{i\alpha} z + b,$$

где

$$a = re^{i\alpha} \quad (r = |a|, \alpha = \arg a),$$

и отображение, осуществляемое этой функцией, состоит из преобразований поворота, подобия и параллельного переноса.

Общее дробно-линейное преобразование (в частности и линейное) обладает следующими основными свойствами:

1. Всякая окружность (в том числе и прямая, являющаяся окружностью с бесконечным радиусом) отображается в окруж-

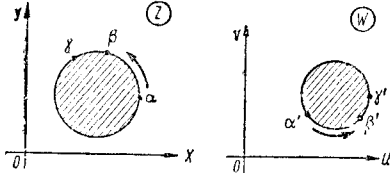
ность или в прямую (круговое свойство).

2. Пара точек, взаимно симметричных относительно окружности, переходит в пару точек, взаимно симметричных относительно отображенной окружности (прямая, как и выше, рассматривается как частный случай окружности).

Существует, и притом единственное, дробно-линейное преобразование:

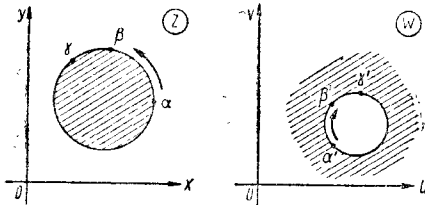
$$\frac{w - \alpha'}{w - \gamma'} \cdot \frac{\beta' - \gamma'}{\beta' - \alpha'} = \frac{z - \alpha}{z - \gamma} \cdot \frac{\beta - \gamma}{\beta - \alpha},$$

при помощи которого три данные точки α, β, γ плоскости z переходят соответственно в заданные точки α', β', γ' плоскости w .



Фиг. 301

При этом область, внутренняя к окружности, проходящей через точки α, β, γ , отображается либо на область, внутреннюю к окружности, проходящей через точки α', β', γ' (фиг. 301), либо на область, внешнюю по отношению к этой окружности (фиг. 302), в зависимости от того, определяют ли точки α, β, γ то же направление на окружности, что и точки α', β', γ' , или противоположное.



Фиг. 302

Общий вид функции, отображающей единичный круг на самого себя (т. е. круг $|z| < 1$ на круг $|w| < 1$):

$$w = e^{i\varphi} \frac{z - \alpha}{1 - \bar{\alpha}z},$$

где α ($|\alpha| < 1$) — точка плоскости z , переходящая в точку $w = 0$, а $\varphi = \arg \frac{dw}{dz}$ при $z = \alpha$.

Если $|\alpha| > 1$, то это преобразование отображает внутренность единичного круга на область, лежащую вне единичного круга.

Общий вид функции, отображающей верхнюю полуплоскость плоскости z на единичный круг плоскости w :

$$w = e^{i\varphi} \frac{z - \alpha}{z - \bar{\alpha}},$$

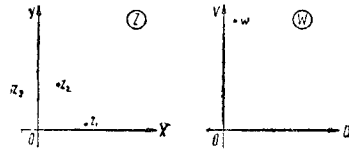
где α (мнимая часть α положительна) — точка плоскости z , переходящая в $w = 0$, и $\varphi - \frac{\pi}{2} =$

$= \arg \frac{dw}{dz}$ в точке $z = \alpha$.

СТЕПЕННАЯ ФУНКЦИЯ

Производная степенной функции $w = z^n$ ($n > 1$ и целое) обращается в нуль при $z = 0$. В этой точке нарушается свойство консерватизма углов. Если

$$z = re^{i\varphi}; \quad w = \rho e^{i\theta},$$



Фиг. 303

то

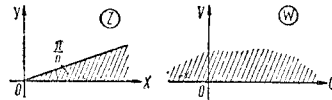
$$\rho = r^n,$$

$$\theta = n\varphi.$$

Лучи $\varphi = \text{const}$ и окружности $r = \text{const}$ переходят в лучи $\theta = \text{const}$ и в окружности $\rho = \text{const}$. В точке $z = 0$ все углы при отображении увеличиваются в n раз. Ввиду

многозначности обратной функции $z = \sqrt[n]{w}$, каждой точке w , кроме точек $w = 0$ и $w = \infty$ (эти точки называются точками разветвления), соответствует (фиг. 303) n точек z_1, z_2, \dots, z_n .

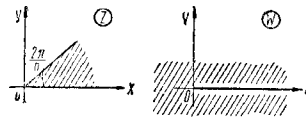
Угол величины $\frac{\pi}{n}$ с вершиной в нулевой точке ($0 < \varphi < \frac{\pi}{n}$) отображается вза-



Фиг. 304

мно-однозначно на верхнюю полуплоскость (фиг. 304). Угол величины $\frac{2\pi}{n}$ с вер-

шиной в нулевой точке ($0 \leq \varphi \leq \frac{2\pi}{n}$) отображается на всю плоскость w с разрезом (фиг. 305) вдоль действительной положительной полуоси (верхнему краю этого разреза соответствует сторона угла $\varphi = 0$, а нижнему краю — сторона угла $\varphi = \frac{2\pi}{n}$).



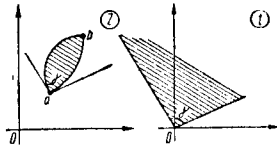
Фиг. 305

При помощи степенной функции можно отобразить на верхнюю полуплоскость (а, следовательно, и на единичный круг) область, заключенную между дугами двух пересекающихся под углом γ в точках $z = a$ и $z = b$ окружностей (в частности и круговой сегмент, соответствующий случаю, когда одна из окружностей — прямая). Для этого

сначала при помощи дробно-линейной функции

$$t = \frac{z-a}{z-b}$$

данная область отображается на угол с вершиной в нулевой точке плоскости t (фиг. 306), затем при помощи поворота $T = e^{i\alpha} t$ одна

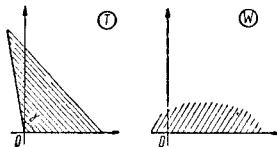


Фиг. 306

сторона этого угла совмещается с положительной действительной полуосью и, наконец, функция

$$w = T^n = \left(\frac{z-a}{z-b} \right)^n e^{in\alpha},$$

где $n = \frac{\pi}{\gamma}$, отображает этот угол на верхнюю полуплоскость (фиг. 307).



Фиг. 307

ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ И ЛОГАРИФИЧЕСКАЯ ФУНКЦИИ

Если

$$w = e^z \quad (z = \ln w) \quad \text{и} \quad z = x + iy, \quad w = \rho e^{i\theta},$$

то

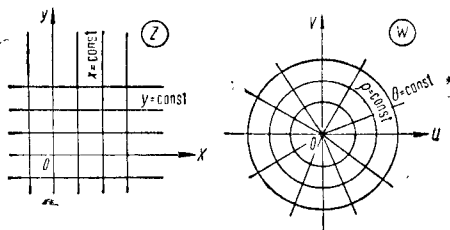
$$\rho = e^x,$$

$$\theta = y.$$

Прямые $x = \text{const}$ переходят в окружности $\rho = \text{const}$; прямые $y = \text{const}$ — в лучи $\theta = \text{const}$ (фиг. 308).

Всякой точке w_0 , кроме точек разветвления $w = 0$ и $w = \infty$, соответствует бесчисленное множество точек

$$z = z_0 + 2k\pi i \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$



Фиг. 308

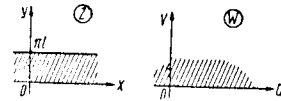
Полоса $0 \leq y < \pi$ ширины π (фиг. 309) отображается взаимно-однозначно на верхнюю полуплоскость. Полосы шириной 2π ($0 < \varphi \leq 2\pi$; $2\pi < \varphi \leq 4\pi$; ...; $-2\pi \leq \varphi < 0$; $-4\pi \leq \varphi < -2\pi$; ...) отображаются на всю плоскость w с разрезом вдоль действительной положительной полуоси (фиг. 310).

Область, заключённая между двумя касавшимися друг друга (фиг. 311) в точке

$z = z_0$ окружностями [в частности область между окружностью и касательной к ней (фиг. 312)], при помощи функции

$$t = \frac{1}{z - z_0}$$

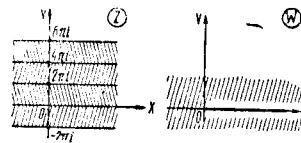
отображается на полосу; эта полоса при помощи параллельного переноса, поворота



Фиг. 309

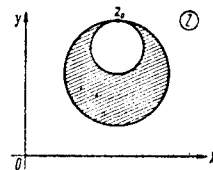
и преобразования подобия, т. е. при помощи линейной функции

$$T = at + b,$$

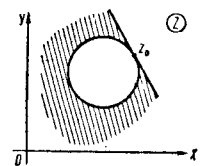


Фиг. 310

может быть отображена на полосу шириной π , прилегающую к действительной оси, эта последняя в свою очередь при помощи функции $w = e^T$ — на верхнюю полуплоскость.

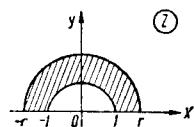


Фиг. 311

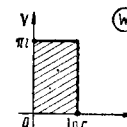


Фиг. 312

Функция $w = \ln z$ ($z = e^w$) отображает криволинейный прямоугольник (фиг. 313), ограниченный верхними полуокружностями $|z| = 1$, $|z| = r$ ($r > 1$) и действительной осью на прямолинейный прямоугольник со



Фиг. 313



Фиг. 314

сторонами $\ln r$ и π ; последний можно отобразить на верхнюю полуплоскость при помощи функции, указанной на стр. 221.

Полуполоса $x \geq 0$, $0 \leq y < \pi$ ширины π (фиг. 314) отображается при помощи функции $w = -e^{-z}$ на верхнюю половину единичного круга, а при помощи функции

$$w = \left(\frac{e^{-z} - 1}{e^{-z} + 1} \right)^2$$

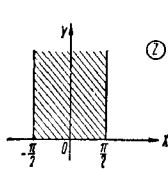
на верхнюю полуплоскость

Функция $w = \sin z$ отображает полуплоску

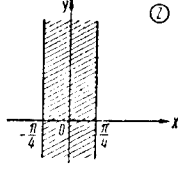
$$y > 0, -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$$

(фиг. 315) на верхнюю полуплоскость.

Функция $w = \operatorname{tg} z$ отображает полосу $-\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4}$ (фиг. 316) на единичный круг.



Фиг. 315



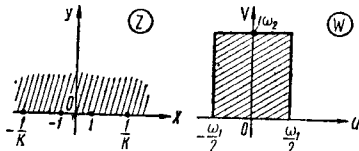
Фиг. 316

ОТОБРАЖЕНИЕ МНОГОУГОЛЬНИКА НА ВЕРХНЮЮ ПОЛУПЛОСКОСТЬ

Функция, определяемая эллиптическим интегралом

$$w = f(z) = \int_0^z \frac{dt}{V(1-t^2)(1-k^2t^2)}, \quad (0 \leq k < 1),$$

отображает верхнюю полуплоскость плоскости z на прямоугольник (фиг. 317) в плоско-



Фиг. 317

сти w с вершинами $-\frac{\omega_1}{2}$, $\frac{\omega_1}{2}$, $\frac{\omega_1}{2} + i\omega_2$, $-\frac{\omega_1}{2} + i\omega_2$,

где

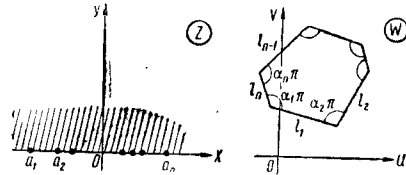
$$\omega_1 = 2 \int_0^1 \frac{dt}{V(1-t^2)(1-k^2t^2)},$$

$$\omega_2 = \int_1^{\frac{1}{k}} \frac{dt}{V(t^2-1)(1-k^2t^2)}.$$

Вершинам этого прямоугольника соответствуют точки $\pm 1, \pm \frac{1}{k}$ плоскости z . Функция $z = s(w)$, обратная по отношению к функции $w = f(z)$, осуществляющей это отображение (и отображающая, следовательно, прямоугольник на верхнюю полуплоскость), является эллиптической (двойкопериодической) функцией. Эта функция имеет два периода: действительный $2\omega_1$ и мнимый $2i\omega_2$, т. е.

$$s(w + 2m\omega_1 + 2ni\omega_2) = s(w) \quad (m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Для того чтобы отобразить верхнюю полуплоскость на заданный прямоугольник, нужно сначала подобрать такое значение k , чтобы отношение $\omega_1 : \omega_2$ было равно отношению сторон данного прямоугольника; функция $w = f(z)$ отобразит при этом верхнюю полуплоскость на прямоугольник, подобный данному; после этого остается при



Фиг. 318

помощи подобного преобразования, параллельного переноса и поворота, т. е. при помощи линейной функции $T = c_1 w + c_2$, отобразить полученный в плоскости w прямоугольник на заданный.

Функция

$$w = f(z) = \int_0^z (t-a_1)^{\alpha_1-1} (t-a_2)^{\alpha_2-1} \dots (t-a_n)^{\alpha_n-1} dt \quad (7)$$

отображает верхнюю полуплоскость плоскости z на n -угольник плоскости w (фиг. 318) с внутренними углами

$$\alpha_1\pi, \alpha_2\pi, \dots, \alpha_n\pi \quad (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = n-2).$$

При этом вершинам многоугольника соответствуют точки a_1, a_2, \dots, a_n действительной оси плоскости z . Длины сторон многоугольника вычисляются по формулам (предполагается, что $a_1 < a_2 < \dots < a_n$):

$$l_1 = \int_{a_1}^{a_2} (t-a_1)^{\alpha_1-1} (a_2-t)^{\alpha_2-1} (a_3-t)^{\alpha_3-1} \dots (a_n-t)^{\alpha_n-1} dt,$$

$$l_2 = \int_{a_2}^{a_3} (t-a_1)^{\alpha_1-1} (t-a_2)^{\alpha_2-1} (a_3-t)^{\alpha_3-1} \dots (a_n-t)^{\alpha_n-1} dt,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$l_{n-1} = \int_{a_{n-1}}^{a_n} (t-a_1)^{\alpha_1-1} (t-a_2)^{\alpha_2-1} \dots (t-a_{n-1})^{\alpha_{n-1}-1} (a_n-t)^{\alpha_n-1} dt.$$

Для того, чтобы отобразить верхнюю полуплоскость на заданный n -угольник со сторонами d_1, d_2, \dots, d_n , следует, выбрав произвольно три из чисел a_1, a_2, a_3 , определить остальные из уравнений

$$\frac{l_2}{l_1} = \frac{d_2}{d_1}; \frac{l_3}{l_1} = \frac{d_3}{d_1}; \dots; \frac{l_{n-2}}{l_1} = \frac{d_{n-2}}{d_1}.$$

При найденных таким образом значениях a_i с помощью функции (7) верхняя полуплоскость отобразится на многоугольник, подобный данному; после этого следует при помощи линейной функции $T = c_1 w + c_2$ отобразить полученный в плоскости w многоугольник на заданный.

Отображение единичного круга на многоугольник с углами $\alpha_1\pi, \alpha_2\pi, \dots, \alpha_n\pi$ осуществляется при помощи функции

$$w = c_1 \int_0^z (t - e^{i\varphi_1})^{\alpha_1-1} (t - e^{i\varphi_2})^{\alpha_2-1} \dots (t - e^{i\varphi_n})^{\alpha_n-1} dt,$$

где $e^{i\varphi_1}, e^{i\varphi_2}, \dots, e^{i\varphi_n}$ — точки окружности единичного круга, соответствующие вершинам многоугольника.

ОБЩИЕ ПРИНЦИПЫ КОНФОРМНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

Всякая односвязная область, кроме всей плоскости (включая бесконечно удаленную точку) и плоскости с одной исключенной точкой, может быть взаимно-однозначно и конформно отображена на любую другую область такого же типа (например на внутренность единичного круга). Это отображение определяется единственным образом, если потребовать, чтобы заданной точке и заданному направлению в этой точке одной области соответствовали заданные точка и направление в этой точке другой области (теорема единственности). Если, например, отображаемая область в плоскости z содержит нулевую точку, то отобра-

жающая функция $w = f(z)$ определяется единственным образом следующими условиями:

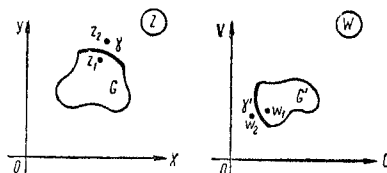
$$f(0) = 0, f'(0) > 0$$

(второе условие обозначает, что $\arg f'(0) = 0$, т. е. что направлению положительной действительной полуоси в точке $z = 0$ соответствует такое же направление в точке $w = 0$).

Если функция, аналитическая на контуре Γ и в области G , им ограниченной, отображает взаимно-однозначно контур Γ на контур Γ' области G' , то область G также взаимно-однозначно отображается на область G' (принцип соответствия границ).

Если при помощи аналитической функции $w = f(z)$ область G отображается на область G' так, что часть γ границы области G ,

являющаяся дугой окружности или отрезком прямой, отображается на дугу окружности или прямолинейный отрезок γ' , входящий в границу области G' , то всякая точка z_2 , симметричная точке z_1 области G относительно γ , перейдет в точку w_2 , симметричную относительно γ' точке w_1 , являющейся отображением точки z_1 (фиг. 319),



Фиг. 319

т. е. если точки z_1 и z_2 — симметричны относительно γ , то точки $w_1 = f(z_1)$ и $w_2 = f(z_2)$ симметричны относительно γ' (принцип симметрии).

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МЕТОД НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ТЕОРЕМЫ

События A, B, \dots, N называются несовместимыми, если может произойти только одно из них.

События A, B, \dots, N называются единственно возможными, если по крайней мере одно из них должно произойти.

Система несовместимых и единственно возможных событий называется полной.

Два несовместимых и единственно возможных события A и \bar{A} называются противоположными, или дополнительными.

Вероятностью события A [обозначение: $P(A)$] называется отношение числа m случаев, благоприятствующих этому событию, к числу всех несовместимых, равно-возможных и единственно возможных случаев: $P(A) = \frac{m}{n}$; например, вероятность

вынуть белый шар из урны, содержащей n шаров, из которых m шаров белых, равна $\frac{m}{n}$.

Вероятность достоверного события равна единице, вероятность невозможного события равна нулю; в остальных случаях вероятность положительна и меньше единицы.

Если при n поставленных в одинаковых условиях опытах некоторое событие A появилось m раз, то отношение $\frac{m}{n}$ называется частотой (статистической или эмпирической вероятностью) события A :

$$W(A) = \frac{m}{n}.$$

С вероятностью, сколь угодно близкой к достоверности, можно утверждать, что при

$a(1,1) = a$; $a(1,2) = b$ и, следовательно, $p_n(2) = 1 - p_n$; $a(2,1) = 1 - a$; $a(2,2) = 1 - b$, получим для определения p_n , в предположении, что p_1 дано, уравнение в конечных разностях:

$$p_{n+1} = ap_n + b(1 - p_n).$$

Если $a = 1$ и $b = 0$, то $p_{n+1} = p_1$ при любом n . В остальных случаях уравнение в конечных разностях имеет решение

$$p_{n+1} = \frac{b}{1-a+b} + \left(p_1 - \frac{b}{1-a+b}\right)(a-b)^n,$$

которое при $n \rightarrow \infty$ стремится к пределу, не зависящему от p_1 :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_{n+1} = \frac{b}{1-a+b}.$$

Вероятность повторения события. Если в некотором опыте вероятность появления некоторого события равна p , то вероятность того, что в n опытах это событие произойдёт m раз, равна

$$\frac{C_n^m p^m (1-p)^{n-m}}{m!(n-m)!} p^m (1-p)^{n-m}.$$

При тех же условиях вероятность появления события по крайней мере m раз (т. е. m раз или более) равна

$$\sum_{i=m}^n C_n^i p^i (1-p)^{n-i}.$$

В частности, вероятность появления события по крайней мере один раз равна $1 - (1-p)^n$; все n раз $-p^n$.

Если в результате некоторого опыта происходит одно из несовместимых событий A_1, A_2, \dots, A_k , вероятности которых соответственно равны p_1, p_2, \dots, p_k , и

$$\sum_{i=1}^k p_i = 1,$$

то вероятность того, что в n опытах событие A_1 произойдёт m_1 раз, событие $A_2 - m_2$ раз и т. д., событие $A_k - m_k$ раз

$$\left(\sum_{i=1}^k m_i = n \right), \text{ равна}$$

$$\frac{(m_1 + m_2 + \dots + m_k)!}{m_1! m_2! \dots m_k!} \cdot p_1^{m_1} p_2^{m_2} \dots p_k^{m_k};$$

в частности, вероятность того, что каждое событие произойдёт по одному разу ($m_1 = m_2 = \dots = m_k = 1$) равна

$$k! p_1 p_2 \dots p_k.$$

Пример 1. Вероятность попасть в цель равна 0,5. Какова вероятность того, что в результате 8 выстрелов произойдёт 4 попадания?

$$p = C_8^4 0,5^4 \cdot (1-0,5)^{8-4} = \frac{70}{256} \approx 0,2733.$$

Пример 2. Из урны, в которой имеются белые, чёрные, красные и зелёные шары в одинаковом количестве, вынимается шар.

Какова вероятность того, что после 10 испытаний (после каждого испытания шар возвращается в урну) окажется, что 4 раза был вынут белый, 3 раза чёрный, 2 раза красный и один раз зелёный шар?

В этом случае

$$p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = \frac{1}{4},$$

$$m_1 = 4, m_2 = 3, m_3 = 2, m_4 = 1$$

$$p = \frac{(4+3+2+1)!}{1! 2! 3! 4!} \left(\frac{1}{4}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^1 \approx 0,01222.$$

СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

Величина называется случайной, если в результате некоторого опыта она может принять то или другое значение.

Если случайная величина может принимать отдельные значения x_1, x_2, \dots, x_n , — она называется дискретной, если же она может принимать все значения из некоторого промежутка $\alpha < X < \beta$ (или даже все значения от $-\infty$ до $+\infty$), то она называется непрерывной.

Распределение дискретной случайной величины определяется вероятностями $P(x_1), P(x_2), \dots, P(x_n)$ значений x_1, x_2, \dots, x_n

$$\left(\sum_{i=1}^n P(x_i) = 1 \right).$$

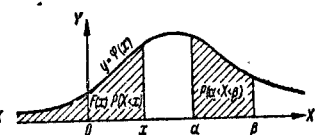
Это распределение может быть геометрически изображено при помощи многоугольника распределения (фиг. 320).

Интегральной функцией распределения непрерывной случайной величины называется функция $F(x)$, равная вероятности того, что случайная величина примет любое значение X , меньшее, чем x :

$$F(x) = P(X < x).$$



Фиг. 320



Фиг. 321

Вероятность того, что значение, принимаемое случайной величиной, окажется в промежутке между $X = a$ и $X = b$, определяется равенством

$$P(a < X < b) = F(b) - F(a).$$

Для дискретной случайной величины

$$F(x_k) = \sum_{i=1}^k P(x_i).$$

Дифференциальным законом распределения (или плотностью вероятности) непрерывной случайной величины называется функция $\varphi(x)$, определяемая равенством

$$\varphi(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{P(x < X < x + \Delta x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = F'(x);$$

обратно:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x \varphi(x) dx.$$

При достаточно малом Δx имеет место приближённое равенство:

$$P(x < X < x + \Delta x) \approx \varphi(x) \Delta x.$$

Для всякого закона распределения

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) dx = 1.$$

Если построить кривую распределения $y = \varphi(x)$, то вероятности $P(a < X < \beta)$ и $P(X < x) = F(x)$ изобразятся площадями, указанными на фиг. 321. Вся площадь между кривой распределения и осью OX равна единице.

Распределение вероятностей пары случайных величин (X, Y) определяется функцией плотности $\varphi(x, y)$, причём

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x, y) dx dy = 1.$$

$$\text{Величина } F(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y \varphi(x, y) dx dy$$

равна вероятности того, что $X < x$ и $Y < y$. Если величины X и Y независимы между собой и если плотности их вероятностей определяются соответственно функциями $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(y)$, то $\varphi(x, y) = \varphi_1(x) \cdot \varphi_2(y)$. Так, например, если две независимые величины подчинены закону Гаусса с одинаковыми параметрами, то (стр. 227)

$$\varphi(x, y) = \frac{h^2}{\pi} e^{-h^2 [(x-a)^2 + (y-a)^2]}.$$

Значение случайной величины, имеющее наибольшую вероятность (в случае дискретной величины) или наибольшую плотность вероятности (в случае непрерывной величины), называется её модой.

Величина $M(X)$, равная $\sum_{i=1}^n P(x_i) x_i$ в случае дискретной случайной величины, и $\int_{-\infty}^{\infty} x \varphi(x) dx$ в случае непрерывной случайной величины, называется математическим ожиданием этой величины.

Если вероятности того, что случайная величина X меньше или больше числа μ , равны между собой, то μ называется медианой, или средним значением, случайной величины X . Для непрерывной случайной величины

$$\int_{-\infty}^{\mu} \varphi(x) dx = \int_{\mu}^{\infty} \varphi(x) dx = \frac{1}{2}.$$

Если многоугольник распределения (для дискретной величины) или кривая распределения (для непрерывной величины) имеет ось симметрии $x = a$, то центр симметрии $x = a$ является одновременно и математическим ожиданием и медианой.

Отклонением случайной величины X от её медианы называется положительная величина $|X - \mu|$.

Если число ε таково, что одинаково вероятно — окажется ли отклонение случайной величины от её медианы большим или меньшим, чем ε , то это число называется вероятным отклонением случайной величины:

$$P(|X - \mu| > \varepsilon) = P(|X - \mu| < \varepsilon).$$

В случае непрерывной случайной величины

$$\int_{-\infty}^{\mu-\varepsilon} \varphi(x) dx + \int_{\mu+\varepsilon}^{\infty} \varphi(x) dx = \int_{\mu-\varepsilon}^{\mu+\varepsilon} \varphi(x) dx = \frac{1}{2}.$$

Средним арифметическим отклонением $E_1(X)$ величины X называется математическое ожидание отклонения этой случайной величины X от её математического ожидания $M(X)$:

$$E_1(X) = M(|X - M(X)|).$$

В случае дискретной величины

$$E_1(X) = \sum_{i=1}^n |x_i - M(X)| P(x_i).$$

В случае непрерывной величины

$$E_1(X) = \int_{-\infty}^{\infty} |x - M(X)| \varphi(x) dx.$$

Аналогично корень квадратный из математического ожидания величины $[X - M(X)]^2$ называется средним квадратическим отклонением $E_2(X)$ величины X . Для дискретных случайных величин:

$$E_2(X) = \sqrt{\sum_{i=1}^n [x_i - M(X)]^2 P(x_i)},$$

а для непрерывных случайных величин:

$$E_2(X) = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} [x - M(X)]^2 \varphi(x) dx}.$$

Дисперсией случайной величины называется квадрат её квадратического отклонения

$$D(X) = [E_2(X)]^2.$$

Если известно распределение вероятностей пары случайных величин (X, Y) , определяемое функцией $\varphi(x, y)$, то математические ожидания каждой из этих величин определяются формулами:

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x \varphi(x, y) dx dy;$$

$$M(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} y \varphi(x, y) dx dy.$$

Аналогичным образом определяются и другие вероятностные характеристики.

Теоремы о математических ожиданиях и дисперсиях

1. $M(C) = C$ (C — постоянная).
2. $M(X+Y) = M(X) + M(Y)$; в частности, $M(C+X) = C + M(X)$.
3. Если X и Y — независимы, то $M(XY) = M(X)M(Y)$; в частности $M(CX) = CM(X)$. В общем случае: $M(XY) = M(X)M(Y) + R(X, Y)E_2(X)E_2(Y)$, где $R(X, Y)$ — коэффициент корреляции (стр. 226).
4. $M(aX + b) = aM(X) + b$ (a и b — постоянные).
5. Если X изменяется от 0 до 2π , то $M[\sin(X + \alpha)] = M[\cos(X + \alpha)] = 0$ (α — постоянная).

6. $D(C) = 0$ (C — постоянная).

7. Если X и Y независимы, то $D(X+Y) = D(X) + D(Y)$; в частности $D(C+X) = D(X)$.

В общем случае $D(X+Y) = D(X) + D(Y) + 2R(X, Y)E_2(X)E_2(Y)$.

8. $D(XY) = D(X)D(Y) + D(X)[M(Y)]^2 + D(Y)[M(X)]^2$, в частности $D(CX) = C^2D(X)$.

9. $D(aX + b) = a^2D(X)$.

10. Если X изменяется в интервале от 0 до 2π , то

$$D[\sin(X + \alpha)] = D[\cos(X + \alpha)] = \frac{1}{2}.$$

Если в определениях вероятностных характеристик заменить вероятность частотой (статистической вероятностью) случайной величины, то вместо этих вероятностных характеристик мы получим статистические характеристики, а именно: статистическую моду вместо моды, статистическую медиану вместо медианы, среднее арифметическое наблюдаемых значений вместо математического ожидания, статистическое среднее значение вместо вероятного отклонения, статистическое среднее арифметическое отклонение вместо среднего арифметического отклонения, статистическое среднее квадратическое отклонение вместо среднего квадратического отклонения, статистическую дисперсию вместо дисперсии. Обозначения для статистических характеристик сохраняют обычно те же, что и для соответствующих вероятностных характеристик.

11. Если математические ожидания величин $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ одинаковы:

$$M(X_1) = M(X_2) = \dots = M(X_n) = \dots,$$

а дисперсии этих величин равномерно ограничены:

$D(X_i) < C$ ($i=1, 2, \dots, n, \dots$; C постоянная), то с вероятностью, сколь угодно близкой к достоверности, можно утверждать, что при достаточно большом n среднее арифметическое величин X_1, X_2, \dots, X_n будет сколь угодно мало отличаться от их математического ожидания (теорема Чебышева).

Вероятностная зависимость между двумя случайными величинами называется корреляцией.

В частности, эта зависимость сводится к функциональной зависимости, если значения, принимаемые одной случайной величиной, позволяют с достоверностью вычислить значения другой. Случайные величины независимы, если значения одной величины не влияют на закон распределения другой.

Степень корреляционной зависимости вычисляется с помощью коэффициента корреляции

$$R(X, Y) = \frac{M\{[X - M(X)][Y - M(Y)]\}}{\sqrt{D(X)D(Y)}}.$$

Если X и Y независимы, то $R(X, Y) = 0$ (обратное утверждение несправедливо).

Если Y зависит линейно от X :

$$Y = aX + b,$$

то $R(X, Y) = 1$, если $a > 0$, и $R(X, Y) = -1$, если $a < 0$, в общем случае $|R(X, Y)| \leq 1$ и считают, что «прочность» корреляционной зависимости тем больше, чем больше $|R(X, Y)|$.

Пример. Вычислить с помощью таблицы коэффициент корреляции между облачностью, оцениваемой по 10-балльной системе, и частотой попаданий в цель (рассматриваем вместо вероятности статистическую вероятность и вместо математического ожидания и дисперсии соответствующие статистические характеристики).

Дата наблюдения	Облачность	Число	
		выстрелов	попазданий
3/VI	3	15	11
4/VI	0	22	18
7/VI	5	12	7
8/VI	2	25	21
9/VI	10	14	10

Если X — облачность, а Y — частота попаданий и каждый день наблюдений рассматривать как отдельный опыт, то имеем:

x_i	3	0	5	2	10
y_i	0,73	0,82	0,58	0,84	0,71
w_i	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$

где w_i — статистическая вероятность пары значений (x_i, y_i) . Далее:

$$M(X) = \sum w_i x_i = 4; M(Y) = \sum w_i y_i = 0,74;$$

$$M[X - M(X)][Y - M(Y)] = \sum w_i (x_i - 4)(y_i - 0,74) = -0,18;$$

$$D(X) = \sum w_i (x_i - 4)^2 = 11,6;$$

$$D(Y) = \sum w_i (y_i - 0,74)^2 = 0,0095$$

$$R(X, Y) = \frac{-0,18}{\sqrt{11,6 \cdot 0,0095}} = -0,54.$$

ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

БИНОМИАЛЬНЫЙ ЗАКОН РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДИСКРЕТНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Биномиальному закону подчиняется вероятность того, что некоторое событие при n испытаниях, в каждом из которых вероятность события равна p (p — постоянна), произойдет x раз ($x = 0, 1, 2, \dots, n$):

$$P(x) = C_n^x p^x (1-p)^{n-x} = \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x (1-p)^{n-x}.$$

Параметры этого закона: p ($0 < p < 1$) и n (n — целое и положительное).

Если параметр p достаточно мал, так что величина $a = np$ тоже невелика, то биномиальный закон может быть приближенно заменен законом Пуассона:

$$P(x) = \frac{a^x e^{-x}}{x!}.$$

ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НЕПРЕРЫВНЫХ ВЕЛИЧИН

Если между случайными величинами X и Y имеется функциональная зависимость $Y = f(X)$, причем функция $f(x)$ монотонна (и имеет непрерывную производную), то, зная закон распределения $\varphi_1(x)$ величины X , можно найти закон распределения для величины Y по формуле:

$$\varphi_2(y) = \frac{\varphi_1(x)}{|f'(x)|},$$

где x выражается через y из уравнения $y = f(x)$. В частности, если $y = ax + b$, то

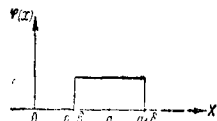
$$\varphi_2(y) = \frac{1}{|a|} \varphi_1\left(\frac{y-b}{a}\right).$$

Если известны функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(y)$, являющиеся законами распределения двух независимых случайных величин X и Y , то величина $Z = X + Y$ имеет закон распределения; определяемый формулой

$$\varphi_3(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_1(x) \varphi_2(z-x) dx.$$

Закон равной вероятности. Закон равной вероятности имеет место, например, при ошибках в измерениях, производимых при помощи отсчёта по ближайшей отметке на шкале.

Если область возможных значений измеряемой величины X при этом заключена между $x = a - \delta$ и $x = a + \delta$, то $\varphi(x) = \frac{1}{2\delta}$ при $a - \delta < x < a + \delta$ и $\varphi(x) = 0$ для всех остальных значений x (фиг. 322).



Фиг. 322

Для этого закона:

$$M(X) = a;$$

$$D(X) = \frac{1}{3} \delta^2.$$

Закон распределения величин, являющихся суммой двух случайных величин, каждая из которых подчинена закону равной вероятности (причём параметры этого закона a и δ для обеих величин одинаковы), выражается формулами (фиг. 323):

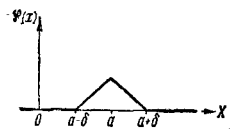
$$\varphi(x) = \frac{\delta - a + x}{\delta^2} \quad \text{при } a - \delta < x < a;$$

$$\varphi(x) = \frac{\delta + a - x}{\delta^2} \quad \text{при } a < x < a + \delta;$$

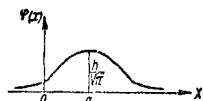
$\varphi(x) = 0$ для всех остальных значений x .

Здесь $M(X) = a$; $D(X) = \frac{1}{6} \delta^2$.

Нормальный закон распределения. Нормальный закон распределения или закон



Фиг. 323



Фиг. 324

Гаусса (фиг. 324) имеет место для величины, которая может быть представлена в виде суммы «бесконечно большого» числа независимых друг от друга случайных величин (обосновывается при помощи предельной теоремы Ляпунова):

$$\varphi(x) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2(x-a)^2}.$$

Параметры закона: a (центр рассеивания) и h (мера точности).

Здесь $M(X) = a$; $D(X) = \frac{1}{2h^2}$;

$\int \varphi(x) dx$ не выражается через элементарные функции и приводится к интегралу вероятностей $\Phi(t)$ (см. таблицы стр. 148) подстановкой $\sqrt{2}h(x-a) = t$. Так, например,

$$\begin{aligned} \int_a^x \varphi(x) dx &= \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_a^x e^{-h^2(x-a)^2} dx = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\sqrt{2}h(x-a)} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt = \\ &= \frac{1}{2} \Phi[\sqrt{2}h(x-a)]. \end{aligned}$$

Эмпирическое определение параметров закона Гаусса. Если случайная величина X , над которой было произведено n наблюдений, давших результаты x_1, x_2, \dots, x_n , подчиняется закону Гаусса, причём параметры этого закона (один или оба) неизвестны, то для их определения считают эти параметры случайными величинами и за величину этих параметров принимают, обычно, либо их наиболее вероятное значение (моду), либо математическое ожидание; в последнем случае вычисляют также среднее квадратическое отклонение искомого параметра, характеризующее возможную погрешность.

Равноточные наблюдения.

1. Мера точности h известна, центр рассеивания a неизвестен. (Например, в одних и тех же условиях одним и тем же инструментом, мера точности которого установлена ранее, произведено n измерений величины X ; требуется найти наиболее вероятное значение $X = a$ этой величины).

Мода (наиболее вероятное значение) искомого центра рассеивания, совпадающая с его математическим ожиданием, равна среднему арифметическому полученных из наблюдений значений

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n},$$

причем среднее квадратическое отклонение величины a равно

$$\frac{1}{h\sqrt{2n}}.$$

Результат обычно записывается в форме

$$a = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \pm \frac{1}{h\sqrt{2n}}.$$

Пример. При стрельбе с мерой точности $h=0,04$ отмечены абсциссы точек попадания x_i : 369, 378, 315, 420, 385, 401, 372, 383 (в сантиметрах).

Найти центр рассеивания a .

Математическое ожидание (и наиболее вероятное значение) величины a равно

$$\frac{369+378+315+420+385+401+372+383}{8} = 377,875.$$

Среднее квадратическое отклонение этой величины равно

$$\frac{1}{h\sqrt{2n}} = \frac{1}{0,04\sqrt{2 \cdot 8}} = 6,25.$$

Следовательно, $a = 377,875 \pm 6,25$ см.

2. Центр рассеивания a известен, мера точности h неизвестна (например, в одних и тех же условиях при помощи одного и того же инструмента произведено n измерений величины X , истинное значение которой $X = a$ известно; требуется найти в данных условиях меру точности инструмента).

Наивероятнейшее значение (мода) величины h равно

$$\sqrt{\frac{n}{2 \sum_{i=1}^n (x_i - a)^2}}.$$

Математическое ожидание $M(h)$ и среднее квадратическое отклонение $E_2(h)$ величины h определяются формулами:

$$M(h) = \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - a)^2}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}$$

(таблицы функции Γ , см. на стр. 149);

$$E_2(h) = \frac{\sqrt{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n+3}{2}\right) - \Gamma^2\left(\frac{n+2}{2}\right)}}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - a)^2}}$$

и

$$h = M(h) \pm E_2(h).$$

Пример. При стрельбе с центром рассеивания $a = 375$ отмечены абсциссы точек попадания:

369, 378, 315, 420, 385, 401, 372, 383.

Найти меру точности h .

Находим наивероятнейшее значение меры точности.

Имеем:

$$(x_1 - a)^2 = 36; (x_2 - a)^2 = 9; (x_3 - a)^2 = 3600;$$

$$(x_4 - a)^2 = 2025; (x_5 - a)^2 = 100; (x_6 - a)^2 = 676;$$

$$(x_7 - a)^2 = 9; (x_8 - a)^2 = 64$$

и

$$\sum (x_i - a)^2 = 6518.$$

Следовательно, наивероятнейшее значение величины h равно

$$\sqrt{\frac{8}{2 \cdot 6518}} = 0,0247.$$

Математическое ожидание величины h равно

$$\frac{1}{\sqrt{6518}} \cdot \frac{\Gamma(5)}{\Gamma(4,5)} = 0,0255,$$

среднее квадратическое отклонение этой величины

$$\frac{1}{\sqrt{6518}} \cdot \frac{\sqrt{\Gamma(4,5) \cdot \Gamma(5,5) - \Gamma^2(5)}}{\Gamma(4,5)} = 0,0061,$$

$$h = 0,0255 \pm 0,0061.$$

3. Оба параметра закона Гаусса a и h неизвестны (например, в одних и тех же условиях, при помощи одного и того же инструмента произведено n измерений некоторой величины X ; требуется найти наивероятнейшее значение $X = a$ измеряемой величины и меры точности инструмента).

В этом случае наивероятнейшие значения величин a и h определяются равенствами:

$$a = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n};$$

$$h = \sqrt{\frac{n-1}{2 \sum_{i=1}^n (x_i - a)^2}}.$$

Математические ожидания и средние квадратические отклонения величин a и h определяются формулами:

$$M(a) = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n};$$

$$M(h) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n [x_i - M(a)]^2}{n}}};$$

$$E_2(a) = \frac{1}{\sqrt{n-2}} \cdot \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n [x_i - M(a)]^2}{n}};$$

$$E_2(h) = \frac{\sqrt{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right) + \Gamma^2\left(\frac{n+1}{2}\right)}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \sqrt{\sum_{i=1}^n [x_i - M(a)]^2}}.$$

Пример. Известны абсциссы точек попадания при стрельбе x_i ;

369, 378, 315, 420, 385, 401, 372, 383.

Требуется найти центр рассеивания a и меру точности h .

Имеем $\sum x_i = 3023$ и наивероятнейшее значение a , совпадающее с его математическим ожиданием, равно

$$\frac{3023}{8} \approx 378.$$

Далее $\sum (x_i - 378)^2 = 6453$, среднее квадратическое отклонение величин a равно

$$\frac{1}{\sqrt{6}} \sqrt{\frac{6453}{8}} \approx 12.$$

$$a = 378 \pm 12.$$

Наивероятнейшее значение h равно

$$\sqrt{\frac{7}{2 \cdot 6453}} \approx 0,0233.$$

Математическое ожидание величины h равно

$$\frac{\Gamma(4,5)}{\Gamma(4)} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{6453}{8}}} \approx 0,0241,$$

среднее квадратическое отклонение этой величины

$$\frac{\sqrt{\Gamma(4) \cdot \Gamma(5) + \Gamma^2(4,5)}}{\Gamma(4) \sqrt{6453}} = 0,0061$$

и, следовательно

$$h = 0,0241 \pm 0,0061.$$

Неравноточные наблюдения. Пусть произведено n наблюдений над величиной X , в результате которых получены значения x_1, x_2, \dots, x_n . Каждое наблюдение подчиняется закону распределения Гаусса, причём неизвестный центр рассеивания a во всех случаях одинаков, а меры точности известны и различны: h_1, h_2, \dots, h_n . В этом случае наивероятнейшее значение a совпадает

с его математическим ожиданием и определяется равенством

$$M(a) = \frac{\sum_{i=1}^n h_i^2 x_i}{\sum_{i=1}^n h_i^2},$$

а среднее квадратическое отклонение при этом вычисляется по формуле

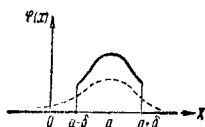
$$E_2(a) = \frac{1}{\sqrt{2 \sum_{i=1}^n h_i^2}}.$$

Веса ми наблюдений называются величины g_i , пропорциональные квадратам мер точности: $g_i = Kh_i^2$. Наивероятнейшее значение величины a равно, таким образом

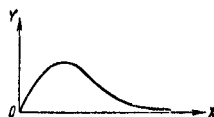
$$\frac{\sum_{i=1}^n g_i x_i}{\sum_{i=1}^n g_i},$$

т. е. так называемому среднему взвешенному из результатов наблюдений.

Распределение по отрезкам кривой Гаусса. На практике часто встречается распределение по отрезкам кривой Гаусса. Пусть, например, требуется установить распределение размеров только тех деталей, которые находятся в пределах области допусков. Если при этом центр области допусков a совпадает с центром рассеивания закона Гаусса, которому подчиняются размеры всех деталей (в том числе и выходящих за пределы области допусков; на чертеже соответствующая кривая обозначена пунк-



Фиг. 325



Фиг. 326

тирной линией), а максимальная допустимая величина отклонения размера детали от величины a равна δ (т. е. допускаются детали с размерами от $a - \delta$ до $a + \delta$), то дифференциальный закон распределения определяется функцией (фиг. 325)

$$\varphi(x) = \frac{he^{-(x-a)^2 h^2}}{\sqrt{2} \int_0^{\delta h} \sqrt{2} e^{-\frac{1}{2} z^2} dz}$$

при $a - \delta \leq x \leq a + \delta$

и $\varphi(x) = 0$ для остальных значений x .

Если случайная величина X является геометрической суммой двух других случайных величин y и z ($x = \sqrt{y^2 + z^2}$), подчиняющихся закону Гаусса с одними и теми же параметрами (например, эксцентриситет зубчатого колеса, вызванный двухмерным рас-

сеиванием), то кривая распределения (фиг. 326) определяется формулой

$$\varphi(x) = 2h^2 x e^{-h^2 x^2},$$

где h — мера точности в законе Гаусса, и предположено, что $a = 0$ (a — центр рассеивания в законе Гаусса).

МЕТОД НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

Получаемый из закона Гаусса принцип наименьших квадратов утверждает, что:

1) наивероятнейшим значением случайной величины, которое может быть получено из ряда измерений одинаковой точности, является то, для которого сумма квадратов ошибок наименьшая;

2) наивероятнейшим значением случайной величины, которое может быть получено из ряда измерений различной точности, является то, для которого сумма произведений квадратов ошибок на веса измерений наименьшая.

Из принципа наименьших квадратов следует, что, в случае равноточных измерений, наивероятнейшим значением измеряемой величины является средняя арифметическая из результатов измерений, а в случае неравноточных измерений — средняя взвешенная.

Если из m измерений получены значения некоторых функций n случайных величин x_1, x_2, \dots, x_n , подчиненных нормальному закону распределения, т. е. если дана так называемая система условных уравнений (обычно $m > n$ и система несовместна):

$$f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = \alpha_1,$$

$$f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = \alpha_2,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$f_m(x_1, x_2, \dots, x_n) = \alpha_m,$$

то наивероятнейшие значения случайных величин — те, для которых является наименьшей сумма произведений квадратов ошибок на веса g_i соответствующих измерений

$$R = \sum_{i=1}^m g_i [f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) - \alpha_i]^2.$$

В случае равноточных измерений $g_1 = g_2 = \dots = g_n = 1$.

Для определения наивероятнейших значений величин x_1, x_2, \dots, x_n по способу наименьших квадратов получаем, таким образом, систему уравнений

$$\frac{\partial R}{\partial x_1} = 0; \quad \frac{\partial R}{\partial x_2} = 0; \quad \dots; \quad \frac{\partial R}{\partial x_n} = 0.$$

Если функции f_i линейны, то для определения наивероятнейших значений x_1, x_2, \dots, x_n удобно пользоваться следующей схемой.

Данные измерений дают линейную систему условных уравнений:

$$a_1 x_1 + b_1 x_2 + c_1 x_3 + \dots + l_1 x_n + r_1 = 0,$$

$$a_2 x_1 + b_2 x_2 + c_2 x_3 + \dots + l_2 x_n + r_2 = 0,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$a_m x_1 + b_m x_2 + c_m x_3 + \dots + l_m x_n + r_m = 0,$$

В случаях периодического изменения функции с периодом l обычно выбирают формулу в виде

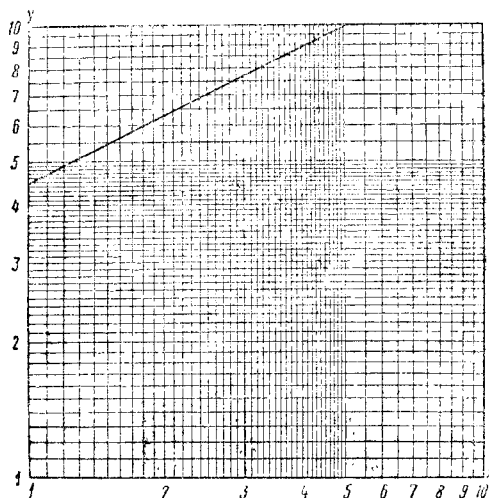
$$y = a \sin \frac{2\pi}{l} x + b \cos \frac{2\pi}{l} x = A \sin \left(\frac{2\pi}{l} x + \alpha \right),$$

или в виде тригонометрического полинома

$$y = \sum_{k=1}^n a_k \cos \frac{2k\pi}{l} x + b_k \sin \frac{2k\pi}{l} x.$$

В тех случаях, когда нет возможности руководствоваться теоретическими соображениями для выбора типа формулы, экспериментальные данные наносятся на чертёж при помощи точек с координатами x_i и y_i . Если построенный по этим точкам график окажется прямой или близким к прямой, то следует выбрать формулу в виде линейной функции

$$y = a + bx.$$



Фиг. 327

Если же график окажется плавной кривой линией, то следует его перестроить в какой-либо функциональной сетке (логарифмической, полулогарифмической и т. д.), в которой он может оказаться прямолинейным. Ниже приводятся некоторые из формул, которые следует выбрать в таких случаях, с указанием соответствующего преобразования к линейному виду (а н а м о р ф о з а):

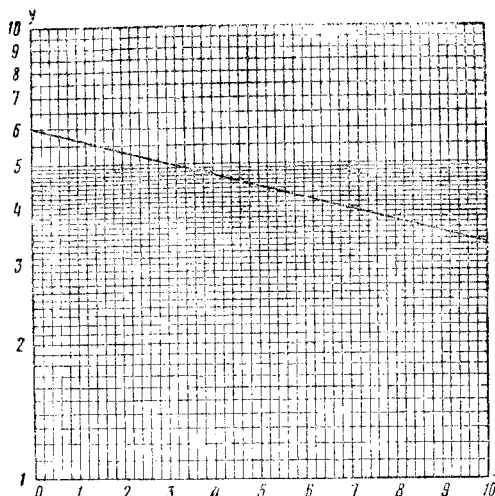
1) $y = ax^n$. Логарифмируя, имеем: $\lg y = \lg a + n \lg x$; положив $\lg x = X$ и $\lg y = Y$, получим в логарифмической сетке линейную функцию $Y = \lg a + nX$ (фиг. 327);

2) $y = ae^{bx}$ или $y = ab^x$. Логарифмируя, имеем: $\lg y = \lg a + bx \lg e$ или $\lg y = \lg a + x \lg b$; положив $x = X$ и $\lg y = Y$, получим в полулогарифмической сетке (фиг. 328) линейные функции:

$$Y = \lg a + b \cdot X \lg e \text{ или } Y = \lg a + X \cdot \lg b;$$

3) $y^m = a + \frac{b}{x^n}$ (заданы m и n). Положив $\frac{1}{x^n} = X$ и $y^m = Y$, получим линейную функцию $Y = a + bX$.

В других случаях для удобства вычисления параметров эмпирической формулы рекомендуется выбрать вид функции по возможности линейным относительно параметров.



Фиг. 328

Основываясь на теореме исчисления конечных разностей (стр. 244) о том, что если разности n -го порядка табличной функции постоянны (при равноотстоящих значениях аргумента), то функция представляет собой многочлен n -й степени, весьма часто выбирают эмпирическую формулу в виде многочлена

$$y = a + bx + cx^2 + \dots + lx^n,$$

число членов которого определяется указанной теоремой.

Так, например, если в таблице конечные разности третьего порядка почти постоянны, то соответствующую эмпирическую формулу следует выбирать в виде многочлена третьей степени

$$y = a + bx + cx^2 + dx^3.$$

ВЫЧИСЛЕНИЕ ЗНАЧЕНИЙ ПАРАМЕТРОВ ЭМПИРИЧЕСКОЙ ФОРМУЛЫ

Для определения значений параметров выбранного типа эмпирической формулы применяют обычно три основных метода: метод выбранных точек (графический метод), метод средних и метод наименьших квадратов.

МЕТОД ВЫБРАННЫХ ТОЧЕК (ГРАФИЧЕСКИЙ МЕТОД)

Этот метод применяется в случае линейности выбранной эмпирической формулы (в равномерной или функциональной сетке) и заключается в том, что экспериментальные данные наносятся на чертёж при помощи точек с координатами x_i и y_i (в равномерной сетке) или $X_i = \varphi(x_i)$ и $Y_i = \psi(y_i)$ (в функциональной сетке), после чего проводится прямая таким образом, чтобы она проходила возможно ближе к каждой из нанесённых точек.

Уравнение этой прямой и даёт искомую функциональную зависимость.

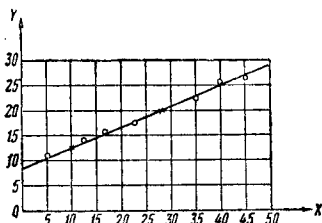
Этот метод весьма несовершенен и может быть рекомендован только для отыскания значений параметров с небольшой точностью.

Можно также рекомендовать предварительно подсчитать координаты центра тяжести данной системы экспериментальных точек $(x_i; y_i)$ по формулам $x_0 = \frac{1}{n} \sum x_i$; $y_0 = \frac{1}{n} \sum y_i$ (n — число экспериментальных точек) и выбирать искомую прямую среди тех, которые проходят через точку $(x_0; y_0)$.

Пример. Составить эмпирическую формулу по следующим табличным данным:

x	5,0	12,5	16,9	22,6	35,1	40,1	45,0
y	10,45	13,61	15,50	17,58	22,81	25,22	26,93

Наносим на чертёж точки, определяемые заданной таблицей (фиг. 329). Так как построенные точ-



Фиг. 329

ки располагаются примерно на прямой линии, то зависимость между x и y выбираем в виде линейной функции

$$y = a + bx$$

и проводим прямую как можно ближе ко всем точкам.

Для определения параметров a и b берём две точки, лежащие на этой прямой: $(10,0; 12,5)$ и $(28; 20)$, обозначенные на фигуре звёздочками, и, подставляя их координаты в уравнение, получим систему уравнений:

$$12,5 = a + 10b;$$

$$20 = a + 28b,$$

откуда $a = 8,3$ и $b = 0,42$ и, следовательно, искомая эмпирическая формула будет

$$y = 8,3 + 0,42x.$$

МЕТОД СРЕДНИХ

Метод средних применяется для определения значений параметров таких эмпирических формул, которые линейны относительно параметров или легко могут быть преобразованы к линейному относительно параметров виду. Он основан на допущении, что наиболее подходящей формулой будет та, для которой алгебраическая сумма отклонений (т. е. разностей между табличными значениями функции и значениями, полученными из выбранной эмпирической формулы путём подстановки в неё соответствующих значений аргументов x_i) равна нулю.

Для нахождения по методу средних параметров эмпирической формулы подставляем в неё все пары экспериментальных табличных значений x_i и y_i . Полученные уравнения разбиваем на столько групп, сколько имеется

параметров, с таким расчётом, чтобы каждая группа содержала по возможности одинаковое число уравнений.

Приравнявая нулю сумму отклонений в каждой из групп (для чего складываем между собой уравнения каждой группы), получим систему уравнений, число которых равно числу искомых параметров. Решая эту систему уравнений, определяем значения параметров эмпирической формулы.

Пример. Составить эмпирическую формулу по данным, помещённым в первых двух столбцах приведённой ниже таблицы:

x	y	Δy	$\Delta^2 y$
0	0,957		
0,1	0,969	0,012	-0,005
0,2	0,976	0,007	-0,005
0,3	0,978	0,002	-0,005
0,4	0,975	-0,003	-0,004
0,5	0,968	-0,007	-0,007
0,6	0,954	-0,014	-0,001
0,7	0,939	-0,015	-0,006
0,8	0,918	-0,021	-0,003
0,9	0,894	-0,024	

Для выбора вида функциональной зависимости в таблице подсчитаны конечные разности первого и второго порядка. Так как вторые разности почти постоянны, то выберем эмпирическую формулу в виде

$$y = a + bx + cx^2.$$

Подставляя в неё значения x_i и y_i из нашей таблицы, получим следующие соотношения:

$$\left. \begin{aligned} 0,957 &= a + 0 \cdot b + 0 \cdot c \\ 0,969 &= a + 0,1b + 0,01c \\ 0,976 &= a + 0,2b + 0,04c \\ 0,978 &= a + 0,3b + 0,09c \end{aligned} \right\} \quad (I)$$

$$\left. \begin{aligned} 0,975 &= a + 0,4b + 0,16c \\ 0,968 &= a + 0,5b + 0,25c \\ 0,954 &= a + 0,6b + 0,36c \end{aligned} \right\} \quad (II)$$

$$\left. \begin{aligned} 0,939 &= a + 0,7b + 0,49c \\ 0,918 &= a + 0,8b + 0,64c \\ 0,894 &= a + 0,9b + 0,81c \end{aligned} \right\} \quad (III)$$

Распределяя эти соотношения на три группы, как указано выше, и складывая между собой уравнения каждой группы, получим систему из трёх уравнений для определения параметров a , b и c :

$$\left. \begin{aligned} 3,880 &= 4a + 0,6b + 0,14c; \\ 2,897 &= 3a + 1,5b + 0,77c; \\ 2,761 &= 3a + 2,4b + 1,94c. \end{aligned} \right\}$$

Решая эту систему, находим

$$a = 0,958; b = 0,130, c = -0,2248$$

и, следовательно

$$y = 0,958 + 0,130x - 0,2248x^2.$$

МЕТОД НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

Метод наименьших квадратов (стр. 229) в применении к составлению эмпирических формул основан на предположении, что экспериментально найденные значения аргумента x_i точные и что наилучшей формулой является та, для которой сумма квадратов отклонений функции наименьшая. Заметим, что так как квадраты отклонений положительны, то при этом и абсолютные значения

уклонений будут малы, т. е. кривая, изображающая эмпирическую формулу, пройдет весьма близко ко всем экспериментальным точкам.

Для определения значений параметров эмпирической формулы по методу наименьших квадратов составляют сперва условные уравнения относительно n искоемых параметров $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$, для чего в выбранную эмпирическую формулу подставляют экспериментально полученные значения аргумента x_i и функции y_i . Предполагая, что искоемые параметры входят линейным образом, получим систему m условных уравнений ($m > n$), линейных относительно параметров. Количество уравнений в этой системе равно числу экспериментальных точек.

Далее, при помощи системы условных уравнений составляется система нормальных уравнений (стр. 230), из которой определяются наилучшие значения параметров a_i .

Пример. Определить по методу наименьших квадратов параметры эмпирической формулы квадратичного вида $y = a + bx + cx^2$ по следующим данным:

x	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
y	3,1950	3,2299	3,2532	3,2611	3,2516	3,2282	3,1807	3,1266	3,0594	2,9759

Табличные данные подставляем в формулу $y = a + bx + cx^2$ и получаем систему условных уравнений:

$$\begin{aligned} 3,1950 &= a + 0 \cdot b + 0 \cdot c; \\ 3,2299 &= a + 0,1 b + 0,01 c; \\ 3,2532 &= a + 0,2 b + 0,04 c; \\ 3,2611 &= a + 0,3 b + 0,09 c; \\ 3,2516 &= a + 0,4 b + 0,16 c; \\ 3,2282 &= a + 0,5 b + 0,25 c; \\ 3,1807 &= a + 0,6 b + 0,36 c; \\ 3,1266 &= a + 0,7 b + 0,49 c; \\ 3,0594 &= a + 0,8 b + 0,64 c; \\ 2,9759 &= a + 0,9 b + 0,81 c. \end{aligned}$$

Для получения из этой системы условных уравнений первого нормального уравнения складываем их почленно (умножать в данном случае не нужно, так как коэффициенты при a во всех уравнениях равны единице); для получения второго нормального уравнения умножаем обе части первого условного уравнения на 0 (коэффициент при b), второго — на 0,1, третьего — на 0,2 и т. д. и складываем их; аналогичным образом получаем и третье нормальное уравнение. Решив полученную таким образом систему:

$$\begin{aligned} 31,7616 &= 10 a + 4,5 b + 2,85 c; \\ 14,0896 &= 4,5 a + 2,85 b + 2,025 c; \\ 8,82881 &= 2,85 a + 2,025 b + 1,5330 c, \end{aligned}$$

найдем параметры эмпирической формулы:

$$a = 3,1951; b = 0,44254; c = -0,76531,$$

и, следовательно, эмпирическая формула запишется в виде

$$y = 3,1951 + 0,44254 x - 0,76531 x^2.$$

ПРИБЛИЖЁННЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

ПРИБЛИЖЁННЫЕ ЧИСЛА

Различного рода измерения, лежащие в основе почти любого технического расчёта, неизбежно сопровождаются погрешностями вследствие несовершенства способов измерений и других причин. Поэтому исходные числовые данные технических расчётов являются не точными, а приближёнными, верными обычно до двух, трёх и реже большего числа знаков. Многие из точных чисел, встречающихся в расчётах (π , e , корни, тригонометрические величины, логарифмы и т. д.), выражаются бесконечными десятичными дробями; при вычислениях приходится их обрывать на том или ином знаке и тем самым превращать в приближённые числа. Располагая приближёнными данными, вычислитель должен уметь правильно использовать их и с наименьшей затратой труда получить результаты с требуемой точностью.

Абсолютная величина разности между точным значением величины x и её приближённым значением a называется абсолютной погрешностью приближённого числа: $\alpha_a = |x - a|$; отношение абсолютной погрешности α к модулю приближённого числа a называется его относительной погрешностью: $d_a = \frac{\alpha_a}{|a|}$. Относительную погрешность часто выражают в процентах.

Так как обычно величина погрешности неизвестна, то на практике пользуются так называемыми предельными погрешностями.

Предельной абсолютной погрешностью приближённого числа a называется число ϵ_a , которого не превосходит абсолютная погрешность α_a :

$$\epsilon_a \geq \alpha_a.$$

Принято говорить, что a есть приближённое значение x с точностью до ϵ_a .

Предельной относительной погрешностью δ_a называется отношение предельной абсолютной погрешности к модулю приближённого числа a :

$$\delta_a = \frac{\epsilon_a}{|a|}.$$

Например, если за приближённое значение числа $\pi = 3,14159\dots$ принять число 3,14, то абсолютная погрешность

$$\alpha = |3,14159\dots - 3,14| = 0,00159\dots,$$

а за предельную абсолютную погрешность можно принять

$$\epsilon = 0,002.$$

Относительная погрешность

$$d = \frac{0,00159\dots}{3,14} = 0,000506\dots,$$

а предельная относительная погрешность

$$\delta = \frac{0,002}{3,14} = 0,00064 = 0,064\%.$$

Число a является приближением числа x с n верными знаками, если предельная абсолютная погрешность его не превосходит

единицы, или, как иногда улаиваются, половины единицы разряда n -й цифры приближенного числа. Приближенные числа принято записывать, сохраняя только верные знаки; так, например, если предельная абсолютная погрешность числа 34500 равна 50, то его записывают в виде $345 \cdot 10^2$. При этом способом записи легко оценить погрешность приближенного числа по числу его верных знаков. Например, для числа 2,72, являющегося приближением числа $e = 2,71828...$ с тремя верными знаками, имеем:

$$\varepsilon = |e - 2,72| = 0,0017... < 0,002 = 2 \cdot 10^{-3};$$

$$\delta = \frac{2 \cdot 10^{-3}}{2,72} = 0,74 \cdot 10^{-3} = 0,074\%.$$

Если приближенное число имеет n верных знаков, то его предельные погрешности можно определить по формулам:

$$\varepsilon_a \leq \frac{1}{2} \cdot 10^m - n + 1,$$

где m — наивысшая степень 10, не превышающая числа a ,

$$\delta_a \leq \frac{1}{2z \cdot 10^{n-1}},$$

где z — первая значащая (т. е. первая отличная от нуля) цифра числа a .

Пользуясь последней формулой, можно составить таблицу для определения относительной погрешности приближенного числа при сохранении в нём определённого числа верных знаков.

Таблица 23
Определение относительной погрешности в процентах при округлении чисел и сохранении n верных знаков
(z — первая значащая цифра числа)

$n \backslash z$	1	2	3	4	5
1	50	5,0	0,5	0,050	0,0050
2	25	2,5	0,25	0,025	0,0025
3	17	1,7	0,17	0,017	0,0017
4	12	1,2	0,12	0,012	0,0012
5	10	1,0	0,1	0,010	0,0010
6	8,3	0,83	0,083	0,0083	0,00083
7	7,1	0,71	0,071	0,0071	0,00071
8	6,3	0,63	0,063	0,0063	0,00063
9	5,6	0,56	0,056	0,0056	0,00056

Если приближенное число a имеет предельную относительную погрешность δ_a , то число a его верных знаков можно определить из неравенства

$$(1+z)\delta_a \leq 10^{1-n},$$

где z — первая значащая цифра числа a , а n — наибольшее целое число, удовлетворяющее этому неравенству.

Здесь предполагается, что наличие n верных знаков обозначает, что абсолютная погрешность не превосходит единицы разряда n -го знака.

При помощи последнего неравенства можно составить таблицу для определения количества верных знаков приближенного числа по его предельной относительной погрешности.

Таблица 24
Определение количества верных знаков числа по его предельной относительной погрешности δ
(z — первая значащая цифра числа)

$\delta \backslash z$	10%	5%	1%	0,5%	0,1%	0,05%
1	1	2	2	3	3	4
2	1	2	2	3	3	4
3	1	1	2	2	3	3
4	1	1	2	2	3	3
5	1	1	2	2	3	3
6	1	1	2	2	3	3
7	1	1	2	2	3	3
8	1	1	2	2	3	3
9	1	1	2	2	3	3

В случае, когда приближенное число содержит сомнительные или лишние знаки, его округляют, т. е. отбрасывают эти знаки, причём последнюю из оставшихся цифр увеличивают на единицу, если первая из отбрасываемых цифр равна или больше 5; в случае, когда отбрасываемая часть состоит из одной цифры 5, округление производится таким образом, чтобы последняя сохраняемая цифра была чётной. Так, например, число $\pi = 3,1415926...$ при округлении принимает значения: 3,14; 3,142; 3,1416 и т. д.; число 2,725 при округлении превращается в 2,72, а число 83,55 в 83,6.

По этому правилу абсолютная погрешность при округлении приближенных чисел не превышает половины единицы разряда последней цифры округленного числа.

ПРАВИЛА ДЕЙСТВИЙ НАД ПРИБЛИЖЕННЫМИ ЧИСЛАМИ

1. Предельная абсолютная погрешность алгебраической суммы z приближенных чисел $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ равна сумме предельных абсолютных погрешностей ε_i слагаемых:

$$\varepsilon_s = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_n.$$

2. Предельная относительная погрешность алгебраической суммы определяется по формуле

$$\delta_s = \left| \frac{a_1}{s} \right| \delta_1 + \left| \frac{a_2}{s} \right| \delta_2 + \dots + \left| \frac{a_n}{s} \right| \delta_n,$$

где δ_i — предельные относительные погрешности слагаемых.

Примечание. Относительная погрешность суммы положительных чисел заключена между наибольшей и наименьшей из относительных погрешностей слагаемых; относительная погрешность разности положительных чисел может оказаться очень большой по сравнению с относительными погрешностями уменьшаемого и вычитаемого, если последние очень близкие между собой числа.

3. Предельная относительная погрешность произведения или частного приближенных чисел a и b равна сумме предельных относительных погрешностей сомножителей¹:

$$\delta_{ab} = \delta_a + \delta_b.$$

¹ В формулировке всех правил, кроме первых двух, предполагается, что относительные погрешности величин, над которыми производятся действия, столь малы, что их произведениями, а также и степенями с показателями, большими единицы, можно пренебречь.

Это правило распространяется и на большее число сомножителей и делителей.

4. Предельная относительная погрешность степени приближенного числа a равна предельной относительной погрешности основания, умноженной на абсолютное значение показателя степени:

$$\delta_{a^n} = |n| \delta_a.$$

5. Предельная абсолютная погрешность натурального логарифма некоторого числа равна предельной относительной погрешности самого числа, а предельная абсолютная погрешность десятичного логарифма равна предельной относительной погрешности самого числа, умноженной на логарифмический модуль ($M = \lg e$):

$$\begin{aligned}\epsilon_{\ln x} &= \delta_{\ln x}; \\ \epsilon_{\lg x} &= M \delta_{\lg x} \approx 0,0434 \delta_{\lg x}.\end{aligned}$$

6. Предельная абсолютная погрешность функции $y = f(x)$ равна произведению абсолютного значения производной этой функции на предельную абсолютную погрешность аргумента, т. е. имеет структуру, аналогичную структуре дифференциала функции

$$\epsilon_y = |f'(x)| \epsilon_x.$$

В частности:

$$\begin{aligned}\epsilon_{x^n} &= |nx^{n-1}| \epsilon_x; \quad \epsilon_{\sin x} = |\cos x| \epsilon_x; \\ \epsilon_{\cos x} &= |\sin x| \epsilon_x; \\ \epsilon_{\operatorname{ctg} x} &= \frac{1}{\cos^2 x} \cdot \epsilon_x \text{ и т. д.}\end{aligned}$$

7. Предельная относительная погрешность функции $y = f(x)$ равна абсолютному значению произведения аргумента на производную логарифма функции (логарифмическую производную), умноженному на предельную относительную погрешность аргумента

$$\delta_y = \left| x \frac{f'(x)}{f(x)} \right| \delta_x.$$

В частности

$$\delta_{\sin x} = |x \operatorname{ctg} x| \delta_x; \quad \delta_{\cos x} = |x \operatorname{tg} x| \delta_x$$

и т. д.

8. Предельная абсолютная погрешность функции нескольких аргументов $u = f(x, y, \dots)$ определяется по формуле

$$\epsilon_u = \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right| \epsilon_x + \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| \epsilon_y + \dots,$$

т. е. имеет структуру, аналогичную структуре полного дифференциала. Например, если

$$u = e^{-ax} \cos by,$$

то

$$\epsilon_u = |ae^{-ax} \cos by| \epsilon_x + |be^{-ax} \sin by| \epsilon_y.$$

При помощи этих правил решаются так называемые прямая и обратная задачи приближенных вычислений: как оценить точность вычисленного значения функции при заданных значениях аргументов и их предельных погрешностей (прямая задача) и как определить, каковы должны быть предельные погрешности аргументов, чтобы

предельная погрешность функции не превышала заданной (обратная задача).

Если для вычисления функции приходится производить действия сложения и вычитания, то при решении прямой задачи удобнее пользоваться абсолютными погрешностями данных чисел; если же производятся действия умножения, деления, возведения в степень и извлечения корня, то рекомендуется пользоваться относительными погрешностями.

В общем случае целесообразно переходить от абсолютных погрешностей к относительным и обратно в зависимости от характера производимых действий.

При вычислении по формулам, имеющим вид дробей, у которых числитель и знаменатель являются произведениями нескольких множителей, можно производить сокращения числителя и знаменателя даже тогда, когда точное сокращение невозможно, при условии, что вводимые при этом новые относительные погрешности меньше погрешностей данных чисел.

Обратная задача часто бывает неопределенной. Поэтому приходится вводить дополнительные условия об искомых погрешностях; так, например, в зависимости от характера задачи можно принимать равными между собой либо все искомые абсолютные погрешности, либо все относительные погрешности.

Следует учесть также, что в случае прямой задачи при вычислении погрешности функции допускаются округления чисел при условии увеличения искомой погрешности, а при решении обратной задачи допускаются округления чисел при условии уменьшения искомых погрешностей.

Пример 1. Вычислить индикаторную мощность N паровой машины в лошадиных силах по формуле

$$N = \frac{P \cdot F \cdot S \cdot n}{30 \cdot 75}$$

при следующих данных: среднее давление на поршень $P = 6,3 \text{ кг/см}^2$, площадь поршня

$$F = \frac{\pi d^2}{4} \text{ см}^2 = \frac{3,14 (28,4)^2}{4} \text{ см}^2;$$

ход поршня $S = 0,485 \text{ м}$ и число оборотов в минуту $n = 120$.

Составляем буквенное выражение предельной относительной погрешности результата ($\delta_N = 0$):

$$\delta_N = \delta_P + \delta_F + \delta_S = \delta_P + \delta_\pi + 2\delta_d + \delta_S;$$

так как

$$\delta_P = \frac{0,5}{60} = \frac{1}{120}; \quad \delta_\pi = \frac{0,2}{300} = \frac{1}{1500};$$

$$\delta_d = \frac{0,05}{25} = \frac{1}{500}; \quad \delta_S = \frac{0,5}{450} = \frac{1}{900}.$$

то

$$\begin{aligned}\delta_N &= \frac{1}{120} + \frac{1}{1500} + \frac{2}{500} + \frac{1}{900} = \frac{75 + 6 + 36 + 12}{9000} = \\ &= \frac{127}{9000} < \frac{1}{75}.\end{aligned}$$

Подставив данные числовые значения, получим

$$N = \frac{6,3 \cdot 3,14 \cdot 28,4 \cdot 28,4 \cdot 0,485 \cdot 120}{30 \cdot 75 \cdot 4} = 103 \text{ ЛС}$$

и, следовательно

$$\epsilon_N = 103,0 \cdot \frac{1}{75} = 1,4 \text{ ЛС}.$$

Пример 2. С какой точностью надо измерить диаметр основания и высоту цилиндра, чтобы абсолютная погрешность объема не превышала $0,5 \text{ см}^3$

при диаметре основания $d \approx 20$ см и высоте $h \approx 80$ см?

$$v = \frac{\pi d^2 h}{4},$$

откуда $\delta_v = \delta_\pi + 2\delta_d + \delta_h$.

Задача неопределённая (одно уравнение с тремя неизвестными: δ_π , δ_d и δ_h), поэтому вводим дополнительные условия, предполагая, что погрешность δ_π может быть сделана сколь угодно малой, а погрешности δ_d и δ_h равны между собой (будем обозначать их через δ). Тогда

$$\delta_v = \delta_\pi + 3\delta.$$

Имеем

$$v \approx \frac{3,2 \cdot 20^2 \cdot 80}{4} = 25\,600 \text{ см}^3 < 30 \text{ дм}^3;$$

$$\delta_v > \frac{0,5}{30} = \frac{1}{60}.$$

Если принять $\pi = 3,14$, то $\delta_\pi < \frac{1}{1\,500}$.

По сравнению с величиной δ_v величина δ_π , даже при трёх значащих цифрах числа π , настолько мала, что ею можно пренебречь. Получаем

$$\frac{1}{60} = 3\delta,$$

откуда

$$\delta = \frac{1}{180}$$

и, следовательно

$$\epsilon_d = 20 \cdot \frac{1}{180} > 0,1 \text{ см},$$

$$\epsilon_h = 80 \cdot \frac{1}{180} > 0,4 \text{ см},$$

т. е. диаметр цилиндра должен быть измерен с точностью до 0,1 см, а высота — до 0,4 см.

ПРАВИЛА ПОДСЧЁТА ЦИФР ПРИ ДЕЙСТВИЯХ С ПРИБЛИЖЁННЫМИ ЧИСЛАМИ БЕЗ ТОЧНОГО УЧЁТА ПОГРЕШНОСТЕЙ

В приведённых выше правилах оценки погрешностей предполагается, что различные погрешности усиливают друг друга, тогда как на практике, в случае массовых вычислений, это бывает редко. Если отказаться от требования строгого определения предельных погрешностей, то можно дать другие, практически пригодные способы оценки точности полученного результата, называемые правилами подсчёта цифр. Пользуясь ими, можно считать, что в среднем полученные в результате приближённые числа имеют все знаки верные, хотя в отдельных случаях возможна ошибка в несколько единиц разряда последнего знака.

В качестве примера могут быть приведены следующие правила (по В. Брадису):

1. При сложении и вычитании приближённых чисел в результате следует сохранять столько десятичных знаков, сколько их имеется в приближённом данном с наименьшим числом десятичных знаков.

2. При умножении и делении приближённых чисел в результате следует сохранять столько зна-

чащих цифр, сколько их имеет приближённое данное с наименьшим числом значащих цифр.

Если первая цифра результата по крайней мере вдвое больше первой цифры того из данных чисел, которое имеет наименьшее количество значащих цифр, то следует в полученном числе взять одной значащей цифрой меньше.

3. При возведении в квадрат и в куб приближённых чисел в результате следует сохранять столько значащих цифр, сколько их имеет возводимое в степень число, кроме тех случаев, когда первая цифра степени по крайней мере вдвое больше первой цифры основания; в этих случаях в результате следует последнюю значащую цифру отбросить.

4. При извлечении квадратного и кубического корня из приближённых чисел в результате следует брать столько значащих цифр, сколько их имеет подкоренное число.

При этом последняя цифра квадратного и особенно кубического корня более надёжна, чем последняя цифра подкоренного числа.

5. При вычислении промежуточных результатов следует брать одной цифрой больше, чем рекомендуют предыдущие правила. В окончательном результате эта «запасная» цифра отбрасывается.

6. Если некоторые приближённые данные имеют больше десятичных знаков (при сложении и вычитании) или больше значащих цифр (при умножении, делении, возведении в степень и извлечении корня), чем другие, то их предварительно следует округлять, сохраняя только одну лишнюю цифру.

7. Если данные можно брать с произвольной точностью, то для получения результата с k цифрами следует брать данные с таким числом цифр, которое даёт, согласно правилам 1—4, в результате $k+1$ цифру.

8. При вычислении одночленного выражения посредством логарифмов следует подсчитать число значащих цифр в приближённом данном, имеющем наименьшее число значащих цифр, и взять для пользования таблицы логарифмов с числом десятичных знаков на единицу большим; в окончательном результате последнюю значащую цифру надо отбросить.

ПРИБЛИЖЁННЫЕ ФОРМУЛЫ

В табл. 25 приводятся некоторые приближённые формулы, для каждой из которых указано наибольшее значение абсолютной величины x , при котором формула даёт n верных десятичных знаков.

Таблица 25
Приближённые формулы

Ф о р м у л а	$n=2$	$n=3$	$n=1$
$(1+x)^2 \approx 1+2x$	0,07	0,022	0,007
$(1+x)^3 \approx 1+3x$	0,04	0,012	0,004
$\sqrt{1+x} \approx 1+\frac{1}{2}x$	0,19	0,062	0,020
$\sqrt[3]{1+x} \approx 1+\frac{1}{3}x$	0,20	0,065	0,021
$\frac{1}{1+x} \approx 1-x$	0,06	0,022	0,007
$10^x \approx 1+2,303x$	0,04	0,014	0,004
$\lg(1+x) \approx 0,4343x$	0,14	0,047	0,015
$\lg \frac{1+x}{1-x} \approx 0,8686x$	0,25	0,119	0,055
$\sin x \approx x$	17°48'	8°15'	3°50'
$\cos x \approx 1$	5°43'	1°48'	0°34'
$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}$	33°43'	18°58'	10°40'
$\lg x \approx x$	14°8'	6°25'	3°2'

ПРИБЛИЖЁННОЕ РЕШЕНИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ И ТРАНСЦЕНДЕНТНЫХ УРАВНЕНИЙ

ГРАФИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ

Графические методы решения алгебраических и трансцендентных уравнений применяются в тех случаях, когда не требуется большая точность.

Для отыскания графическим методом действительных корней уравнения вида $f(x) = 0$ следует построить график функции $y = f(x)$ и определить точки пересечения или, в случае кратных корней, точки касания его

с осью OX . Абсциссы этих точек являются искомыми корнями уравнения $f(x) = 0$.

Пример. Решить графически уравнение $x^3 + 3x^2 - 2 = 0$.

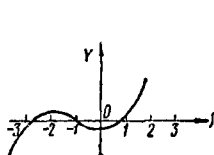
Строим график функции $y = x^3 + 2x^2 - 2$; абсциссы пересечения этого графика с осью OX являются корнями уравнения

$$x_1 = -2,73; x_2 = -1; x_3 = 0,73$$

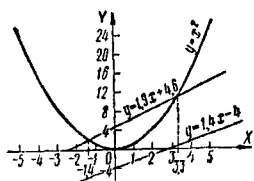
(фиг. 330; на чертеже масштаб на оси OY выбран в шесть раз меньше, чем на оси OX).

Иногда бывает полезно разбить члены уравнения $f(x) = 0$ на две группы, оставив в левой части один или несколько членов и перенести остальные в правую часть. Тогда уравнение примет вид $f_1(x) = f_2(x)$, после чего следует вычертить два графика $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$ и найти точки пересечения построенных графиков. Абсциссы этих точек являются искомыми корнями уравнения $f(x) = 0$.

Если удастся выбрать функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ так, что их графики строятся проще, чем график функции $f(x)$, то этот способ выгоднее первого; его преимущества особенно сказываются в тех случаях, когда одна из функций, например $f_2(x)$ — линейная и графическое решение уравнения сводится к нахождению точки пересечения кривой $y = f_1(x)$ с прямой линией $y = f_2(x) = kx + b$. При необходимости решать большое количество однотипных уравнений вида $f_1(x) = kx + b$, отличающихся только коэффициентами линейной функции в правой части, целесообразно вычертить один раз график функции $y = f_1(x)$ на отдельном листе прозрачной бумаги, после чего для решения какого-либо уравнения данного типа остаётся построить в том же масштабе прямую линию $y = kx + b$, наложить на неё лист с вычерченной кривой $y = f_1(x)$ и определить абсциссы точек пересечения. Для решений любого другого урав-



Фиг. 330



Фиг. 331

нения этого типа приходится строить только новую прямую, соответствующую правой части этого уравнения, каждый раз используя тот же лист с графиком функции

$$y = f_1(x).$$

Пример. Решить графически квадратное уравнение

$$x^2 + px + q = 0.$$

Перепишем уравнение в виде

$$x^2 = -px - q$$

и строим параболу $y = x^2$ и прямую $y = -px - q$. Абсциссы точек пересечения параболы с прямой являются искомыми корнями. На фиг. 331 показано, как графически решается уравнение $x^2 - 1,9x - 4,6 = 0$. Его корни: $x_1 = 3,3$ и $x_2 = -1,4$. На том же чертеже видно, что уравнение $x^2 - 1,4x + 4 = 0$ не имеет действительных корней, так как парабола $y = x^2$ и прямая $y = 1,4x - 4$ не пересекаются между собой. Масштаб на оси OY выбран в четыре раза меньше, чем на оси OX .

Аналогичным образом решается кубическое уравнение

$$x^3 + px + q = 0$$

и, вообще, трёхчленные уравнения вида

$$x^3 + px + q = 0.$$

На фиг. 332 дано графическое решение двух кубических уравнений:

$$x^3 - 7x - 6 = 0 \text{ и } x^3 + 2,8x - 7 = 0.$$

Корни первого уравнения: $x_1 = -2$, $x_2 = -1$, $x_3 = 3$; второе уравнение имеет один действительный корень $x_1 = 1,4$. Масштаб на оси OY выбран в двадцать раз меньше, чем на оси OX .

Для графического решения системы двух уравнений с двумя неизвестными:

$$f(x, y) = 0;$$

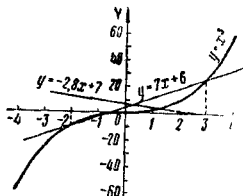
$$\varphi(x, y) = 0,$$

строят кривые, соответствующие этим уравнениям, и определяют точки пересечения кривых. Координаты каждой из точек пересечения дают пару значений неизвестных x и y , удовлетворяющих системе.

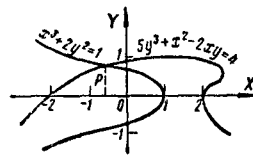
Пример. Решить систему уравнений:

$$x^2 + 2y^2 = 1;$$

$$5y^2 + x^2 - 2xy = 4.$$



Фиг. 332



Фиг. 333

Вычертив кривые, соответствующие этим уравнениям (фиг. 333), мы видим, что они пересекаются только в одной точке P ; следовательно, эта система имеет только одно действительное решение.

Из чертежа находим:

$$x = -0,65; y = 0,8.$$

МЕТОД ИТАРАЦИИ

Для решения уравнения $f(x) = 0$ методом итерации (повторения) перепишем уравнение в виде

$$x + f(x) - x = 0$$

или

$$x = \varphi(x), \text{ где } \varphi(x) = x - f(x).$$

Графическим или каким-либо иным способом находим начальное приближённое значение корня x_0 и подставляем его в правую часть уравнения $x = \varphi(x)$ вместо x , получим первое уточнённое значение корня

$$x^{(1)} = \varphi(x_0).$$

Аналогично подставляя в $\varphi(x)$ вместо x вычисленное значение $x^{(1)}$, будем иметь второе уточнённое значение

$$x^{(2)} = \varphi(x^{(1)}).$$

Повторяя этот процесс несколько раз, получим:

$$x^{(3)} = \varphi(x^{(2)}),$$

$$x^{(4)} = \varphi(x^{(3)}),$$

$$x^{(n)} = \varphi(x^{(n-1)}).$$

Процесс итерации прекращается, как только достигается требуемая точность, т. е. когда абсолютная величина разности между двумя соседними значениями корня становится меньше допустимой погрешности.

Для того чтобы процесс итерации был сходящимся, достаточно выполнение условия $|\varphi'(x)| < 1$ в окрестности искомого корня. Сходимость тем быстрее, чем меньше $|\varphi'(x)|$. Так как функцию $\varphi(x)$ можно выбрать по-разному, то следует иметь в виду, что при неудачном выборе $\varphi(x)$ процесс итерации может привести не к уменьшению, а к увеличению погрешности. Так, например, метод итерации нельзя применить к уравнению $x = \lg x$, но если это уравнение преобразовать к виду $x = \operatorname{arctg} x$, то процесс итерации станет сходящимся.

Пример. Найти действительный корень уравнения

$$\lg x - 2x + 7 = 0.$$

Для нахождения начального приближённого значения корня перепишем уравнение в форме

$$\lg x = 2x - 7,$$

построим кривую $y = \lg x$ и прямую $y = 2x - 7$ (Фиг. 334) и определим абсциссу точки пересечения $x_0 = 3,8$.

Преобразуем данное уравнение к виду

$$x = \frac{1}{2} (\lg x + 7)$$

и подставим в правую часть вместо x значение $x_0 = 3,8$, получим уточнённое значение корня

$$x^{(1)} = \frac{1}{2} (\lg 3,8 + 7) = 3,79.$$

Аналогичным образом вычисляем:

$$x^{(2)} = \frac{1}{2} (\lg 3,79 + 7) = 3,7893;$$

$$x^{(3)} = \frac{1}{2} (\lg 3,7893 + 7) = 3,7893.$$

Если ограничиться приближённым значением корня с пятью верными знаками, то на этом вычислении можно прекратить, приняв $x = 3,7893$.

Быстрая сходимость процесса итерации объясняется тем, что в нашем случае величина $|\varphi'(x)|$ мала:

$$|\varphi'(x)| = \left| \frac{1}{2x} \right| \approx \frac{1}{7,6}.$$

Метод итерации может быть применён и тогда, когда уравнение задано в виде бесконечного ряда. Так, например, если дано уравнение

$$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10} - \frac{x^7}{42} + \frac{x^9}{216} - \dots = 0,4431,$$

то, переписав его в виде

$$x = 0,4431 + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{10} + \frac{x^7}{42} - \frac{x^9}{216} + \dots,$$

отбросив старшие члены, начиная с x^3 , и округлив свободный член, положим

$$x^{(0)} = 0,44.$$

Подставляя значение 0,44 в правую часть уравнения вместо x , будем иметь:

$$x^{(1)} = 0,4431 + \frac{(0,44)^3}{3} - \frac{(0,44)^5}{10} + \frac{(0,44)^7}{42} \approx 0,470.$$

Аналогично получим

$$x^{(2)} = 0,4431 + \frac{(0,47)^3}{3} - \frac{(0,47)^5}{10} + \frac{(0,47)^7}{42} \approx 0,476 \text{ и т. д.}$$

Для применения метода итерации к решению системы двух уравнений с двумя неизвестными:

$$f_1(x, y) = 0;$$

$$f_2(x, y) = 0,$$

перепишем их в виде:

$$x = \varphi_1(x, y);$$

$$y = \varphi_2(x, y).$$

Определив графически (или иным путём) начальные приближённые значения корней

x_0 и y_0 и подставив их в уравнения, получим первое приближение:

$$x^{(1)} = \varphi_1(x_0, y_0);$$

$$y^{(1)} = \varphi_2(x_0, y_0).$$

Аналогично находим последующие приближения:

$$\begin{cases} x^{(2)} = \varphi_1(x^{(1)}, y^{(1)}) \\ y^{(2)} = \varphi_2(x^{(1)}, y^{(1)}) \end{cases} \quad \begin{cases} x^{(3)} = \varphi_1(x^{(2)}, y^{(2)}) \\ y^{(3)} = \varphi_2(x^{(2)}, y^{(2)}) \end{cases}$$

и т. д.

Для сходимости процессов итерации достаточно выполнение условий

$$\left| \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \right| + \left| \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \right| < 1 \quad \text{и} \quad \left| \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \right| + \left| \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \right| < 1,$$

в окрестности точки (x_0, y_0) , причём сходимость будет тем быстрее, чем меньше будет каждая из левых частей обоих неравенств.

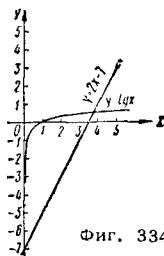
Подобным образом применяется метод итерации и к решению систем уравнений с большим числом неизвестных.

ОТДЕЛЕНИЕ КОРНЕЙ УРАВНЕНИЯ

Отделение корней уравнения $f(x) = 0$ состоит в определении двух чисел a и b , между которыми находится только один действительный корень уравнения. Если левая часть уравнения $f(x)$ представляет собой непрерывную функцию и если уравнение $f(x) = 0$ имеет действительные корни, то, придавая x различные последовательные числовые значения и вычисляя соответствующие значения функции $f(x)$, можно определить такую пару близких между собой значений a и b ($a < b$), при которых значения функции будут иметь разные знаки:

$$f(a) < 0, \quad \text{а} \quad f(b) > 0,$$

или наоборот. В этом случае между a и b находится по крайней мере один действительный корень нашего уравнения. Продолжая вычислять значения функции для значений x , расположенных между a и b , мы можем интервал (a, b) заменить меньшим интервалом (a', b') , на концах которого $f(x)$ также имеет разные знаки, и так можно продолжать до тех пор, пока этот интервал не станет меньше абсолютной погрешности, с которой желательно определить корень уравнения. Так, например, если дано уравнение $x \lg x - 1,2 = 0$, то для отделения корня составляем таблицу значений x и соответствующих им значений $f(x) = x \lg x - 1,2$:



Фиг. 334

x	$f(x) = x \lg x - 1,2$
0	-1,2
0,2	-1,34
0,4	-1,36
0,6	-1,33
0,8	-1,28
1,0	-1,2
2,0	-0,6
3,0	+0,23
4,0	+1,21

Из этой таблицы заключаем, что так как $f(2) < 0$ и $f(3) > 0$, то в интервале $(2, 3)$ находится корень уравнения $x \lg x -$

—1,2=0; уменьшая указанным способом найденный интервал, можно было бы найти значение этого корня с любой точностью.

Указанный метод отделения корней непригоден для отделения кратного корня функции $f(x)$, если кратность корня чётная или в случае наличия чётного числа весьма близких корней. Такой корень является простым или кратным корнем нечётной кратности производной $f'(x)$ и его отделение может быть произведено при помощи указанного выше способа, который следует применить к $f'(x)$. Следует, конечно, иметь в виду, что не всякий корень функции $f'(x)$ является корнем функции $f(x)$, поэтому необходимо произвести проверку, подставляя найденный корень в $f(x)$.

МЕТОД ЛОЖНОГО ПОЛОЖЕНИЯ

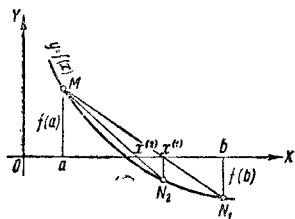
Для приложения этого метода следует предварительно произвести отделение искомого корня уравнения $f(x)=0$, т. е. установить интервал (a, b) , на концах которого функция $f(x)$ имеет разные знаки. Дальнейшее уточнение значения корня можно производить по формуле ложного положения.

$$x^{(1)} = a - \frac{(b-a)f(a)}{f(b)-f(a)}$$

или

$$x^{(1)} = b - \frac{(b-a)f(b)}{f(b)-f(a)}$$

Найденное по этой формуле приближённое значение корня является абсциссой точки пересечения хорды MN_1 кривой $y=f(x)$ с осью OX (фиг. 335) в то время как точное значение корня — абсцисса точки пересечения дуги MN_1 с осью OX .



Фиг. 335

Полученное первое приближение корня может быть опять уточнено путём повторного применения той же формулы для того из меньших интервалов $(a, x^{(1)})$ или $(x^{(1)}, b)$, на концах которого $f(x)$ имеет разные знаки:

$$x^{(2)} = a - \frac{(x^{(1)}-a)f(a)}{f(x^{(1)})-f(a)}$$

или

$$x^{(2)} = b - \frac{(b-x^{(1)})f(b)}{f(b)-f(x^{(1)})}$$

Повторное применение метода ложного положения геометрически означает приближение к корню при помощи хорд MN_1, MN_2 и т. д.

Пример. Решить уравнение $x \lg x - 1,2 = 0$.

Из приведённой на стр. 238 таблицы мы видели, что корень этого уравнения находится между 2 и 3. Поэтому, вычисляя первое приближённое значение корня, получим

$$x^{(1)} = 2 - \frac{(3-2)(-0,6)}{0,23 - (-0,6)} = 2 + 0,72 = 2,72.$$

Так как $f(2,72) = -0,017$ и $f(3) = 0,23$ разных знаков, то, применяя правило ложного положения к интервалу $(2,72; 3)$, получим следующее приближение:

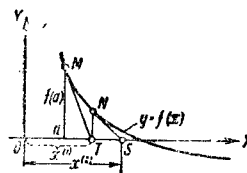
$$x^{(2)} = 2,72 - \frac{(3-2,72)(-0,017)}{0,23 - (-0,017)} \approx 2,74.$$

МЕТОД НЬЮТОНА

Для уточнения приближённого значения корня $x=a$ уравнения $f(x)=0$ можно применить формулу Ньютона

$$x^{(1)} = a - \frac{f(a)}{f'(a)},$$

которая геометрически означает, что дуга кривой $y=f(x)$ заменяется касательной MT (фиг. 336) и вместо точного значения корня



Фиг. 336

x (абсциссы точки пересечения кривой с осью OX) принимается в качестве его приближённого значения $x^{(1)} = a + h$ (абсцисса точки пересечения касательной с осью OX), где поправка $h = -\frac{f(a)}{f'(a)}$.

Повторным применением метода Ньютона можно уточнить полученное первое приближение корня:

$$x^{(2)} = x^{(1)} - \frac{f(x^{(1)})}{f'(x^{(1)})},$$

$$x^{(3)} = x^{(2)} - \frac{f(x^{(2)})}{f'(x^{(2)})},$$

.....

$$x^{(n)} = x^{(n-1)} - \frac{f(x^{(n-1)})}{f'(x^{(n-1)})}.$$

Геометрически это означает приближение к корню при помощи касательных MT, NS и т. д.

Если кривая $y=f(x)$ при пересечении с осью OX почти горизонтальна, т. е. если величина $f'(x)$ близка к нулю или, если вблизи точки пересечения кривой с осью OX имеется точка перегиба, то метод Ньютона не следует применять. В этом случае рекомендуется обратиться к методу ложного положения или к другим методам.

Если в некотором интервале (a, b) , содержащем корень уравнения $f(x)=0$, величина $f''(x)$ знакопостоянна, то целесообразно одновременно производить вычисления как по методу Ньютона, так и по методу ложного

положения; при этом один метод будет давать приближённые значения корня с недостатком, а другой — с избытком, что позволит судить о достигнутой точности.

Пример. Найти действительный корень уравнения

$$x^3 - 2x - 5 = 0.$$

Начальное приближение $x = 2$ (фиг. 337) определяем графически.

Дальнейшее уточнение корня производим по формуле Ньютона, которая даёт

$$x^{(1)} = 2 - \frac{f(2)}{f'(2)} = 2 + \frac{1}{10} = 2,1.$$

Затем находим

$$x^{(2)} = 2,1 - \frac{f(2,1)}{f'(2,1)} = 2,1 - 0,0054 = 2,0946$$

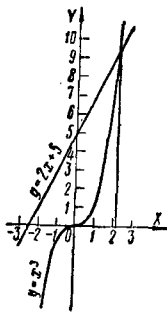
и

$$x^{(3)} = 2,0946 - \frac{f(2,0946)}{f'(2,0946)} = 2,0946 - 0,00004852 = 2,09455148.$$

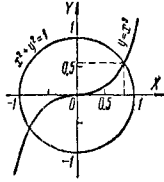
Рассмотренный метод применим и для получения приближённых значений корней системы уравнений.

Например, если в системе:

$$f_1(x, y) = 0; f_2(x, y) = 0,$$



Фиг. 337



Фиг. 338

$x^{(0)}, y^{(0)}$ — начальные приближённые значения корней системы, то следующие их приближения $x^{(1)} = x^{(0)} + h^{(1)}$; $y^{(1)} = y^{(0)} + k^{(1)}$ мы получим, определяя $h^{(1)}$ и $k^{(1)}$ из системы уравнений:

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial f_1}{\partial x} \right]_0 h^{(1)} + \left[\frac{\partial f_1}{\partial y} \right]_0 k^{(1)} + [f_1]_0 &= 0; \\ \left[\frac{\partial f_2}{\partial x} \right]_0 h^{(1)} + \left[\frac{\partial f_2}{\partial y} \right]_0 k^{(1)} + [f_2]_0 &= 0, \end{aligned}$$

где индекс 0, поставленный у скобок, обозначает, что в функции и их производные надо поставить вместо x и y значения $x^{(0)}$ и $y^{(0)}$.

Для получения более точных значений корней следует повторить указанный приём и найти последующие поправки:

$$h^{(2)}, k^{(2)} \text{ и т. д.}$$

Пример. Решить систему уравнений:

$$f_1(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0,$$

$$f_2(x, y) = x^2 - y = 0.$$

Начальные приближения находим графически, как координаты точек пересечения окружности с кубической параболой (фиг. 338):

$$x^{(0)} = 0,9; y^{(0)} = 0,5.$$

Вычислив $f_1(0,9; 0,5) = 0,06$; $f_2(0,9; 0,5) = 0,23$

$$\left[\frac{\partial f_1}{\partial x} \right]_0 = [2x]_0 = 1,8; \left[\frac{\partial f_1}{\partial y} \right]_0 = [2y]_0 = 1;$$

$$\left[\frac{\partial f_2}{\partial x} \right]_0 = [2x]_0 = 2,43; \left[\frac{\partial f_2}{\partial y} \right]_0 = -1,$$

составим систему уравнений для определения поправок $h^{(1)}$ и $k^{(1)}$, имеем:

$$1,08 h^{(1)} + k^{(1)} = -0,06;$$

$$2,43 h^{(1)} - k^{(1)} = -0,23.$$

Решая её, находим поправки:

$$h^{(1)} = -0,07; k^{(1)} = 0,06$$

и, следовательно, первые уточнённые корни будут

$$x^{(1)} = x_0 + h^{(1)} = 0,83; y_1 = y_0 + k^{(1)} = 0,56.$$

Аналогично составляем новую систему поправочных уравнений:

$$1,66 h^{(2)} + 1,12 k^{(2)} = -0,0025;$$

$$2,067 h^{(2)} - k^{(2)} = -0,0118,$$

из которой находим поправки

$$h^{(2)} = -0,0040 \text{ и } k^{(2)} = -0,0036,$$

а затем и вторые приближения:

$$x^{(2)} = 0,8260; y^{(2)} = 0,5636.$$

Третье приближение обнаружит, что все знаки второго приближения верные.

МЕТОД ЛОБАЧЕВСКОГО

Метод Лобачевского применяется к решению алгебраических уравнений и не требует предварительного отделения корней. Он даёт возможность находить все корни алгебраического уравнения, включая и комплексные. Основная идея метода Лобачевского заключается в преобразовании данного уравнения в другое, для которого корнями служат некоторые достаточно высокие степени корней данного уравнения. При этом преобразовании абсолютные величины корней нового уравнения оказываются настолько сильно отличающимися друг от друга, что в соотношениях между коэффициентами и корнями уравнения (стр. 105) меньшими из корней можно пренебречь и, таким образом, получить простые приближённые формулы для определения корней.

Преобразование данного алгебраического уравнения n -ой степени

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_{n-2} x^2 + a_{n-1} x + a_n = 0 \quad (1)$$

в другое, корнями которого являются квадраты корней данного уравнения («квадрирование корней уравнения»), производится путём умножения многочлена $f(x)$ на многочлен

$$(-1)^n f(-x) = a_0 x^n - a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} - \dots + (-1)^n a_n,$$

замены в полученном произведении x^2 на y и приравнивания этого произведения нулю; при этом мы приходим к уравнению:

$$b_0 y^n + b_1 y^{n-1} + b_2 y^{n-2} + \dots + b_{n-1} y + b_n = 0. \quad (2)$$

Вычисление коэффициентов преобразованного уравнения удобно производить по следующей схеме:

$$\begin{array}{cccccc}
 a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \dots \\
 a_0 & -a_1 & a_2 & -a_3 & a_4 & -a_5 \dots \\
 a_0^2 & -a_1^2 & a_2^2 & -a_3^2 & a_4^2 & -a_5^2 \\
 & +2a_0a_2 & -2a_1a_3 & +2a_2a_4 & -2a_3a_5 & +2a_4a_6 - \dots \\
 & & +2a_0a_4 & -2a_1a_5 & +2a_2a_6 & -2a_3a_7 + \dots \\
 & & & +2a_0a_6 & -2a_1a_7 & +2a_2a_8 - \dots \\
 & & & & +2a_0a_8 & -2a_1a_9 + \dots \\
 & & & & & +2a_0a_{10} - \dots \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \dots
 \end{array}$$

Коэффициенты b_0, b_1, b_2, \dots получаются, как суммы соответствующих столбцов. При этом числа первой строки под первой чертой являются квадратами расположенных над ними коэффициентов с чередующимися знаками (плюс для чисел, стоящих на нечётных местах, и минус — на чётных). Числа, находящиеся под этими квадратами, являются удвоенными произведениями пар коэффициентов, симметрично расположенных относительно коэффициентов, стоящих над квадратами: знаки этих удвоенных произведений чередуются вдоль строки и вдоль столбца, причём знак первого произведения в каждой строке берётся соответственно знакам множителей.

Это правило остаётся в силе и для построения последующих уравнений. Если подобную операцию повторить с уравнением (2), то мы получим новое уравнение:

$$c_0 z^n + c_1 z^{n-1} + c_2 z^{n-2} + \dots + c_{n-1} z + c_n = 0, \quad (3)$$

корни которого равны квадратам корней уравнения (2) или четвёртым степеням корней уравнения (1). Дальнейшее квадрирование корней уравнения (3) приведёт к уравнению, корни которого равны восьмым степеням исходного уравнения, и т. д.

Квадрирование корней следует прекратить, как только обнаруживается, что коэффициенты нового уравнения равны, в пределах нашей точности вычисления, квадратам коэффициентов предыдущего уравнения, т. е. (если при вычислении пользуются логарифмами) когда логарифмы коэффициентов начнут удваиваться. Следует, впрочем, иметь в виду, что некоторые коэффициенты могут и не обнаружить этого свойства при последовательных квадрированиях; это происходит тогда, когда исходное уравнение имеет либо кратные, либо комплексные корни, либо те и другие.

Случай 1-й. Все корни действительные и разные. В этом случае в процессе квадрирования корней обязательно наступит момент, когда коэффициенты некоторого преобразованного уравнения ($x^m = t$)

$$A_0 t^n + A_1 t^{n-1} + A_2 t^{n-2} + \dots + A_{n-1} t + A_n = 0$$

окажутся почти равными квадратам коэффициентов предыдущего уравнения, после чего процесс квадрирования корней прекращаем. Если расположить искомые корни в порядке убывания (по модулю)

$$|x_1| > |x_2| > |x_3| > \dots > |x_n|,$$

то для определения их применяются формулы:

$$x_1^m = -\frac{A_1}{A_0}; \quad x_2^m = -\frac{A_2}{A_1};$$

$$x_3^m = -\frac{A_3}{A_2}; \quad \dots; \quad x_n^m = -\frac{A_n}{A_{n-1}}.$$

Пример. Решить уравнение [см. (90) на стр. 268] $1,23x^5 - 2,52x^4 - 16,1x^3 + 17,3x^2 + 29,4x - 1,34 = 0$.
Необходимые для решения этого уравнения вычисления располагаем в виде таблицы (табл. 26), по-

Таблица 26

 Схема вычислений для нахождения корней уравнения $1,23x^5 - 2,52x^4 - 16,1x^3 + 17,3x^2 + 29,4x - 1,34 = 0$

	x^5	x^4	x^3	x^2	x^1	x^0
Данное уравнение	1,23	-2,52	-16,1	17,3	29,4	-1,34
	1,513	-0,635·10 ¹ -3,961	+2,592·10 ² +0,872 +0,723	-2,993·10 ² -9,467 -0,063	+8,644·10 ² +0,464	-1,796
2-я степень	1,513	-4,596·10	+4,187·10 ¹	-1,253·10 ²	+9,108·10 ²	-1,796
	2,289	-2,112·10 ² +1,267	+1,753·10 ³ -1,152 +0,628	-1,570·10 ⁴ +0,763 *	+3,296·10 ⁵ -0,045	-3,226
4-я степень	2,289	-0,845·10 ³	+0,629·10 ⁴	-0,807·10 ⁵	+8,251·10 ⁵	-3,226
	5,240	-0,714·10 ⁴ +0,238	+0,396·10 ⁵ -0,136 *	-0,651·10 ⁶ +0,104 *	+6,803·10 ⁶ *	-10,41
8-я степень	5,240	-0,426·10 ⁵	+0,260·10 ⁶	-0,547·10 ⁷	+6,808·10 ⁷	-10,41
	2,746·10	-1,815·10 ⁶ +0,272	+6,76·10 ⁷ -0,47	-2,991·10 ⁸ 0,035	+4,635·10 ⁹	-1,084·10 ³
16-я степень	2,746·10	-1,543·10 ⁷	+6,29·10 ⁸	-2,957·10 ⁹	+4,635·10 ¹⁰	-1,084·10 ³
	7,541·10 ²	-2,381·10 ¹⁰ +0,035	+3,96·10 ¹¹ -0,01	-8,744·10 ¹² *	+2,148·10 ¹³	-1,175·10 ⁴
32-я степень	7,541·10 ²	-2,346·10 ¹¹	+3,95·10 ¹²	-8,744·10 ¹³	+2,148·10 ¹⁴	-1,175·10 ⁴

строенной в соответствии с указанным правилом (очень малые удвоенные произведения, которые можно пренебречь, заменены в таблице звёздочками).

Согласно приведённым выше формулам имеем:

$$x_1^{32} = \frac{2,346 \cdot 10^{32}}{7,541 \cdot 10^2}, \text{ откуда } |x_1| = 4,066;$$

$$x_2^{32} = \frac{3,95 \cdot 10^{37}}{2,346 \cdot 10^{46}}, \text{ откуда } |x_2| = 2,991;$$

$$x_3^{32} = \frac{8,744 \cdot 10^{44}}{3,95 \cdot 10^{37}}, \text{ откуда } |x_3| = 1,959;$$

$$x_4^{32} = \frac{2,148 \cdot 10^{47}}{8,744 \cdot 10^{46}}, \text{ откуда } |x_4| = 1,0285;$$

$$x_5^{32} = \frac{1,175 \cdot 10^4}{2,148 \cdot 10^{47}}, \text{ откуда } |x_5| = 0,0445.$$

Для определения знаков корней подставляем в исходное уравнение приближённые значения корней $\pm 4; \pm 3; \pm 2; \pm 1; \pm 0,04$ и определяем, какое из значений, положительное или отрицательное, лучше удовлетворяет уравнению. Таким образом, находим корни уравнения:

$$x_1 = 4,066; x_2 = -2,991; x_3 = 1,959;$$

$$x_4 = -1,0285; x_5 = 0,0445.$$

Случай 2-й. Все корни действительные, но среди них имеются равные по модулю. В этом случае в процессе квадрирования корней уравнения обнаружится, что некоторые коэффициенты преобразованного уравнения

$$A_0 t^n + A_1 t^{n-1} + A_2 t^{n-2} + \dots + A_{n-1} t + A_n = 0$$

станут почти равными квадратам коэффициентов предыдущего уравнения, в то время как остальные окажутся равными половине квадратов соответствующих коэффициентов. Так, например, если

$$|x_1| > |x_2| = |x_3| > |x_4| > \dots > |x_n|,$$

то коэффициент A_2 окажется равным половине квадрата соответствующего коэффициента предыдущего уравнения.

Формулы для определения корней уравнения в этом случае:

$$x_1^m = -\frac{A_1}{A_0}; x_2^m = x_3^m = -\frac{A_2}{2A_1};$$

$$x_4^m = -\frac{A_4}{A_3}; \dots; x_n^m = -\frac{A_n}{A_{n-1}}.$$

Пример. Решить уравнение

$$5x^3 + 2x^2 - 15x - 6 = 0.$$

Вычисления для решения этого уравнения приведены в табл. 27, из которой видно, что коэффициент A_1 уравнения, полученного после четвёртого квадрирования, равен половине квадрата соответствующего коэффициента предыдущего уравнения и, следовательно, корни x_1 и x_2 равны между собой.

Применяя соответствующие формулы, получим:

$$x_1^{16} = x_2^{16} = \frac{1,986 \cdot 10^{18}}{2 \cdot 1,526 \cdot 10^{11}},$$

$$\text{откуда } |x_1| = |x_2| = 1,731;$$

$$x_3^{16} = \frac{2,822 \cdot 10^{12}}{6,610 \cdot 10^{13}},$$

$$\text{откуда } |x_3| = 0,3999.$$

Испытывая значения корней $\pm 1,7$ и $\pm 0,4$, находим:

$$x_1 = 1,7; x_2 = -1,7 \text{ и } x_3 = -0,4.$$

Случай 3-й. Среди корней уравнения имеются комплексные. В случае наличия комплексных корней оказывается, что сколько бы мы ни продолжали процесс квадрирования корней этого уравнения, не все удвоенные произведения коэффициентов исчезнут.

Так, например, если среди корней уравнения имеется две пары комплексных корней:

$$x_{2,3} = u_1 \pm iv_1 \text{ и } x_{5,6} = u_2 \pm iv_2,$$

причём

$$|x_1| > |x_2| = |x_3| = r_1 > |x_4| > |x_5| = |x_6| = r_2 > |x_7| > \dots > |x_n|,$$

где r_1 и r_2 — модули сопряжённых корней

$$(r_1 = \sqrt{u_1^2 + v_1^2}; r_2 = \sqrt{u_2^2 + v_2^2}),$$

то действительные корни и модули комплексных корней определяются по формулам:

$$x_1^m = -\frac{A_1}{A_0}; r_1^{2m} = \frac{A_3}{A_1}; x_4^m = -\frac{A_4}{A_3};$$

Таблица 27

Схема вычислений для нахождения корней уравнения: $5x^3 + 2x^2 - 15x - 6 = 0$

	x^2	x^3	x	x^6
Данное уравнение	5	2	-15	-6
	25	-4 -150	225 +24	-36
2-я степень	25	$-1,54 \cdot 10^2$	$+2,49 \cdot 10^2$	-36
	$6,25 \cdot 10^4$	$-2,3716 \cdot 10^4$ $+1,2450$	$+6,2991 \cdot 10^4$ $-1,1008$	$-1,296 \cdot 10^3$
4-я степень	$6,25 \cdot 10^8$	$-1,1266 \cdot 10^4$	$+5,0993 \cdot 10^4$	$-1,296 \cdot 10^3$
	$3,9062 \cdot 10^8$	$-1,269 \cdot 10^8$ $+0,637$	$+2,600 \cdot 10^8$ $-0,029$	$-1,680 \cdot 10^6$
8-я степень	$1,9062 \cdot 10^8$	$-0,632 \cdot 10^8$	$+2,571 \cdot 10^8$	$-1,680 \cdot 10^6$
	$1,526 \cdot 10^{11}$	$-3,994 \cdot 10^{11}$ $+2,008$	$+6,610 \cdot 10^{11}$ *	$-2,822 \cdot 10^{12}$
16-я степень	$1,526 \cdot 10^{11}$	$-1,986 \cdot 10^{11}$	$6,610 \cdot 10^{11}$	$-2,822 \cdot 10^{12}$

$$r_2^{2m} = \frac{A_6}{A_4}; x_7^m = -\frac{A_7}{A_8};$$

$$x_8^m = -\frac{A_8}{A_7} \text{ и т. д.}$$

Действительные части комплексных корней уравнения находятся из соотношений:

$$-\frac{a_1}{a_0} = 2u_1 + 2u_2 + x_1 + x_4 + x_7 + \dots + x_n;$$

$$-\frac{a_{n-1}}{a_n} = \frac{2u_1}{r_1^2} + \frac{2u_2}{r_2^2} + \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_4} + \dots + \frac{1}{x_n};$$

а мнимые из формул:

$$v_1 = \sqrt{r_1^2 - u_1^2};$$

$$v_2 = \sqrt{r_2^2 - u_2^2}.$$

При наличии только одной пары комплексных корней $u \pm iv$, т. е. когда только один из коэффициентов изменяется при квадратировании беспорядочным образом, имеем для определения действительной и мнимой частей корня соотношения:

$$-\frac{a_1}{a_0} = 2u + x_1 + x_2 + \dots + x_{n-2};$$

$$v = \sqrt{r^2 - u^2}.$$

Пример. Решить уравнение

$$x^7 - 2x^6 - 3x^5 + 4x^4 - 5x + 6 = 0.$$

Соответствующие вычисления даны в табл. 28. Так как в коэффициентах последнего преобразованного уравнения A_2 и A_4 наблюдаются отклонения от обычного правила, то мы заключаем о наличии двух пар комплексных корней:

$$x_{3,4} = u_1 \pm iv_1$$

и

$$x_{6,7} = u_2 \pm iv_2.$$

Таблица 28

Схема вычислений для нахождения корней уравнения: $x^7 - 2x^6 - 3x^5 + 4x^4 - 5x + 6 = 0$

	x^7	x^6	x^5	x^4	x^3	x^2	x^1	x^0
Данное уравнение	1	0	-2	0	-3	4	-5	6
	1	0 -4	4 0 -6	0 12 0 -10	9 0 20 0	-16 30 0	25 -48	-36
2-я степень	1	-4	-2	2	23	14	-23	-36
	1	-16 -4	4 16 53	-4 -116 -112 -46	8,41·10 ³ -0,56 +0,92 -2,88	-1,96·10 ³ -13,34 +1,44	5,29·10 ³ 10,08	-1,296·10 ³
4-я степень	1	-20	7,8·10	-5,4·10	+5,89·10 ³	-1,386·10 ³	+1,537·10 ³	-1,296·10 ³
	1	-4,00·10 ³ +1,55	+6,084·10 ³ -2,163 +1,173	-0,2916·10 ³ +9,1884 -5,5440 +0,3074	+3,4692·10 ³ -1,4969 +2,3977 -0,5184	-1,9210·10 ³ +1,8106 -0,1400	+2,3624·10 ³ -3,5925	-1,680·10 ³
8-я степень	1	-2,44·10 ³	+5,102·10 ³	+3,660·10 ³	+3,852·10 ³	-0,2504·10 ³	-1,230·10 ³	-1,690·10 ³
	1	-5,9336·10 ³ +1,0204	+1,3330·10 ³ +1,7861 +0,0770	-1,3396·10 ³ +3,9306 -0,1222 -0,0025	+1,4833·10 ³ +0,1833 -0,1255 -0,0032	-0,6270·10 ³ -9,4759 +1,2298	+1,5129·10 ³ -0,8413	-2,8224·10 ³
16-я степень	1	-4,933·10 ³	+4,466·10 ³	+2,466·10 ³	+1,533·10 ³	-8,873·10 ³	+0,6716·10 ³	-2,822·10 ³
	1	-2,433·10 ³ +0,060	+1,9945·10 ³ +0,2433 +0,003	-0,6081·10 ³ 1,3693 -0,0083 *	+2,350·10 ³ +0,433 +0,006 *	-7,873·10 ³ +2,059 +0,130	+0,4510·10 ³ -5,0079	-7,964·10 ³
32-я степень	1	-2,344·10 ³	+2,238·10 ³	+0,7524·10 ³	+2,794·10 ³	-5,675·10 ³	-4,537·10 ³	-7,964·10 ³
	1	-5,494·10 ³ +0,004	+5,009·30 ³⁰ +0,035 *	-0,5661·10 ³ +1,2502 *	+7,806·10 ³ +0,085 *	-3,221·10 ³ -2,546 +0,001	+2,077·10 ³ -0,904	-6,343·10 ³
64-я степень	1	-5,496·10 ³	5,044·10 ³⁰	+6,841·10 ³⁷	+7,891·10 ³⁴	-5,766·10 ³⁷	+1,173·10 ³⁸	-6,343·10 ³⁹
	1	-3,014·10 ³⁷ *	+2,544·10 ³² *	-4,680·10 ³³ +7,960	+6,227·10 ³⁸ +0,001	-3,325·10 ³⁹ +0,185	+1,376·10 ³⁹ -0,731	-4,023·10 ³⁹
128-я степень	1	-3,014·10 ³⁷	+2,544·10 ³²	+3,230·10 ³³	+6,223·10 ³⁸	-3,140·10 ³⁹	0,645·10 ³⁸	-4,023·10 ³⁹
	1	-9,084·10 ³⁴ *	+6,472·10 ³² *	-1,076·10 ³² +3,169	+3,879·10 ³⁷ *	-9,860·10 ³⁹ +0,008 *	+0,416·10 ³⁹ -0,253	-1,618·10 ³⁹
256-я степень	1	-9,084·10 ³⁴	+6,472·10 ³²	+2,053·10 ³³	+3,879·10 ³⁷	-8,852·10 ³⁹	+0,163·10 ³⁹	-1,618·10 ³⁹

Определяем сперва по приведённым выше формулам действительные корни x_1 , x_2 и x_3 :

$$x_1^{256} = \frac{9,084 \cdot 10^{74}}{1},$$

откуда $|x_1| = 1,9625$;

$$x_2^{256} = \frac{6,472 \cdot 10^{184}}{9,084 \cdot 10^{74}},$$

откуда $|x_2| = 1,5379$;

$$x_3^{256} = \frac{9,852 \cdot 10^{190}}{3,879 \cdot 10^{74}},$$

откуда $|x_3| = 1,1080$.

Применение правила для определения знаков корней даёт:

$$x_1 = -1,9625; x_2 = 1,5379 \text{ и } x_3 = 1,1080.$$

Для определения модулей комплексных корней r_1 и r_2 имеем:

$$r_1^{512} = \frac{3,879 \cdot 10^{179}}{6,472 \cdot 10^{122}} \left(= \frac{A_1}{A_2} \right),$$

откуда $r_1 = 1,2909$;

$$r_2^{512} = \frac{1,618 \cdot 10^{199}}{9,852 \cdot 10^{100}} \left(= \frac{A_2}{A_3} \right),$$

откуда $r_2 = 1,0618$.

Действительные части u_1 и u_2 комплексных корней находим из системы уравнений:

$$2u_1 + 2u_2 - 1,9625 + 1,5379 + 1,1080 =$$

$$= 0 \left(= -\frac{a_1}{a_0} \right);$$

$$\frac{2u_1}{(1,2909)^2} + \frac{2u_2}{(1,0618)^2} - \frac{1}{1,9625} + \frac{1}{1,5379} + \frac{1}{1,1080} = \frac{5}{6} \left(= -\frac{a_{n-1}}{a_n} \right),$$

решив которую, получим:

$$u_1 = -0,6445, \text{ а } u_2 = 0,3028.$$

Мнимые части v_1 и v_2 комплексных корней находим по формулам:

$$v_1 = \sqrt{r_1^2 - u_1^2} = \sqrt{(r_1 + u_1)(r_1 - u_1)} = 1,1185;$$

$$v_2 = \sqrt{r_2^2 - u_2^2} = \sqrt{(r_2 + u_2)(r_2 - u_2)} = 1,018;$$

и, следовательно

$$x_{3,4} = -0,6445 \pm 1,1185i;$$

$$x_{6,7} = 0,3028 \pm 1,018i.$$

Для определения знаков и проверки точности, с которой полученные по методу Лобачевского корни алгебраического уравнения удовлетворяют этому уравнению, следует подставить найденные значения корней в уравнение. Для этой цели и вообще для вычисления числового значения многочлена

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_{n-1} x + a_n,$$

при значении аргумента $x = x_0$ удобно пользоваться так называемой схемой Хорнера. Выписываем коэффициенты многочлена в одну строчку:

$$a_0 \ a_1 \ a_2 \ a_3 \ \dots \ a_n;$$

первый коэффициент a_0 умножаем на x_0 и складываем с коэффициентом a_1 , для чего подписываем $a_0 x_0$ под a_1 . Полученную сумму $a_0 x_0 + a_1$ обозначаем через a'_1 и подписываем под $a_0 x_0$ и a_1 ; число a_1 умножаем опять на x_0 и находим $a'_2 = a'_1 x_0 + a_2$.

Произведя дальнейшие вычисления по этой схеме, образуем число $a'_3 = a'_2 x_0 + a_3$ и т. д. до последнего $a'_n = a'_{n-1} x_0 + a_n$. Число a'_n и есть искомое значение функции $f(x)$ при $x = x_0$:

$$a'_n = f(x_0).$$

Запись вычислений по схеме Хорнера производится следующим образом:

a_0	a_1	a_2	a_3	\dots	a'_{n-1}	a_n
$a_0 x_0$	$a'_1 x_0$	$a'_2 x_0$	\dots	$a'_{n-2} x_0$	$a'_{n-1} x_0$	
a'_1	a'_2	a'_3	\dots	a'_{n-1}	$a'_n = f(x_0)$	

Пример. Определить значение многочлена $f(x) = x^5 - 5,72x^4 - 2,26x^3 + 7,36$ при $x = 1,27$.

1,27	1	0	-5,72	-2,26	0	7,36
	1,27	1,27	-1,61	-5,22	-9,49	-12,05
	1,27	-4,11	-7,48	-9,49	-4,69	$f(1,27)$

ИСЧИСЛЕНИЕ КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ И ИНТЕРПОЛИРОВАНИЕ

КОНЕЧНЫЕ РАЗНОСТИ

Конечной разностью первого порядка функции $y = f(x)$ называется величина $\Delta f(x) = f(x+h) - f(x)$, где h — так называемый шаг разности.

Конечные разности первого порядка принято также обозначать:

$$\Delta y_0 = y_1 - y_0; \Delta y_1 = y_2 - y_1$$

и вообще

$$\Delta y_i = y_{i+1} - y_i,$$

$$\text{где } y_1 = f(x+h), \dots, y_i = f(x+ih).$$

Конечные разности конечных разностей первого порядка называются конечными разностями второго порядка и также могут быть выражены через заданные значения функции:

$$\begin{aligned} \Delta^2 f(x) &= \Delta f(x+h) - \Delta f(x) = \\ &= f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x), \end{aligned}$$

или

$$\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0 = y_2 - 2y_1 + y_0,$$

$$\Delta^2 y_1 = \Delta y_2 - \Delta y_1 = y_3 - 2y_2 + y_1$$

и вообще

$$\Delta^2 y_i = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i = y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i.$$

Аналогично определяются и выражаются конечные разности высших порядков:

$$\begin{aligned} \Delta^k f(x) &= \Delta^{k-1} f(x+h) - \Delta^{k-1} f(x) = \\ &= f(x+kh) - \frac{k}{1!} f[x+(k-1)h] + \\ &+ \frac{k(k-1)}{2!} f[x+(k-2)h] - \dots + \\ &+ (-1)^k f(x). \end{aligned}$$

Вычисление конечных разностей удобно производить при помощи таблицы разностей по следующей схеме:

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$	$\Delta^5 y$
x_{-4}	y_{-4}					
x_{-3}	y_{-3}	Δy_{-4}	$\Delta^2 y_{-4}$	$\Delta^3 y_{-4}$		
x_{-2}	y_{-2}	Δy_{-3}	$\Delta^2 y_{-3}$	$\Delta^3 y_{-3}$	$\Delta^4 y_{-4}$	
x_{-1}	y_{-1}	Δy_{-2}	$\Delta^2 y_{-2}$	$\Delta^3 y_{-2}$	$\Delta^4 y_{-3}$	$\Delta^5 y_{-4}$
x_0	y_0	Δy_{-1}	$\Delta^2 y_{-1}$	$\Delta^3 y_{-1}$	$\Delta^4 y_{-2}$	$\Delta^5 y_{-3}$
x_1	y_1	Δy_0	$\Delta^2 y_0$	$\Delta^3 y_0$	$\Delta^4 y_{-1}$	$\Delta^5 y_{-2}$
x_2	y_2	Δy_1	$\Delta^2 y_1$	$\Delta^3 y_1$	$\Delta^4 y_0$	$\Delta^5 y_{-1}$
x_3	y_3	Δy_2	$\Delta^2 y_2$			
x_4	y_4	Δy_3				

ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ

1. Конечная разность алгебраической суммы функций равна алгебраической сумме разностей слагаемых функций:

$$\Delta[f(x) \pm \varphi(x)] = \Delta f(x) \pm \Delta \varphi(x).$$

2. Постоянный множитель может быть вынесен за знак конечной разности:

$$\Delta C \varphi(x) = C \Delta \varphi(x).$$

3. Конечная разность постоянной величины равна нулю: $\Delta C = 0$.

4. Конечная разность периодической функции равна нулю, если её период равен шагу разности h : $\Delta \varphi(x) = 0$, если $\varphi(x+h) = \varphi(x)$.

5. Конечная разность произведения двух функций определяется формулами:

$$\Delta[\varphi(x) \psi(x)] = \varphi(x) \Delta \psi(x) + \psi(x+h) \Delta \varphi(x),$$

или

$$\Delta[\varphi(x) \psi(x)] = \psi(x) \Delta \varphi(x) + \varphi(x+h) \Delta \psi(x).$$

КОНЕЧНЫЕ РАЗНОСТИ НЕКОТОРЫХ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ

1. Степенная функция $y = x^n$:

$$\Delta x^n = (x+h)^n - x^n = nhx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!} h^2 x^{n-2} + \dots + nh^{n-1} x + h^n.$$

$\Delta^m x^n$ вычисляется с помощью разложения по факториальным функциям.

2. Факториальная функция $y = x^{(n)} = x(x-h)(x-2h) \dots [x-(n-1)h]$:

$$\begin{aligned} \Delta x^{(n)} &= nhx^{(n-1)} = \\ &= nhx(x-h)(x-2h) \dots [x-(n-2)h]; \\ \Delta^m x^{(n)} &= n(n-1) \dots (n-m+1) h^m x^{(n-m)} = \\ &= n(n-1)(n-2) \dots (n-m+1) h^m \times \\ &\times x(x-h)(x-2h) \dots [x-(n-m-1)h]; \end{aligned}$$

$$\Delta^n x^{(n)} = n! h^n,$$

$$\text{а при } m > n \quad \Delta^m x^{(n)} = 0$$

(факториальная функция в разностном исчислении аналогична степенной функции в дифференциальном исчислении).

3. Показательная функция $y = a^x$:

$$\Delta a^x = a^{x+h} - a^x = a^x (a^h - 1);$$

$$\Delta^m a^x = a^x (a^h - 1)^m.$$

4. Тригонометрические функции $y = \sin x$ и $y = \cos x$:

$$\Delta \sin x = 2 \sin \frac{h}{2} \sin \left(x + \frac{h+\pi}{2} \right);$$

$$\Delta \cos x = 2 \sin \frac{h}{2} \cos \left(x + \frac{h+\pi}{2} \right);$$

$$\Delta^m \sin x = \left(2 \sin \frac{h}{2} \right)^m \sin \left(x + m \frac{h+\pi}{2} \right);$$

$$\Delta^m \cos x = \left(2 \sin \frac{h}{2} \right)^m \cos \left(x + m \frac{h+\pi}{2} \right).$$

РАЗЛОЖЕНИЕ В РЯД ПО ФАКТОРИАЛЬНЫМ ФУНКЦИЯМ

Если функция $y = f(x)$ непрерывна и дифференцируема до $(n+1)$ -го порядка включительно, то:

$$\begin{aligned} y &= y_0 + \frac{\Delta y_0}{1!h} (x-x_0) + \\ &+ \frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2} (x-x_0)(x-x_0-h) + \dots + \\ &+ \frac{\Delta^n y_0}{n!h^n} (x-x_0) \dots [x-x_0-(n-1)h] + R_n, \end{aligned}$$

где остаточный член

$$R_n = (x-x_0) \dots (x-x_0-nh) \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \quad (x_0 < \xi < x_0 + nh).$$

Если $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = 0$, то получаем разложение $f(x)$ в ряд по факториальным функциям.

Для многочлена n -й степени $\Delta^{n+1} y_0 = 0$ и разложение обрывается на $(n+1)$ -м члене. Например, в случае степенной функции x^n при $h=1$ имеем:

$$\begin{aligned} x^n &= \frac{\Delta^0 x^n}{1!} x + \frac{\Delta^1 x^n}{2!} x(x-1) + \dots + \\ &+ \frac{\Delta^n x^n}{n!} x(x-1) \dots (x-n+1). \end{aligned}$$

Коэффициенты $\Delta^0 x^n$, $\Delta^1 x^n$, $\Delta^2 x^n$ и т. д. даны в табл. 29.

Таблица 29

Числа $\Delta^i x^n$							
n	$\Delta^0 x^n$	$\Delta^1 x^n$	$\Delta^2 x^n$	$\Delta^3 x^n$	$\Delta^4 x^n$	$\Delta^5 x^n$	$\Delta^6 x^n$
1	1						
2	1	2					
3	1	6	6				
4	1	14	36	24			
5	1	30	150	240	120		
6	1	62	540	1560	1800	720	
7	1	126	1806	8400	16800	15120	5040

СВЯЗЬ МЕЖДУ КОНЕЧНЫМИ РАЗНОСТЯМИ И ПРОИЗВОДНЫМИ

Формула Тейлора даёт выражение конечной разности первого порядка функции $f(x)$ через производные $f'(x)$, $f''(x)$ и т. д.:

$$\Delta f(x) = f(x+h) - f(x) = \frac{h}{1!} f'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) + \dots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \\ (x < \xi < x+h).$$

Для конечной разности порядка m имеем формулу

$$\Delta^m f(x) = A_m^m h^m f^{(m)}(x) + A_m^{m+1} h^{m+1} f^{(m+1)}(x) + \dots + A_m^n h^n f^{(n)}(x) + A_m^{n+1} h^{n+1} f^{(n+1)}(\xi) \\ (x < \xi < x+mh),$$

где

$$A_m^i = \frac{1}{h^i} \left\{ \frac{\Delta^m (x-a)^i}{i!} \right\}_{x=a}.$$

Таблица 30

Значения величин
($m+1$) ($m+2$) ... i $A_m^i = H_m^i$

$m \backslash i$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1									
2	1	1								
3	1	3	1							
4	1	6	7	1						
5	1	10	25	30	1					
6	1	15	45	65	350	1				
7	1	21	70	140	150	1050	1			
8	1	28	112	280	462	266	1			
9	1	36	162	462	951	3025	36	1		
10	1	45	225	720	1512	3025	36	1	1	

Между числами H_m^{i+1} , H_m^i и H_{m-1}^i имеет место соотношение $H_m^{i+1} = mH_m^i + H_{m-1}^i$, которым можно пользоваться для последовательного вычисления коэффициентов A_m^i .

В свою очередь производная $f^{(m)}(x)$ выражается через конечные разности по формуле

$$h^m f^{(m)}(x) = B_m^m \Delta^m f(x) + B_m^{m+1} \Delta^{m+1} f(x) + \dots + B_m^n \Delta^n f(x) + B_m^{n+1} \Delta^{n+1} f(\xi) \\ (x < \xi < x+nh),$$

где

$$B_m^i = \frac{1}{i!} \left\{ \frac{d^m}{dt^m} t(t-1) \dots (t-i+1) \right\}_{t=0}.$$

Таблица 31

Значения величин
(-1) $i-m$ ($m+1$) ($m+2$) ... i $B_m^i = D_m^i$

$m \backslash i$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1									
2	1	1								
3	1	3	1							
4	1	6	35	1						
5	1	10	225	110	1					
6	1	15	45	15	175	1				
7	1	21	70	21	322	28	1			
8	1	28	112	28	456	36	1			
9	1	36	162	36	945	36	1			
10	1	45	225	45	1512	36	1	1		

Между числами D_m^{i+1} , D_m^i и D_{m-1}^i имеет место соотношение $D_m^{i+1} = iD_m^i + D_{m-1}^i$, которым можно пользоваться для последовательного вычисления коэффициентов B_m^i .

ИНТЕРПОЛИРОВАНИЕ

Если для ряда значений аргумента: $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ известны значения некоторой функции: $y_0, y_1, y_2, \dots, y_n$, то можно построить такую функцию $y = f(x)$, которая принимала бы указанные значения y_i для заданных значений аргумента x_i . Найденная функция называется интерполирующей или интерполированной; точки x_i называются узлами интерполяции. Если интерполирующая функция строится в виде многочлена, то интерполяция называется параболической. Для периодических функций удобно выбрать интерполирующую функцию в виде тригонометрического многочлена; такая интерполяция называется тригонометрической.

Интерполирующая функция позволяет определить приближенные значения табличной функции для промежуточных значений аргумента, не содержащихся в таблице. Это также называется интерполяцией (в узком смысле слова). Нахождение же значений функций для значений аргумента, выходящих за пределы заданной таблицы, называется экстраполяцией.

ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЕ ФОРМУЛЫ

Интерполяционная формула Лагранжа

$$y = \frac{(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\dots(x_0-x_n)} y_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)\dots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\dots(x_1-x_n)} y_1 + \dots + \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\dots(x_n-x_{n-1})} y_n.$$

Формула Лагранжа на практике мало применима вследствие её неудобства для вычислений. Вместо неё обычно применяются разностные интерполяционные формулы, содержащие конечные разности функций.

Первая интерполяционная формула Ньютона (для равноотстоящих значений аргумента $x_{i+1} - x_i = h = \text{const}$):

$$y = y_0 + \frac{x-x_0}{1!h} \Delta y_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_0-h)}{2!h^2} \Delta^2 y_0 + \dots + \frac{(x-x_0)(x-x_0-h)\dots[x-x_0-(n-1)h]}{n!h^n} \Delta^n y_0.$$

Эта формула в сущности представляет собой разложение многочлена степени n по факториальным функциям.

Положив $\frac{x-x_0}{h} = u$, получим другой вид

формулы:

$$y = y_0 + \frac{u}{1!} \Delta y_0 + \frac{u(u-1)}{2!} \Delta^2 y_0 + \dots + \frac{u(u-1) \dots (u-n+1)}{n!} \Delta^n y_0.$$

Первая формула Ньютона называется также формулой для «интерполирования вперёд», так как содержит значения функции, находящиеся вправо от y_0 («вперёд» или вниз по столбцу) и не содержит значений, лежащих влево. Поэтому она употребляется для интерполирования значений около начала таблицы разностей и для экстраполирования немного назад (налево от y_0).

Вторая формула Ньютона

$$y = y_0 + \frac{x-x_0}{1!h} \Delta y_{-1} + \frac{(x-x_0)(x-x_0+h)}{2!h^2} \Delta^2 y_{-2} + \dots + \frac{(x-x_0)(x-x_0+h) \dots [x-x_0+(n-1)h]}{n!h^n} \Delta^n y_{-n}$$

или

$$y = y_0 + \frac{u}{1!} \Delta y_{-1} + \frac{u(u+1)}{2!} \Delta^2 y_{-2} + \dots + \frac{u(u+1) \dots (u+n-1)}{n!} \Delta^n y_{-n}.$$

Здесь, как и в предыдущем случае, предполагается, что $x_i - x_{i-1} = h = \text{const}$ и $u = \frac{x-x_0}{h}$. Эта формула называется также формулой для «интерполирования назад» (налево от y_0 или вверх по столбцу). Она служит для интерполирования значений около конца таблицы разностей и для экстраполирования немного вперёд (направо от y_0).

Если значения аргумента x_i даны через неравные интервалы, то пользуются следующим видом формулы Ньютона (формула Ньютона с разделёнными конечными разностями):

$$y = f(x) = f(x_0) + (x-x_0)f(x_1, x_0) + (x-x_0)(x-x_1)f(x_2, x_1, x_0) + (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)f(x_3, x_2, x_1, x_0) + \dots,$$

где символами $f(x_1, x_0)$, $f(x_2, x_1, x_0)$, $f(x_3, x_2, x_1, x_0)$ и т. д. обозначены так называемые разделённые конечные разности:

первого порядка

$$f(x_1, x_0) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0};$$

второго порядка

$$f(x_2, x_1, x_0) = \frac{f(x_2, x_1) - f(x_1, x_0)}{x_2 - x_0};$$

третьего порядка

$$f(x_3, x_2, x_1, x_0) = \frac{f(x_3, x_2, x_1) - f(x_2, x_1, x_0)}{x_3 - x_0}$$

и т. д.

Интерполяционная формула Стирлинга

$$y = y_0 + \frac{u}{1!} \frac{\Delta y_0 + \Delta y_{-1}}{2} + \frac{u^2}{2!} \Delta^2 y_{-1} + \frac{u(u^2-1)}{3!} \frac{\Delta^3 y_{-1} + \Delta^3 y_{-2}}{2} + \frac{u^2(u^2-1)}{4!} \Delta^4 y_{-2} + \dots + \frac{u^2(u^2-1)(u^2-2^2) \dots [u^2-(n-1)^2]}{(2n)!} \Delta^{2n} y_{-n}.$$

В этой формуле положено $u = \frac{x-x_0}{h}$ и содержится $2n+1$ членов; интерполирующий многочлен совпадает с данной функцией в $2n+1$ точках:

$$u = -n, -(n-1), -(n-2), \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, (n-2), (n-1), n$$

или

$$x = x_0 - nh, x_0 - (n-1)h, x_0 - (n-2)h, \dots, x_0 - 2h, x_0 - h, x_0, x_0 + h, x_0 + 2h, \dots, x_0 + (n-2)h, x_0 + (n-1)h, x_0 + nh.$$

Интерполяционная формула Бесселя

$$y = \frac{y_0 + y_1}{2} + \frac{\left(u - \frac{1}{2}\right)}{1!} \Delta y_0 + \frac{u(u-1)}{2!} \frac{\Delta^2 y_{-1} + \Delta^2 y_0}{2} + \frac{u\left(u - \frac{1}{2}\right)(u-1)}{3!} \Delta^3 y_{-1} + \frac{u(u^2-1)(u-2)}{4!} \frac{\Delta^4 y_{-2} + \Delta^4 y_{-1}}{2} + \dots + \frac{u\left(u - \frac{1}{2}\right) \prod_{i=1}^{n-1} (u^2 - i^2)}{(2n+1)!} \times \times (u-n) \Delta^{2n+1} y_{-n}.$$

При $u = \frac{1}{2}$ формула Бесселя называется формулой «интерполирования на середину», так как она даёт величину функции для значения аргумента, являющегося средним арифметическим между x_0 и x_1 :

$$y = \frac{y_0 + y_1}{2} - \frac{1}{8} \frac{\Delta^2 y_{-1} + \Delta^2 y_0}{2} + \frac{3}{128} \frac{\Delta^4 y_{-2} + \Delta^4 y_{-1}}{2} - \frac{5}{1024} \frac{\Delta^6 y_{-3} + \Delta^6 y_{-2}}{2} + \dots + (-1)^n \frac{[1.3.5 \dots (2n-1)]^2 \Delta^{2n} y_{-n} + \Delta^{2n} y_{-n+1}}{2^{2n}(2n)!}.$$

В формуле Бесселя также положено $u = \frac{x-x_0}{h}$ и содержится $2n+2$ члена; интерполи-

рующей многочлен совпадает с данной функцией в $2n+2$ точках:

$$u = -n, -(n-1), \dots, -1, 0, 1, \dots, n-1, n, n+1$$

или

$$x = x_0 - nh, x_0 - (n-1)h \dots$$

$$\dots, x_0 - h, x_0, x_0 + h, \dots, x_0 + (n-1)h,$$

$$x_0 + nh, x_0 + (n+1)h.$$

Формулы Стирлинга и Бесселя обладают почти одинаковой точностью, но формула Бесселя даёт более точный результат при интерполировании около середины интервала (примерно от $u = 0,25$ до $u = 0,75$), а формула Стирлинга — около начала или около конца интервала (примерно от $u = -0,25$ до $u = 0,25$).

В табл. 32 приводятся коэффициенты интерполяционных формул Ньютона и Бесселя для значений аргумента u от 0 до 1 через 0,01 и формулы Стирлинга для значений u от 0 до 0,5 также через 0,01.

В табл. 32, в знаки слева соответствуют значениям u от 0,00 до 0,50, знаки справа — значениям u от 0,50 до 1,00.

ОСТАТОЧНЫЕ ЧЛЕНЫ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ ФОРМУЛ

Если задана интерполируемая функция $f(x)$, то остаточный член R_n интерполяционной формулы (т. е. разность между $f(x)$ и интерполяционным многочленом степени n) выражается при помощи формул:

Интерполяционная формула	Выражение остаточного члена
Лагранжа	$R_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)$
Ньютона I	$R_n = \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) u(u-1)\dots(u-n)$
Ньютона II	$R_n = \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) u(u+1)\dots(u+n)$
Стирлинга	$R_{2n} = \frac{h^{2n+1}}{(2n+1)!} f^{(2n+1)}(\xi) u(u^2-1)\dots(u^2-n^2)$
Бесселя	$R_{2n+1} = \frac{h^{2n+2}}{(2n+2)!} f^{(2n+2)}(\xi) u \times \\ \times (u^2-1)\dots(u^2-n^2)(u-n+1)$

Здесь ξ — некоторое промежуточное значение между наименьшим и наибольшим из чисел x_0, x_1, x_2, \dots

ЛИНЕЙНОЕ ИНТЕРПОЛИРОВАНИЕ

При пользовании таблицами для вычисления значений функций для промежуточных значений аргумента применяют обычно линейное интерполирование, т. е. в качестве интерполирующей функции берётся линейная функция, совпадающая с интерполируемой функцией при двух ближайших (слева и справа) табличных значениях. Если, таким образом, $x_1 < x < x_2$ и таб-

личные значения функции, соответствующие значениям аргумента x_1 и x_2 , обозначены соответственно через y_1 и y_2 , то искомое значение функции (соответствующее аргументу x) вычисляется по формуле

$$y = y_1 + \frac{x-x_1}{h} (y_2 - y_1).$$

Пример. Найти мантиссу $\lg 97\,122$. По таблицам (стр. 53) находим, что мантиссы $\lg 97\,120$ и $\lg 97\,130$ равны соответственно:

$$y_1 = 987\,309 \text{ и } y_2 = 987\,353;$$

имеем:

$$h = 10; y_2 - y_1 = 44; x - x_1 = 97\,122 - 97\,120 = 2$$

и

$$y = 987\,309 + 0,2 \cdot 44 \approx 987\,309 + 9 = 987\,318.$$

Если две соседние табличные разности $y_2 - y_1$ и $y_3 - y_2$ отличаются друг от друга больше чем на 4 единицы последнего знака, то следует вместо линейной интерполяции применять интерполяционную формулу с большим числом членов (интерполяция квадратичная, кубическая и т. д.).

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОЕ ИНТЕРПОЛИРОВАНИЕ

Для периодических функций периода 2π применяется тригонометрическое интерполирование по формуле Эрмита:

$$y = \frac{\sin(x-x_1)\sin(x-x_2)\dots\sin(x-x_n)}{\sin(x_0-x_1)\sin(x_0-x_2)\dots\sin(x_0-x_n)} y_0 + \\ + \frac{\sin(x-x_0)\sin(x-x_2)\dots\sin(x-x_n)}{\sin(x_1-x_0)\sin(x_1-x_2)\dots\sin(x_1-x_n)} y_1 + \\ + \dots + \frac{\sin(x-x_0)\dots\sin(x-x_{n-1})}{\sin(x_n-x_0)\dots\sin(x_n-x_{n-1})} y_n.$$

ПОЛИНОМЫ ЧЕБЫШЕВА

В вопросах, связанных с теорией приближения функций, весьма важную роль играют полиномы Чебышева:

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x) = x^n + C_n^* x^{n-2} (x^2-1) + \\ + C_n^* x^{n-4} (x^2-1)^2 + \dots$$

Если полином $T_n(x)$ расположить по убывающим степеням x , то коэффициент при x^2 окажется равным 2^{n-1} ($n \geq 1$), в частности:

$$T_0(x) = 1, \\ T_1(x) = x, \\ T_2(x) = 2x^2 - 1, \\ T_3(x) = 4x^3 - 3x, \\ T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1, \\ T_5(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x.$$

Полиномы Чебышева различных степеней связаны следующим рекуррентным соотношением:

$$T_{n+2}(x) = 2x T_{n+1}(x) - T_n(x).$$

Полином Чебышева степени n обращается в нуль в точках

$$x = \cos \frac{(2m-1)\pi}{2n} \quad (m = 1, 2, \dots, n),$$

в точках же $\cos \frac{m\pi}{n}$ полином $T_n(x)$ обращается в $+1$ или -1 :

$$T_n\left(\cos \frac{m\pi}{n}\right) = (-1)^m.$$

Коэффициенты интерполяционных формул

а) Интерполирование по первой формуле Ньютона

u	$\frac{u(u-1)}{2}$	$\frac{u(u-1)(u-2)}{6}$	$\frac{u(u-1)(u-2)(u-3)}{24}$	u	$\frac{u(u-1)}{2}$	$\frac{u(u-1)(u-2)}{6}$	$\frac{u(u-1)(u-2)(u-3)}{24}$
0,00	-0,00000	+0,0000	-0,0000	0,50	-0,12500	+0,0625	-0,0391
0,01	00495	0033	0,024	0,51	12495	0621	0386
0,02	00980	0065	0,048	0,52	12480	0616	0382
0,03	01455	0095	0071	0,53	12455	0610	0377
0,04	01920	0125	0093	0,54	12420	0604	0372
0,05	-0,02375	+0,0154	-0,0114	0,55	-0,12375	+0,0598	-0,0366
0,06	02820	0182	0134	0,56	12320	0591	0361
0,07	3255	0209	0153	0,57	12255	0584	0355
0,08	3680	0235	0172	0,58	12180	0576	0349
0,09	4095	0261	0190	0,59	12095	0568	0342
0,10	-0,04500	+0,0285	-0,0207	0,60	-0,12000	+0,0560	-0,0336
0,11	04895	0308	0223	0,61	11895	0551	0329
0,12	05280	0331	0233	0,62	11780	0542	0322
0,13	05655	0352	0253	0,63	11655	0532	0315
0,14	06020	0373	0267	0,64	11520	0522	0308
0,15	-0,06375	+0,0393	-0,0280	0,65	-0,11575	+0,0512	-0,0301
0,16	06720	0412	0293	0,66	11220	0501	0293
0,17	07055	0430	0304	0,67	11055	0490	0285
0,18	07380	0448	0316	0,68	10880	0479	0278
0,19	07695	0464	0326	0,69	10695	0467	0270
0,20	-0,08000	+0,0480	-0,0336	0,70	-0,10500	+0,0455	-0,0262
0,21	08295	0495	0345	0,71	10295	0443	0253
0,22	08580	0509	0354	0,72	10080	0430	0245
0,23	08855	0522	0362	0,73	09855	0417	0237
0,24	09120	0535	0369	0,74	09620	0404	0228
0,25	-0,09375	+0,0547	-0,0376	0,75	-0,09375	+0,0391	-0,0220
0,26	09620	0558	0382	0,76	09120	0377	0211
0,27	09855	0568	0388	0,77	08855	0363	0202
0,28	10080	0578	0393	0,78	08580	0348	0194
0,29	10295	0587	0398	0,79	08295	0335	0185
0,30	-0,10500	+0,0595	-0,0402	0,80	-0,08000	+0,0320	-0,0176
0,31	10695	0602	0405	0,81	07695	0305	0167
0,32	10880	0609	0408	0,82	07380	0290	0158
0,33	11055	0615	0411	0,83	07055	0275	0149
0,34	11220	0621	0413	0,84	06720	0260	0140
0,35	-0,11375	+0,0626	-0,0415	0,85	-0,06375	+0,0244	-0,0131
0,36	11520	0630	0416	0,86	06020	0229	0122
0,37	11655	0633	0416	0,87	05655	0213	0113
0,38	11780	0636	0417	0,88	05280	0197	0104
0,39	11895	0638	0413	0,89	04895	0181	0095
0,40	-0,12000	+0,0640	-0,0416	0,90	-0,04500	+0,0165	-0,0087
0,41	12095	0641	0415	0,91	04095	0149	0078
0,42	12180	0641	0414	0,92	03630	0132	0069
0,43	12255	0641	0412	0,93	03255	0116	0060
0,44	12320	0641	0410	0,94	02820	0100	0051
0,45	-0,12375	+0,0639	-0,0408	0,95	-0,02375	+0,0083	-0,0043
0,46	12420	0638	0405	0,96	01920	0067	0034
0,47	12455	0635	0402	0,97	01455	0050	0025
0,48	12480	0632	0398	0,98	00980	0033	0017
0,49	12495	0629	0395	0,99	00495	0017	0008
0,50	-0,12500	+0,0625	-0,0391	1,00	-0,00000	+0,0000	-0,0000

б) Интерполирование
по формуле Стирдинга

в) Интерполирование по формуле Бесселя

u	$\frac{u^2}{2}$	$\frac{u(u^2-1)}{6}$	$\frac{u^3(u^2-1)}{24}$	u	$\frac{u(u-1)}{2}$	$\frac{u(u-1)\left(u-\frac{1}{2}\right)}{6}$	$\frac{(u+1)u(u-1)(u-2)}{24}$	u
0,00	+0,00000	-0,0000	-0,0000	0,00	-0,0000-	+0,0000-	+0,0000+	1,00
0,01	00005	0017	0000	0,01	00495	0008	0008	0,99
0,02	00020	0033	0000	0,02	00980	0016	0016	0,98
0,03	00045	0050	0000	0,03	01455	0023	0025	0,97
0,04	00080	0067	0001	0,04	01920	0029	0033	0,96
0,05	+0,00125	-0,0083	-0,0001	0,05	-0,02375-	+0,0036-	+0,0041+	0,95
0,06	00180	0100	0001	0,06	02820	0041	0048	0,94
0,07	00245	0116	0002	0,07	03255	0047	0056	0,93
0,08	00320	0133	0003	0,08	03680	0052	0064	0,92
0,09	00405	0149	0003	0,09	04095	0056	0071	0,91
0,10	+0,00500	-0,0165	-0,0004	0,10	-0,04500-	+0,0060-	+0,0078+	0,90
0,11	00605	0181	0005	0,11	04895	0064	0086	0,89
0,12	00720	0197	0006	0,12	05280	0067	0093	0,88
0,13	00845	0213	0007	0,13	05655	0070	0100	0,87
0,14	00980	0229	0008	0,14	06020	0072	0106	0,86
0,15	+0,01125	-0,0244	-0,0009	0,15	-0,06375-	+0,0074-	+0,0113+	0,85
0,16	01280	0260	0010	0,16	06720	0076	0120	0,84
0,17	01445	0275	0012	0,17	07055	0078	0126	0,83
0,18	01620	0290	0013	0,18	07380	0079	0132	0,82
0,19	01805	0305	0014	0,19	07695	0080	0138	0,81
0,20	+0,02000	-0,0320	-0,0016	0,20	-0,08000-	+0,0080-	+0,0144+	0,80
0,21	02205	0335	0018	0,21	08295	0080	0150	0,79
0,22	02420	0349	0019	0,22	08580	0080	0155	0,78
0,23	02645	0363	0021	0,23	08855	0080	0161	0,77
0,24	02880	0377	0023	0,24	09120	0079	0166	0,76
0,25	+0,03125	-0,0391	-0,0024	0,25	-0,09375-	+0,0078-	+0,0171+	0,75
0,26	03380	0404	0026	0,26	09620	0077	0176	0,74
0,27	03645	0417	0028	0,27	09855	0076	0180	0,73
0,28	03920	0430	0030	0,28	10080	0074	0185	0,72
0,29	04205	0443	0032	0,29	10295	0072	0189	0,71
0,30	+0,04500	-0,0455	-0,0034	0,30	-0,10500-	+0,0070-	+0,0193+	0,70
0,31	04805	0467	0036	0,31	10695	0068	0197	0,69
0,32	05120	0479	0038	0,32	10880	0065	0201	0,68
0,33	05445	0490	0040	0,33	11055	0063	0205	0,67
0,34	05780	0501	0043	0,34	11220	0060	0208	0,66
0,35	+0,06125	-0,0512	-0,0045	0,35	-0,11375-	+0,0057-	+0,0211+	0,65
0,36	06480	0522	0047	0,36	11520	0054	0214	0,64
0,37	06845	0532	0049	0,37	11655	0050	0217	0,63
0,38	07220	0542	0051	0,38	11780	0047	0219	0,62
0,39	07605	0551	0054	0,39	11895	0044	0222	0,61
0,40	+0,08000	-0,0560	-0,0056	0,40	-0,12000-	+0,0040-	+0,0224+	0,60
0,41	08405	0568	0058	0,41	12095	0036	0226	0,59
0,42	08820	0576	0060	0,42	12180	0032	0228	0,58
0,43	09245	0584	0063	0,43	12255	0029	0229	0,57
0,44	09680	0591	0065	0,44	12320	0025	0231	0,56
0,45	+0,10125	-0,0593	-0,0067	0,45	-0,12375-	+0,0021-	+0,0232+	0,55
0,46	10580	0604	0069	0,46	12420	0017	0233	0,54
0,47	11045	0610	0072	0,47	12455	0012	0233	0,53
0,48	11520	0616	0074	0,48	12480	0008	0234	0,52
0,49	12005	0621	0076	0,49	12495	0004	0234	0,51
0,50	+0,12500	-0,0625	-0,0073	0,50	-0,12500-	+0,0000-	+0,0234+	0,50

Полиномы Чебышева обладают свойством ортогональности на отрезке $(-1, 1)$ с весом $\sqrt{1-x^2}$, т. е.

$$\int_{-1}^1 \frac{T_k(x) T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = 0 \quad (k \neq m);$$

если же $k = m$, то имеем:

$$\int_{-1}^1 \frac{T_0^2(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \pi;$$

$$\int_{-1}^1 \frac{T_k^2(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{\pi}{2} \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Основное свойство полиномов Чебышева, на котором основано решение многих задач в теории приближения функций, состоит в том, что из всех многочленов степени n , имеющих коэффициент при x^n , равный единице, полином $\frac{1}{2^{n-1}} T_n(x)$ наименее уклоняется от нуля на отрезке $(-1, 1)$, т. е. максимальное значение величины $\left| \frac{1}{2^{n-1}} T_n(x) \right|$ на отрезке $(-1, 1)$ меньше, чем максимальное значение на этом же отрезке величины $|P(x)|$, где $P(x)$ — любой другой многочлен степени n , у которого коэффициент при x^n равен единице.

Это максимальное значение величины $\left| \frac{1}{2^{n-1}} T(x) \right|$ равно $\frac{1}{2^{n-1}}$.

Пример 1. Среди всех многочленов степени n , принимающих в точке x_0 , лежащей вне отрезка $(-1, 1)$, данное значение y_0 , наименее уклоняется от нуля на отрезке $(-1, 1)$ многочлен

$$\frac{y_0}{T_n(x_0)} \cdot T_n(x).$$

Пример 2. Из всех тригонометрических многочленов $a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x + \dots + a_m \cos mx + b_m \sin mx$ порядка $m < n$, принимающих в точке x_0 ($\alpha < |x_0| < \pi$) данное значение y_0 , наименее уклоняется от нуля на отрезке $[-\alpha, \alpha]$ тригонометрический многочлен степени n :

$$\frac{y_0}{T_n\left(\frac{\cos x_0 - \cos^2 \frac{\alpha}{2}}{\sin^2 \frac{\alpha}{2}}\right)} \cdot T_n\left(\frac{\cos x - \cos^2 \frac{\alpha}{2}}{\sin^2 \frac{\alpha}{2}}\right).$$

ОБРАТНОЕ ИНТЕРПОЛИРОВАНИЕ

Определение значения аргумента, соответствующего данному значению функции, находящемуся между двумя табличными значениями, называется обратным интерполированием. Ниже указаны два основных метода для решения задачи обратного интерполирования: метод итерации и метод обращения рядов.

Метод итерации. Метод итерации показан ниже в применении к первой формуле Ньютона, которой можно придать вид:

$$u = \frac{y - y_0}{\Delta y_0} - \frac{u(u-1)}{2!} \frac{\Delta^2 y_0}{\Delta y_0} - \frac{u(u-1)(u-2)}{3!} \frac{\Delta^3 y_0}{\Delta y_0} - \dots$$

Для определения значения u принимаем в качестве первого приближения

$$u_1 = \frac{y - y_0}{\Delta y_0}$$

и, подставив значение u_1 в нашу формулу, получим:

$$u_2 = \frac{y - y_0}{\Delta y_0} - \frac{u_1(u_1-1)}{2!} \frac{\Delta^2 y_0}{\Delta y_0} - \frac{u_1(u_1-1)(u_1-2)}{3!} \frac{\Delta^3 y_0}{\Delta y_0} - \dots$$

Найденное значение u_2 подставим в ту же формулу и получим следующее приближённое значение u_3 :

$$u_3 = \frac{y - y_0}{\Delta y_0} - \frac{u_2(u_2-1)}{2!} \frac{\Delta^2 y_0}{\Delta y_0} - \frac{u_2(u_2-1)(u_2-2)}{3!} \frac{\Delta^3 y_0}{\Delta y_0} - \dots$$

Аналогичным образом находим последующие приближения u_4, u_5 и т. д. От найденного значения u можно перейти к искомому значению аргумента x , пользуясь формулой $x = x_0 + uh$.

Метод итерации может быть применён также к формулам Стирлинга, Бесселя и др.

Метод обращения рядов. Расположим интерполирующую функцию по возрастающим степеням аргумента u :

$$y = a_0 + a_1 u + a_2 u^2 + \dots,$$

тогда

$$u = \frac{y - a_0}{a_1} + c_1 \left(\frac{y - a_0}{a_1} \right)^2 + c_2 \left(\frac{y - a_0}{a_1} \right)^3 + \dots,$$

где коэффициенты c_1, c_2, c_3 и т. д. определяются формулами:

$$c_1 = -\frac{a_2}{a_1}; \quad c_2 = -\frac{a_3}{a_1} + 2 \left(\frac{a_2}{a_1} \right)^2;$$

$$c_3 = -\frac{a_4}{a_1} + 5 \left(\frac{a_2 a_3}{a_1^2} \right) - 5 \left(\frac{a_2}{a_1} \right)^3;$$

$$c_4 = -\frac{a_5}{a_1} + 6 \left(\frac{a_2 a_4}{a_1^2} \right) + 5 \left(\frac{a_3}{a_1} \right)^2 -$$

$$- 21 \left(\frac{a_2^2 a_3}{a_1^3} \right) + 14 \left(\frac{a_2}{a_1} \right)^4 \text{ и т. д.}$$

Обратная интерполяционная формула Лагранжа:

$$x = \frac{(y - y_1)(y - y_2) \dots (y - y_n)}{(y_0 - y_1)(y_0 - y_2) \dots (y_0 - y_n)} x_0 +$$

$$+ \frac{(y - y_0)(y - y_2) \dots (y - y_n)}{(y_1 - y_0)(y_1 - y_2) \dots (y_1 - y_n)} x_1 +$$

$$+ \dots + \frac{(y - y_0)(y - y_1) \dots (y - y_{n-1})}{(y_n - y_0)(y_n - y_1) \dots (y_n - y_{n-1})} x_n.$$

ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПО КОНЕЧНЫМ РАЗНОСТЯМ

Неопределённым интегралом по конечным разностям или неопределённой суммой функции $f(x)$ называется функция $F(x) = \sum f(x)$, удовлетворяющая условию $\Delta F(x) = f(x)$, а определённым интегралом по конечным разностям называется выражение

$$\sum_{a, nh}^{a, nh} f(x) = F[a + (n+1)h] - F(a) = f(a) + f(a+h) + \dots + f(a+nh).$$

Если $\omega(x)$ есть периодическая функция с периодом h , т. е. $\omega(x+h) = \omega(x)$, то функция $F(x) + \omega(x)$ также является неопределённым интегралом функции $f(x)$.

Основные свойства неопределённого интеграла по конечным разностям:

- 1) $\sum \Delta f(x) = f(x)$;
- 2) $\sum [\varphi(x) \pm \psi(x)] = \sum \varphi(x) \pm \sum \psi(x)$;
- 3) $\sum c \varphi(x) = c \sum \varphi(x)$;
- 4) $\sum \varphi(x) \Delta \psi(x) = \varphi(x) \psi(x) - \sum \psi(x+h) \Delta \varphi(x)$ (формула неопределённого суммирования по частям).

Все указанные равенства справедливы с точностью до периодической функции $\omega(x)$ с периодом h .

НЕОПРЕДЕЛЁННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ ПО КОНЕЧНЫМ РАЗНОСТЯМ ОТ НЕКОТОРЫХ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ

1. Факториальная функция:

$$\sum x^{(n)} = \frac{x^{(n+1)}}{(n+1)h} + \omega(x).$$

2. Многочлен. Неопределённый интеграл от многочлена n -й степени есть многочлен $(n+1)$ -й степени; для его вычисления надлежит разложить подинтегральный многочлен по факториальным функциям.

Это относится и к степенной функции x^n .

3. Показательная функция:

$$\sum a^x = \frac{a^x}{a^h - 1} + \omega(x).$$

4. Тригонометрические функции:

$$\sum \sin x = \frac{\cos\left(x - \frac{h}{2}\right)}{2 \sin \frac{h}{2}} + \omega(x);$$

$$\sum \cos x = \frac{\sin\left(x - \frac{h}{2}\right)}{2 \sin \frac{h}{2}} + \omega(x).$$

ПРИМЕНЕНИЕ ОПРЕДЕЛЁННЫХ ИНТЕГРАЛОВ ПО КОНЕЧНЫМ РАЗНОСТЯМ К СУММИРОВАНИЮ РЯДОВ

Формула определённого интеграла по конечным разностям

$$\sum_a^{a+nh} f(x) = F[a + (n+1)h] - F(a)$$

может быть использована для суммирования некоторых рядов в случае, если общий член ряда, рассматриваемый как функция номера, может быть проинтегрирован. В качестве примера вычислим сумму кубов натурального ряда чисел от 1 до n .

По формуле

$$\sum_0^n x^3 = F(n+1) - F(0).$$

Разложение функции x^3 по факториальным функциям даёт:

$$x^3 = \Delta^0 x^3 + \frac{\Delta^2 0^3}{2!} x(x-1) + \frac{\Delta^3 0^3}{3!} x(x-1)(x-2),$$

где числа $\Delta^0 0^3$, $\Delta^2 0^3$, $\Delta^3 0^3$ найдём в табл. 29 (стр. 245), тогда

$$x^3 = x + 3x(x-1) + x(x-1)(x-2).$$

Функция $F(x)$ вычисляется посредством формулы интегрирования факториальных функций:

$$\begin{aligned} F(x) &= \sum x + 3 \sum x(x-1) + \sum x(x-1)(x-2) = \\ &= \frac{x(x-1)}{2} + x(x-1)(x-2) + \\ &\quad + \frac{1}{4} x(x-1)(x-2)(x-3) = \\ &= \left[\frac{x(x-1)}{2} \right]^2; F(0) = 0, \end{aligned}$$

и, следовательно, полагая $x=n+1$, получим:

$$\sum_0^n x^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2.$$

В случае, если интегрирование по конечным разностям общего члена ряда затруднительно, можно ряд просуммировать приближённо, применив формулу Эйлера-Маклорена, устанавливающую связь между интегралом по конечным разностям и определённым интегралом:

$$\begin{aligned} \sum_a^{a+nh} f(x) &= \frac{1}{h} \int_a^{a+nh} f(x) dx + A_1 [f(a+nh) - \\ &\quad - f(a)] + A_2 h [f'(a+nh) - f'(a)] + \\ &\quad + A_3 h^3 [f'''(a+nh) - f'''(a)] + \\ &\quad + A_5 h^5 [f^{(5)}(a+nh) - f^{(5)}(a)] + \dots + \\ &\quad + A_{2m-2} h^{2m-3} [f^{(2m-3)}(a+nh) - \\ &\quad - f^{(2m-3)}(a)] + n A_{2m} h^{2m} f^{(2m)}\left(\frac{a}{2}\right), \end{aligned}$$

где $a < \xi < a+nh$ и

$$A_1 = -\frac{1}{2}, A_2 = \frac{1}{12}, A_4 = -\frac{1}{72},$$

$$A_6 = \frac{1}{30240}, A_8 = -\frac{1}{1209600}, \dots$$

Пример. Вычислить сумму ряда

$$S = \frac{1}{101^2} + \frac{1}{103^2} + \frac{1}{105^2} + \dots$$

Здесь

$$f(x) = \frac{1}{x^2}, a = 101; h = 2; n = \infty; \int_a^\infty \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{101};$$

$$f(101) = \frac{1}{101}; f'(101) = -\frac{2}{101^2};$$

$$f'''(101) = -\frac{24}{101^3}; \dots; f(\infty) = f'(\infty) =$$

$$= f''(\infty) = \dots = 0,$$

и, пользуясь формулой Эйлера-Маклорена, получим

$$S = \frac{1}{2 \cdot 101} + \frac{1}{2 \cdot 101^2} - \frac{1}{3 \cdot 101^3} -$$

$$- \frac{4}{15 \cdot 101^5} + \dots = 0,00499983335.$$

УРАВНЕНИЯ В КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЯХ

Общий вид уравнения в конечных разностях следующий:

$$\Phi[x, f(x), \Delta f(x), \Delta^2 f(x), \dots, \Delta^n f(x)] = 0,$$

где $f(x)$ — неизвестная функция аргумента x .

Заменяя в нём конечные разности их выражениями через значения функции, получаем

$$F[x, f(x), f(x+h), f(x+2h), \dots, f(x+nh)] = 0,$$

или, положив $f(x) = y_x$ и $h = 1$ (общий случай сводится к этому подстановкой $x = hz$):

$$F(x, y_x, y_{x+1}, y_{x+2}, \dots, y_{x+n}) = 0.$$

Если уравнение содержит y_x , то его порядок равен n . Если же в уравнении отсутствуют $y_x, y_{x+1}, \dots, y_{x+k-1}$:

$$F(x, y_{x+k}, y_{x+k+1}, y_{x+k+2}, \dots, y_{x+n}) = 0,$$

то порядок его определяется разностью $n-k$, так как уравнение последнего вида сводится к предыдущему подстановкой $y_{x+k} = z_x$:

$$F(x, z_x, z_{x+1}, z_{x+2}, \dots, z_{x+n-k}) = 0.$$

Общее решение уравнения n -го порядка

$$y_x = \varphi[x, C_1(x), C_2(x), \dots, C_n(x)],$$

обращающее в тождество это уравнение, содержит n произвольных периодических функций с периодом 1 (в частности постоянных).

Частное решение получается из общего, если функции $C_1(x), \dots, C_n(x)$ — определённые.

При данной системе начальных значений

$$y_a, y_{a+1}, y_{a+2}, \dots, y_{a+n-1}$$

решение разностного уравнения заключается в определении y_{a+m} при любом целом m .

Уравнение

$$A_0(x) y_{x+n} + A_1(x) y_{x+n-1} + \dots +$$

$$+ A_n(x) y_x = f(x)$$

называется **линейным разностным уравнением**; если $f(x) = 0$, оно называется **однородным**, в противном случае — **неоднородным**.

Если a_0, a_1, \dots, a_n — постоянные, то уравнение

$$a_0 y_{x+n} + a_1 y_{x+n-1} + \dots + a_n y_x = f(x)$$

называется **линейным уравнением с постоянными коэффициентами**.

Общее решение линейного неоднородного уравнения равно сумме $y_x^0 + y_x^1$ общего решения соответствующего однородного урав-

нения и какого-нибудь частного решения неоднородного уравнения.

Для отыскания общего решения однородного уравнения с постоянными коэффициентами

$$a_0 y_{x+n} + a_1 y_{x+n-1} + \dots + a_n y_x = 0$$

составляется **характеристическое уравнение**

$$a_0 r^n + a_1 r^{n-1} + \dots + a_n = 0.$$

Каждому действительному корню r характеристического уравнения кратности k соответствует k решений однородного уравнения

$$r^x, x r^x, \dots, x^{k-1} r^x.$$

Каждой паре $\rho (\cos \theta \pm i \sin \theta)$ сопряжённых комплексных корней характеристического уравнения кратности k соответствует $2k$ решений однородного уравнения

$$\rho^x \cos \theta x, \rho^x \sin \theta x, x \rho^x \cos \theta x, x \rho^x \sin \theta x, \dots,$$

$$x^{k-1} \rho^x \cos \theta x, x^{k-1} \rho^x \sin \theta x.$$

Таким образом, решив характеристическое уравнение, мы найдём n частных решений однородного разностного уравнения $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$, и общее решение этого уравнения имеет вид:

$$y_x = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \dots + C_n y_n(x).$$

Частное решение неоднородного уравнения находится путём подбора. При этом, если правая часть есть многочлен m -й степени, то его разлагают по факториальным функциям:

$$f(x) = A_0 x^{(m)} + A_1 x^{(m-1)} + \dots + A_m$$

и ищут частное решение в виде многочлена (если единица не является корнем характеристического уравнения) той же степени:

$$y_x^1 = B_0 x^{(m)} + B_1 x^{(m-1)} + \dots + B_m.$$

Подставляя этот многочлен в левую часть уравнения и сравнивая коэффициенты при факториальных функциях одинаковой степени в обеих частях равенства, можно определить коэффициенты B_i .

Если единица является корнем характеристического уравнения кратности k , то частное решение следует искать в виде многочлена степени $m+k$.

Пример. Найти частное решение уравнения

$$2y_x + 4 - 5y_{x+3} + 5y_{x+1} - 2y_x = 2$$

при начальных условиях $y_0 = 0, y_1 = 11, y_2 = -8, y_3 = 6$ и вычислить y_{100} .

Характеристическое уравнение имеет вид:

$$2r^4 - 5r^3 + 5r - 2 = 2(r-1)(r+1)(r-\frac{1}{2})(r-2) = 0,$$

откуда $r_1 = 1, r_2 = -1, r_3 = \frac{1}{2}, r_4 = 2$ и общее решение соответствующего однородного уравнения выражается равенством

$$y_x^1 = C_1 + C_2 (-1)^x + C_3 \left(\frac{1}{2}\right)^x + C_4 2^x;$$

число 1 является однократным (простым) корнем характеристического уравнения и частное решение следует искать в виде

$$y_x^1 = B_0 x^{(1)} + B_1 = B_0 x + B_1.$$

Подставив y_x^1 в данное уравнение, получаем

$$2[B_0(x+4) + B_1] - 5[B_0(x+3) + B_1] +$$

$$+ 5[B_0(x+1) + B_1] - 2(B_0 x + B_1) = 2,$$

откуда $-2B_0 = 2$ и $B_0 = -1$, следовательно $\frac{y_x^1}{x} = -x + B_1$

(B_1 — произвольно) и общее решение уравнения имеет вид:

$$y = C_1 + C_2 (-1)^x + C_3 \left(\frac{1}{2}\right)^x + C_4 2^x - x$$

(B_1 включено в C_1).

Начальные условия дают:

$$y_0 = C_1 + C_2 + C_3 + C_4 = 0;$$

$$y_1 = C_1 - C_2 + \frac{1}{2} C_3 + 2C_4 - 1 = 11;$$

$$y_2 = C_1 + C_2 + \frac{1}{4} C_3 + 4C_4 - 2 = -8;$$

$$y_3 = C_1 - C_2 + \frac{1}{8} C_3 + 8C_4 - 3 = 6,$$

откуда $C_1 = C_4 = 0$; $C_2 = -8$; $C_3 = 8$ и искомое частное решение

$$y_x = -8(-1)^x + 8\left(\frac{1}{2}\right)^x - x$$

и

$$y_{100} = \frac{8}{2^{100}} - 108.$$

ЧИСЛЕННЫЕ И ГРАФИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ АНАЛИЗА

ЧИСЛЕННОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ

Если функция задана таблицей своих значений, то её можно численно продифференцировать, т. е. приближённо вычислить значения её производной путём составления для функции аналитического выражения по какой-либо из интерполяционных формул и последующего дифференцирования полученной интерполирующей функции. Выбор интерполяционной формулы осуществляется в зависимости от местонахождения точки, в которой отыскивается значение производной (в начале, в конце или в середине таблицы).

Из первой формулы Ньютона получаем:

$$f'(x_0 + hu) = \frac{1}{h} \left[\Delta y_0 + \frac{2u-1}{2} \Delta^2 y_0 + \frac{3u^2-6u+2}{6} \Delta^3 y_0 + \frac{4u^3-18u^2+22u-6}{24} \Delta^4 y_0 + \dots \right];$$

$$f''(x_0 + hu) = \frac{1}{h^2} \left[\Delta^2 y_0 + (u-1) \Delta^3 y_0 + \frac{6u^2-18u+11}{12} \Delta^4 y_0 + \dots \right];$$

$$f'''(x_0 + hu) = \frac{1}{h^3} \left[\Delta^3 y_0 + \frac{2u-3}{2} \Delta^4 y_0 + \dots \right];$$

Эти формулы при $u = 0$ дают:

$$f'(x_0) = \frac{1}{h} \left[\Delta y_0 - \frac{1}{2} \Delta^2 y_0 + \frac{1}{3} \Delta^3 y_0 - \frac{1}{4} \Delta^4 y_0 + \dots \right];$$

$$f''(x_0) = \frac{1}{h^2} \left[\Delta^2 y_0 - \Delta^3 y_0 + \frac{11}{12} \Delta^4 y_0 - \frac{5}{6} \Delta^5 y_0 + \dots \right];$$

$$f'''(x_0) = \frac{1}{h^3} \left[\Delta^3 y_0 - \frac{3}{2} \Delta^4 y_0 + \frac{7}{4} \Delta^5 y_0 - \frac{15}{8} \Delta^6 y_0 + \dots \right];$$

Аналогичным образом из формулы Стирлинга:

$$f'(x_0 + hu) = \frac{1}{h} \left[\frac{\Delta y_0 + \Delta y_{-1}}{2} + u \Delta^2 y_{-1} + \frac{3u^2-1}{6} \frac{\Delta^3 y_{-1} + \Delta^3 y_{-2}}{2} + \frac{2u^3-u}{12} \Delta^4 y_{-2} + \dots \right];$$

$$f''(x_0 + hu) = \frac{1}{h^2} \left[\frac{\Delta^2 y_{-1} + u \frac{\Delta^3 y_{-1} + \Delta^3 y_{-2}}{2}}{2} + \frac{6u^2-1}{12} \Delta^4 y_{-2} + \dots \right];$$

$$f'''(x_0 + hu) = \frac{1}{h^3} \left[\frac{\Delta^3 y_{-1} + \Delta^3 y_{-2}}{2} + u \Delta^4 y_{-2} + \dots \right];$$

При $u = 0$ эти формулы переходят в следующие:

$$f'(x_0) = \frac{1}{h} \left[\frac{\Delta y_0 + \Delta y_{-1}}{2} - \frac{1}{6} \frac{\Delta^3 y_{-1} + \Delta^3 y_{-2}}{2} + \frac{1}{30} \frac{\Delta^5 y_{-2} + \Delta^5 y_{-3}}{2} + \dots \right];$$

$$f''(x_0) = \frac{1}{h^2} \left[\Delta^2 y_{-1} - \frac{1}{12} \Delta^4 y_{-2} + \frac{1}{90} \Delta^6 y_{-3} - \dots \right];$$

$$f'''(x_0) = \frac{1}{h^3} \left[\frac{\Delta^3 y_{-1} + \Delta^3 y_{-2}}{2} - \frac{1}{4} \frac{\Delta^5 y_{-2} + \Delta^5 y_{-3}}{2} + \dots \right];$$

Из других интерполяционных формул можно получить выражения для производных подобным же путём.

ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ (МЕХАНИЧЕСКИЕ КВАДРАТУРЫ)

Если в определённом интеграле $\int_a^b f(x) dx$

подинтегральная функция задана таблицей, то её можно численно проинтегрировать, т. е. приближённо вычислить значение определённого интеграла путём интерполирования подинтегральной функции по какой-либо из интерполяционных формул с последующим интегрированием полученной интерполирующей функции в заданных пределах. Численное интегрирование определённого интеграла называется иначе механической квадратурой.

Ниже приводятся некоторые наиболее употребительные формулы механических квадратур.

Формула прямоугольников

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{n} (y_0 + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1})$$

или

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{n} (y_1 + y_2 + y_3 + \dots + y_n),$$

где

$$y_0 = f(x_0), y_1 = f(x_0 + h),$$

$$y_2 = f(x_0 + 2h), \dots, y_n = f(x_0 + nh),$$

$$\text{причём } x_0 = a, x_n = a + nh = b, h = \frac{b-a}{n}.$$

Те же обозначения приняты и в следующих трёх формулах.

Формула трапеций

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{2n} (y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \dots + 2y_{n-1} + y_n).$$

Формула парабол

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{3n} (y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + \dots + 4y_{n-2} + 2y_{n-1} + y_n),$$

где n — чётное.

Формула Котеса

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{n} \left[H_n^0 y_0 + H_n^1 y_1 + H_n^2 y_2 + \dots + H_n^n y_n \right],$$

где коэффициенты H_n^i даны в табл. 33.

Таблица 33

Коэффициенты H_n^i формулы Котеса

n	H_n^0	H_n^1	H_n^2	H_n^3	H_n^4	H_n^5	H_n^6
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$					
2	$\frac{1}{6}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{1}{6}$				
3	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$			
4	$\frac{7}{90}$	$\frac{16}{45}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{16}{45}$	$\frac{7}{90}$		
5	$\frac{19}{288}$	$\frac{25}{96}$	$\frac{25}{144}$	$\frac{25}{144}$	$\frac{25}{96}$	$\frac{19}{288}$	
6	$\frac{41}{840}$	$\frac{9}{35}$	$\frac{9}{280}$	$\frac{34}{105}$	$\frac{9}{280}$	$\frac{9}{35}$	$\frac{41}{840}$

Формула Чебышева

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{n} \left[f(X_1) + f(X_2) + \dots + f(X_n) \right],$$

где

$$X_i = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} x_i,$$

а абсциссы x_i даны в табл. 34.

При $n = 8$ и при $n > 9$ формула Чебышева неприменима (абсциссы мнимые).

Формула Гаусса

$$\int_a^b f(x) dx \approx (b-a) [A_1 f(X_1) + A_2 f(X_2) + \dots + A_n f(X_n)],$$

где $X_i = a + (b-a)x_i$, а коэффициенты A_i и абсциссы x_i даны в табл. 35.

Сравнение формул механических квадратур

Точность каждой формулы механических квадратур, как правило, тем больше, чем больше n . Наименее точной является, вообще говоря, формула прямоугольников. Формула трапеций получается в результате линейной интерполяции подынтегральной функции на каждом отрезке (x_i, x_{i+1}) и даёт меньшую точность при том же n , чем формула парабол, получаемая при помощи квадратичной интерполяции подынтегральной функции на каждом отрезке (x_i, x_{i+2}) с узлами интерполяции x_i, x_{i+1}, x_{i+2} .

Формула Котеса является более общей формулой; формула трапеций получается применением формулы Котеса при $n=1$ к каждому из отрезков (x_i, x_{i+1}) ; формула парабол соответствует случаю $n=2$.

Ещё более точной является формула Гаусса; формула Гаусса даёт точный результат, когда подынтегральная функция — многочлен степени не выше, чем $2n-1$.

Если экспериментально вычисленные ординаты y_i содержат случайные ошибки, то вызываемая этим ошибка в значении вычисляемого интеграла — наименьшая при пользовании формулой Чебышева. В этом преимущество формулы Чебышева перед остальными формулами.

Пример. Вычислить $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$ (точное значение: $I = 1$).

а) По формуле трапеций. Положив $n=10$, получим

$$\frac{b-a}{n} = \frac{\pi}{20} = 0,1570796 \dots = 9^\circ$$

и

$$I = \frac{1}{2} \cdot 0,1570796 \dots [\sin 0^\circ + 2 \sin 9^\circ + 2 \sin 18^\circ + \dots + 2 \sin 81^\circ + \sin 90^\circ] = 0,997946.$$

б) По формуле парабол. При $n=10$:

$$I = \frac{1}{3} \cdot 0,1570796 \dots [\sin 0^\circ + 4 \sin 9^\circ + 2 \sin 18^\circ + 4 \sin 27^\circ + \dots + 4 \sin 72^\circ + 2 \sin 81^\circ + \sin 90^\circ] = 1,000005.$$

в) По формуле Чебышева. Так как эта формула более точная, чем предыдущие, то положим $n=5$.

Таблица 34

Абсциссы x_i для формулы Чебышева

n	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9
2	0,577350	-0,577350							
3	0,707107	0	-0,707107						
4	0,794654	0,187592	-0,187592	-0,794654					
5	0,832498	0,374541	0	-0,374541	-0,832498				
6	0,866247	0,422519	0,266635	-0,266635	-0,422519	-0,866247			
7	0,883362	0,529657	0,323919	0	-0,323919	-0,529657	-0,883362		
9	0,911589	0,601619	0,528762	0,167906	0	-0,167906	-0,528762	-0,601619	-0,911589

Таблица 35

Абсциссы x_i и коэффициенты A_i формулы Гаусса

n	А б с ц и с с ы x_i							
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
1	0,5							
2	0,211325	0,788675						
3	0,112702	0,5	0,887298					
4	0,069432	0,330009	0,669991	0,930563				
5	0,046910	0,230765	0,5	0,769235	0,953090			
6	0,033765	0,169395	0,380690	0,619310	0,830605	0,966235		
7	0,025446	0,129234	0,297077	0,5	0,702923	0,870766	0,974554	
8	0,019855	0,101667	0,237234	0,408283	0,591717	0,762766	0,898333	0,980145

Продолжение табл. 35

n	К о э ф ф и ц и е н т ы A_i							
	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8
1	1							
2	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$						
3	$\frac{5}{18}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{5}{18}$					
4	0,173927	0,326073	0,326073	0,173927				
5	0,118463	0,23314	0,284444	0,239314	0,118463			
6	0,085662	0,180381	0,233957	0,233957	0,180381	0,085662		
7	0,064742	0,139853	0,190915	0,208980	0,190915	0,139853	0,064742	
8	0,050614	0,111191	0,156853	0,181342	0,181342	0,156853	0,111191	0,050614

Пользуясь табл. 34, имеем:

 $x_1 = -x_8 = 0,832498$; $x_2 = -x_7 = 0,374541$; $x_3 = 0$.

Далее:

$$X_i = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} x_i = 45^\circ + 45^\circ x_i$$

и

$$\begin{aligned} X_1 &= 45^\circ + 45^\circ x_1 = 82^\circ 27' 74; & \sin X_1 &= 0,99136; \\ X_2 &= 45^\circ + 45^\circ x_2 = 61^\circ 51' 26; & \sin X_2 &= 0,88176; \\ X_3 &= 45^\circ + 45^\circ x_3 = 45^\circ; & \sin X_3 &= 0,70711; \\ X_4 &= 45^\circ + 45^\circ x_4 = 28^\circ 08' 74; & \sin X_4 &= 0,47171; \\ X_5 &= 45^\circ + 45^\circ x_5 = 7^\circ 32' 26; & \sin X_5 &= 0,13117; \end{aligned}$$

$$I = \frac{1}{5} \cdot \frac{\pi}{2} (\sin X_1 + \sin X_2 + \sin X_3 + \sin X_4 + \sin X_5) = 1,000000.$$

г) По формуле Гаусса. Взяв $n=5$, находим x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 и A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 из табл. 35.Далее $X_i = a + (b-a) x_i = 90^\circ x_i$, откуда

$$X_1 = 4^\circ 13' 18", 87; X_2 = 20^\circ 46' 7", 96; X_3 = 45^\circ; \\ X_4 = 69^\circ 13' 52", 03; X_5 = 85^\circ 46' 41", 13$$

и

$$I = \frac{\pi}{2} (A_1 \sin X_1 + A_2 \sin X_2 + A_3 \sin X_3 + A_4 \sin X_4 + A_5 \sin X_5) = 1,000000.$$

ГАРМОНИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Периодическая функция $f(x)$ с периодом 2π может быть приближённо представлена в виде тригонометрического полинома. Для вычисления коэффициентов этого полинома следует воспользоваться формулами коэффициентов Фурье (стр. 162), которые могут быть

вычислены приближённо по любой из формул механических квадратур.

Разделив интервал $(0, 2\pi)$ на $4r$ равных частей, обозначив абсциссы точек деления через $x_0, x_1, x_2, \dots, x_{4r}$ ($x_n = \frac{n\pi}{2r}$) и соответствующие им ординаты графика $y = f(x)$ через $y_0, y_1, y_2, \dots, y_{4r}$ ($y_{4r} = y_0$), получим приближённое представление функции $f(x)$:

$$f(x) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{2r} (a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

Если для вычисления коэффициентов пользоваться формулой трапеций (стр. 255), то будем иметь:

$$a_0 = \frac{1}{2r} \sum_{n=1}^{4r} y_n;$$

$$a_k = \frac{1}{2r} \sum_{n=1}^{4r} y_n \cos kx_n \quad (k = 1, 2, \dots, 2r-1);$$

$$a_{2r} = \frac{1}{2r} \sum_{n=1}^{4r} (-1)^n y_n;$$

$$b_k = \frac{1}{2r} \sum_{n=1}^{4r} y_n \sin kx \quad (k = 1, 2, \dots, 2r-1);$$

$$b_{2r} = 0.$$

Вычисления удобно производить по следующей схеме:

	y_1	y_2	y_3	\dots	y_{2r-1}	y_{2r}	
	y_{4r}	y_{4r-1}	y_{4r-2}	y_{4r-3}	\dots	y_{2r+1}	
Суммы	u_0	u_1	u_2	u_3	\dots	u_{2r-1}	u_{2r}
Разности	v_1	v_2	v_3	\dots	v_{2r-1}		
	u_0	u_1	u_2	\dots	u_{r-1}	u_r	
	u_{2r}	u_{2r-1}	u_{2r-2}	\dots	u_{r+1}		
Суммы	w_0	w_1	w_2	\dots	w_{r-1}	w_r	
Разности	w_0'	w_1'	w_2'	\dots	w_{r-1}'		
	v_1	v_2	v_3	\dots	v_{r-1}	v_r	
	v_{2r-1}	v_{2r-2}	v_{2r-3}	\dots	v_{r+1}		
Суммы	z_1	z_2	z_3	\dots	z_{r-1}	z_r	
Разности	z_1'	z_2'	z_3'	\dots	z_{r-1}'		

Коэффициенты определяются при этом по формулам:

$$a_0 = \frac{1}{2r} \sum_{n=0}^r w_n;$$

$$a_k = \begin{cases} \frac{1}{2r} \sum_{n=0}^r w'_n \cos kx_n & \text{при } k \text{ нечётном;} \\ \frac{1}{2r} \sum_{n=0}^r w_n \cos kx_n & \text{при } k \text{ чётном;} \end{cases}$$

$$a_{2r} = \frac{1}{2r} \sum_{n=0}^r (-1)^n w_n;$$

$$b_k = \begin{cases} \frac{1}{2r} \sum_{n=0}^r z_n \sin kx_n & \text{при } k \text{ нечётном;} \\ \frac{1}{2r} \sum_{n=0}^r z'_n \sin kx_n & \text{при } k \text{ чётном;} \end{cases}$$

$$b_{2r} = 0.$$

ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ 1-го ПОРЯДКА

Для отыскания приближённого частного решения дифференциального уравнения $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$, удовлетворяющего начальному условию $y = y_0$, при $x = x_0$ могут быть применены следующие методы.

Метод последовательных приближений. Используя начальное условие, находим из

уравнения $y' = f(x, y)$ выражение для y в виде:

$$y = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y) dx.$$

За исходное приближённое значение y принимаем y_0 , подставляем его в подинтегральную функцию вместо y , берём квадратуру (точно или приближённо) и получаем первое приближение

$$y_1 = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y_0) dx.$$

Второе и последующие приближения находим аналогично, последовательно подставляя в подинтегральную функцию вместо y вычисленные приближения: y_1, y_2, y_3, \dots и т. д.

$$y_2 = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y_1) dx,$$

$$y_3 = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y_2) dx,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$y_n = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y_{n-1}) dx.$$

Процесс последовательного приближения обычно прекращают, как только абсолютные значения разности между двумя соседними приближениями y_{n+1} и y_n становится меньше допускаемой ошибки.

Пример. Найти решение дифференциального уравнения

$$\frac{dy}{dx} = x + y,$$

удовлетворяющее начальным условиям: $x_0 = 0, y_0 = 1$.
Имеем:

$$y_1 = 1 + \int_0^x (x+1) dx = 1 + x + \frac{x^2}{2};$$

$$y_2 = 1 + \int_0^x \left(x+1 + x + \frac{x^2}{2}\right) dx = 1 + x + x^2 + \frac{x^3}{6};$$

$$y_3 = 1 + \int_0^x \left(x+1 + x + x^2 + \frac{x^2}{6}\right) dx = 1 + x + x^2 + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{24}.$$

Этим приближением можно ограничиться; оно даёт при $x=0,1$ $y=1,1103$, а при $x=0,2$ $y=1,2427$. Если сравнить эти числа с соответствующими значениями точного решения, то окажется, что в первом из них все знаки верные, а во втором ошибка достигает одной единицы последнего знака.

Применение рядов. Частное решение дифференциального уравнения ищем в виде бесконечного ряда Тейлора:

$$y = y_0 + \frac{y'_0}{1!} (x - x_0) + \frac{y''_0}{2!} (x - x_0)^2 + \dots$$

В этом разложении x_0 и y_0 заданы начальными условиями. Остаётся определить

начальные значения производных: y'_0 , y''_0 , y'''_0 , ...

Подставляя в дифференциальное уравнение x_0 и y_0 вместо x и y , получим начальное значение первой производной

$$y'_0 = f(x_0, y_0).$$

Для определения начальных значений высших производных продифференцируем наше уравнение по x :

$$y'' = f'_x(x, y) + f'_y(x, y)y';$$

в полученном выражении положим: $x = x_0$, $y = y_0$, $y' = y'_0$ и находим

$$y''_0 = f'_x(x_0, y_0) + f'_y(x_0, y_0)y'_0.$$

Аналогичным образом определяем начальные значения остальных производных.

Иногда для нахождения коэффициентов ряда применяется метод неопределённых коэффициентов. В этом случае, обозначая неизвестные коэффициенты разложения через $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$, пишем решение в виде:

$$y = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots$$

Дифференцируем по x :

$$y' = a_1 + 2a_2(x - x_0) + \dots,$$

и подставляем эти разложения в уравнение; в полученном тождестве сравниваем коэффициенты при одинаковых степенях $(x - x_0)$ в левой и правой частях тождества и приходим к системе уравнений для определения коэффициентов a_0, a_1, a_2, \dots

Метод отыскания решения дифференциальных уравнений в виде бесконечного ряда применим также к уравнениям высших порядков и к системам дифференциальных уравнений.

Пример. Найти частное решение уравнения $y'' + \frac{1}{x}y' + y = 0$ при начальных условиях: $y = 1$, $y' = 0$ при $x = 0$.

Положив

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{n-2}x^{n-2} + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n + \dots,$$

получаем

$$\begin{aligned} y' &= a_1 + 2a_2x + \dots + (n-2)a_{n-2}x^{n-3} + \\ &\quad + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + na_nx^{n-1} + \dots; \\ y'' &= 2a_2 + \dots + (n-3)(n-2)a_{n-2}x^{n-4} + \\ &\quad + (n-2)(n-1)a_{n-1}x^{n-3} + (n-1)na_nx^{n-2} + \dots \end{aligned}$$

Подстановка в уравнение даёт:

$$\frac{a_1}{x} + (a_0 + 2a_2 + 2a_3) + \dots + [a_{n-2} + na_n + (n-1)na_n]x^{n-2} + \dots = 0,$$

или

$$\begin{aligned} a_0 + (a_0 + 4a_2) + \dots + \\ + (a_{n-2} + na_n) + \dots = 0. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} a_1 &= 0; \\ a_0 + 2^2 a_2 &= 0; \\ a_1 + 3^2 a_3 &= 0; \\ a_2 + 4^2 a_4 &= 0; \\ &\dots \dots \dots \\ a_{n-2} + n^2 a_n &= 0. \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

Решая эту систему уравнений, получаем:

$$\begin{aligned} a_1 &= a_3 = a_5 = \dots = 0; \\ a_2 &= -\frac{a_0}{2^2}; a_4 = -\frac{a_2}{4^2} = \frac{a_0}{2^2 \cdot 4^2}; \dots; \\ a_n &= -\frac{a_{n-2}}{n^2} = \pm \frac{a_0}{2^2 \cdot 4^2 \dots n^2} \end{aligned}$$

(n — чётное), и

$$y = a_0 \left(1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2 \cdot 4^2} - \frac{x^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + \dots \right).$$

Для определения a_0 пользуемся начальными условиями.

Положив $x = 0$ и $y = 1$, находим $a_0 = 1$ (условие $y' = 0$ при $x = 0$ выполняется при любом a_0).

Искомое частное решение является функцией Бесселя (стр. 171):

$$y = 1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2 \cdot 4^2} - \frac{x^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + \dots$$

Метод Эйлера — Коши. Переписав дифференциальное уравнение в виде

$$dy = f(x, y) dx$$

и заменив дифференциалы конечными разностями, получим равенства:

$$\Delta y_0 = f(x_0, y_0) \Delta x_0;$$

$$\Delta y_1 = f(x_1, y_1) \Delta x_1;$$

$$\Delta y_2 = f(x_2, y_2) \Delta x_2;$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\Delta y_{n-1} = f(x_{n-1}, y_{n-1}) \Delta x_{n-1}.$$

Из первого равенства определим y_1 по формуле

$$y_1 = y_0 + \Delta y_0 = y_0 + f(x_0, y_0) \Delta x_0$$

и подставим во второе равенство. Аналогичным образом из второго равенства определим y_2 :

$$y_2 = y_1 + \Delta y_1 = y_1 + f(x_1, y_1) \Delta x_1$$

и подставим в третье и т. д.

Способом Эйлера — Коши обычно пользуются лишь для грубого приближения, без малого n .

Метод Рунге. Этот метод основан на применении следующей основной формулы:

$$\Delta y_n = \frac{1}{6} (k_1^{(n)} + 2k_2^{(n)} + 2k_3^{(n)} + k_4^{(n)}),$$

где

$$h = x_i - x_{i-1} = \text{const},$$

$$k_1^{(n)} = hf(x_n, y_n),$$

$$k_2^{(n)} = hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1^{(n)}}{2}\right),$$

$$k_3^{(n)} = hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_2^{(n)}}{2}\right),$$

$$k_4^{(n)} = hf(x_n + h, y_n + k_3^{(n)}).$$

Полагая $n = 0$ и имея заданные значения x_0 и y_0 , находим Δy_0 , после чего определяем y_1 , соответствующее значению $x_1 = x_0 + h$.

Имея x_1 и y_1 , можно по этой же формуле отыскать Δy_1 , а значит и y_2 , затем Δy_2 и y_3 и т. д.

Метод Адамса. Этот метод основан на применении следующей формулы:

$$\Delta y_n = \eta_n + \frac{1}{2} \Delta \eta_{n-1} + \frac{5}{12} \Delta^2 \eta_{n-2},$$

где

$$\eta_n = y'_n h = f(x_n, y_n) h.$$

Если, кроме начального значения функции $y = y_0$ при $x = x_0$, известны ещё два значения функции y_1 и y_2 , соответствующие значения аргумента $x_1 = x_0 + h$ и $x_2 = x_0 + 2h$, то можно составить таблицу:

x	y	Δy	η	$\Delta \eta$	$\Delta^2 \eta$
x_0	y_0	Δy_0	η_0	$\Delta \eta_0$	$\Delta^2 \eta_0$
x_1	y_1	Δy_1	η_1	$\Delta \eta_1$	
x_2	y_2		η_2		

Эта таблица может быть продолжена при помощи основной формулы. В самом деле, положив $n = 2$, находим по формуле Δy_2 , а значит и y_3 ($y_3 = y_2 + \Delta y_2$). Вычисляем η_3 по формуле $\eta_3 = f(x_3, y_3) h$ и конечные разности $\Delta \eta_2$ и $\Delta^2 \eta_1$ и, таким образом, дополним правую часть таблицы одной кривой строчкой. Пользуясь последней, а также основной формулой, определяем Δy_3 , а значит и y_4 , вычисляем η_4 , $\Delta \eta_3$ и $\Delta^2 \eta_2$ и, следовательно, дополним таблицу ещё одной кривой строчкой. Аналогичным образом продолжим построение таблицы и дальше.

Значения y_1 и y_2 , необходимые для построения начальных строк таблицы, можно определить либо с помощью разложения y в ряд, либо по способу последовательных приближений, предложенному академиком А. Н. Крыловым и основанному на двух формулах:

$$\Delta y_0 = \eta_0 + \frac{1}{2} \Delta \eta_0 - \frac{1}{12} \Delta^2 \eta_0, \quad (*)$$

$$\Delta y_1 = \eta_1 + \frac{1}{2} \Delta \eta_0 + \frac{5}{12} \Delta^2 \eta_0.$$

В первом приближении принимаем:

$$\Delta y_0 = \eta_0.$$

Зная y_0 и вычислив по формуле $\eta_0 = f(x_0, y_0) h$, находим y_1 ($y_1 = y_0 + \Delta y_0 = y_0 + \eta_0$). Теперь вычислим η_1 , а с ним и $\Delta \eta_0$ ($\Delta \eta_0 = \eta_1 - \eta_0$) и исправим значение Δy_0 , полагая на этот раз

$$\Delta y_0 = \eta_0 + \frac{1}{2} \Delta \eta_0.$$

При помощи этого уточнённого значения Δy_0 исправим значения y_1 , η_1 и $\Delta \eta_0$ и найдём Δy_1 по формуле

$$\Delta y_1 = \eta_1 + \frac{1}{2} \Delta \eta_0.$$

Теперь можно определить y_2 ($y_2 = y_1 + \Delta y_1$), а также

$$\eta_2, \Delta \eta_1 = \eta_2 - \eta_1 \text{ и } \Delta^2 \eta_0 = \Delta \eta_1 - \Delta \eta_0.$$

Остаётся проверить выполнение формул (*).

Часто $\Delta^2 \eta_0$ оказывается настолько малым, что эти формулы верны, хотя для вычисления Δy_0 и Δy_1 величина $\Delta^2 \eta_0$ не принималась в расчёт. Если это не так, то пересчитаем Δy_0 и Δy_1 уже полностью по формулам (*), заново вычисляем η_1 , η_2 , $\Delta \eta_0$, $\Delta \eta_1$ и $\Delta^2 \eta_0$ и опять проверяем выполнение формул (*) и т. д. Обычно этот процесс быстро приводит к достаточно точным значениям y_1 и y_2 .

Пример. Найти приближённое решение уравнения

$$y' = \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

при начальных условиях: $x_0 = 0, y_0 = 1$.

Составим таблицу значений искомой функции в промежутке от $x = 0$ до $x = 1$ через 0,1 (т. е. положив $h=0,1$); определим сначала по методу Крылова значения y_1 и y_2 .

$$\eta_0 = \frac{x_0 y_0}{x_0^2 + y_0^2} \cdot h = 0;$$

в первом приближении полагаем $\Delta y_0 = \eta_0 = 0$,
и $y_1 = y_0 + \Delta y_0 = 1$

$$\eta_1 = \frac{x_1 y_1}{x_1^2 + y_1^2} \cdot h = \frac{0,1 \cdot 1}{0,1^2 + 1^2} \cdot 0,1 = 0,0099,$$

откуда $\Delta \eta_0 = \eta_1 - \eta_0 = 0,0099$.

Исправляем значение Δy_0 , полагая

$$\Delta y_0 = \eta_0 + \frac{1}{2} \Delta \eta_0 = 0 + \frac{1}{2} \cdot 0,0099 = 0,005,$$

откуда

$$y_1 = y_0 + \Delta y_0 = 1,005$$

и

$$\eta_1 = \frac{x_1 y_1}{x_1^2 + y_1^2} \cdot h = \frac{0,1 \cdot 1,005}{0,1^2 + 1,005^2} \cdot 0,1 = 0,0099.$$

$$\Delta \eta_0 = \eta_1 - \eta_0 = 0,0099 - 0 = 0,0099$$

и

$$\Delta y_1 = \eta_1 + \frac{1}{2} \Delta \eta_0 = 0,0099 + \frac{1}{2} \cdot 0,0099 = 0,015;$$

следовательно

$$y_2 = y_1 + \Delta y_1 = 1,005 + 0,015 = 1,020.$$

Далее:

$$\eta_2 = \frac{x_2 y_2}{x_2^2 + y_2^2} \cdot h = \frac{0,2 \cdot 1,020}{0,2^2 + 1,020^2} \cdot 0,1 = 0,0089;$$

$$\Delta \eta_1 = \eta_2 - \eta_1 = 0,0189 - 0,0099 = 0,0090$$

и

$$\Delta^2 \eta_0 = \Delta \eta_1 - \Delta \eta_0 = 0,0090 - 0,0099 = -0,0009.$$

Проверим теперь выполнение формул (*) для значений

$$y_1 = 1,005 \text{ и } y_2 = 1,020:$$

$$\Delta y_0 = 0 + \frac{1}{2} \cdot 0,0099 - \frac{1}{12} \cdot (-0,0009) = 0,005,$$

$$\Delta y_1 = 0,0099 + \frac{1}{2} \cdot 0,0099 + \frac{5}{12} \cdot (-0,0009) = 0,0145.$$

Таким образом, первая формула выполнена точно, а неточность второй столь мала, что скажется только в пятой значащей цифре значения y .

Дальнейшие вычисления значений y по методу Адамса даны в табл. 36.

Таблица 36

Решение уравнения $y' = \frac{xy}{x^2 + y^2}$

x	y	Δy	η	$\Delta \eta$	$\Delta^2 \eta$
0,0	1,000		0		
0,1	1,005	0,005	0,0099	0,0099	-0,0009
0,2	1,020	0,015	0,0189	0,0090	-0,0013
0,3	1,043	0,023	0,0266	0,0077	-0,0016
0,4	1,073	0,030	0,0327	0,0061	-0,0013
0,5	1,103	0,035	0,0375	0,0048	-0,0012
0,6	1,147	0,050	0,0411	0,0036	-0,0010
0,7	1,189	0,042	0,0437	0,0026	-0,0007
0,8	1,234	0,045	0,0456	0,0019	-0,0004
0,9	1,280	0,046	0,0471	0,0015	
1,0	1,328	0,048			

СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ 1-ГО ПОРЯДКА

Для отыскания приближённых частных решений системы дифференциальных уравнений:

$$\frac{dy}{dx} = f_1(x, y, z); \quad \frac{dz}{dx} = f_2(x, y, z)$$

(где y и z — искомые функции аргумента x), удовлетворяющих начальным условиям:

$$y = y_0, \quad z = z_0 \quad \text{при} \quad x = x_0,$$

укажем следующие методы.

Метод Эйлера — Коши. Переписав уравнения в виде:

$$dy = f_1(x, y, z) dx; \quad dz = f_2(x, y, z) dx$$

и заменив дифференциалы конечными разностями, получим равенства:

$$\Delta y_0 = f_1(x_0, y_0, z_0) \Delta x_0;$$

$$\Delta y_1 = f_1(x_1, y_1, z_1) \Delta x_1;$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\Delta y_{n-1} = f_1(x_{n-1}, y_{n-1}, z_{n-1}) \Delta x_{n-1};$$

$$\Delta z_0 = f_2(x_0, y_0, z_0) \Delta x_0;$$

$$\Delta z_1 = f_2(x_1, y_1, z_1) \Delta x_1;$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\Delta z_{n-1} = f_2(x_{n-1}, y_{n-1}, z_{n-1}) \Delta x_{n-1}.$$

При помощи выражений для Δy_0 и Δz_0 определяем y_1 и z_1 по формулам:

$$y_1 = y_0 + \Delta y_0 = y_0 + f_1(x_0, y_0, z_0) \Delta x_0$$

и

$$z_1 = z_0 + \Delta z_0 = z_0 + f_2(x_0, y_0, z_0) \Delta x_0$$

и подставляем во вторую пару равенств. Аналогичным образом во второй паре равенств определяем y_2 ($y_2 = y_1 + \Delta y_1$) и z_2 ($z_2 = z_1 + \Delta z_1$) и подставляем в третью пару и т. д.

Следует иметь в виду, что последовательные вычисления значений y_k и z_k производятся обязательно одновременно для обеих искомых функций.

Метод Адамса. Этот метод основан на применении основной формулы для случая одного уравнения (стр. 258) и присоединении к ней аналогичной формулы

$$\Delta z_n = \zeta_n + \frac{1}{2} \zeta_{n-1} + \frac{5}{12} \zeta_{n-2},$$

где

$$\zeta_n = z'_n h = f_2(x_n, y_n, z_n) h.$$

Начальный процесс протекает здесь так же, как и в случае одного уравнения, причём к формулам (*) (стр. 259) следует присоединить две дополнительные формулы:

$$\Delta z_0 = \zeta_0 + \frac{1}{2} \Delta \zeta_0 - \frac{1}{12} \Delta^2 \zeta_0;$$

$$\Delta z_1 = \zeta_1 + \frac{1}{2} \Delta \zeta_0 + \frac{5}{12} \Delta^2 \zeta_0.$$

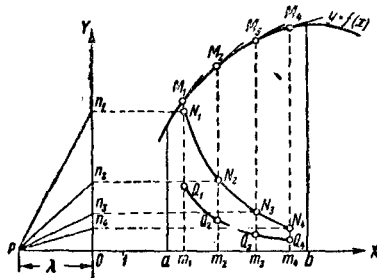
Как и в методе Эйлера — Коши, последовательные вычисления значений y_n и z_n производятся обязательно одновременно для обеих искомых функций.

Заметим, что для отыскания приближённого решения дифференциального уравнения или системы уравнений выше 1-го порядка можно заменить это уравнение или систему системой уравнений 1-го порядка (стр. 174) и применить любой из указанных выше методов.

ГРАФИЧЕСКОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ

Если функция $y = f(x)$ задана графиком (фиг. 339), то её производная $f'(x)$ может быть найдена графически следующим образом.

Отрезок $[a, b]$, на котором задана функция $y = f(x)$, делим на n частей настолько малых, чтобы соответствующие участки кривой по возможности мало отличались от прямых отрезков. Части отрезка $[a, b]$ не-



Фиг. 339

обязательно должны быть равными: их следует брать меньшими там, где функция $f(x)$ изменяется быстрее. Из середины каждой части отрезка m_1, m_2, m_3, \dots проводим прямые $m_1M_1, m_2M_2, m_3M_3, \dots$ перпендикулярные к оси OX , до пересечения с кривой в точках M_1, M_2, M_3, \dots в каждой из которых проводим касательные. Затем, выбрав на отрицательной части оси OX полюс P на расстоянии $PO = \lambda$ от начала координат, проводим из него параллельно касательным к кривой в точках M_1, M_2, M_3, \dots прямые Pn_1, Pn_2, Pn_3, \dots до пересечения с осью OY в точках n_1, n_2, n_3, \dots . Из этих точек проводим параллельно оси OX прямые $n_1N_1, n_2N_2, n_3N_3, \dots$ до пересечения с соответствующими ординатами (или их продолжениями) $m_1M_1, m_2M_2, m_3M_3, \dots$ в точках N_1, N_2, N_3, \dots .

Ломаная или кривая $N_1N_2N_3, \dots$ является приближённым графиком функции $y = \lambda f'(x)$; при $\lambda = 1$ получим искомый график производной $y = f'(x)$.

Если $\lambda \neq 1$, то мы строим точки Q_1, Q_2, Q_3, \dots с ординатами, равными ординатам точек N_1, N_2, N_3, \dots , разделённым на λ . Кривая, соединяющая точки Q_1, Q_2, Q_3, \dots , является графиком производной.

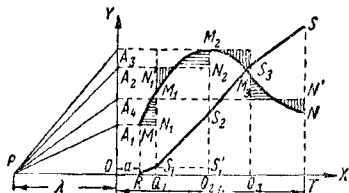
ГРАФИЧЕСКОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ

Если дан график функции $y = f(x)$ (фиг. 340), то значение определённого интеграла $\int_a^b f(x) dx$ можно найти графически следующим образом.

Площадь $MNTR$, величина которой даёт величину определённого интеграла, разбиваем на входящие и выходящие прямоугольники так, чтобы входящие и выходящие криволинейные (заштрихованные) площади были приблизительно равны; тогда искомую площадь можно заменить суммой площадей прямоугольников $RMN_1Q_1, Q_1N_1N_2Q_2$ и т. д.

Чтобы графически получить число, равное числу, измеряющему площадь первого прямоугольника RMN_1Q_1 , отложим на оси OX от начала координат отрезок $OP = \lambda$, а по оси OY отрезок $OA_1 = N_1Q_1$ и из точки R проведём прямую, параллельную PA_1 до пересечения с Q_1N_1 в точке S_1 . Длина отрезка Q_1S_1 будет графически выражать площадь прямоугольника RMN_1Q_1 , делённую на λ .

Затем таким же способом строим отрезок, длина которого численно равна площади второго прямоугольника. Для этого откладываем на оси OY от начала координат от-



Фиг. 340

резок $OA_2 = Q_2N_2$ и из точки S_1 проводим прямую, параллельную PA_2 , до пересечения с прямой Q_2N_2 в точке S_2 . Отрезок $S_1'S_2$ даёт площадь второго прямоугольника, делённую на λ , а отрезок Q_2S_2 — сумму площадей первого и второго прямоугольников, делённую на λ , и т. д. При $\lambda = 1$ длины отрезков Q_1S_1 , $S_1'S_2$ и т. д. численно равны площадям прямоугольников RMN_1Q_1 , $Q_1N_1N_2Q_2$ и т. д., а длина отрезка Q_2S_2 — сумме площадей этих прямоугольников. Продолжая построение, придём к отрезку TS , который при $\lambda = 1$ даст графически величину интеграла $\int_a^b f(x) dx$. Ломаная $RS_1S_2S_3S$ будет (при $\lambda=1$) представлять приближённо график функции $y = \int_a^x f(x) dx$.

ГРАФИЧЕСКОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ 1-го ПОРЯДКА

Всякое уравнение $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ даёт зави-

симость между координатами точки (x, y) и угловым коэффициентом касательной к интегральной кривой в этой точке.

Если дано начальное значение искомой функции $y = y_0$ при $x = x_0$, то из семейства кривых, даваемых общим решением данного уравнения, можно выделить определённую кривую, проходящую через точку $M_0(x_0, y_0)$.

Для приближённого построения этой кривой разбиваем координатную плоскость прямыми $x = x_0$, $x = x_1$, $x = x_2$ и т. д., параллельными оси OY , и от начала координат на оси OX откладываем отрезок $OP = 1$.

Определив из данного уравнения $f(x_0, y_0)$, откладываем на оси OY отрезок $OA_0 = f(x_0, y_0)$ (фиг. 341).

Прямая PA_0 параллельна касательной к интегральной кривой в точке M_0 , так как её угловой коэффициент равен $f(x_0, y_0)$.

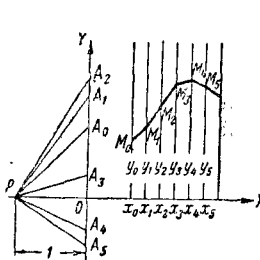
Из точки M_0 проводим прямую $M_0M_1 \parallel PA_0$ до пересечения с прямой $x = x_1$ и измеряем ординату y_1 точки M_1 . Затем на оси ординат откладываем отрезок $OA_1 = f(x_1, y_1)$ и из точки M_1 проводим прямую $M_1M_2 \parallel PA_1$ до пересечения с прямой $x = x_2$ в точке M_2 , измеряем ординату y_2 этой точки, откладываем по оси OY отрезок $OA_2 = f(x_2, y_2)$ и т. д.

Построенная ломаная $M_0M_1M_2M_3M_4M_5$ представляет приблизительно интегральную кривую.

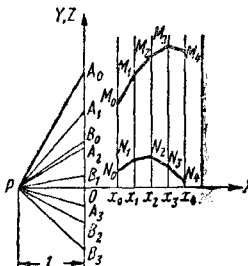
Графическое интегрирование системы двух дифференциальных уравнений 1-го порядка. Пусть даны уравнения:

$$\frac{dy}{dx} = f_1(x, y, z); \quad \frac{dz}{dx} = f_2(x, y, z).$$

Рассматривая x , как абсциссу, а u и z , как ординаты, получаем две интегральные



Фиг. 341



Фиг. 342

кривые, соответствующие решению системы, удовлетворяющему начальным условиям: $y = y_0$ и $z = z_0$ при $x = x_0$, т. е. кривые, проходящие через точки $M_0(x_0, y_0)$ и $N_0(x_0, z_0)$ (фиг. 342).

Проводим на плоскости ряд прямых $x = x_0, x = x_1, x = x_2$ и т. д., параллельных оси OY , и от начала координат откладываем отрезок $OP = 1$.

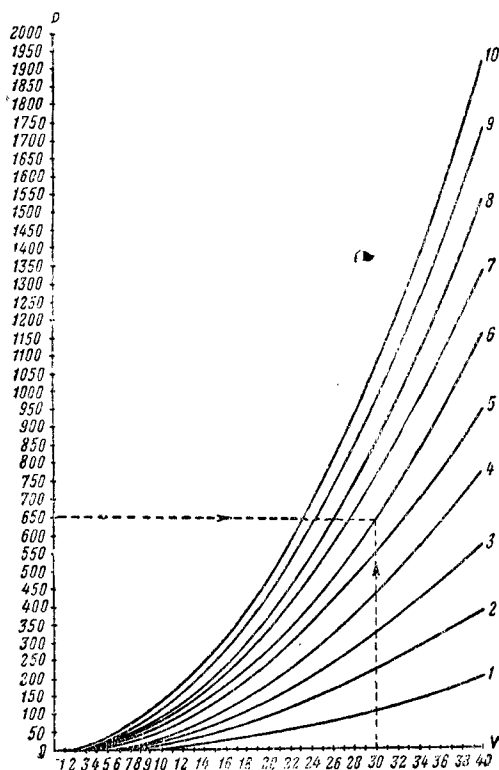
Определив из системы уравнений величины $f_1(x_0, y_0, z_0)$ и $f_2(x_0, y_0, z_0)$, откладываем на оси OY отрезки $OA_0 = f_1(x_0, y_0, z_0)$ и $OB_0 = f_2(x_0, y_0, z_0)$; тогда отрезки PA_0 и PB_0 будут соответственно параллельны касательным к интегральным кривым в точках M_0 и N_0 .

Из этих точек проводим прямые $M_0M_1 \parallel PA_0$ и $N_0N_1 \parallel PB_0$ до пересечения с прямой $x = x_1$ в точках M_1 и N_1 и измеряем ординаты y_1 и z_1 этих точек.

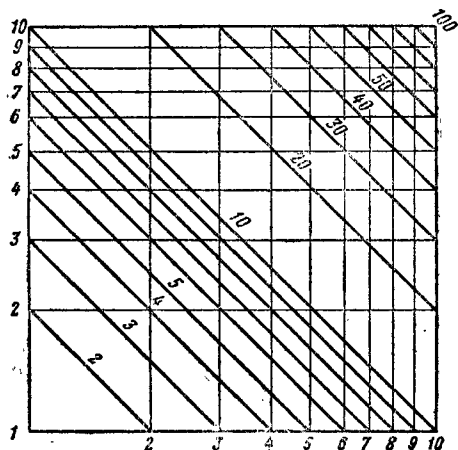
Затем откладываем на оси OY отрезки $OA_1 = f_1(x_1, y_1, z_1)$ и $OB_1 = f_2(x_1, y_1, z_1)$ и из точек M_1 и N_1 проводим прямые $M_1M_2 \parallel PA_1$ и $N_1N_2 \parallel PB_1$ до пересечения с прямой $x = x_2$ в точках M_2 и N_2 ; измеряем ординаты y_2 и z_2 этих точек, откладываем на оси OY отрезки $OA_2 = f_1(x_2, y_2, z_2)$ и $OB_2 = f_2(x_2, y_2, z_2)$ и т. д.

Ломаные $M_1M_2M_3M_4M_5\dots$ и $N_1N_2N_3N_4N_5\dots$ будут представлять приближённо искомые интегральные кривые.

Пример. Уравнение $xu = z$ после логарифмирования перейдет в $\lg x + \lg u = \lg z$ и гиперболы $xu = \text{const}$ в логарифмической сетке перейдут в прямые $\lg x + \lg u = \text{const}$ (фиг. 347).



Фиг. 346



Фиг. 347

НОМОГРАММЫ С ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ ШКАЛАМИ

Номограмма с тремя параллельными шкалами служит для расчётов по уравнению вида $f_3(z) = f_1(x) + f_2(y)$.

Построение номограммы происходит следующим образом. Проводятся две параллель-

ные прямые на расстоянии l одна от другой (фиг. 348), причём величина l может быть выбрана произвольно в соответствии с требуемыми размерами номограммы.

Перпендикулярно к проведённым линиям проводится прямая OO , точки пересечения которой с этими линиями определяют начала шкал x и y . Функциональные шкалы для x и y строятся по уравнениям $u = \lambda_1 f_1(x) + s_1$ и $v = \lambda_2 f_2(y) + s_2$. Модули λ_1 и λ_2 , определяющие масштаб, и параметры s_1 и s_2 , характеризующие сдвиг шкал вдоль линий, на которых они расположены, следует выбирать так, чтобы в пределах отведённого для номограммы места уместились все те значения переменных x и y , для которых с помощью номограммы будут производиться подсчёты, и чтобы всё отведённое для номограммы место было при этом использовано. После того как величины $\lambda_1, \lambda_2, s_1, s_2$ подобраны, между шкалами величин x и y и параллельно им на расстоянии $m = \frac{l}{1 + \frac{\lambda_2}{\lambda_1}}$

от шкалы x проводится шкала для величины z ; уравнение этой шкалы

$$w = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} f_3(z) + \frac{s_1 \lambda_2 + s_2 \lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2},$$

а начало отсчёта в точке ee пересечения с прямой OO . Когда указанное построение выполнено, прямую OO можно стереть.

Для того, чтобы с помощью построенной номограммы вычислить значение z при данных значениях x и y , следует соединить прямой соответствующие этим значениям точки шкал x и y и на пересечении этой прямой со шкалой z прочесть искомое значение z .

Пример. Момент инерции эллиптического сечения с полуосями a и b относительно оси $2a$ определяется по формуле

$$I = \frac{\pi a b^3}{4}.$$

Для того, чтобы привести это уравнение к виду

$$f_3(I) = f_1(a) + f_2(b),$$

логарифмируем его:

$$\lg I - \lg \frac{\pi}{4} = \lg a + 3 \lg b.$$

и полагаем

$$f_3(I) = \lg I - \lg \frac{\pi}{4}; f_1(a) = \lg(a); f_2(b) = 3 \lg b.$$

Пусть требуется построить номограмму (фиг. 349) так, чтобы уместить значения a от 1 до 10 и b — от 1 до 10; длина шкалы 125 мм, расстояние между шкалами 140 мм.

Уравнения шкал для a и b :

$$u = \lambda_1 \lg a + s_1$$

$$v = \lambda_2 \cdot 3 \lg b + s_2.$$

Для того, чтобы полностью использовать длину шкал, нужно, чтобы значения $a = 1$ и $b = 1$ находились на прямой OO , т. е. соответствовали значениям $u = 0$ и $v = 0$, а значения $a = 10$ и $b = 10$ находились в конце соответствующих шкал, т. е. соответствовали значениям:

$$u = 125 \text{ и } v = 125;$$

$$0 = \lambda_1 \lg 1 + s_1;$$

$$0 = 3 \lambda_2 \lg 1 + s_2,$$

откуда $s_1 = 0$; $s_2 = 0$.

$$125 = \lambda_1 \lg 10;$$

$$125 = 3 \lambda_2 \lg 10,$$

откуда $\lambda_1 = 125$; $\lambda_2 = \frac{125}{3}$.

Далее вычисляем m :

$$m = \frac{l}{1 + \frac{\lambda_2}{\lambda_1}} = \frac{140}{1 + \frac{1}{3}} = 105 \text{ мм}$$

и строим шкалы по уравнениям:

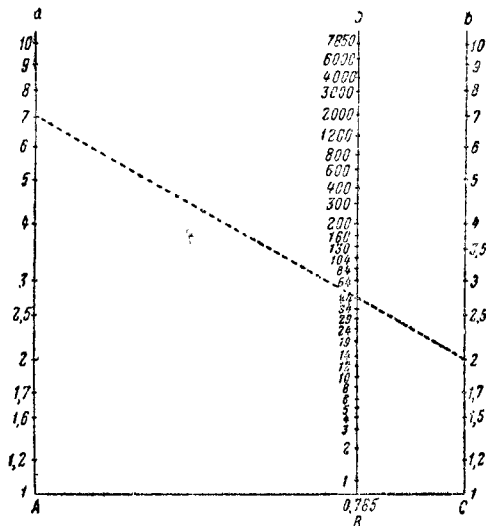
$$u = 125 \lg a,$$

$$v = 3 \cdot \frac{125}{3} \lg b = 125 \lg b,$$

$$w = \frac{\frac{125}{3} \cdot 125}{\frac{125}{3} + 125} \left(\lg I - \lg \frac{\pi}{4} \right) =$$

$$= 31,25 \left(\lg I - \lg \frac{\pi}{4} \right) =$$

$$= 31,25 (\lg I + 0,105),$$



Фиг. 349

Уравнение $f_4(z) = f_1(x) + f_2(y) + f_3(t)$ может быть заменено системой:

$$\alpha = f_1(x) + f_2(y);$$

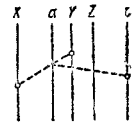
$$f_4(z) = \alpha + f_3(t).$$

Для определения значений z по данным значениям x , y и t можно построить номограмму с четырьмя параллельными шкалами и одной немой шкалой.

С этой целью сначала строим номограмму с тремя параллельными шкалами x , y , α для первого уравнения; параметры этих функциональных шкал и их взаимное расположение определяем в соответствии с размерами номограммы и пределами изменения величин x и y так, как это было указано выше, но размечаем только шкалы x и y , а шкалу α оставляем неразмеченной (немой). Далее строим номограмму с тремя параллельными шкалами α , t , z для второго уравнения, причём шкалу α совмещаем со шкалой α , уже построенной для первого уравнения номограммы, параметры этой немой шкалы сохраняем прежние, подбираем параметры для

шкалы t и вычисляем параметры шкалы z и её расстояние от шкалы α .

При пользовании такой номограммой (фиг. 350) проводим прямую через точки шкал x и y , соответствующие данным значениям этих величин, и точку пересечения этой прямой с немой шкалой α соединяем прямой с точкой шкалы t , соответствующей данному значению t . Точка пересечения этой последней прямой со шкалой z позволит прочесть искомое значение z .



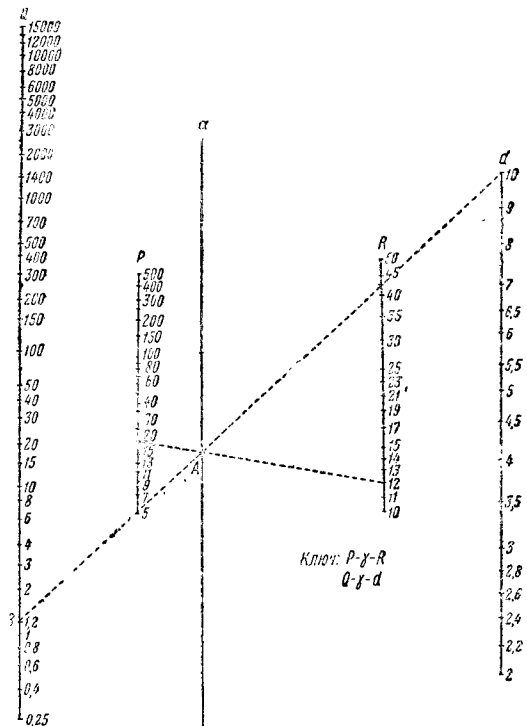
Фиг. 350

Аналогичным образом строятся номограммы с большим числом немых шкал.

Пример. Максимальное касательное напряжение Q (в $\frac{\text{кг}}{\text{мм}^2}$) винтовой пружины с круговым поперечным сечением выражается через растягивающее усилие P (в кг), действующее по оси витка, радиус витка R (в мм) и диаметр проволоки d (в мм) при помощи формулы

$$Q = \frac{16 PR}{\pi d^3}.$$

Требуется построить номограмму (фиг. 351) для значений d от 2 до 10, R от 10 до 50 и P от 5 до 500 (и, следовательно, как показывают вычисления, для значений Q от 0,25 до 15 900).



Фиг. 351

Логарифмируя, имеем:

$$\lg Q - \lg \frac{16}{\pi} = \lg P + \lg R - 3 \lg d.$$

Для построения номограммы с немой шкалой заменяем это уравнение системой:

$$\alpha = \lg P + \lg R;$$

$$\alpha = \left(\lg Q - \lg \frac{16}{\pi} \right) + 3 \lg d.$$

Уравнение шкалы P ищем в виде
 $u = \lambda_1 \lg P + s_1$.

Если необходимо иметь шкалу длиной 80 мм, то параметры λ_1 и s_1 определяем из равенств:

$$0 = \lambda_1 \lg 5 + s_1;$$

$$80 = \lambda_1 \lg 500 + s_1,$$

откуда $80 = \lambda_1 (\lg 500 - \lg 5) = 2 \lambda_1$ и $\lambda_1 = 40$, $s_1 = -40 \lg 5$; следовательно, уравнение этой шкалы
 $u = 40 (\lg P - \lg 5)$.

Аналогично для R :

$$v = \lambda_2 \lg R + s_2,$$

где λ_2 и s_2 определяются из уравнений (длина шкалы взята равной 84 мм):

$$0 = \lambda_2 \lg 10 + s_2;$$

$$84 = \lambda_2 \lg 50 + s_2.$$

Вычисления приводят к следующему уравнению этой шкалы:

$$v = 120 (\lg R - 1).$$

Взяв расстояние между шкалами P и R равным 80 мм, определим (стр. 263) по формуле

$$m = \frac{l}{1 + \frac{\lambda_2}{\lambda_1}}$$

расстояние немой шкалы α от шкалы P : $m = 20$.

Модуль λ_α шкалы α равен $\frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} = 30$.

Далее переходим к построению номограммы уравнения

$$\alpha = \left(\lg Q - \lg \frac{\pi}{16} \right) + 3 \lg d.$$

Уравнение шкалы d имеет вид:

$$u' = \lambda'_1 \cdot 3 \lg d + \lambda'_1.$$

Длину этой шкалы выбираем, например, в 168 мм (чтобы получить целое значение λ'_1). Из уравнений

$$0 = 3 \lambda'_1 \lg 2 + s'_1,$$

$$168 = 3 \lambda'_1 \lg 10 + s'_1$$

определим

$$\lambda'_1 = 80; s'_1 = -3 \cdot 80 \lg 2$$

и

$$u' = 240 (\lg d - \lg 2).$$

Теперь можно, зная модули шкал α и d , найти модуль λ'_2 шкалы Q из равенства

$$\lambda_\alpha = \frac{\lambda'_1 \lambda'_2}{\lambda'_1 + \lambda'_2}$$

(шкалу α мы расположили здесь между шкалами d и Q).

Разрешив это равенство относительно λ'_2 , найдём

$$\lambda'_2 = 48,$$

следовательно, уравнение шкалы Q будет

$$v' = 48 \left(\lg Q - \lg \frac{\pi}{16} \right) + t'_2 = 48 (\lg Q - \lg Q_0),$$

где Q_0 подлежит определению.

Выбрав расстояние между шкалой Q и шкалой d в 160 мм, найдём расстояние m' шкалы α от шкалы d :

$$m' = 100 \text{ мм},$$

следовательно, расстояние шкалы Q от немой шкалы α равно 60 мм.

Начальную точку шкалы d можно выбрать произвольно; выбрав её, можно следующим образом определить начальную точку шкалы Q : соединим, например, отметку 20 на шкале P прямой с отметкой 12 шкалы R . Точку A пересечения этой прямой с немой шкалой α соединим, например, с отметкой 10 шкалы d и продолжим эту линию до пересечения со шкалой Q .

По формуле $Q = \frac{16 PR}{\pi d^2}$ находим, что в этой точке, соответствующей значениям $P = 20$, $R = 12$,

$d = 10$, мы должны иметь $Q = 1,2$; это и есть, следовательно, отметка этой точки.

Положив $Q_0 = 1,2$ в уравнении шкалы Q , получим уравнение этой шкалы: $v' = 48 (\lg Q - \lg 1,2)$, причём точка 1,2 на этой шкале — начальная.

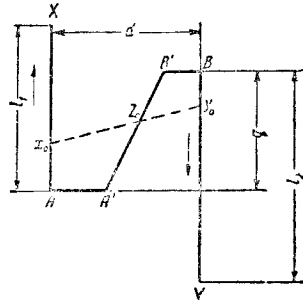
Z-НОМОГРАММА

Z -номограмма для уравнения

$$f_3(z) = \frac{f_1(x)}{f_2(y)}$$

строится следующим образом.

Проводим две параллельные линии (фиг. 352), выбрав расстояние d между ними



Фиг. 352

в соответствии с размерами чертежа. Если длины шкал x и y на этих линиях взяты равными l_1 и l_2 (величины l_1 и l_2 выбираются также в зависимости от желательных размеров номограммы), то шкалы x и y имеют уравнения:

$u = \lambda_1 [f_1(x) - f_1(a_0)]$; $v = \lambda_2 [f_2(y) - f_2(b_0)]$, где a_0 и b_0 — значения x и y , при которых $f_1(x)$ и $f_2(y)$ принимают наименьшие значения, а модули λ_1 и λ_2 определяются равенствами:

$$\lambda_1 = \frac{l_1}{f_2(a) - f_1(a_0)}; \lambda_2 = \frac{l_2}{f_2(b) - f_2(b_0)},$$

где a и b — значения x и y , при которых соответственно $f_1(x)$ и $f_2(y)$ принимают наибольшие значения. Направления шкал x и y выбираются противоположными.

Далее, из начальных точек A и B , имеющих отметки $x = a_0$ и $y = b_0$, проводятся прямые, перпендикулярные шкалам x и y , и на них откладываются отрезки

$$AA' = \frac{\lambda_1 df_1(a_0)}{\lambda_1 f_1(a_0) + \lambda_2 f_2(b_0) + q}$$

и

$$BB' = \frac{\lambda_2 df_2(b_0)}{\lambda_1 f_1(a_0) + \lambda_2 f_2(b_0) + q},$$

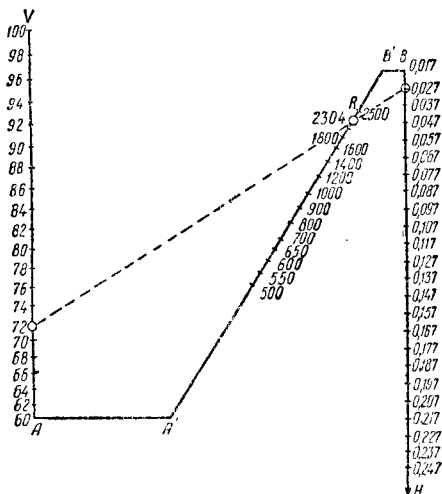
где q — расстояние по вертикали между начальными точками A и B . Шкала z строится на прямой $A'B'$. Выбрав какие-либо значения x_0 и y_0 и подсчитав соответствующее значение z_0 , соединяем точки с отметками x_0 и y_0 и в точке пересечения $A'B'$ с этой прямой ставим отметку z_0 . Приняв эту точку за начальную, строим шкалу z по уравнению

$$w = \delta \lambda_1 \left[\frac{f_3(z)}{\lambda_2 + \lambda_1 f_3(z)} - \frac{f_3(z_0)}{\lambda_2 + \lambda_1 f_3(z_0)} \right],$$

где

$$\delta = \sqrt{[\lambda_1 f_1(a_0) + \lambda_2 f_2(b_0) + q]^2 + d^2}.$$

Положительные значения w откладываются от точки с отметкой z_0 к шкале y , а отрицательные — к шкале x .



Фиг. 353

Пример. Возвышение наружного рельса H главного пути (в метрах) в зависимости от скорости поезда V (в км/ч) и радиуса закругления R (в метрах) определяется соотношением

$$H = \frac{0,012 V^2}{R}.$$

Требуется построить номограмму (фиг. 353) для значений V от 60 до 100 и R от 500 до 2 500 (и, следовательно, как показывают вычисления, для значений H от 0,017 до 0,24).

Перепишем формулу в виде

$$R = \frac{0,012 V^2}{H},$$

строим шкалы V и H на параллельных прямых, а шкалу R — на наклонной.

Уравнение шкалы V :

$$u = \lambda_1 \cdot 0,012 (V^2 - 60^2)$$

Взяв длину этой шкалы $l_1 = 153,6$ мм, имеем

$$\lambda_1 = \frac{153,6}{0,012 (100^2 - 60^2)} = \frac{153,6}{78,8} = 2$$

и, следовательно

$$u = 0,024 (V^2 - 60^2).$$

Уравнение шкалы H :

$$v = \lambda_2 (H - 0,017).$$

Взяв длину этой шкалы $l_2 = 156,1$ мм, имеем

$$\lambda_2 = \frac{156,1}{0,24 - 0,017} = \frac{156,1}{0,223} = 700$$

и, следовательно

$$v = 700 (H - 0,017).$$

Приняв расстояние d между шкалами равным 150 мм, а расстояние q по вертикали между началами шкал 140 мм, получим:

$$AA' = \frac{2 \cdot 150 \cdot 0,012 \cdot 60^2}{2 \cdot 0,012 \cdot 60^2 + 700 \cdot 0,017 + 140} = 54,4;$$

$$BB' = \frac{700 \cdot 150 \cdot 0,017}{2 \cdot 0,12 \cdot 60^2 + 700 \cdot 0,017 + 140} = 7,5;$$

$$\delta = \sqrt{(2 \cdot 0,012 \cdot 60^2 + 700 \cdot 0,017 + 140)^2 + 150^2} = 281,3.$$

Взяв $V_0 = 72$, $H_0 = 0,027$, получим $R_0 = \frac{0,012 \cdot 72^2}{0,027} = 2304$. Соединив отметку 72 шкалы

V с отметкой 0,027 шкалы H , ставим в точке пересечения этой прямой с прямой $A'B'$ отметку 2304 и строим на $A'B'$ шкалу R по уравнению

$$w = 281,3 \cdot 2 \left(\frac{R}{700 + 2R} - \frac{2304}{700 + 2 \cdot 2304} \right)$$

или

$$w = 281,3 \left(\frac{R}{350 + R} - 0,868 \right).$$

ЛИТЕРАТУРА И ИСТОЧНИКИ

Общая справочная литература

1. Астафьев А. Ф. Инженерная справочная книга. Т. 1, изд. 16-е, Л.—М., ОНТИ, 1937. 540 с.
2. Бронштейн И. Н. и Семендяев К. А. Справочник по математике. М.—Л., Гостехиздат, 1948, 556 с.
3. Выгодский М. Я. Справочник по элементарной математике. Изд. 3-е, М.—Л., Гостехиздат, 1948, 280 с.
4. Машиностроение. Энциклопедический справочник. Под ред. Е. А. Чудакова. Т. 1. М., Машгиз, 1947, 456 с.
5. Справочное руководство по машиностроению. Под ред. В. М. Майзель. Т. 1. Математика. Харьков. ГНТИ Украины, 1937, 764 с.
6. Технический справочник транспортника. Т. 1, М.—Л., Гострансиздат, 1932.
7. Нейфе. Справочник для инженеров, техников и студентов. Т. 1, М.—Л., Госмашмет, 1936.

Математические таблицы

8. Брадис В. Четырёхзначные математические таблицы. М., Учпедгиз, 1948, 63 с.
9. Брежнев К. Таблицы логарифмов чисел и тригонометрических функций с шестью десятичными знаками. М., Редбюро ГУГСК НКВД, 1938.
10. Глазенап С. П. Математические и астрономические таблицы. В двух частях. Л., Изд-во Академии наук СССР, 1932, 240 с.
11. Петерс И. Шестизначные таблицы тригонометрических функций. М. Изд. 2-е. Изд-во ГУГСК НКВД СССР, 1937, 294 с.
12. Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм рядов и произведений. Изд. 2-е, М.—Л., Гостехиздат, 1948, 400 с.

13. Сегал Б. И. и Семендяев К. А. Пятизначные математические таблицы. М., Изд-во Академии наук СССР, 1948.
14. Таблицы Барлоу — квадратов, кубов, корней квадратных, корней кубических и обратных величин целых чисел от 1 до 10 000. Изд. 2-е, М.—Л., ОНТИ, 1936, 233 с.
15. Хохлов А. И. Карманные математические таблицы (пятизначные). М.—Л., Гостехиздат, 1947.
16. Янке Е. и Эмде Ф. Таблицы функций с формулами и кривыми. М.—Л., Гостехиздат, 1948, 420 с.

Арифметика, алгебра и элементарная геометрия

17. Еиноградов С. П. Основания теории детерминантов. М.—Л., Гл. ред. общетех. лит-ры, 1935, 103 с.
18. Киселёв А. П. Арифметика. М., Учпедгиз, 1948, 168 с.
19. Киселёв А. П. Алгебра. Ч. 1—2. М., Учпедгиз, 1947; ч. 1, 112 с.; ч. 2, 232 с.
20. Киселёв А. П. Геометрия. Ч. 1 (Планиметрия), ч. 2. (Стереометрия) М., Учпедгиз, 1943.
21. Курош А. Г. Курс высшей алгебры. М.—Л., Гостехиздат, 1946, 314 с.
22. Млодзеевский Б. К. Основы высшей алгебры. М.—Л., Госиздат, 1922, 111 с.
23. Шапиро Г. М. Высшая алгебра. М., Учпедгиз, 1935, 317 с.

Тригонометрия (прямолинейная, гиперболическая и сферическая)

24. Бермант А. Ф. и Люстерник Л. А. Тригонометрия. Изд. 2-е, М., Учпедгиз, 1947. 192 с.

25. Рыбкин Н. Прямолинейная тригонометрия. Изд. 14-е, М., Учпедгиз, 1935, 104 с.
26. Степанов Н. Н. Сферическая тригонометрия. Изд. 2-е, М.—Л., Гостехиздат, 1948, 154 с.
27. Шмулевич П. К. Прямолинейная тригонометрия. М.—Л., ОНТИ, 1937, 228 с.
28. Фишман Н. М. Комплексные числа, ряды и гиперболические функции, М.—Л., ГТТИ, 1933, 104 с.

Математический анализ (дифференциальное исчисление, интегральное исчисление, бесконечные ряды, дифференциальные уравнения)

29. Бари Н. К. Теория рядов. М., Учпедгиз, 1936, 139 с.
30. Бермант А. Ф. Курс математического анализа для втузов. Ч. 1—2. Изд. 3-е, М.—Л., Гостехиздат, 1946.
31. Гурса Э. Курс математического анализа. Т. 1, 2 и 3. Пер. с франц., изд. 3-е, М.—Л., ОНТИ, 1936.
32. Кошляков Н. С. Основные дифференциальные уравнения математической физики. М.—Л., ГТТИ, 1933, 512 с.
33. Курант Р. и Гильберт Д. Методы математической физики. Т. 1—2. Пер. с нем., М.—Л., Гостехиздат, 1933—1945.
34. Серебренников М. Г. Гармонический анализ. М.—Л., Гостехиздат, 1948.
35. Лопшиц А. М. Шаблоны для гармонического анализа. М.—Л., Гостехиздат, 1948, 30 л.
36. Лузин Н. Н. Дифференциальное исчисление. М., «Советская наука», 1946, 451 с.
37. Лузин Н. Н. Интегральное исчисление. М., «Советская наука», 1946, 379 с.
38. Лурье А. И. Операционное исчисление в приложениях к задачам механики. М.—Л., ОНТИ, 1938, 222 с.
39. Немыцкий В. В., Слудская М. И. и Черкасов А. Курс математического анализа. Т. 1—2. М.—Л., Гостехиздат, 1944.
40. Петровский И. Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Изд. 2-е, М.—Л., Гостехиздат, 1947, 196 с.
41. Поссе К. и Привалов И. Курс дифференциального исчисления. Изд. 5-е, М.—Л., ОНТИ, 1939, 355 с.
42. Поссе К. и Привалов И. Курс интегрального исчисления. М.—Л., ОНТИ, 1939, 480 с.
43. Стеклов В. А. Основные задачи математической физики. Ч. 1. Пг. Изд. Российской Академии наук, 1922, 286 с.
44. Степанов В. В. Курс дифференциальных уравнений. Изд. 4-е, М.—Л., Гостехиздат, 1945, 406 с.
45. Привалов И. И. Ряды Фурье. М.—Л., ОНТИ, 1934, 164 с.
46. Смирнов В. И. Курс высшей математики. Т. 1, 2, 3. М.—Л., Гостехиздат, т. 1 и 2, 1948; т. 3, 1949.
47. Тимофеев А. Ф. Интегрирование функций. М.—Л., Гостехиздат, 1948, 432 с.
48. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. I, II, III. М.—Л., Гостехиздат, 1947—1948—1949.
49. Фихтенгольц Г. М. Математика для инженеров. Изд. 3-е, М.—Л., ГТТИ ч. 1, 1931; ч. 2, вып. 1, 1932; ч. 2, вып. 2, 1933.
50. Фрай Т. Элементарный курс дифференциальных уравнений. Пер. с англ. М.—Л., ГТТИ, 1933, 196 с.
51. Франк Ф. и Мизес Р. Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики. Ч. 2. М.—Л., ОНТИ, 1937, 998 с.

Вариационное исчисление

52. Егоров Д. Ф. Основания вариационного исчисления. Пг., Госиздат, 1923, 77 с.
53. Лаврентьев М. А. и Люстерник Л. А. Курс вариационного исчисления. М.—Л., ОНТИ, 1938, 192 с.
54. Смирнов В. И., Крылов В. И. и Кантарович Л. В. Вариационное исчисление. Л., КУБУЧ, 1933, 203 с.
См. также [31] и [33].

Аналитическая геометрия

55. Бескин Н. М. Курс аналитической геометрии для втузов. М.—Л., Гостехиздат, 1948, 500 с.

56. Бюшгенс С. С. Аналитическая геометрия. Ч. 1. М.—Л., Гостехиздат, 1946, 560 с.
57. Мусхелишвили Н. И. Курс аналитической геометрии. Изд. 3-е, М.—Л., Гостехиздат, 1947, 644 с.
58. Привалов И. И. Аналитическая геометрия. Изд. 13-е, М.—Л., ОНТИ, 1942, 251 с.

Дифференциальная геометрия

59. Графический справочник по математике. Атлас кривых. Под ред. А. Ф. Берманта, М.—Л., ОНТИ, 1937.
60. Егоров Д. Ф. Дифференциальная геометрия. Госиздат, 1923, 288 с.
61. Рашевский П. К. Курс дифференциальной геометрии. М.—Л., ОНТИ, 1938, 336 с.
62. Фиников С. П. Дифференциальная геометрия, М., Учпедгиз, 1936, 216 с.
См. также [2] и [55].

Векторное исчисление

63. Гольдфайн И. А. Элементы векторного исчисления. М.—Л., Гостехиздат, 1948, 176 с.
64. Дубнов Я. С. Основы векторного исчисления. Ч. 1, изд. 3-е, М.—Л., Гостехиздат, 1939, 330 с.
65. Кочин Н. Е. Векторное исчисление и начала тензорного исчисления. Изд. 6-е, М.—Л., ГОНТИ. Ред. техн. теорет. лит., 1938, 456 с.

Теория функций комплексного переменного

66. Лаврентьев М. А. Конформные отображения. М.—Л., Гостехиздат, 1946, 160 с.
67. Маркушевич А. И. Элементы теории аналитических функций. М., Учпедгиз, 1944, 544 с.
68. Привалов И. И. Введение в теорию функций комплексного переменного. М.—Л., Гостехиздат, 1943.
69. Янчевский С. А. Функции комплексного переменного. М.—Л., ОНТИ, 1937, 198 с.
См. также [46].

Теория вероятностей и метод наименьших квадратов

70. Бернштейн С. Н. Теория вероятностей. Изд. 4-е, М.—Л., Гостехиздат, 1946, 556 с.
71. Гливенко В. И. Теория вероятностей, М., Учпедгиз, 1937.
72. Гнеденко Б. В. и Хинчин А. Я. Элементарное введение в теорию вероятностей, М.—Л., Гостехиздат, 1946, 128 с.
73. Гончаров В. Л. Теория вероятностей. М., Оборонгиз, 1939, 428 с.
74. Иванов А. А. Теория ошибок и способ наименьших квадратов (гр., Научное книгоизд-во, 1921, 56 с.
75. Романовский В. И. Основные задачи теории ошибок. М.—Л., Гостехиздат, 1947, 116 с.
76. Романовский В. И. Математическая статистика. М.—Л., ОНТИ, 1938, 528 с.
77. Фрай Т. Теория вероятностей для инженеров. М.—Л., ГТТИ, 1934, 383 с.
См. также [91].

Исчисление конечных разностей и интерполирование

78. Безикович Я. С. Исчисление конечных разностей. Л., Изд. Лен. гос. ун-ва, 1939, 370 с.
79. Гельфонд А. О. Исчисление конечных разностей. Ч. 1. М.—Л., ОНТИ, 1936.
80. Гончаров В. Л. Теория интерполирования и приближения функций. М.—Л., ОНТИ, 1934, 316 с.
81. Марков А. Исчисление конечных разностей. Изд. 2-е, Одесса, «Mathesis», 1910, 274 с.
См. также [84], [85] и [90].

Приближенные вычисления, приближенное решение алгебраических и трансцендентных уравнений, численные и графические методы анализа, эмпирические формулы

82. Безикович Я. и Фридман А. Приближенные вычисления. Изд. 2-е, Л., Гостехиздат, 1930, 188 с.

83. Брадис В. Арифметика приближённых вычислений. Изд. 2-е, М.—Л., Госиздат, 1931, 231 с.
84. Занден Г. Элементы прикладного анализа. М.—Л., ГТТИ, 1932, 204 с.
85. Крылов А. Н. Лекции о приближённых вычислениях. Изд. 2-е, Л., Изд-во Академии наук СССР, 1933, 543 с.
86. Панов Д. Ю. Справочник по численному решению дифференциальных уравнений в частных производных. Изд. 3-е, М.—Л., Гостехиздат, 1949, 128 с.
87. Панов Д. Ю. Счётная линейка. Изд. 5-е, М.—Л., Гостехиздат, 1946, 127 с.
88. Рунге К. Графические методы математических вычислений. Пер. с нем., М.—Л., ГТТИ, 1932, 167 с.
89. Семендяев К. А. Эмпирические формулы. М.—Л., ГТТИ, 1933, 88 с.
90. Скарборо Д. Численные методы математического анализа. Пер. с англ., М.—Л., ГТТИ, 1934, 440 с.
91. Уиттекер Э. и Робинсон Г. Математическая обработка результатов наблюдения. Пер. с англ., М.—Л., ГТТИ, 1933, 364 с.
92. Франк М. Л. Элементарные приближённые вычисления. М.—Л., ГТТИ, 1932, 166 с. См. также [49].

Номография

93. Гавра Д. А. Основы номографии. Л, КУБУЧ, 1934, 162 с.
94. Герсевич Н. М. Основы номографии. М.—Л., ГОНТИ, 1932, 90 с.
95. Глаголев Н. А. Теоретические основы номографии. Изд. 2-е, М.—Л., ГТТИ, 1936, 252 с.
96. Мелентьев П. В. Номография. М.—Л., ГТТИ, 1933, 248 с.
97. Мелентьев П. В. Построение номограмм. Гостехиздат, 1930, 101 с.
98. Справочник по номографии. Под ред. Н. А. Глаголева. М.—Л., ОНТИ, 1937, 276 с.
99. Франк М. Л. Номографический справочник по математике, механике, физике и сопротивлению материалов. М.—Л., ГТТИ, 1933, 151 с. См. также [49].