

**ТЕХНИЧЕСКИЙ  
СПРАВОЧНИК  
ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНИКА**



# ТЕХНИЧЕСКИЙ СПРАВОЧНИК ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНИКА

---

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

А. Ф. БАРАНОВ, Д. Д. БИЗЮКИН,  
М. И. ВАХНИН, Б. Н. ВЕДЕНИСОВ,  
И. В. ИВЛИЕВ, В. И. ПОПОВ,  
Е. Ф. РУДОЙ, Я. И. СОКОЛИНСКИЙ,  
В. Н. СОЛОГУБОВ, В. А. ШИЛОВСКИЙ

---

*Главный редактор*  
Е. Ф. РУДОЙ



ГОСУДАРСТВЕННОЕ ТРАНСПОРТНОЕ  
ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО

*Москва · 1951*

# ТЕХНИЧЕСКИЙ СПРАВОЧНИК ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНИКА

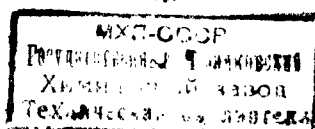
656.2  
C.44

Том 2

## ТЕХНИЧЕСКИЕ РАСЧЁТЫ

Ответственный редактор тома  
проф., доктор. техн. наук  
М. А. ПЕТРОВ

\*



ГОСУДАРСТВЕННОЕ ТРАНСПОРТНОЕ  
ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО

Москва · 1951

УЗ72

## АВТОРЫ ТОМА

С. Х. АЗЕРЬЕР, проф., докт. техн. наук; С. Р. ГВАМИЧАВА, канд. техн. наук; Е. Д. ГЛУШАНИН, инж.; М. Н. ГОЛЬДШТЕЙН, проф., докт. техн. наук; С. В. ГРУМ-ГРЖИМАЙЛО, доц.; ДЕМИН С. В., инж.; Н. В. ДЕМЬЯН-КОВ, доц., канд. техн. наук; Н. В. ИНОЗЕМЦЕВ, проф., докт. техн. наук; В. И. КОСТЕНКОВ, инж.; И. В. КОРОБОЧКИН, канд. техн. наук; В. К. КОШКИН, проф., докт. техн. наук; В. И. КУЗНЕЦОВ, проф., докт. техн. наук; Н. С. МУРЕТОВ, канд. техн. наук; Г. Н. НИКОЛАЕВ, доц., канд. техн. наук; М. А. ПЕТРОВ, проф., докт. техн. наук; М. Л. РУДОЙ, инж.; М. П. САХАРОВА, инж.; К. Н. СМЕРНОВ, проф., докт. техн. наук; И. К. СНИТКО, доц., канд. техн. наук; И. В. УРБАН, проф., докт. техн. наук; Н. А. ФУФРЯНСКИЙ, канд. техн. наук; С. Ф. ЧИСТЯКОВ, доц., канд. техн. наук.

\*

## РЕЦЕНЗЕНТЫ ТОМА

*Сопротивление материалов и теория упругости:* П. И. ЛЕБЕДЕВ, доц., канд. техн. наук; А. Ф. СМЕРНОВ, проф., докт. техн. наук; И. В. УРБАН, проф., докт. техн. наук. *Теория сооружений:* Н. И. БЕЗУХОВ, проф., докт. техн. наук; В. И. КУЗНЕЦОВ, проф., докт. техн. наук; Д. М. ТУМАРКИН, инж.; М. М. ФИЛОНЕНКО-БОРОДИЧ, проф., докт. техн. наук. *Механика грунтов:* К. С. ОРДУЯНЦ, проф., докт. техн. наук. *Детали машин:* Н. Ф. РУДЕНКО, проф., докт. техн. наук; Н. А. СПИЦИН, проф., докт. техн. наук. *Электрические машины, электрическое освещение, электрические измерения:* И. И. МЕНЩИКОВ, доц., канд. техн. наук; М. Д. НАХОДКИН, доц., канд. техн. наук. *Двигатели:* Е. Г. ШУМСКИЙ, проф., докт. техн. наук; Н. А. ФУФРЯНСКИЙ, канд. техн. наук. *Насосы:* В. И. ПОЛИКОВСКИЙ, проф., докт. техн. наук; Е. З. РАБИНОВИЧ, доц., канд. техн. наук; М. М. ФЛОРИНСКИЙ, проф., докт. техн. наук. *Холодильные установки и льдозаводы:* Н. С. КОМАРОВ, проф., докт. техн. наук; С. Ф. МАТАЛАСОВ, доц., канд. техн. наук; М. М. СТРЕЛЬЦОВ, канд. техн. наук. *Геодезия:* Н. И. МОДРИНСКИЙ, доц., канд. техн. наук. *Инженерная геология:* Б. Н. ВЕДЕНИСОВ, проф., докт. техн. наук. С. М. РАК, канд. техн. наук; В. А. СТРАХОВ, доц., канд. техн. наук. *Метеорология:* И. Г. ПЧЁЛКО, канд. физ.-мат. наук. *Материалы:* А. И. ОТРЕШКО, проф., докт. техн. наук; А. Е. ШЕЙКИН, проф., докт. техн. наук. *Топливо:* Е. Г. ШУМСКИЙ, проф., докт. техн. наук. *Технические измерения:* С. Г. ГЕРАСИМОВ, проф., докт. техн. наук; Е. З. РАБИНОВИЧ, доц., канд. техн. наук; Ю. И. ШЕНДЛЕР, инж.; С. Ф. ЧИСТЯКОВ, доц., канд. техн. наук. *Графический материал:* В. С. ЛЕВИЦКИЙ, доц., канд. техн. наук.

\*

## РЕДАКЦИЯ ТОМА

М. А. ПЕТРОВ, М. Л. РУДОЙ, В. Я. ЧЕРНЯВСКИЙ.

\*



# СОДЕРЖАНИЕ



	Стр.		Стр.
От редакции второго тома . . . . .	7	Муфты . . . . .	258
<b>СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ</b> (проф., докт. техн. наук Кузнецов В. И. и канд. техн. наук Гвамичава С. Р.) . . . . .	9	Приводы . . . . .	260
Основные положения . . . . .	9	Ремённая передача . . . . .	262
Растяжение и сжатие . . . . .	11	Цилиндрические передачи с прямым зубом . . . . .	268
Сдвиг . . . . .	27	Планетарные передачи . . . . .	275
Кручение . . . . .	29	Цилиндрические передачи с косым зубом . . . . .	279
Моменты инерции плоских фигур . . . . .	39	Конические зубчатые передачи . . . . .	281
Изгиб, внешние силы и напряжения . . . . .	53	Червячные передачи . . . . .	284
Изогнутая ось стержня . . . . .	65	Цепные передачи . . . . .	288
Сложное сопротивление . . . . .	73	Детали и приводы грузоподъёмных машин . . . . .	288
Теории прочности . . . . .	77	<b>ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ МАШИНЫ</b> (проф., докт. техн. наук Петров М. А.) . . . . .	301
Расчёт брусев большой кривизны . . . . .	84	Классификация электрических машин . . . . .	301
Толстостенные цилиндры . . . . .	87	Трансформаторы . . . . .	307
Продольный изгиб . . . . .	89	Синхронные машины . . . . .	308
Контактные напряжения . . . . .	99	Трёхфазные асинхронные двигатели . . . . .	310
Концентрация напряжений . . . . .	104	Методы измерения температуры нагретых частей электрических машин . . . . .	316
Динамические задачи в сопротивлении мате- риалов (проф., докт. техн. наук Урбан И. В.) . . . . .	111	Изоляция машин . . . . .	316
Допускаемые напряжения при воздействии переменных нагрузок (проф., докт. техн. наук Урбан И. В.) . . . . .	113	Технические характеристики электрических машин . . . . .	318
<b>ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ</b> (канд. техн. наук Гвамичава С. Р.) . . . . .	117	<b>ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ОСВЕЩЕНИЕ</b> (проф., докт. техн. наук Петров М. А.) . . . . .	323
Деформации упруго-пластического тела . . . . .	131	Определения и единицы измерений . . . . .	323
Деформации вязко-пластического тела . . . . .	135	Типы светильников, применяемых в СССР . . . . .	327
<b>ТЕОРИЯ СООРУЖЕНИЙ</b> . . . . .	137	Проектирование осветительных установок . . . . .	329
Статика сооружений (проф., докт. техн. наук Урбан И. В.) . . . . .	137	Особенности освещения железнодорожных предприятий . . . . .	333
Динамика сооружений (доц., канд. техн. наук Снитко И. К.) . . . . .	178	Электрическое освещение паровозов и ваго- нов . . . . .	335
Кручение и изгиб тонкостенных профилей (проф., докт. техн. наук Урбан И. В.) . . . . .	197	<b>ДВИГАТЕЛИ</b> (проф., докт. техн. наук Ино- земцев Н. В. и проф., докт. техн. наук Кошкин В. К.) . . . . .	337
Устойчивость систем (доц., канд. техн. наук Снитко И. К.) . . . . .	209	Паровые машины . . . . .	337
<b>МЕХАНИКА ГРУНТОВ</b> (проф., докт. техн. наук Гольдштейн М. Н.) . . . . .	214	Локомобили (канд. техн. наук Фуфрян- ский Н. А.) . . . . .	356
Введение . . . . .	214	Паровые турбины . . . . .	364
Расчёт осадок сооружений . . . . .	216	Двигатели внутреннего сгорания . . . . .	385
Элементы теории устойчивости грунтов . . . . .	222	Газовые двигатели (канд. техн. наук Фуф- рянский Н. А.) . . . . .	429
<b>ДЕТАЛИ МАШИН</b> (доц. Грум-Гржимайло С. В.) . . . . .	230	Газовые турбины . . . . .	435
Винтовые и болтовые соединения . . . . .	230	Нормирование расхода топлива . . . . .	443
Заклёпочные соединения (инж. Дёмин С. В.) . . . . .	235	Котлы-утилизаторы (канд. техн. наук Фуф- рянский Н. А.) . . . . .	446
Сварные соединения (инж. Дёмин С. В.) . . . . .	241	Ветродвигатели (канд. техн. наук Фуфрян- ский Н. А.) . . . . .	447
Оси и валы . . . . .	246	<b>НАСОСЫ</b> (проф., докт. техн. наук Азе- рбер С. Х.) . . . . .	451
Подшипники . . . . .	250	Центробежные насосы . . . . .	451
Клиновые, шпоночные и шлицевые соедине- ния . . . . .	256	Поршневые насосы . . . . .	476
		Другие виды водоподъёмных устройств . . . . .	496

	Стр.		Стр.
<b>ХОЛОДИЛЬНЫЕ УСТАНОВКИ И ЛЬДО-ЗАВОДЫ</b> (доц., канд. техн. наук <i>Демянков Н. В.</i> ) . . . . .	501	Сортамент стали . . . . .	653
Ледяное и льдосоляное охлаждение . . . . .	501	Сплавы меди . . . . .	668
Машинное охлаждение . . . . .	504	Алюминиевые сплавы . . . . .	674
Льдозаводы и холодильные склады . . . . .	529	Твёрдые сплавы . . . . .	676
<b>ГЕОДЕЗИЯ</b> (проф., докт. техн. наук <i>Смирнов К. Н.</i> ) . . . . .	548	Трубы . . . . .	678
Вводные сведения . . . . .	548	Лесные материалы . . . . .	679
Теодолитные работы . . . . .	558	Цементы и бетоны . . . . .	685
Техническое нивелирование . . . . .	573	Каменные материалы для фундаментов и стен . . . . .	687
Тахеометрическая съёмка . . . . .	585	Кровельные и прочие материалы . . . . .	688
Барометрическое нивелирование . . . . .	588	<b>ТОПЛИВО</b> (инж. <i>Костенков В. И.</i> ) . . . . .	695
Мензульная съёмка . . . . .	590	Основные свойства топлива . . . . .	695
Новые геодезические инструменты . . . . .	593	Характеристики топлив СССР . . . . .	696
Определение истинного азимута земного предмета . . . . .	601	Расчёт параметров процесса горения и необходимого количества воздуха . . . . .	696
Картографические проекции . . . . .	605	Расчёт количества продуктов сгорания . . . . .	705
Некоторые сведения из аэрофототопографии . . . . .	606	Определение коэффициента избытка воздуха по анализу продуктов сгорания . . . . .	706
Уход за геодезическими инструментами . . . . .	608	Теплосодержание продуктов сгорания . . . . .	707
<b>ИНЖЕНЕРНАЯ ГЕОЛОГИЯ</b> (инж. <i>Сахарова М. П.</i> ) . . . . .	610	Топливные эквиваленты . . . . .	707
Общие понятия . . . . .	610	<b>ТЕХНИЧЕСКИЕ ИЗМЕРЕНИЯ</b> . . . . .	708
Физико-геологические явления . . . . .	610	Электрические измерения (проф., докт. техн. наук <i>Петров М. А.</i> ) . . . . .	708
Инженерно-геологическая характеристика горных пород . . . . .	615	Измерение температур (инж. <i>Глушанин Е. Д.</i> ) . . . . .	719
Залегание горных пород . . . . .	621	Измерение давления (инж. <i>Глушанин Е. Д.</i> ) . . . . .	735
Подземные воды . . . . .	623	Измерение уровня (инж. <i>Глушанин Е. Д.</i> ) . . . . .	744
Методология инженерно-геологических исследований . . . . .	627	Измерения расхода жидкостей, газов и водяного пара (доц., канд. техн. наук <i>Чистяков С. Ф.</i> ) . . . . .	746
<b>МЕТЕОРОЛОГИЯ</b> (канд. техн. наук <i>Муретов Н. С.</i> ) . . . . .	631	Анализ газов (инж. <i>Глушанин Е. Д.</i> ) . . . . .	762
Метеорологические элементы . . . . .	631	Измерение сил (инж. <i>Глушанин Е. Д.</i> и канд. техн. наук <i>Коробочкин И. В.</i> ) . . . . .	767
Прогнозы погоды . . . . .	633	Измерение веса (инж. <i>Глушанин Е. Д.</i> и канд. техн. наук <i>Коробочкин И. В.</i> ) . . . . .	769
Синоптическое обслуживание железнодорожного транспорта . . . . .	634	Измерение чисел оборотов (инж. <i>Глушанин Е. Д.</i> и канд. техн. наук <i>Коробочкин И. В.</i> ) . . . . .	771
<b>МАТЕРИАЛЫ</b> (инж. <i>Рудой М. Л.</i> ) . . . . .	635	Измерение мощности (инж. <i>Глушанин Е. Д.</i> и канд. техн. наук <i>Коробочкин И. В.</i> ) . . . . .	774
Чугуны . . . . .	635	Измерение колебаний (инж. <i>Глушанин Е. Д.</i> и канд. техн. наук <i>Коробочкин И. В.</i> ) . . . . .	783
Конструкционная сталь . . . . .	639	<b>АЛФАВИТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ</b> . . . . .	787
Листовая сталь . . . . .	649		
Инструментальная сталь . . . . .	651		

## ОТ РЕДАКЦИИ ВТОРОГО ТОМА

Второй том Технического справочника железнодорожника содержит справочные сведения, необходимые при технических расчётах во всех отраслях железнодорожного транспорта.

В разделе «Сопротивление материалов» приведены методы и справочные данные для расчётов на растяжение, сжатие, сдвиг и кручение стержней, напряжений и деформаций в кривых брусках, пластинках, сосудах, а также сведения по устойчивости и теорий прочности.

В разделе «Теория упругости» рассматривается действие сил на упругие тела как в состоянии равновесия, так и в движении.

Раздел «Теория сооружений» содержит данные по расчёту сооружений, отвечающих заданным условиям эксплуатации. В главе «Статика сооружений» приведены справочные сведения по расчёту статически определимых и неопределимых систем (балок, ферм, рам, пластинок, оболочек). Глава «Динамика сооружений» содержит изложение общей теории упругих колебаний и их конкретное приложение к динамическому расчёту строительных конструкций. В этой главе помимо материалов к расчёту сооружений, обладающих любым числом степеней свободы, приведены справочные данные о частотах колебаний и динамических эпюрах; даны таблицы и формулы, облегчающие и ускоряющие процесс расчёта.

Значительное место уделено также специальным методам расчёта тонкостенных профилей на прочность и устойчивость на основе разработанной в СССР теории.

Вопросам обеспечения безопасности контакта будущего сооружения с грунтом посвящён раздел «Механика грунтов», который включает расчёт осадок сооружений и элементы теории устойчивости грунтов.

В разделе «Детали машин» сжато приведены расчётные формулы и подсобные таблицы для расчёта винтовых, болтовых, заклёпочных, сварных, клиновых, шпоночных и фланцевых соединений, подшипников, муфт, передач ремённых, цилиндрических, планетарных, червячных и цепных, деталей и приводов грузоподъёмных механизмов.

Раздел «Электрические машины» включает классификацию, технические характеристики и описание генераторов двигателей, трансформаторов, преобразователей и ртутных выпрямителей.

В разделе «Электрическое освещение» приведены сведения о светильниках, употребляемых на железнодорожном транспорте, и данные для проектирования осветительных установок.

В разделе «Двигатели» рассматриваются паровые машины, паровые турбины, локомотивы, двигатели внутреннего сгорания, газовые турбины, ветряные двигатели. Приведены рабочие процессы, схемы и термодинамические циклы, тепловые расчёты, важнейшие характеристики и параметры работы двигателей, методология испытания двигателей и сравнительные данные по расходу топлива.

Раздел «Насосы» включает справочные данные по центробежным и поршневым насосам, а также по другим видам водоподъёмных устройств.

В разделе «Холодильные установки и льдозаводы» приведены общие сведения по холодильному делу: основные требования к планировке и расчёту производительности льдозаводов, конструкции холодильных машин и аппаратов, расчёт их холодопроизводительности.

В разделе «Геодезия» приведены справочные сведения по организации и проведению геодезических работ при железнодорожных изысканиях и дано описание новейших геодезических инструментов.

Раздел «Инженерная геология» содержит характеристику горных пород и методологию инженерно-геологических изысканий на железнодорожном транспорте. Материалы этого раздела подобраны в разрезе практического их использования инженерами-железнодорожниками.

В разделе «Метеорология» приведены краткие сведения по синоптическому обслуживанию железнодорожного транспорта.

В разделе «Материалы» приведены сведения, характеризующие сортамент, химический состав, основные расчётные показатели некоторых применяемых на железнодорожном транспорте материалов: чёрных и цветных металлов, дерева и других строительных материалов.

В разделе «Технические измерения» приведены основные методы измерений, дано описание измерительных приборов, которыми наиболее часто приходится пользоваться на железнодорожном транспорте и в промышленности.

---

Редакция просит всех читателей направлять свои замечания и пожелания в Трансжелдориздат для использования их в дальнейшей работе над материалами Технического справочника железнодорожника.

---

# СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ



## ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Наука сопротивление материалов изучает поведение различных материалов при действии на них нагрузок. На основании этой науки инженер решает задачи о выборе материала и подборе поперечных размеров элементов конструкций, сооружений и машин.

В большинстве случаев при проектировании частей конструкций сооружений или машин приходится удовлетворять двум основным требованиям: надёжности и наибольшей экономии.

Помимо основных требований, в некоторых случаях при проектировании и выполнении конструкций и сооружений приходится удовлетворять и другим условиям, например, требованию скоростного возведения сооружений, условиям минимального веса конструкции, например, при проектировании самолётов и т. п. Эти обстоятельства также отражаются на выборе материала и размеров частей конструкций и сооружений.

Изучение надёжности элементов конструкций, сооружений и машин в сопротивлении материалов производится как аналитическими методами, так и при помощи экспериментальных исследований.

Теоретические исследования, если они не опираются на опыт, могут оказаться бесплодными. Точно так же и разрозненные опыты без теоретического обобщения не дадут возможности вывести нужные законы и не послужат к дальнейшему развитию науки.

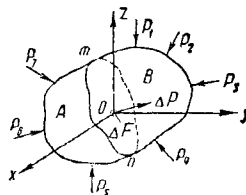
Совокупность теоретических исследований и экспериментальных приёмов определения прочности строительных материалов и составляет предмет науки о сопротивлении материалов.

## НАПРЯЖЕНИЯ

Рассмотрим твёрдое тело (фиг. 1), находящееся в равновесии. Если на данное тело не действуют никакие внешние силы, то внутренние силы всё же в нём имеются; они обеспечивают существование тела, как такового. Под действием внешних сил  $P_1 \dots P_7$  в теле возникают дополнительные внутренние силы. Для того чтобы изучить величину этих дополнительных сил в какой-либо точке  $O$ , тело представляют разделённым сечением  $mn$ , проходящим через эту точку, на две части:  $A$  и  $B$ . Рассматривая одну из этих частей, например  $A$ , можно сказать, что она находится

в равновесии под действием внешних сил  $P_6, P_8$  и  $P_7$  и сил, распределённых непрерывно по сечению  $mn$ , представляющих действие части  $B$  на часть  $A$ .

Выделив в плоскости  $mn$  площадку  $\Delta F$  вокруг точки  $O$ , обозначают через  $\Delta P$  — равнодействующую сил взаимодействия, приложенных к ней, тогда отношение  $\frac{\Delta P}{\Delta F}$  представит собой количество этих сил, приходящихся в среднем на единицу площадки  $\Delta F$ .



Фиг. 1

Если представить, что контур площадки  $\Delta F$  постепенно стягивается вокруг точки  $O$ , то величина площадки при этом будет убывать, а вместе с тем будет убывать и величина  $\Delta P$ .

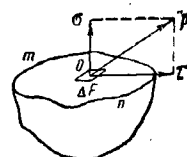
Предел отношения  $\frac{\Delta P}{\Delta F}$  при  $\Delta F \rightarrow 0$  называется полным напряжением в точке  $O$  по сечению  $mn$

$$p = \text{пред. } \frac{\Delta P}{\Delta F} \dots$$

Полное напряжение  $p$  можно разложить на нормальную к сечению составляющую  $\sigma$  и касательную составляющую  $\tau$  (фиг. 2), которые называются соответственно нормальной и касательной составляющей напряжения, или нормальным и касательным напряжением в точке  $O$  по сечению  $mn$ . Между полным, нормальным и касательным напряжениями существует следующая зависимость:

$$p^2 = \sigma^2 + \tau^2.$$

Величина напряжений в каждой точке является мерилем тех дополнительных внут-



Фиг. 2

ренных сил, которые возникают в материале в результате деформации под действием внешних сил.

Напряжение выражает силу, отнесённую к единице площади, и потому оно имеет размерность:

$$\frac{\text{сила}}{\text{площадь}}.$$

При измерении напряжений силы обычно выражают в килограммах, а площади в квадратных сантиметрах или миллиметрах; тогда размерность напряжения может быть выражена так:

$$\frac{\text{кг}}{\text{см}^2} \text{ или } \frac{\text{кг}}{\text{мм}^2}.$$

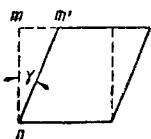
### ДЕФОРМАЦИИ

Разобьём тело, деформация которого подлежит изучению, на множество очень малых частей в форме кубиков. При деформации тела составляющие его кубики также деформируются, причём деформация каждого из элементарных кубиков выразится в удлинении или сжатии рёбер и искажении первоначально прямых углов между рёбрами. Если представить себе, что для каждого из элементарных кубиков, на которые разбито изучаемое тело, известны изменения длин рёбер и искажения углов, то построив модель каждого кубика после его деформации и сложив затем эти кубики, можно получить модель всего тела в целом после его деформации.

Таким образом любая деформация может быть разложена на удлинения или укорочения линейных отрезков и на искажения прямых углов.

Изменение длины отрезка называется линейной деформацией, а искажение прямого угла — угловой деформацией, или углом сдвига.

Для того чтобы исключить влияние длины отрезка на характеристику его деформации, обычно линейная деформация характеризуется удлинением или сжатием единицы длины, т. е. отношением полного удлинения или укорочения  $\Delta l$  изучаемого отрезка к его первоначальной длине  $l$ :



Фиг. 3

$$\epsilon = \frac{\Delta l}{l}.$$

Это отношение  $\epsilon$  называется относительным удлинением (укорочением), или относительной линейной деформацией. Относительное удлинение есть число отвлечённое.

Угол сдвига, или угловая деформация, измеряется в радианах.

Следовательно, угловая деформация есть также отвлечённое число. Угловую деформацию (угол сдвига) представляют также в виде отношения двух отрезков; если угол сдвига мал, то (фиг. 3):

$$\text{tg } \gamma = \frac{mm'}{m\bar{n}}.$$

где  $\gamma$  — угол сдвига;

$mm'$  — так называемый абсолютный сдвиг.

### УПРУГОСТЬ

Свойство упругости, которым в известной мере обладают все строительные материалы, состоит в том, что если внешние силы, которые действуют на конструкцию или сооружение, не превосходят определённых пределов, то деформация, вызываемая этими силами, исчезает после прекращения действия сил.

В большинстве задач, решаемых теорией сопротивления материалов, принято, что тела, подвергающиеся действию внешних сил, являются совершенно упругими, т. е. полностью возвращаются к своей первоначальной форме после устранения сил.

### ОДНОРОДНОСТЬ

Предполагается, что материя упругого тела однородна и непрерывно распределена по его объёму. Это даёт возможность предполагать, что любой бесконечно малый элемент, вырезанный из тела, обладает теми же физическими свойствами, что и всё тело.

### ИЗОТРОПНОСТЬ

Свойство, которое в целях упрощения теоретических исследований приписывают материалам, заключается в том, что упругие свойства тела принимаются одинаковыми во всех направлениях. Такие тела носят название изотропных.

### ЗАВИСИМОСТЬ МЕЖДУ НАПРЯЖЕНИЯМИ И ДЕФОРМАЦИЯМИ

Опыт показывает, что в пределах упругих деформаций существует простая пропорциональность между напряжениями и деформациями, например: при растяжении и сжатии относительное удлинение или укорочение в линейных размерах бруса в направлении действия внешних сил прямо пропорционально нормальному напряжению  $\sigma$ . Эта зависимость имеет вид:

$$\epsilon = \frac{\sigma}{E},$$

где  $E$  — коэффициент пропорциональности, называемый модулем упругости и имеющий определённую величину для каждого материала.

Аналогичная зависимость существует между углом сдвига  $\gamma$  и касательным напряжением  $\tau$ :

$$\gamma = \frac{\tau}{G}.$$

Здесь  $G$  — коэффициент пропорциональности, носящий название модуля сдвига.

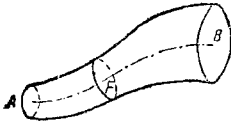
### ПОНЯТИЕ О БРУСЬЯХ И СТЕРЖНЯХ

Тело, образованное движением плоской фигуры  $F$  вдоль некоторой линии  $AB$  (фиг. 4) так, что центр тяжести площади  $F$  всегда находится на линии  $AB$ , а плоскость фигуры нормальна к этой линии, называется бруском.

Предполагается, что размеры фигуры  $F$  небольшие по сравнению с длиной линии  $AB$ .

Линия  $AB$  называется осью бруса, а фигура  $F$  — поперечным сечением бруса.

В зависимости от того, представляет ли собой ось бруса прямую или кривую линию, различаются брусья прямые и кривые.



Фиг. 4

Такие брусья, у которых поперечное сечение не изменяется по длине оси, носят название брусьев постоянного сечения. Брусьями переменного сечения называются брусья, поперечные сечения которых изменяются вдоль оси.

Тонкие и длинные брусья, у которых размеры поперечного сечения ничтожно малы по

сравнению с длиной оси, называются стержнями.

### ТИПЫ ДЕФОРМАЦИЙ

Различаются следующие основные типы деформаций:

- 1) растяжение или сжатие. Примеры: работа цепей, канатов, растянутых и сжатых стержней в фермах и т. д.;
- 2) сдвиг — работа болтов, заклёпок;
- 3) кручение — работа валов;
- 4) изгиб — работа всякого рода балок.

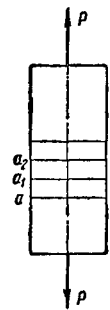
Эти виды деформаций называются простыми.

В конструкциях встречается и более сложная деформация, когда они испытывают одновременно два, а то и три типа простых деформаций, например, растяжение или сжатие с изгибом, изгиб с кручением и т. д. В этих случаях мы имеем дело с так называемой сложной деформацией.

## РАСТЯЖЕНИЕ И СЖАТИЕ

### ЛИНЕЙНОЕ НАПРЯЖЁННОЕ СОСТОЯНИЕ

Простым растяжением, или сжатием, называется деформация прямого бруса под действием двух взаимно уравновешенных внешних сил, приложенных к его концам и направленных вдоль его оси (фиг. 5). При направлении сил наружу от концевых сечений будет растяжение, в противном случае — сжатие.



Фиг. 5

Если на боковой поверхности бруса до его деформации нанести систему прямых параллельных линий, перпендикулярных к его оси, на равных расстояниях друг от друга ( $ab, a_1b_1, a_2b_2 \dots$ ), то после деформации эти линии раздвинутся (сблизятся) одна относительно другой на равные промежутки, но останутся плоскими. Это даёт возможность предполагать, что и поперечные сечения, контуры которых ограничены указанными линиями, также остаются плоскими и взаимно параллельными.

Но такое перемещение плоских параллельных сечений возможно только при равных удлинениях продольных волокон бруса.

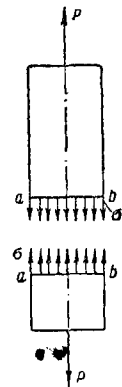
На основании многочисленных опытов установлено, что для большинства материалов, пока нагрузка не превзошла определённых пределов, одинаковой деформации соответствуют одинаковые напряжения.

Таким образом можно заключить, что при простом растяжении (сжатии) напряжения в поперечных сечениях распределены равномерно.

Справедливость гипотезы плоских сечений и предположения о равномерном распределении напряжений в поперечных сечениях бруса подтверждаются не только многочисленными опытами, но и теоретическими исследованиями математической теории упругости.

### НАПРЯЖЕНИЯ

После того как установлено, что напряжения по поперечным сечениям бруса при растяжении (сжатии) распределены равномерно, можно определить их величину, применяя принятый в сопротивлении материалов метод сечения. Рассекая брус (фиг. 6) сечением  $ab$ , перпендикулярным к его оси, на две части и отбросив верхнюю часть, рассматривают нижнюю. Действие отброшенной части заменяют напряжениями  $\sigma$ , распределёнными равномерно по плоскости сечения. Напряжение  $\sigma$  направлено перпендикулярно к плоскости поперечного сечения, по которому оно действует, поэтому его называют нормальным напряжением.



Фиг. 6

Условия равновесия рассматриваемой части бруса дадут следующее уравнение:

$$\sigma \cdot F = P,$$

где  $P$  — растягивающая сила;

$F$  — площадь поперечного сечения бруса.

Следовательно

$$\sigma = \frac{P}{F}. \quad (1)$$

При простом растяжении нормальное напряжение в любой точке любого поперечного сечения бруса равно растягивающей силе, разделённой на площадь поперечного сечения.

### ДЕФОРМАЦИИ

**Продольная деформация.** При растяжении бруса длина его увеличивается. Увеличение длины бруса (фиг. 7):

$$\Delta l = l_1 - l$$

называется полным удлинением.

Удлинение бруса, приходящееся на единицу его длины:

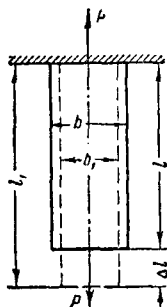
$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{l_2 - l}{l},$$

называется относительным удлинением.

Пока напряжения меньше некоторого предела, называемого пределом пропорциональности и имеющего определённое, установленное опытом для каждого материала, значение, существует следующая зависимость между напряжением и относительным удлинением:

$$\sigma = E \varepsilon, \quad (2)$$

где  $E$  — коэффициент пропорциональности, имеющий размерность напряжения  $\left(\frac{\text{кг}}{\text{см}^2}\right)$  и называемый модулем упругости при растяжении или модулем упругости первого рода.



Фиг. 7

Из формулы (2) видно, что при одном и том же напряжении относительное удлинение будет тем меньше, чем больше модуль упругости. Следовательно, модуль упругости является характеристикой жёсткости материала: чем жёстче материал, тем больше его модуль упругости.

Модуль упругости определяется экспериментально. Для каждого материала величина модуля упругости колеблется в узких пределах.

Средние значения модуля упругости для основных материалов приведены в табл. 1.

Если умножить обе части выражения (2) на длину бруса  $l$  и учесть, что

$$\varepsilon l = \Delta l, \quad \sigma = \frac{P}{F},$$

то можно вычислить полное удлинение бруса

$$\Delta l = \frac{P \cdot l}{EF}. \quad (3)$$

Полное удлинение бруса прямо пропорционально величине действующей силы и длине бруса и обратно пропорционально модулю упругости и площади поперечного сечения.

Эта зависимость носит название закона Гука.

**Поперечная деформация.** Помимо продольных деформаций стержни, работающие на растяжение (сжатие), испытывают и поперечные деформации.

Опыт показывает, что при растяжении бруса (фиг. 7) длина его увеличивается на  $\Delta l$ , ширина же уменьшается на величину

$$\Delta b = b - b_1.$$

Таким образом, относительному удлинению, или относительной продольной деформации,

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l},$$

соответствует относительная поперечная деформация

$$\varepsilon_1 = \frac{\Delta b}{b}.$$

Таблица 1

Модуль упругости и коэффициент Пуассона

Наименование материала	Модуль упругости в $\text{кг/см}^2$		Коэффициент Пуассона $\mu$
	$E$	$G$	
Чугун серый, белый	$1,15 \div 1,60 \cdot 10^6$	$4,5 \cdot 10^5$	$0,23 \div 0,27$
Ковкий чугун . . . . .	$1,55 \cdot 10^6$	—	—
Сварочная сталь . . . . .	$1,6 \div 2,0 \cdot 10^6$	$7,7 \cdot 10^5$	$0,28$
Литая сталь и углеродистые стали . . . . .	$2,0 \div 2,1 \cdot 10^6$	$8,1 \cdot 10^5$	$0,24 \div 0,28$
Хромоникелевые стали . . . . .	$2,1 \cdot 10^6$	$8,1 \cdot 10^5$	$0,25 \div 0,30$
Стальное литьё . . . . .	$1,75 \cdot 10^6$	—	—
Медь прокатанная . . . . .	$1,1 \cdot 10^6$	$4,0 \cdot 10^5$	$0,31 \div 0,34$
Медь холоднокатанная . . . . .	$1,3 \cdot 10^6$	$4,9 \cdot 10^5$	—
Медь литьё . . . . .	$0,84 \cdot 10^6$	—	—
Фосфористая бронза . . . . .	—	—	—
Латунь . . . . .	$1,15 \cdot 10^6$	$4,2 \cdot 10^5$	$0,32 \div 0,35$
Латунь холоднокатанная . . . . .	$0,91 \div 0,99 \cdot 10^6$	$3,5 \div 3,7 \cdot 10^5$	$0,32 \div 0,42$
Марганцовистая бронза . . . . .	$1,1 \cdot 10^6$	$4,0 \cdot 10^5$	$0,35$
Алюминий катаный . . . . .	$0,69 \cdot 10^6$	$2,6 \div 2,7 \cdot 10^5$	$0,32 \div 0,36$
Алюминиевая бронза . . . . .	—	—	—
Литьё . . . . .	$1,05 \cdot 10^6$	$4,2 \cdot 10^5$	—
Дюралюминий катаный . . . . .	$0,71 \cdot 10^6$	$2,7 \cdot 10^5$	—
Цинк катаный . . . . .	$0,84 \cdot 10^6$	$3,2 \cdot 10^5$	$0,27$
Свинец . . . . .	$0,17 \cdot 10^6$	$0,70 \cdot 10^5$	$0,42$
Лёд . . . . .	$0,04 \div 0,045 \cdot 10^6$	$0,13 \div 0,16 \cdot 10^5$	—
Стекло . . . . .	$0,58 \cdot 10^6$	$2,2 \cdot 10^5$	$0,25$
Гранит . . . . .	$0,49 \cdot 10^6$	—	—
Известняк . . . . .	$0,42 \cdot 10^6$	—	—
Мрамор . . . . .	$0,56 \cdot 10^6$	—	—
Каменная кладка: . . . . .	—	—	—
из гранита . . . . .	$0,09 \div 0,1 \cdot 10^6$	—	—
известняка . . . . .	$0,06 \cdot 10^6$	—	—
кирпича . . . . .	$0,027 \div 0,030 \cdot 10^6$	—	—
Бетон при пределе прочности . . . . .	—	—	$0,16 \div 0,18$
100 ÷ 200 $\text{кг/см}^2$ . . . . .	$0,146 \cdot 10^6 \div 0,332 \cdot 10^6$	—	—
Дерево вдоль волокон . . . . .	$0,1 \div 0,12 \cdot 10^6$	$0,055 \cdot 10^5$	—
» поперёк . . . . .	$0,005 \div 0,01 \cdot 10^6$	—	—
Каучук . . . . .	$0,0008 \cdot 10^6$	—	$0,47$

Отношение относительной поперечной деформации  $\varepsilon_1$  к относительной продольной  $\varepsilon$ :

$$\mu = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon}, \quad (4)$$

называется коэффициентом Пуассона.

В пределах пропорциональности коэффициент Пуассона для каждого материала является постоянным. Величины коэффициентов



Пуассона для различных материалов, определенные опытным путём, даны в табл. 1.

Для большинства материалов коэффициент Пуассона колеблется в пределах

$$\mu = 0,25 - 0,33.$$

**Изменение объёма.** В случае, когда известен коэффициент Пуассона  $\mu$ , можно вычислить изменение объёма бруса при растяжении. Если объём бруса до растяжения обозначить через  $v = lF$ , то после растяжения он будет равен:

$$v_1 = lF(1 + \varepsilon)(1 - \mu\varepsilon)^2 = v(1 + \varepsilon)(1 - \mu\varepsilon)^2.$$

При этом учтено, что длина бруса после растяжения равна

$$l(1 + \varepsilon),$$

а площадь поперечного сечения

$$F(1 - \mu\varepsilon)^2.$$

Так как до предела пропорциональности  $\varepsilon$  является очень малой величиной, то квадратами и высшими степенями её можно пренебречь.

Тогда

$$v_1 = v[1 + \varepsilon(1 - 2\mu)].$$

Относительные изменения объёма равны

$$\varepsilon_v = \frac{v_1 - v}{v} = \varepsilon(1 - 2\mu). \quad (5)$$

### ДИАГРАММА РАСТЯЖЕНИЯ

Пропорциональность между растягивающей силой и удлинением сохраняется только до некоторого значения растягивающего напряжения, называемого **пределом пропорциональности**. За этим пределом зависимость деформаций от напряжений становится более сложной.

При исследовании механических свойств материалов выше предела пропорциональности отношение между деформацией и соответствующим напряжением обычно представляется графически диаграммой растяжения.

На фиг. 8 показана диаграмма растяжения для мягкой стали. Здесь напряжения отложены по оси ординат, а соответствующие относительные удлинения — по оси абсцисс.

Кривая  $OABCDK$  показывает зависимость деформаций от напряжений. От точки  $O$  до  $A$  напряжения и деформации пропорциональны. Поэтому напряжение  $OA'$  называется **пределом пропорциональности**. За точкой  $A$  делается заметным отклонение от закона Гука. При нагрузке выше предела пропорциональности удлинение возрастает быстрее и диаграмма получает вид кривой.

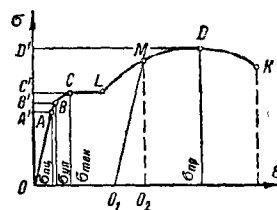
В точке  $C$  имеет место внезапное удлинение стержня без заметного увеличения растягивающей силы. Это явление называется **текучестью металла**, а оно изображается на диаграмме почти горизонтальным участком кривой. Напряжение  $OC'$ , соответствующее точке  $C$ , называется **пределом текучести**.

При дальнейшем возрастании напряжения в стержне к металлу вновь возвращается его способность сопротивления деформации, и, как видно из диаграммы, необходимая растягивающая сила растёт вместе с удлинением

до точки  $D$ , в которой эта сила достигает своего наибольшего значения.

Соответствующее напряжение  $OD'$  называется **пределом прочности** материала или **временным сопротивлением**. До достижения предела прочности образец удлиняется примерно одинаково, и в удлинении участвует весь стержень, каждая единица его длины. Точно так же во всех сечениях наблюдается одинаковое уменьшение поперечных размеров образца.

С момента, когда напряжение достигает предела прочности, деформация сосредоточивается в одном месте стержня. Только небольшая часть длины около этого места принимает участие в дальнейшем растяжении.



Фиг. 8



Фиг. 9

Это влечёт за собой местное сужение поперечного сечения, образуется так называемая **шейка** (фиг. 9).

Вследствие уменьшения площади в месте шейки для дальнейшего удлинения нужна всё меньшая и меньшая сила. Наконец, при нагрузке, отвечающей точке  $K$  диаграммы, происходит разрыв.

Если произвести разгрузку образца при напряжении, меньшем предела пропорциональности, то зависимость между напряжением и удлинением будет выражаться той же прямой  $OA$ , что и при нагрузке. После удаления груза удлинение исчезнет: имеет место лишь упругая деформация.

При разгрузке образца, напряжение в котором соответствует точке  $M$  диаграммы, расположенной между точками  $C$  и  $D$ , зависимость между напряжениями и удлинениями будет изображаться прямой  $MO_1$ , почти параллельной прямой  $OA$ . Образец в этом случае не вернётся к первоначальным размерам. Отрезок  $OO_1$  представляет собой остаточное удлинение. Остаточные деформации имеют место с самого начала растяжения, однако при низких напряжениях они настолько малы, что практического значения не имеют. По мере возрастания напряжений растут и остаточные деформации. То напряжение, при котором остаточные деформации достигают некоторого заданного значения, называется **пределом упругости**. Это значение колеблется от 0,005 до 0,001%. На диаграмме пределу упругости соответствует точка  $B$ .

Для большинства строительных материалов точки  $A$  и  $B$  настолько близки друг к другу, что в практике обычно считают предел упругости и предел пропорциональности совпадающими.

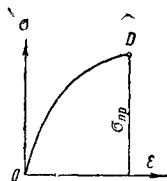
Следует отметить, что удлинение стержня сопровождается сокращением поперечных

размеров. Однако при определении механических характеристик: пределов пропорциональности, упругости, текучести и прочности, пользуются первоначальной площадью поперечного сечения образца  $F_0$ .

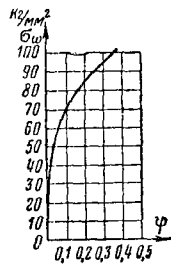
На фиг. 10 показана диаграмма растяжения для чугуна. Этот материал имеет очень низкий предел пропорциональности, и он не обладает свойством текучести. Разрушается этот материал при весьма малых деформациях.

Форма разрушения чугунного образца происходит без образования шейки.

Величины, характеризующие механическую прочность основных материалов, приведены в табл. 2 и в разделе «Материалы».



Фиг. 10



Фиг. 11

**Истинная диаграмма растяжения.** Диаграмму напряжений при растяжении, показанную на фиг. 8, можно рассматривать как характеризующую свойства данного материала при растяжении.

Однако эта характеристика механических свойств материала является условной. Начиная с напряжений, равных пределу текучести, наступает заметное уменьшение площади поперечного сечения образца, сначала равномерное по всей длине, а после перехода за предел прочности — местное. Таким образом ординаты кривой фиг. 8 на участке за пределом текучести представляют собой напряжения, отнесённые не к действительной площади сечения.

Точно так же абсциссы диаграммы фиг. 8 до достижения временного сопротивления зависят лишь от способности материала удлиняться; после же образования шейки величина относительного удлинения зависит и от соотношения размеров образца (длины и диаметра) и, таким образом, не является уже характеристикой только материала. Поэтому, чтобы получить график, более точно характеризующий свойства самого материала, строят так называемую диаграмму истинных напряжений. Она иллюстрирует связь между напряжениями и деформациями в том сечении образца, где происходит разрыв.

Для построения диаграммы истинных напряжений необходимо отмечать в разные моменты опыта величину силы  $P_t$ , растягивающей образец, и одновременно измерять поперечное сечение образца  $F_t$  в наиболее суженном месте. На фиг. 11 представлена диаграмма истинных напряжений для образца рельсовой стали, где

$$\sigma_u = \frac{P_t}{F_t} \text{ и } \psi = \frac{F_0 - F_t}{F_0}.$$

## ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ ДЕФОРМАЦИИ

Помимо механических характеристик материалов, указанных в предыдущем параграфе, имеет практическое значение ещё одна характеристика, представляющая собой работу, которую нужно затратить на растяжение образца, доведённого до предела упругости или до разрыва.

При удлинении бруса, подверженного действию постепенно возрастающей внешней силы, будет произведена на этой силой работа, которая превращается либо частично, либо полностью в потенциальную энергию деформации. Если деформация остаётся в пределах упругости, совершённая внешней силой работа будет полностью превращаться в потенциальную энергию и может быть получена обратно при постепенном разгрузке деформированного стержня.

Пусть  $P_1$  есть некоторое промежуточное значение действующей силы (фиг. 12). Малое приращение  $dP_1$  этой силы увеличит удлинение стержня на  $d \Delta l_1$ .

На основании формулы (2)

$$d \Delta l_1 = \frac{d P_1 \cdot l}{EF}.$$

Работа, проделанная внешней силой ( $P_1 + dP_1$ ), на этом удлинении равна:

$$dA = d \Delta l_1 \cdot (P_1 + dP_1)$$

или, отбрасывая величину второго порядка малости,

$$dA = P_1 \cdot d \Delta l_1 = \frac{P_1 \cdot d P_1 l}{EF}.$$

Полную работу внешней силы получают, интегрируя это выражение в пределах от 0 до окончательного значения  $P$ :

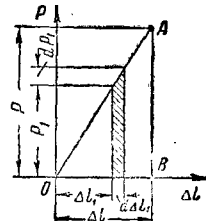
$$A = \int_0^P \frac{P_1 d P_1 l}{EF} = \frac{1}{2} P \cdot \frac{Pl}{EF} = \frac{1}{2} P \cdot \Delta l. \quad (6)$$

Таким образом, работа статически приложенной внешней силы на упругом удлинении равна половине произведения окончательного значения этой силы на величину перемещения.

Этот результат можно представить графически при помощи диаграммы растяжения, построенной в осях  $P$  и  $\Delta l$  (фиг. 12).

Работа, которую нужно затратить на растяжение образца, доведённого до предела упругости, очевидно, будет равна площади ограниченной прямой линией диаграммы растяжения в предположении совпадения точек  $A$  и  $B$  (фиг. 8).

Вся площадь диаграммы выражает собой работу, затраченную на разрыв бруса.



Фиг. 12

Таблица 2

Механические характеристики металлов (напряжения даны в кг/мм<sup>2</sup>)

Материал	Статическое растяже- ние					Статическое кручение			Предел усталости			Твёрдость		Ударная вязкость в кДж на всё сечение	
	предел про- порциональн.	предел текуче- сти	предел прочно- сти	относительн. уд- линение, %	относит. суже- ние, %	предел пропор- циональн.	предел текуче- сти	временное со- противление	при изгибе	при растяжении и сжатии	при кручении	по Бринеллю	по Шору		
Углеродистые стали															
Мягкое железо . . . . .	8,2	10,7	29,4	50	80	6,9	9,1	30,8	19,8	15,6	11,0	—	—	—	
0,02% С железо в слитке . . . . .	11,3	13,4	29,8	48	76	8,8	9,6	—	18,3	12,0	8,8	69	18	2,67	
То же после термической обра- ботки . . . . .	24,6	25,5	35,2	36	76	—	—	—	23,2	—	—	109	20	7,43	
Сварочная вдоль прокатки . . . . .	14,2	16,9	32,8	35	29	—	—	—	16,2	11,2	—	105	15	2,42	
Сварочная поперёк прокатки . . . . .	9,8	15,9	24,3	6	5	—	—	—	—	7,7	—	105	15	0,66	
Мягкая 0,13% С . . . . .	28,8	33,1	39,7	21	71	—	—	—	—	20,5	—	104	—	—	
» 0,14% С . . . . .	22,0	22,0	41,0	39	64	12	—	43,0	17,5	—	—	119	19	6,95	
» 0,18% С . . . . .	27,0	28,4	43,3	41	68	—	—	—	19,7	—	—	—	—	—	
» после холодного воло- чения . . . . .	49,2	—	51,7	14	60	—	—	—	28,8	—	—	—	—	—	
0,24% С (прокатанная) . . . . .	26,5	26,9	42,5	39	64	17,8	—	50,2	13,0	—	9,9	—	—	3,26	
То же после отжига . . . . .	22,0	23,6	33,7	39	61	10,2	—	43,7	15,8	—	—	—	—	1,87	
» » после заковки и отпуска . . . . .	33,1	34,4	55,6	29	67	25,6	—	55,6	28,2	—	—	—	—	5,3	
0,37% С после отжига . . . . .	24,3	24,6	50,6	29	54	14,3	15,8	—	23,2	14,8	11,2	132	18	2,17	
То же после заковки и отпуска . . . . .	56,7	61,4	72,2	23	65	36,3	42,5	—	40,0	23,2	22,8	209	26	7,35	
0,49% С после отжига . . . . .	31,5	33,1	64,4	27	40	19,2	21,1	—	23,2	13,9	14,0	164	21	1,95	
То же после заковки и отпуска . . . . .	47,6	49,2	68,2	24	58	25,8	—	—	33,7	—	18,3	197	23	3,12	
То же 0,65% С . . . . .	—	36,0	78,8	17	27	20,2	23,6	70,1	32,3	30,3	15,1	222	—	—	
То же 0,93% С . . . . .	42,4	47,6	81,0	23	40	29,6	—	—	39,4	25,4	20,3	227	31	0,45	
То же 1,20% С . . . . .	87,5	91,5	126,5	9	15	56,8	—	—	64,8	—	33,8	369	45	0,28	
Специальные стали															
3% никелевая . . . . .	48,5	65,8	78,0	24	64	45,0	—	—	33,8	—	—	228	—	6,92	
3 1/2% . . . . .	88,3	91,5	108,0	17	49	63,5	—	90,0	44,7	—	31,6	—	—	2,84	
3 1/2% . . . . .	49,0	49,5	80,9	22	44	29,2	—	—	73,0	36,0	15,8	—	—	2,46	
3 1/2% . . . . .	81,5	81,9	93,0	19	55	54,0	—	—	81,5	50,6	32,8	—	—	3,57	
1 1/2% хромо-никелевая . . . . .	74,5	76,5	91,0	22	55	49,0	—	84,9	38,6	—	—	269	35	4,26	
3% хромо-никелевая . . . . .	74,0	76,5	93,8	21	58	46,7	—	83,0	42,2	—	—	260	36	4,13	
Закаливающаяся на воздухе хромо-никелевая . . . . .	63,4	128,8	173,5	8	21	—	88,0	141,0	72,5	—	—	486	—	2,08	
То же после отпуска . . . . .	81,5	—	167,0	17	57	57,2	—	138,0	73,3	—	—	464	—	—	
Нержавеющая . . . . .	47,3	62,8	77,3	22	56	—	41,2	69,0	33,8	—	—	217	—	5,55	
1 1/4% хромо-ванадиевая (V— 0,23%) . . . . .	80,3	85,0	103,0	18	53	57,0	—	90,0	47,0	—	—	292	38	1,85	
Цветные металлы															
Медь отожжённая . . . . .	2,2	—	22,8	56	72	—	—	—	7,1	—	—	47	6	4,25	
То же, холоднотянутая (про- вода) . . . . .	—	13,4*	28,5	27	67	—	—	21,7	8,8	—	—	—	—	—	
Бронза, сплав α, холоднока- таная . . . . .	10,9	31,6*	41,2	32	71	—	—	37,0	—	—	8,4	—	—	—	
Фосфористая бронза катаная . . . . .	28,1	32,0*	46,7	21	58	23,8	—	39,0	20,2	—	—	—	—	—	
1/2% латунь отожжённая . . . . .	3,8	—	31,2	84	85	—	—	—	14,2	—	—	—	—	—	
1/2% латунь отожжённая . . . . .	16,5	—	46,5	48	38	—	—	—	22,5	—	—	90	12	4,37	
Мунц-металл . . . . .	—	23,6	52,5	30	31	—	—	—	—	19,7	—	—	—	—	
Морская латунь . . . . .	—	20,5	36,5	28	30	—	—	—	—	13,9	—	—	—	—	
Марганцевая бронза, литьё . . . . .	9,1	—	49,2	33	41	7,9	—	43,5	12,0	—	—	93	17	2,90	
Алюминиевая бронза, литьё . . . . .	3,6	—	41,8	20	28	5,2	—	35,8	15,4	—	—	—	21	1,30	
То же, катаная . . . . .	—	21,4*	61,0	34	54	—	—	42,2	17,2	—	7,1	—	—	—	
Дюралюминий закалённый . . . . .	17,7	—	35,9	16	50	13,4	—	30,6	9,9	—	—	100	19	1,92	
V-сплав катаный . . . . .	12,2	23,6	39,4	24	32	—	—	—	16,1	—	—	—	—	—	
Магниево-алюминиевый сплав . . . . .	10,7	—	31,2	14	17	3,6	—	20,2	10,5	—	—	65	22	0,64	
Сплав меди и никеля, холодно- катаный . . . . .	—	21,1*	35,2	36	67	—	—	29,3	12,6	—	—	—	—	—	
Монель-металл (C=0,2, P и S 0,019%) . . . . .	34,8	38,4	63,1	40	69	—	—	—	23,2	—	14,0	169	21	10,3	

## Примечания.

1. В графе «предел текучести» при растяжении знаком \* отмечен условный предел текучести при удлинении 0,01%.

2. Относительное удлинение дано для коротких образцов при расчётной длине  $l=3,55d=4\sqrt{F}$ .  
 3. Ударная вязкость дана в виде работы в кгм, затраченной на излом образца на копке Шарпи или Изода. Сечение образца— $10\times 10$  мм, надрез треугольный на глубину 2 мм, с углом 45°, скруглённым радиусом 0,25 мм. Действительная площадь в месте излома— $0,8$  см<sup>2</sup>. Для перехода к работе на см<sup>2</sup> необходимо числа, данные в таблице, умножить на 1,25.

4. Предел усталости дан для симметричного цикла.

### ДОПУСКАЕМЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ

Диаграмма растяжения устанавливает полную картину механических свойств материала и даёт возможность для каждой частной инженерной задачи определить такую величину напряжения, при которой будет обеспечен необходимый запас прочности. Это напряжение обычно называется допускаемым напряжением.

За основу для определения допускаемого напряжения в пластичных материалах обыкновенно берут предел текучести  $\sigma_{тек}$ .

Величина допускаемого напряжения в данном случае определяется отношением предела текучести к запасу прочности  $n$ :

$$R = \frac{\sigma_{тек}}{n}.$$

Для хрупких материалов при определении допускаемого напряжения исходят из предела прочности  $\sigma_{пр}$ :

$$R = \frac{\sigma_{пр}}{n_1}.$$

Коэффициент запаса для различных случаев устанавливается практикой проектирования.

Так, например, при статическом действии нагрузок для пластичных материалов

$$n = 1,5 - 1,6,$$

а для хрупких

$$n_1 = 3,0 - 9,0.$$

При динамическом действии нагрузок, например, ударной или внезапной, для пластического материала

$$n = 1,7 - 3,2.$$

Допускаемые напряжения на растяжение и сжатие для некоторых строительных материалов приведены в табл. 3.

Таблица 3

Допускаемые напряжения на сжатие и растяжение

Материал	Допускаемое напряжение в кг/см <sup>2</sup>	
	сжатие	растяжение
Строительная сталь марки 3 . . . . .	1 600	1 600
Сталь марки 2 . . . . .	1 400	1 400
Дерево—сосна при влажности не свыше 15% вдоль волокон . . . . .	100	70
То же дуб вдоль волокон . . . . .	130	90
Чугун . . . . .	1 200—1 500	—
Бетон марки $R_{сж}=110 \text{ кг/см}^2$ . . . . .	33	4,5
Бетон марки $R_{сж}=170 \text{ кг/см}^2$ . . . . .	60	7

### УСЛОВИЯ ПРОЧНОСТИ

При определении необходимой величины площади  $F$  поперечного сечения растянутого бруса исходят из условия, чтобы действительное напряжение в этом брусе при действии силы  $P$  не превосходило допускаемого.

На основании формулы (1) это условие выразится так:

$$\frac{P}{F} \leq R. \quad (7)$$

Полученное неравенство называется условием прочности.

В зависимости от того, какая из трёх величин, входящих в это неравенство, является неизвестной, выражение (7) позволяет решать три рода задач:

подбор сечения:

$$F \geq \frac{P}{R};$$

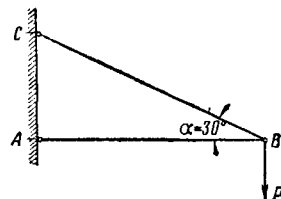
определение грузоподъёмности:

$$P_{доп} \leq F \cdot R;$$

проверка напряжений:

$$\frac{P}{F} \leq R.$$

В тех случаях, когда в стержне по оси действия растягивающей силы имеется ослаб-



Фиг. 13

ление (отверстие для заклёпки, болта и т. д.), в формуле (7) площадь поперечного сечения принимается с учётом ослабления и обозначается  $F_{нетто}$ :

$$\sigma = \frac{P}{F_{нетто}} \leq R.$$

**Пример.** Балка АВ поддерживается стальной тягой ВС (фиг. 13) и несёт на конце В груз  $P = 3 \text{ т}$ ; определить площадь сечения тяги, если допускаемое напряжение

$$R = 1\,400 \text{ кг/см}^2.$$

**Решение.** Разложив силу  $P$  на две составляющие: одну по направлению оси балки и другую — по направлению оси тяги, получают усилия в тяге:

$$N = \frac{P}{\sin \alpha} = \frac{3\,000}{0,5} = 6\,000 \text{ кг},$$

и искомую площадь сечения тяги:

$$F = \frac{N}{R} = \frac{6\,000}{1\,400} = 4,28 \text{ см}^2.$$

### СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫЕ СЛУЧАИ РАСТЯЖЕНИЯ ИЛИ СЖАТИЯ

Системы, в которых число неизвестных усилий превышает число уравнений статики, называются статически неопределимыми системами.

Одних уравнений статики недостаточно для решения таких задач.

В этом случае к числу недостающих уравнений статики добавляют уравнения, составленные из условий деформации.

Метод решения таких задач показан на отдельных примерах.

**Пример 1.** Груз  $P$  вызывает растяжение в стальном вертикальном стержне ОС и наклонных медных стержнях ОВ и ОД, находящихся в одной плоскости. Система симметрична относительно вертикальной оси ОС (фиг. 14).

Пусть заданы:

$F_c$  — площадь поперечного сечения стального стержня;  
 $F_M$  — площадь сечения медного стержня;  
 $l$  — длина стального стержня;  
 $\alpha$  — угол  $BOC$ ;  
 $E_c$  — модуль упругости стального стержня;  
 $E_M$  — модуль упругости медного стержня.

Требуется определить:

$S_c$  — растягивающее усилие в стальном стержне;  
 $S_M$  — растягивающее усилие в медном стержне.

Решение. Вследствие наличия симметрии можно составить только одно уравнение равновесия для шарнира  $O$ :

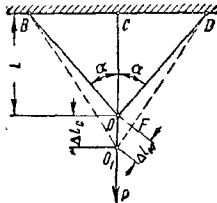
$$S_c + 2 S_M \cos \alpha = P. \quad (a)$$

Полученное уравнение содержит две неизвестных величины

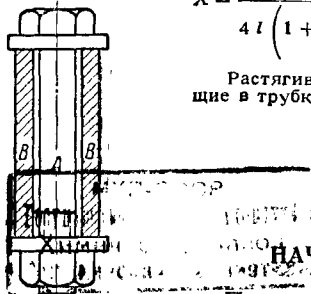
$$S_c \text{ и } S_M.$$

Второе уравнение составим из условия деформации системы. Если  $\Delta l_c$  — полное удлинение стального стержня, то удлинение  $\Delta l_M$  медных стержней может быть определено из треугольника  $O_1OF$ .

$$\Delta l_M = \Delta l_c \cos \alpha. \quad (b)$$



Фиг. 14



Фиг. 15

Это уравнение получено в предположении, что деформации системы очень малы и что допустима замена дуги круга  $OF$  с центром  $D$  перпендикуляром, а угол  $CO_1D$  может быть принят равным  $\alpha$ .

Для совместного решения системы уравнений (a) и (b) необходимо в уравнении (b) выразить деформации  $\Delta l_c$  и  $\Delta l_M$  через усилия  $S_c$  и  $S_M$ .

На основании закона Гука

$$\Delta l_c = \frac{S_c l_c}{E_c F_c},$$

$$\Delta l_M = \frac{S_M l_M}{E_M F_M}.$$

После подстановки полученных значений в уравнение (b) получают следующую систему двух уравнений с двумя неизвестными:

$$S_c + 2 S_M \cos \alpha = P;$$

$$S_c \cos^2 \alpha - \frac{E_c F_c}{E_M F_M} S_M = 0.$$

Решение этой системы уравнений даёт:

$$S_c = \frac{P}{1 + 2 \frac{E_M F_M}{E_c F_c} \cos^2 \alpha}.$$

Если все стержни сделаны из одного и того же материала и имеют одинаковые площади поперечных сечений, то

$$S_c = \frac{P}{1 + 2 \cos^2 \alpha}.$$

Когда угол  $\alpha$  приближается к нулю, усилие в вертикальном стержне приближается к  $\frac{P}{3}$ .

Пример 2. Определить напряжения в стальном болте  $A$  (фиг. 15) и охватывающей его медной трубке  $B$  при повороте гайки на  $\frac{1}{4}$  оборота, если длина болта  $l = 75$  см, шаг нарезки болта  $h = 0,3$  см,

площадь поперечного сечения болта  $F_c = 6$  см<sup>2</sup>, трубки  $F_M = 12$  см<sup>2</sup>, модуль упругости стали  $E_c = 2 \cdot 10^6$  кг/см<sup>2</sup>, меди  $E_M = 10^6$  кг/см<sup>2</sup>.

Решение. Пусть усилие в болте —  $S_c$ , а в трубке —  $S_M$ .

Из условий статики находят:

$$S_c + S_M = 0, \text{ т. е. } S_c = -S_M = X.$$

Следовательно, растягивающее усилие  $X$  в болте равно сжимающему в трубке.

Условия деформации таковы, что растяжение болта  $\Delta_c$ , сложенное сжатием трубки  $\Delta_M$ , должно равняться перемещению гайки.

Уравнение деформации будет иметь вид:

$$\Delta_c + \Delta_M = \frac{h}{4},$$

или после замены деформаций их значениями, на основании закона Гука.

$$\frac{Xl}{E_c F_c} + \frac{Xl}{E_M F_M} = \frac{h}{4}.$$

Откуда

$$X = \frac{h E_c F_c}{4 l \left( 1 + \frac{E_c F_c}{E_M F_M} \right)} = \frac{0,3 \cdot 6 \cdot 2 \cdot 10^6}{4 \cdot 75 (1 + 1)} = 6000 \text{ кг.}$$

Растягивающие напряжения в болте и сжимающие в трубке соответственно равны:

$$\sigma_c = \frac{6000}{6} = 1000 \text{ кг/см}^2;$$

$$\sigma_M = \frac{6000}{12} = 500 \text{ кг/см}^2.$$

### НАЧАЛЬНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ

При изготовлении всякого рода конструкций и деталей нельзя обусловить абсолютно точного выполнения размеров их частей. Неправильности в размерах отдельных элементов при сборке их обуславливают в статически неопределимых системах появления напряжений. Эти напряжения называются начальными напряжениями и могут существовать и при отсутствии внешних сил.

Пример. В плоской симметричной стержневой системе (фиг. 16) средний стержень сделан длиннее, чем следует, на величину

$$O_1 O_2 = \delta.$$

Пусть все стержни выполнены из стали с модулем упругости  $E$  и имеют равные поперечные сечения  $F$ . Требуется определить начальные напряжения в стержнях системы, которые возникнут после сборки.

Решение. Для того чтобы соединить конец среднего стержня  $O_2$  с концами крайних  $O_1$ , необходимо средний стержень сжать на величину  $\delta_c = O_1 O_2$ , а крайний вытянуть на величину  $\delta_K = O_1 O_2$ . Из построения получают уравнение деформации:

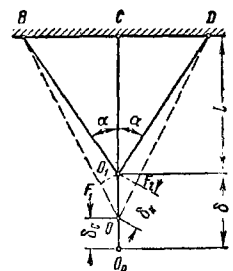
$$O_1 O_2 = O_1 O + O_1 O_1$$

или

$$\delta = \delta_c + \frac{\delta_K}{\cos \alpha}. \quad (a)$$

Если обозначить через  $S_c$  сжимающее усилие в среднем стержне, а через  $S_K$  растягивающее в крайнем, то на основании условий равновесия:

$$S_c - 2 S_K \cos \alpha = 0. \quad (b)$$



Фиг. 16

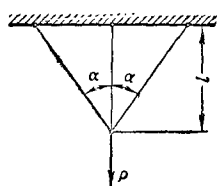
Решение системы двух уравнений (а) и (б) после замены в ней величин деформаций их значениями по закону Гука даёт:

$$S_c = \frac{\delta EF}{l \left(1 + \frac{1}{2 \cos^2 \alpha}\right)};$$

$$S_k = \frac{S_c}{2 \cos \alpha}.$$

После этого можно определить начальные напряжения во всех стержнях, при этом в среднем стержне получатся сжимающие напряжения, а в крайних растягивающие.

Возможность появления начальных напряжений в статически неопределимых системах является одним из основных свойств этих систем. Этим свойством часто пользуются для улучшения работы конструкции.



Фиг. 17

Так, например, если рассмотренную конструкцию загрузить растягивающей силой, приложенной в узле  $O$ , где сходятся три стержня, то путём надлежащего выбора величины  $\delta$  и, следовательно, начальных напряжений, можно обеспечить равномерную передачу нагрузки на все стержни системы.

**Пример.** В плоской симметричной системе, показанной на фиг. 17, составленной из стальных стержней с равным поперечным сечением, обеспечить равномерную передачу нагрузки на все стержни путём создания начальных напряжений.

**Решение.** Усилие в среднем стержне без учёта начальных напряжений равно

$$S'_c = \frac{P}{1 + 2 \cos^2 \alpha}.$$

Если изготовить средний стержень длиной  $l + \delta$ ,

то после сборки в нём возникнет начальное сжимающее усилие

$$S''_c = \frac{\delta EF}{l \left(1 + \frac{1}{2 \cos^2 \alpha}\right)}.$$

Величину  $\delta$  следует назначить из условия, чтобы

$$S'_c - S''_c = \frac{P}{3}.$$

Это даёт

$$\delta = \frac{Pl}{EF} \frac{1 - \cos^2 \alpha}{3 \cos^2 \alpha}.$$

### ТЕМПЕРАТУРНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ

Если подвергнуть нагреву свободно лежащий стержень или статически определимую систему стержней, то они будут свободно удлиняться и никаких напряжений при этом возникать не будет.

Но нагревание стержня с закреплёнными концами, вследствие того что последние препятствуют свободной температурной деформации, сопровождается появлением так называемых температурных напряжений.

Вычисление температурных напряжений представляет собой статически неопределимую задачу.

При решении этой задачи обычно мысленно освобождаются от закрепления и дают возможность стержням свободно деформиро-

ваться, а затем прикладывают к освобождённому концу неизвестную реактивную силу и подбирают её величину из условия отсутствия перемещения.

Полное температурное удлинение стержня длины  $l$  при нагреве на  $t^\circ$  выражается произведением:

$$\Delta l_t = \alpha l t, \quad (8)$$

где  $\alpha$  — коэффициент линейного расширения.

В табл. 4 приводятся значения коэффициентов линейного расширения для разных материалов.

Таблица 4

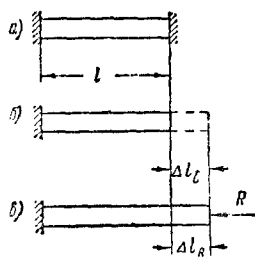
Коэффициент линейного расширения  $\alpha$  на  $1^\circ \text{C}$

Наименование материала	$\alpha$
Алюминий . . . . .	$255 \cdot 10^{-7}$
Магний . . . . .	$255 \cdot 10^{-7}$
Мель . . . . .	$167 \cdot 10^{-7}$
Бронза и латунь . . . . .	$170 \div 220 \cdot 10^{-7}$
Бетон . . . . .	$100 \div 140 \cdot 10^{-7}$
Лёд . . . . .	$507 \cdot 10^{-7}$
Сталь . . . . .	$100 \div 130 \cdot 10^{-7}$
Каменная кладка . . . . .	$40 \div 70 \cdot 10^{-7}$
Дерево . . . . .	$20 \div 50 \cdot 10^{-7}$

**Температурные напряжения в рельсах**  
Пусть рельсы сварены в одну непрерывную линию при температуре  $t_0^\circ$ .

Какие напряжения возникнут в этих рельсах при повышении температуры до  $t^\circ$ , если коэффициент линейного расширения материала равен  $\alpha$ , модуль упругости  $E$  и площадь поперечного сечения рельса —  $F$ ?

Для решения этой задачи рассматривают отрезок рельса длиной  $l$  (фиг. 18, а). Вследствие наличия сварки в стыках концы этого отрезка не могут иметь продольных перемещений и, следовательно, являются закреплёнными.



Фиг. 18

Если мысленно отбросить одну из заделок (фиг. 18, б), то при нагреве на  $(t - t_0)^\circ$  рассматриваемый отрезок рельса удлинится на величину

$$\Delta l_t = \alpha l (t - t_0). \quad (а)$$

В действительности этому удлинению препятствует закрепление, в котором возникает реактивная сила  $R$  (фиг. 18, в).

Полное укорочение отрезка рельса под действием этой реакции на основании закона Гука равно:

$$\Delta l_R = \frac{Rl}{EF} \quad (б)$$

Условие деформации заключается в том, что свободное температурное удлинение рассматриваемого отрезка рельса должно рав-

няться сжатию его под действием реакции  $R$ . Следовательно, уравнение деформации:

$$\Delta l_t = \Delta l_R$$

или на основании (а) и (б)

$$\frac{R}{F} = \alpha (t - t_0) E.$$

Но  $\frac{R}{F} = \sigma$  представляет собой величину искомых температурных напряжений. Таким образом

$$\sigma = \alpha (t - t_0) E. \quad (9)$$

*Пример.* Как велик должен быть зазор между 12-м ( $l = 12$  м) железнодорожными рельсами при температуре  $t_0 = 15^\circ$ , если при  $t = 60^\circ$  они должны взаимно касаться без давления и если средний коэффициент линейного расширения стали  $\alpha = 115 \cdot 10^{-7}$ .

*Решение.* Для рельса длиной  $l = 12$  м при разнице температур

$$t - t_0 = (60 - 15) = 45^\circ$$

зазор должен составлять:

$$\Delta l = l \alpha (t - t_0) = 12 \cdot 115 \cdot 10^{-7} \cdot 45 = 0,0062 \text{ м} = 6,2 \text{ мм}.$$

## ВЛИЯНИЕ СОБСТВЕННОГО ВЕСА

**Напряжение и деформации в призматических стержнях.** В случае, когда длина стержня велика, его собственный вес может вызвать значительные дополнительные напряжения, которые должны быть учтены. Пусть вертикальный стержень закреплён своим верхним концом (фиг. 19). К нижнему его концу пусть подвешен груз  $P$ . Обозначив через  $l$ —длину стержня,  $F$ —площадь поперечного сечения,  $E$ —модуль упругости материала и  $\gamma$ —объёмный вес материала, определяющие напряжение в сечении  $m-n$ , расположенном на расстоянии  $x$  от свободного конца.

Для этого рассекают стержень по сечению  $m-n$ , отбрасывают верхнюю часть и рассматривают условие равновесия нижней.

Действие отброшенной части заменяют нормальным напряжением  $\sigma$ , распределённым равномерно по сечению. Равнодействующая этих напряжений  $\sigma F$  должна уравновесить внешнюю силу  $P$  и собственный вес рассматриваемой части стержня.

Из этого условия имеют:

$$\sigma = \frac{P + \gamma F x}{F} = \frac{P}{F} + \gamma x. \quad (10)$$

Полученное выражение показывает, что напряжения изменяются по длине стержня, возрастая по мере приближения к заделке, которая является опасным сечением, так как в ней напряжение достигает наибольших значений:

$$\sigma_{\max} = \frac{P}{F} + \gamma l. \quad (11)$$

Условие прочности для опасного сечения имеет вид:

$$\frac{P}{F} + \gamma l \leq R, \quad (12)$$

откуда необходимая площадь сечения стержня равна:

$$F = \frac{P}{R - \gamma l}. \quad (13)$$

С увеличением длины стержня собственный вес оказывает всё большее и большее влияние. Когда длина его численно равна  $\frac{R}{\gamma}$ , то правая часть выражения (13) обращается в бесконечность. Следовательно, в этом случае применение призматических стержней невозможно и приходится переходить к стержню переменного сечения.

Для определения деформации призматического стержня от действия собственного веса рассмотрим сперва удлинение элемента этого стержня длиной  $dx$  (фиг. 20), вырезанного двумя бесконечно близкими поперечными сечениями. Можно считать, что по всей бесконечно малой длине  $dx$  растягивающее напряжение постоянно и равно:

$$\sigma = \frac{P + \gamma F x}{F}.$$

Тогда на основании закона Гука удлинение рассматриваемого элемента будет равно:

$$\Delta dx = \frac{\sigma dx}{E} = \frac{P + \gamma F x}{EF} \cdot dx.$$

Полное удлинение стержня:

$$\Delta l = \int_0^l \frac{P + \gamma F x}{EF} \cdot dx = \frac{Pl}{EF} + \frac{\gamma l^2}{2E} = \frac{l}{EF} \left( P + \frac{1}{2} \gamma Fl \right). \quad (14)$$

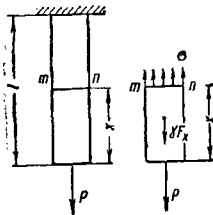
Первый член этой формулы учитывает действие внешней нагрузки  $P$ . Второй член учитывает влияние собственного веса.

Формула (14) показывает, что полное удлинение призматического стержня от собственного веса равно удлинению от сосредоточенного груза, равного половине веса всего стержня и приложенного к его концу.

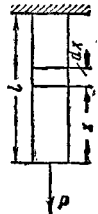
**Напряжения и деформации в стержнях переменного сечения.** Наиболее рациональной формой длинных брусьев, в которых собственный вес вызывает значительные дополнительные напряжения, будет такая форма, при которой во всех поперечных сечениях нормальные напряжения равны допускаемым. Такие брусья называются брусьями равного сопротивления растяжению или сжатию.

Для выяснения формы бруса равного сопротивления рассматривают длинный брус, подверженный сжатию силой  $P$  и действию собственного веса (фиг. 21).

На этой фигуре  $F$ —площадь поперечного сечения  $m-n$  бруса на расстоянии  $x$  от верха.



Фиг. 19



Фиг. 20

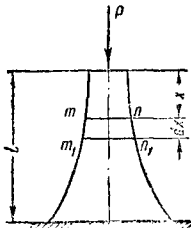
Напряжение в этом сечении должно равняться допускаемому  $R$ . В сечении  $m_1 - n_1$ , лежащем ниже рассматриваемого на бесконечно малом расстоянии  $dx$ , напряжения также должны быть равны допускаемому. Но сжимающая сила, действующая в сечении  $m_1 - n_1$ , больше сжимающей силы, приходящейся на сечение  $m - n$ , на величину, равную весу элемента бруса  $mnn_1m_1$ . Следовательно, разница площадей  $dF$  должна воспринять разницу в сжимающей силе, равную  $\gamma F dx$ , причём напряжения также должны равняться допускаемому напряжению  $R$ .

Таким образом,

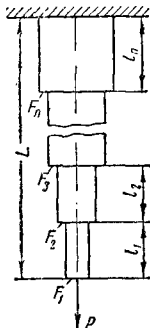
$$R \cdot dF = \gamma F dx.$$

Разделив полученное уравнение на  $RF$ , получают

$$\frac{dF}{F} = \frac{\gamma dx}{R}.$$



Фиг. 21



Фиг. 22

Далее, интегрируя, находят

$$\ln F = \frac{\gamma x}{R} + C_1,$$

или

$$F = C e^{\frac{\gamma x}{R}}.$$

Постоянную интегрирования  $C$  определяют из того условия, что площадь верхнего поперечного сечения, при  $x = 0$ , должна быть равна:

$$F_0 = \frac{P}{R}. \quad (15)$$

Окончательно

$$F = F_0 e^{\frac{\gamma x}{R}}. \quad (16)$$

Формула (16) даёт закон изменения сечений брусков равного сопротивления. Боковые грани таких брусков имеют криволинейное очертание (фиг. 21). Площадь поперечного сечения внизу получится из (16) после подстановки  $x = l$ :

$$F_{\max} = F_0 e^{\frac{\gamma l}{R}}. \quad (17)$$

Относительная деформация брусков равного сопротивления по всей длине одинакова и равна

$$\epsilon = \frac{R}{E}.$$

Полная или абсолютная деформация при длине бруса  $l$  равна:

$$\Delta l = \epsilon l = \frac{Rl}{E} = \frac{Pl}{EF_0}. \quad (18)$$

Для большей простоты выполнения криволинейную форму брусков равного сопротивления заменяют ступенчатой (фиг. 22).

Вычисление площадей поперечных сечений отдельных участков ступенчатого бруса можно произвести на основании формулы (13)

$$\left. \begin{aligned} F_1 &= \frac{P}{R - \gamma l_1}, \\ F_2 &= \frac{F_1 R}{R - \gamma l_2} = \frac{PR}{(R - \gamma l_1)(R - \gamma l_2)}, \\ &\dots \dots \dots \\ F_n &= \frac{F_{n-1} R}{R - \gamma l_n} = \\ &= \frac{P \cdot R^{n-1}}{(R - \gamma l_1)(R - \gamma l_2) \dots (R - \gamma l_n)}. \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

При

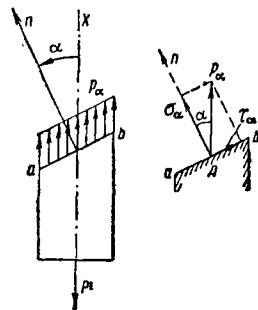
$$l_1 = l_2 = \dots = l_n = \frac{L}{m}$$

$$F_n = \frac{P}{R} \frac{1}{\left(1 - \frac{\gamma L}{mR}\right)^n}. \quad (20)$$

При беспредельном увеличении числа ступеней формула (20) совпадает с формулой (16).

## НАПРЯЖЕНИЯ В КОСОМ СЕЧЕНИИ

Брус, подверженный действию растяжения вдоль его оси, рассечён косым сечением  $ab$  (фиг. 23). Отбросив верхнюю часть, рассматривают условия равновесия нижней части. Наклон сечения фиксируется углом  $\alpha$ , который образует внешняя нормаль  $n$  этого сече-



Фиг. 23

ния с осью бруса. Положительным направлением отсчётов угла  $\alpha$  будет направление от оси бруса к внешней нормали и против часовой стрелки.

Действие отброшенной части на рассматриваемую заменяют напряжениями  $p_\alpha$ , распределёнными равномерно по сечению и направленными вдоль оси бруса.

Из условий равновесия рассматриваемой части бруса находят:

$$p_\alpha \cdot F_\alpha = P,$$

где  $F_\alpha$  — площадь косого сечения  $ab$ .



Если обозначить через  $F$  площадь поперечного сечения бруса, перпендикулярного к оси, то

$$F_{\alpha} = \frac{F}{\cos \alpha}$$

и, следовательно,

$$p_{\alpha} = \frac{P}{F} \cos \alpha = \sigma \cos \alpha, \quad (21)$$

где  $\sigma = \frac{P}{F}$  — напряжение по площадке поперечного сечения.

Для большего удобства исследований изменения напряжений в зависимости от угла  $\alpha$  разложим полное напряжение  $p_{\alpha}$  на две составляющие: нормальную к плоскости сечения  $ab$  и касательную к этой плоскости (фиг. 23). Нормальная составляющая обозначается через  $\sigma_{\alpha}$ , а касательная —  $\tau_{\alpha}$ .

Таким образом, полное напряжение  $p_{\alpha}$ , действующее в какой-либо точке  $A$  косого сечения  $ab$ , можно заменить нормальным напряжением  $\sigma_{\alpha}$  и касательным напряжением  $\tau_{\alpha}$ .

Величины этих напряжений определяют из построения, приведённого на фиг. 23:

$$\sigma_{\alpha} = p_{\alpha} \cos \alpha;$$

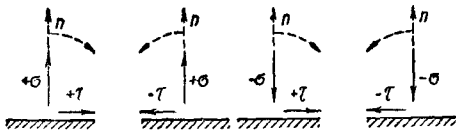
$$\tau_{\alpha} = p_{\alpha} \sin \alpha$$

или на основании (21):

$$\sigma_{\alpha} = \sigma \cos^2 \alpha; \quad (22)$$

$$\tau_{\alpha} = \sigma \sin \alpha \cos \alpha = \frac{\sigma}{2} \sin 2\alpha. \quad (23)$$

Правило знаков для напряжений показано на фиг. 24. Нормальное напряжение считают положительным, если оно растягивает брус, т. е. направлено по внешней нормали от сечения. Касательное напряжение



Фиг. 24

считают положительным, если его направление получается поворотом внешней нормали к сечению на прямой угол по часовой стрелке.

Для того чтобы наглядно представить деформацию, которую производит каждое из этих напряжений, нужно рассмотреть тонкий элемент, вырезанный из растянутого стержня (фиг. 25) двумя смежными параллельными наклонными сечениями  $ab$  и  $a_1b_1$ . На обе плоскости, ограничивающие этот слой, будут действовать нормальные и касательные напряжения  $\sigma_{\alpha}$  и  $\tau_{\alpha}$ .

Нормальные напряжения  $\sigma_{\alpha}$  производят растяжение слоя в направлении нормали к сечениям  $ab$  и  $a_1b_1$ , а касательные напряжения  $\tau_{\alpha}$  вызывают сдвиг сечения  $ab$  относительно сечения  $a_1b_1$ .

Выражения (22) и (23) показывают, что как нормальные напряжения  $\sigma_{\alpha}$ , так и касательные  $\tau_{\alpha}$  изменяются по величине в зависимости от угла наклона  $\alpha$  сечения, по которому они действуют.

Нормальное напряжение  $\sigma_{\alpha}$  достигает максимума в поперечном сечении при  $\alpha = 0$ .

$$(\sigma_{\alpha})_{\max} = \sigma = \frac{P}{F}.$$

В продольных сечениях, при  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ , нормальное напряжение  $\sigma_{\alpha}$  обращается в нуль

$$(\sigma_{\alpha})_{\min} = 0.$$

Значит, в косых сечениях напряжение  $\sigma_{\alpha}$  меняется в пределах

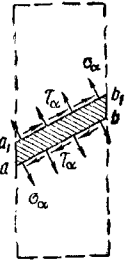
$$0 < \sigma_{\alpha} < \sigma.$$

Касательное напряжение достигает максимума в сечениях при  $\alpha = 45^\circ$

$$(\tau_{\alpha})_{\max} = \frac{\sigma}{2}$$

и минимума в сечениях при  $\alpha = 135^\circ$

$$(\tau_{\alpha})_{\min} = -\frac{\sigma}{2}.$$



Фиг. 25

В сечениях поперечных и продольных касательные напряжения отсутствуют.

Таким образом, при простом растяжении: по поперечным сечениям

$$\sigma_{\alpha} = \sigma, \quad \tau_{\alpha} = 0,$$

по продольным сечениям

$$\sigma_{\alpha} = 0, \quad \tau_{\alpha} = 0,$$

по косым сечениям

$$0 < \sigma_{\alpha} < \sigma; \quad -\frac{\sigma}{2} < \tau_{\alpha} < \frac{\sigma}{2}.$$

### НАПРЯЖЕНИЯ ПО ВЗАИМНО ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫМ ПЛОЩАДКАМ

Из бруса, подверженного простому растяжению, выделяется прямоугольный параллелепипед (фиг. 26).

По граням, лежащим в плоскостях  $ab$  и  $a_1b_1$ , действуют нормальные и касательные напряжения, равные на основании (22) и (23)

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\alpha_1} &= \sigma \cos^2 \alpha_1 \\ \tau_{\alpha_1} &= \frac{\sigma}{2} \sin 2\alpha_1 \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

Нормальные и касательные напряжения, действующие по граням, лежащим в плоскостях  $cd$  и  $c_1d_1$ , равны:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\alpha_2} &= \sigma \cos^2 \alpha_2 = \sigma \sin^2 \alpha_1 \\ \tau_{\alpha_2} &= \frac{\sigma}{2} \sin 2\alpha_2 = -\frac{\sigma}{2} \sin 2\alpha_1 \end{aligned} \right\}, \quad (b)$$

так как

$$\alpha_2 = \alpha_1 + \frac{\pi}{2}.$$

Из сравнения (а) с (б) видно, что

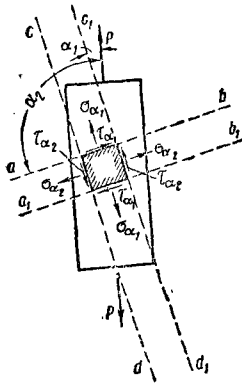
$$\sigma_{\alpha_1} + \sigma_{\alpha_2} = \sigma, \quad (24)$$

$$\tau_{\alpha_1} = -\tau_{\alpha_2} = \tau. \quad (25)$$

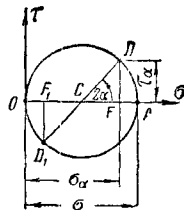
Выражение (24) показывает, что сумма нормальных напряжений, действующих по двум взаимно перпендикулярным площадкам, при любой ориентации этих площадок остаётся постоянной и равна  $\sigma$ .

Из выражения (25) вытекает весьма важное свойство касательных напряжений, которое иногда называют законом взаимности касательных напряжений: касательные напряжения, действующие по двум взаимно перпендикулярным площадкам, равны по величине и обратны по знаку.

Закон взаимности касательных напряжений является общим законом, присутствующим всякой задаче сопротивления материалов.



Фиг. 26



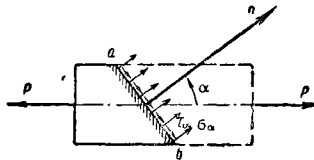
Фиг. 27

### КРУГ НАПРЯЖЕНИЙ ДЛЯ ОДНООСНОГО НАПРЯЖЁННОГО СОСТОЯНИЯ

(Диаграмма  $\sigma, \tau$ )

Формулы (22) и (23) можно представить графически при помощи круга напряжений.

При построении принимают прямоугольную систему координат с осями  $\sigma$  и  $\tau$  (фиг. 27). Положительное направление оси  $\sigma$  вправо. Положительную ось  $\tau$  направляют вверх.



Фиг. 28

Отложив на оси  $\sigma$  отрезок  $OA$ , представляющий собой в выбранном масштабе величину напряжения  $\sigma$ , строят на отрезке  $AO$ , как на диаметре, окружность.

Пусть, например, требуется определить нормальные и касательные напряжения по сечению  $ab$  (фиг. 28), внешняя нормаль к которому образует с осью бруса угол  $\alpha$ .

Для этого нужно отложить от точки  $A$  (фиг. 27) в направлении против часовой стрелки дугу, соответствующую центральному

углу  $2\alpha$ . Пусть  $D$  — точка, полученная таким образом. Абсцисса этой точки  $OF$  представляет собой искомое нормальное напряжение, а ордината  $FD$  — искомое касательное.

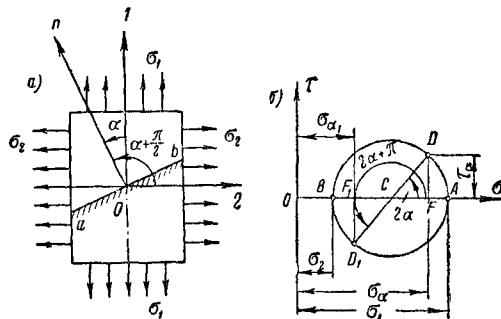
Действительно,

$$OF = OC + CF = \frac{\sigma}{2} + \frac{\sigma}{2} \cos 2\alpha = \sigma \cos^2 \alpha = \sigma_{\alpha},$$

$$FD = \frac{\sigma}{2} \sin 2\alpha = \tau_{\alpha}.$$

### СЛУЧАЙ ПЛОСКОГО НАПРЯЖЁННОГО СОСТОЯНИЯ

Пусть брус, имеющий форму прямоугольного параллелепипеда, растягивается нормальными напряжениями, равномерно распределёнными по граням, вдоль взаимно перпендикулярных осей 1 и 2 (фиг. 29, а).



Фиг. 29

Обозначив через  $\sigma_1$  нормальное напряжение, действующее по граням, перпендикулярным к оси 1, а через  $\sigma_2$  — напряжение по граням, перпендикулярным к оси 2, определяют напряжения по косому сечению  $ab$ , перпендикулярному к плоскости чертежа, причём внешняя нормаль  $n$  к этому сечению составляет с осью 1 угол  $\alpha$ , а с осью 2 — угол  $\alpha + \frac{\pi}{2}$ .

По этому сечению будут действовать неизвестные нормальные напряжения  $\sigma_{\alpha}$  и касательные  $\tau_{\alpha}$ .

Применяя принцип сложения действия сил, можно на основании формул (22) и (23) написать:

$$\sigma_{\alpha} = \sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_2 \cos^2 \left( \alpha + \frac{\pi}{2} \right),$$

$$\tau_{\alpha} = \frac{1}{2} \sigma_1 \sin 2\alpha + \frac{1}{2} \sigma_2 \sin 2 \left( \alpha + \frac{\pi}{2} \right),$$

или

$$\sigma_{\alpha} = \sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_2 \sin^2 \alpha, \quad (26)$$

$$\tau_{\alpha} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha. \quad (27)$$

Знаки для  $\sigma_{\alpha}$  и  $\tau_{\alpha}$  приняты согласно фиг. 25.

Главные напряжения. Составляя производную по  $\alpha$  формулы (26) и приравнявая её

нулю, находят, что нормальные напряжения достигают максимума или минимума при  $\alpha = 0$  или  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ , т. е. по сечениям, перпендикулярным к осям 1 и 2 (фиг. 29, а).

Подставив затем полученные значения  $\alpha$  в формулу (27), можно видеть, что касательные напряжения при этих значениях равны нулю. Следовательно, по площадкам, по которым нормальные напряжения достигают максимума или минимума, касательные напряжения отсутствуют.

Такие площадки называются главными площадками. Нормальные напряжения, действующие по этим площадкам, носят название главных напряжений, а их направления называют главными направлениями.

Из формулы (26) видно, например, что, если  $\sigma_1 > \sigma_2$ , то главные нормальные напряжения равны:

$$\left. \begin{aligned} (\sigma_\alpha)_{\max} &= \sigma_1 \\ (\sigma_\alpha)_{\min} &= \sigma_2 \end{aligned} \right\}. \quad (28)$$

Касательные напряжения достигают максимума и минимума в двух взаимно перпендикулярных площадках, наклоненных под углом  $45^\circ$  к главным площадкам.

Эти экстремальные значения касательных напряжений численно равны полуразности главных напряжений

$$(\tau_\alpha)_{\max} = \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}. \quad (29)$$

### КРУГ НАПРЯЖЕНИЙ ДЛЯ ДВУХОСНОГО НАПРЯЖЁННОГО СОСТОЯНИЯ

(Диаграмма  $\sigma, \tau$ )

Можно легко получить графическое изображение формул (26) и (27). Пусть абсциссы и ординаты (фиг. 29, б) представляют в определённом масштабе нормальные и касательные напряжения. Тогда точки А и В с абсциссами, равными  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ , представят собой напряжения, действующие по главным площадкам. Чтобы получить напряжение по какой-либо наклонной площадке, определяемой углом  $\alpha$  (фиг. 29, а), нужно построить круг на АВ, как на диаметре. Отложив затем в направлении против часовой стрелки от точки А дугу, соответствующую центральному углу  $2\alpha$ , получают точку D, координаты которой определяют искомые напряжения.

Действительно,

$$\begin{aligned} OF &= OB + BC + CF = \sigma_2 + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} + \\ &+ \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\alpha = \sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_2 \sin^2 \alpha = \sigma_\alpha, \\ DF &= \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha = \tau_\alpha. \end{aligned}$$

Для площадки, определяемой углом  $\alpha_1 = \alpha + \frac{\pi}{2}$ , напряжения будут определяться координатами точки  $D_1$ . Из круговой диаграммы (фиг. 29, б) имеем:

$$\sigma_\alpha + \sigma_{\alpha_1} = \sigma_1 + \sigma_2,$$

$$\tau_\alpha = -\tau_{\alpha_1} = \tau.$$

Это есть графическая иллюстрация инвариантности суммы нормальных напряжений по двум взаимно перпендикулярным площадкам и закона взаимности касательных напряжений.

В большинстве случаев приходится решать обратную задачу, т. е. по известным напряжениям  $\sigma_\alpha, \sigma_{\alpha_1}$  и  $\tau$ , действующим по двум взаимно перпендикулярным, произвольно ориентированным площадкам, находить главные нормальные и наибольшие касательные напряжения.

Эта задача проще всего решается при помощи круга напряжений.

Откладывают по оси абсцисс (фиг. 29, б) отрезки  $OF = \sigma_\alpha$  и  $OF_1 = \sigma_{\alpha_1}$ , от точки F — перпендикуляр  $FD = \tau_\alpha$ , а от точки  $F_1$  — перпендикуляр  $F_1D_1 = \tau_{\alpha_1}$ . Полученные таким образом точки D и  $D_1$  определяют на диаграмме напряжения по выбранным двум взаимно перпендикулярным площадкам. Круг, построенный на  $DD_1$ , как на диаметре, представит собой круг напряжений. Точки А и В пересечения круга с осью абсцисс определяют собой искомые главные нормальные напряжения:

$$\sigma_1 = OA,$$

$$\sigma_2 = OB.$$

Центральный угол  $FCD$  равен удвоенному значению угла  $\alpha$  между главным напряжением  $\sigma_1$  и направлением  $\sigma_\alpha$ .

По диаграмме (фиг. 29, б)

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= OC + CA = \frac{OF + OF_1}{2} + \\ &+ \sqrt{\left(\frac{OF - OF_1}{2}\right)^2 + (DF)^2}, \\ \sigma_2 &= OC - CB = \frac{OF + OF_1}{2} - \\ &- \sqrt{\left(\frac{OF - OF_1}{2}\right)^2 + (DF)^2}, \\ \operatorname{tg} 2\alpha &= \frac{DF}{CF} = \frac{2DF}{OF - OF_1}, \end{aligned}$$

или

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{\sigma_\alpha + \sigma_{\alpha_1}}{2} + \\ &+ \sqrt{\left(\frac{\sigma_\alpha - \sigma_{\alpha_1}}{2}\right)^2 + \tau_\alpha^2}, \\ \sigma_2 &= \frac{\sigma_\alpha + \sigma_{\alpha_1}}{2} - \\ &- \sqrt{\left(\frac{\sigma_\alpha - \sigma_{\alpha_1}}{2}\right)^2 + \tau_\alpha^2}, \\ \operatorname{tg} 2\alpha &= \frac{2\tau_\alpha}{\sigma_\alpha - \sigma_{\alpha_1}}. \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

Наибольшее касательное напряжение равно радиусу круга напряжений

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}. \quad (31)$$

Формулы (30) и (31) имеют большое значение, так как они справедливы в общем случае плоского напряжённого состояния, когда в любой точке деформированного тела напряжения параллельны одной плоскости. Они применяются при кручении, изгибе и ряде случаев комбинированных деформаций.

Если площадки, по которым напряжения в рассматриваемой точке известны, параллельны координатным плоскостям, то целесообразно напряжения по этим площадкам обозначать индексом, показывающим внешнюю нормаль к площадке, по которой действует напряжение. Пусть, например, координатная ось  $x$  параллельна внешней нормали к первой площадке, а ось  $y$  — ко второй, тогда в формулы (30) вместо  $\sigma_x$  и  $\sigma_y$  следует подставить  $\sigma_x$  и  $\sigma_y$ ,

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau^2}, \\ \sigma_2 &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau^2}, \\ \operatorname{tg} 2\alpha &= \frac{2\tau}{\sigma_x - \sigma_y}. \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

Действие напряжений  $\sigma_1$  (фиг. 29, а) обуславливает появление относительных линейных деформаций в направлении оси 1

$$\epsilon'_1 = \frac{\sigma_1}{E},$$

а в направлении оси 2

$$\epsilon'_2 = -\mu \frac{\sigma_1}{E}.$$

Напряжение  $\sigma_2$  вызывает относительные линейные деформации в направлении оси 2

$$\epsilon''_2 = \frac{\sigma_2}{E}$$

и в направлении оси 1

$$\epsilon''_1 = -\mu \frac{\sigma_2}{E}.$$

При совместном действии напряжений  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  обозначают: относительные линейные деформации вдоль оси 1 —  $\epsilon_1$  и вдоль оси 2 —  $\epsilon_2$ .

На основании принципа сложения действия сил могут быть определены

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_1 &= \frac{1}{E} (\sigma_1 - \mu \sigma_2) \\ \epsilon_2 &= \frac{1}{E} (\sigma_2 - \mu \sigma_1) \end{aligned} \right\}, \quad (33)$$

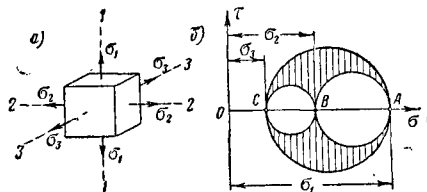
где  $\mu$  — коэффициент Пуассона.

## СЛУЧАЙ ОБЪЁМНОГО НАПРЯЖЁННОГО СОСТОЯНИЯ

(Растяжение или сжатие по трём  
взаимно перпендикулярным  
направлениям)

Пусть  $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$  (фиг. 30, а). Если рассматривать сечения, проходящие через ось 3, то напряжения по этим сечениям могут быть определены формулами (26) и (27) и представлены графически при помощи круга напряжений. На фиг. 30, б круг с диаметром АВ изображает изменение этих напряжений.

Подобным же образом изменение напряжений для сечений, проходящих через ось 1, может быть представлено кругом напряжений с диаметром ВС. Круг напряжений с диаметром АС представит собой изменение напряжений для сечений, проходящих через



Фиг. 30

ось 2. Для сечений, пересекающих все три оси, напряжения изобразятся координатами точек, лежащих в заштрихованной площади.

В теории упругости доказывается, что в самом общем случае напряжённого состояния через любую точку деформированного тела можно провести три взаимно перпендикулярные площадки, по которым нормальные напряжения достигают наибольших и наименьших значений, а касательные напряжения равны нулю (раздел «Теория упругости»). Эти площадки называются главными площадками; напряжения, действующие по этим площадкам, — главными напряжениями, а их направления — главными направлениями, или главными осями.

Если вокруг изучаемой точки выделить бесконечно малый элемент тремя парами сечений, параллельных главным площадкам, то элемент этот будет находиться в условиях растяжения или сжатия по трём взаимно перпендикулярным направлениям.

Таким образом, в самом общем случае напряжённое состояние точки может быть изображено растяжением или сжатием по трём взаимно перпендикулярным направлениям.

Относительные линейные деформации в случае растяжения или сжатия по трём взаимно перпендикулярным направлениям вычисляются по формулам:

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_1 &= \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu (\sigma_2 + \sigma_3)] \\ \epsilon_2 &= \frac{1}{E} [\sigma_2 - \mu (\sigma_3 + \sigma_1)] \\ \epsilon_3 &= \frac{1}{E} [\sigma_3 - \mu (\sigma_1 + \sigma_2)] \end{aligned} \right\}. \quad (34)$$

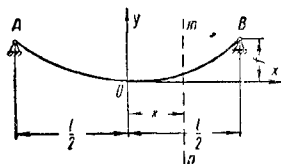
Вывод их аналогичен выводу формул (33). Складывая уравнения (34) почленно, получают формулу для определения относительной объёмной деформации

$$\Delta = \frac{1 - 2\nu}{E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3). \quad (35)$$

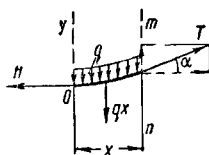
### РАСЧЁТ ГИБКИХ НИТЕЙ

При проектировании линий электрических передач, подвесных дорог, гибких передач в механизмах железнодорожной сигнализации, висячих мостов и т. п. приходится иметь дело с гибкими проволоками и канатами, подвешенными горизонтально или наклонно. Такого типа конструкции носят название гибких нитей.

**Гибкая нить с опорами на одном уровне.** Пусть тяжёлая гибкая нить постоянного поперечного сечения подвешена в точках *A* и *B*, находящихся на одной горизонтальной прямой (фиг. 31).



Фиг. 31



Фиг. 32

Начало координат — нижняя точка *O*. Ось *x* направлена горизонтально, а ось *y* — вертикально вверх.

Выделив сечениями *ou* и *mn* часть этой нити (фиг. 32), исследуют условие её равновесия. Если натяжение в самой низкой точке, называемое распором, обозначить через *H*, а через *T* — натяжение в сечении *mn*, то условия равновесия дадут следующие два уравнения:

$$\begin{aligned} H &= T \cos \alpha, \\ qx &= T \sin \alpha, \end{aligned} \quad (a)$$

где *q* есть вес единицы длины нити, включая и временную нагрузку. Левая часть второго уравнения (а) представляет собой вес выделенной части нити в предположении, что кривая провеса достаточно пологая и поэтому с достаточной точностью можно длину дуги заменить её проекцией.

Разделив второе из уравнений (а) на первое, получают

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{dy}{dx} = \frac{qx}{H},$$

откуда, выполняя интегрирование и положив произвольную постоянную равной нулю, как это следует из условия в начале координат, получают уравнение кривой провеса:

$$y = \frac{qx^2}{2H}. \quad (36)$$

Это есть уравнение параболы. Полагая в уравнении (36)

$$x = \frac{l}{2} \text{ и } y = f,$$

находят зависимость между распором *H* и стрелкой провеса *f*:

$$f = \frac{ql^2}{8H},$$

или

$$H = \frac{ql^2}{8f}. \quad (37)$$

Натяжение в любой точке нити может быть определено из первого уравнения (а)

$$\begin{aligned} T &= \frac{H}{\cos \alpha} = H \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \\ &= H \sqrt{1 + \left(\frac{qx}{H}\right)^2}. \end{aligned} \quad (38)$$

Наибольшее значения натяжения достигает в точке подвеса:

$$T_{\max} = H \sqrt{1 + \left(\frac{ql}{2H}\right)^2},$$

или на основании (37)

$$T_{\max} = \frac{ql^2}{8f} \sqrt{1 + 16 \left(\frac{f}{l}\right)^2}. \quad (39)$$

Наибольшее напряжение

$$\sigma_{\max} = \frac{ql^2}{8fF} \sqrt{1 + 16 \left(\frac{f}{l}\right)^2}, \quad (40)$$

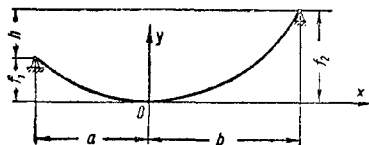
где *F* — площадь поперечного сечения нити. Условие прочности имеет вид:

$$\frac{ql^2}{8fF} \sqrt{1 + 16 \left(\frac{f}{l}\right)^2} \leq R. \quad (41)$$

**Гибкая нить с опорами на разных уровнях.** По формулам (36) и (38) решают задачу и в случае, когда опоры нити находятся на разных уровнях (фиг. 33).

Подставляя в (36)  $x = -a$  и  $x = b$ , получают для точек подвеса нити:

$$f_1 = \frac{qa^2}{2H}; \quad f_2 = \frac{qb^2}{2H}. \quad (42)$$



Фиг. 33

Если обозначить разность уровней опор нити через *h*, то

$$\begin{aligned} h &= f_2 - f_1 = \frac{q}{2H} (b^2 - a^2) = \\ &= \frac{ql}{2H} (b - a), \end{aligned} \quad (43)$$

так как

$$a + b = l. \quad (44)$$

Решая совместно (43) и (44), находят:

$$a = \frac{l}{2} - \frac{Hh}{ql}; \quad b = \frac{l}{2} + \frac{Hh}{ql}. \quad (45)$$

Подставив полученные значения для  $a$  и  $b$  в (42), получают возможность вычислить распор  $H$ .

*Пример.* Каковы натяжение и стрела провисания медного провода, подвешенного между точками  $A$  и  $B$  (фиг. 31), если длина его в ненапряжённом состоянии равна  $l = 40$  м;

$$E = 1 \cdot 10^{10} \text{ кг/см}^2; \quad \gamma = 0,008 \text{ кг/см}^3.$$

**Решение.** Удлинение и провисание провода происходят от растягивающего усилия

$$H = \frac{ql^2}{8f}.$$

Величина удлинения

$$\Delta l = \frac{Hl}{EF} = \frac{ql^3}{EF 8f}.$$

Тогда стрела провисания будет

$$f = 20 \sqrt[3]{12} = 45,8 \text{ см.}$$

Напряжение

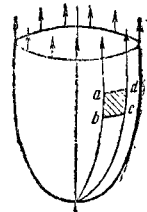
$$\sigma = \frac{H}{F} = \frac{\gamma l^2}{8f} = \frac{0,008 \cdot 4000^2}{8 \cdot 45,8} = 349 \text{ кг/см}^2.$$

### ТОНКОСТЕННЫЕ РЕЗЕРВУАРЫ

Тонкостенными резервуарами принято называть сосуды (баки и цистерны для жидкости, баллоны для газа и т. п.), у которых толщина стенки мала по сравнению с поперечным размером. Обычно в практических расчётах резервуары с толщиной стенки не более чем в  $1/10$  поперечного размера рассматриваются как тонкостенные.

В таких резервуарах вследствие малой толщины стенки можно считать, что напряжения распределены по стенке равномерно.

Расчёт тонкостенного резервуара, имеющего форму тела вращения, подверженного действию внутреннего давления, симметричного относительно оси, при условии, если он поддерживается в равновесии растягивающими силами, равномерно распределёнными по его краю, сводится к задаче о растяжении в двух направлениях и может быть выполнен элементарным путём.



Фиг. 34

Рассматривают бесконечно малый элемент  $abcd$  стенки такого резервуара, вырезанный двумя меридиональными сечениями  $ab$  и  $cd$  и двумя сечениями  $ad$  и  $bc$ , нормальными к меридиану (фиг. 34). Так как форма резервуара и нагрузка, действующая на него, симметричны относительно любого меридионального сечения, то нужно полагать, что по площадкам  $ab$  и  $cd$  не будет касательных напряжений. Эти площадки, а следовательно, и перпендикулярные им площадки  $ad$  и  $bc$  будут главными.

Пусть  $q$  — внутреннее давление, в ат ( $\frac{\text{кг}}{\text{см}^2}$ );

$\sigma_1$  — нормальные напряжения по площадкам  $ab$  и  $cd$  меридионального сечения;

$\sigma_2$  — нормальные напряжения по площадкам  $ad$  и  $bc$ , нормальным к меридиональному сечению;

$\delta$  — толщина стенки резервуара;

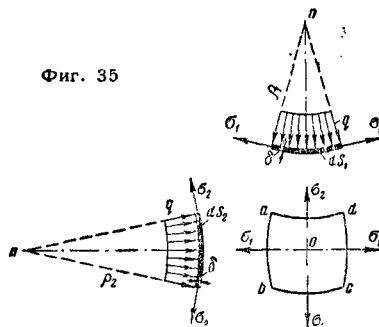
$\rho_2$  — радиус кривизны элемента меридионального сечения;

$\rho_1$  — радиус кривизны элемента сечения, нормального к меридиану.

Для составления уравнения равновесия элемента  $abcd$  (фиг. 35) нужно приложить к площадкам меридиональных сечений усилия  $\sigma_1 \delta_1 ds_2$ , а к площадкам сечений, нормальных к меридиану, — усилия  $\sigma_2 \delta ds_1$ .

Внутренняя поверхность элемента будет подвержена давлению  $q ds_1 ds_2$ .

Фиг. 35



Проектируя все силы на нормаль к поверхности элемента, получают уравнение равновесия

$$\sigma_1 \delta ds_2 \frac{ds_1}{\rho_1} + \sigma_2 \delta ds_1 \frac{ds_2}{\rho_2} - q ds_1 ds_2 = 0,$$

или

$$\frac{\sigma_1}{\rho_1} + \frac{\sigma_2}{\rho_2} = \frac{q}{\delta}. \quad (46)$$

Уравнение (46) даёт возможность решить ряд практически важных задач.

**1. Сферический резервуар радиуса  $R$ , подверженный внутреннему давлению  $q$ . На основании полной симметрии**

$$\rho_1 = \rho_2 = R$$

и

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma.$$

Следовательно, уравнение (46) даёт

$$\sigma = \frac{qR}{2\delta}. \quad (47)$$

**2. Цилиндрический котёл с шаровыми днищами, подверженный внутреннему давлению  $q$  (фиг. 36).** Учитывая, что в цилиндрической части  $\frac{1}{\rho_1} = \frac{2}{d}$ , а  $\frac{1}{\rho_2} = 0$ , из уравнения (46) на основании

$$\sigma_1 = \frac{qd}{2\delta}. \quad (48)$$

Нормальные напряжения  $\sigma_2$ , распределённые по поперечному сечению цилиндрических стенок, должны уравнивать давление на днище, следовательно,

$$\pi d \delta \sigma_2 = \frac{\pi d^2}{4} q,$$

откуда

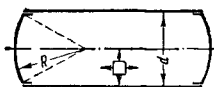
$$\sigma_2 = \frac{qd}{4\delta}. \quad (49)$$

Растягивающие напряжения в сферическом днище могут быть определены по формуле (47).

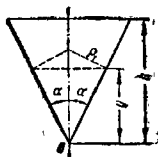
3. Конический резервуар, наполненный жидкостью (фиг. 37). Давление жидкости на внутреннюю поверхность резервуара на уровне  $y$  равно:

$$q = (h - y) \gamma,$$

где  $\gamma$  — удельный вес жидкости;  
 $h$  — высота резервуара.



Фиг. 36



Фиг. 37

Растягивающее напряжение по площадке меридионального сечения на уровне  $y$  определяется из уравнения (46).

Учитывая, что

$$\frac{1}{\rho_2} = 0, \quad \rho_1 = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\cos \alpha} \cdot y,$$

получим

$$\sigma_1 = \frac{\gamma}{\delta} \cdot \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\cos \alpha} (h - y) y, \quad (50)$$

где  $\delta$  — толщина стенки резервуара.

Наибольшего значения эти напряжения достигают в точках  $y = \frac{h}{2}$

$$(\sigma_1)_{\max} = \frac{h^2 \gamma}{4 \delta} \cdot \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\cos \alpha}. \quad (51)$$

Растягивающие напряжения  $\sigma_2$  по площадкам сечений, нормальных к меридиану, могут быть определены из того условия, что их равнодействующая уравновешивает вес объема жидкости.

Это условие даёт уравнение:

$$\begin{aligned} 2 \pi y \operatorname{tg} \alpha \sigma_2 \cos \alpha &= \\ &= \pi y^2 \operatorname{tg}^2 \alpha \left( h - y + \frac{y}{3} \right) \gamma, \end{aligned}$$

откуда

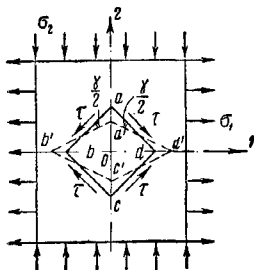
$$\sigma_2 = \frac{\gamma}{2 \delta} \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\cos \alpha} \left( h - \frac{2}{3} y \right) y. \quad (52)$$

## СДВИГ

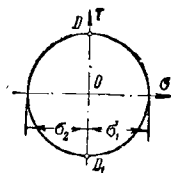
Рассмотрим частный случай плоского напряжённого состояния, при котором растягивающее напряжение  $\sigma_1$ , действующее в горизонтальном направлении, равно по абсолютной величине сжимающему напряжению  $\sigma_2$ , действующему в вертикальном направлении (фиг. 38). Соответствующий круг напряжений показан на фиг. 39.

Из рассмотрения этого круга видно, что по площадкам, перпендикулярным к плоскости  $102$  (фиг. 38) и наклоненным под углом  $45^\circ$  к оси  $1$ , действуют только касательные напряжения, равные по абсолютной величине нормальному напряжению

$$\tau = \sigma_1 = -\sigma_2. \quad (53)$$



Фиг. 38



Фиг. 39

Если представить элемент  $abcd$  выделенным, то он будет находиться в равновесии только под действием касательных напряжений, распределённых равномерно по его граням. Такое напряжённое состояние называется чистым сдвигом. Так как элемент  $abcd$  не подвержен действию нормальных напряжений, длины  $ab$ ,  $bc$ ,  $cd$  и  $da$  не будут изменяться при деформации, но горизонтальная диагональ  $bd$  будет вытягиваться, а вертикальная диагональ  $ac$  укорачиваться. В результате деформации квадрат  $abcd$  превратится в ромб  $a'b'c'd'$ .

Первоначально прямой угол у вершины  $a$  увеличится и будет равен  $\frac{\pi}{2} + \gamma$ , а угол у вершины  $b$  уменьшится и станет равным  $\frac{\pi}{2} - \gamma$ .

Величина  $\gamma$  определяет перекося элемента  $abcd$  и называется относительным сдвигом или углом сдвига. В пределах справедливости закона Гука существует прямая пропорциональность между касательным напряжением  $\tau$  и углом сдвига  $\gamma$ :

$$\tau = G \cdot \gamma, \quad (54)$$

где  $G$  — коэффициент пропорциональности, называемый модулем сдвига или модулем упругости 2-го рода, числовые значения которого, экспериментально полученные для некоторых материалов, приведены в табл. 1.

Для определения зависимости между модулем сдвига  $G$  и модулем упругости  $E$  нужно вычислить величину относительного сдвига  $\gamma$ . Для этого рассматривают треугольник  $a'b'o$  (фиг. 38). Угол у вершины  $b'$  этого тре-

угольника равен  $\frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2}$ .

По малости угла  $\gamma$  можно принять:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2} \right) &= \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} - \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}}{1 + \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} \cdot \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}} = \\ &= \frac{1 - \frac{\gamma}{2}}{1 + \frac{\gamma}{2}}. \end{aligned} \quad (a)$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2}\right) &= \frac{Oa'}{Ob'} = \frac{1+\varepsilon_2}{1+\varepsilon_1} = \\ &= \frac{1 - \frac{\tau(1+\mu)}{E}}{1 + \frac{\tau(1+\mu)}{E}}, \end{aligned} \quad (6)$$

так как на основании (53)

$$\varepsilon_1 = -\varepsilon_2 = \frac{\tau(1+\mu)}{E},$$

где  $\mu$  — коэффициент Пуассона.

Из сравнения (а) и (б)

$$\gamma = \frac{2(1+\mu)}{E} \tau, \quad (55)$$

а из сравнения (54) с (55):

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)}. \quad (56)$$

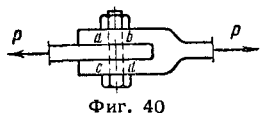
Полученная зависимость показывает, что модуль упругости при сдвиге может быть легко вычислен, если известны модуль упругости при растяжении  $E$  и коэффициент Пуассона  $\mu$ .

Так, например, для стали

$$G = \frac{2100000}{2(1+0,30)} = 810000 \text{ кг/см}^2.$$

### РАСЧЁТ НА СРЕЗ

Состояние чистого сдвига, когда по граням кубика касательные напряжения распределены равномерно, имеет место при кручении. Но встречается много практически важных задач, когда касательные напряжения распределены неравномерно по сечениям.



Фиг. 40

Такие задачи в обычной инженерной практике решаются приближённо в предположении, что имеет место чистый сдвиг и что касательные напряжения распределены равномерно.

Например, в случае болтового соединения, показанного на фиг. 40, если диаметр болта недостаточно велик, может произойти разрушение из-за сдвига по поперечным сечениям  $ab$  и  $cd$ . Приближённо величина требуемого диаметра болта определяется, исходя из равномерного распределения касательных напряжений по сечениям  $ab$  и  $cd$ .

Касательное напряжение  $\tau$  определяется путём деления срезающей болт силы  $P$  на сумму площадей  $ab$  и  $cd$ , т. е. по формуле:

$$\tau = \frac{P}{2 \frac{\pi d^2}{4}},$$

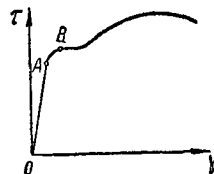
а требуемый диаметр болта определяют из условия, чтобы касательное напряжение  $\tau$  не превосходило допускаемого  $R_s$ , т. е. по формуле:

$$d = \sqrt{\frac{2P}{\pi \cdot R_s}}.$$

На практике ряд деталей и элементов конструкций работает в таких условиях, что внешние силы стремятся их разрушить именно путём сдвига. Простейшими примерами подобных деталей являются болтовые, заклёпочные и сварные соединения металлических элементов, а также сопряжение деревянных элементов при помощи врубок.

### ДОПУСКАЕМЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ ПРИ СДВИГЕ

Установленная опытным путём зависимость между касательным напряжением  $\tau$  и относительным сдвигом  $\gamma$  показана на диаграмме (фиг. 41). Эта диаграмма похожа на получаемую при испытаниях на разрыв (фиг. 8). В ней можно обнаружить предел пропорциональности  $A$  и предел текучести  $B$ .



Фиг. 41

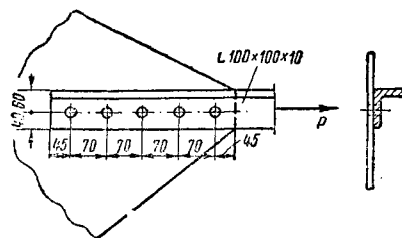
Для такого материала, как сталь, из которой изготавливаются заклёпки и болты, как показывает опыт, предел текучести при сдвиге  $\tau_{mk}$  составляет только 0,6 от предела текучести при растяжении.

Допускаемое напряжение на сдвиг принимается по формуле:

$$R_s = \frac{\tau_{mk}}{n}.$$

Коэффициент запаса прочности  $n$  берётся той же величины, что и при растяжении или сжатии.

Таким образом, учитывая вышеуказанное соотношение  $\tau_{mk}$ , допускаемое напряжение



Фиг. 42

при сдвиге  $R_s$  может быть выражено следующим образом через допускаемое напряжение при растяжении или сжатии

$$R_s = 0,6 R. \quad (57)$$

**Пример 1.** Рассчитать прикрепление внахлёстку стержня из уголка  $100 \times 100 \times 10$ , если усилие  $P = 14 \text{ т}$ , диаметр заклёпок  $d = 21 \text{ мм}$ .

Допускаемое напряжение на срез заклёпки  $R_s = 950 \text{ кг/см}^2$  (фиг. 42). Прикрепление односрезное.

**Решение.** Сопротивление одной заклёпки срезу:

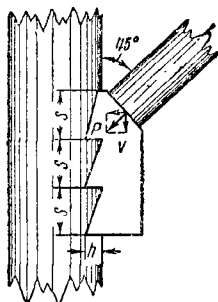
$$N = \frac{\pi d^2}{4} R_s = \frac{3,14 \cdot 21^2}{4} \cdot 950 = 3287 \text{ кг}.$$



Число заклёпок

$$N = \frac{P}{N} = \frac{14\,000}{3\,287} = 4,3.$$

Принимается 5 заклёпок.



Фиг. 43

Пример 2. Рассчитать сопряжение подкоса со сваей при помощи зубчатой подушки (фиг. 43), если давление подкоса на подушку  $P = 20\,т$ . Допускае-

мое напряжение на скалывание дерева вдоль волокон  $R_s = 10\,кг/см^2$ , а на смятие  $R = 100\,кг/см^2$ . Ширина подушки равна 18 см.

Решение. Вертикальная составляющая давления

$$\gamma = P \cos 45^\circ = 14,2\,т.$$

Площадь среза трёх зубьев подушки

$$F_s = 3 \cdot s \cdot 18 = 54\,с.$$

Условие прочности на срез

$$\frac{14\,200}{54\,с} < 10\,кг/см^2,$$

откуда

$$s = \frac{14\,200}{10 \cdot 54} = 26,3\,см.$$

Площадь смятия

$$F_{см} = 3 \cdot h \cdot 18 = 54\,h\,см^2.$$

Условие прочности на смятие

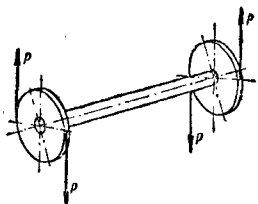
$$\frac{14\,200}{54\,h} < 100\,кг/см^2.$$

Следовательно,

$$h > \frac{14\,200}{54 \cdot 100} = 2,63 \approx 3\,см.$$

## КРУЧЕНИЕ

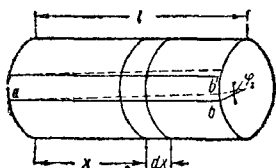
Брус, к концам которого приложены равные и противоположные пары сил в плоскости, перпендикулярной к его оси, испытывает кручение (фиг. 44). Пара сил, производящая кручение, называется скручивающей парой, а момент её относительно про-



Фиг. 44

дольной оси бруса называется крутящим моментом.

Брус, работающий на кручение, называется в машиностроении валом.

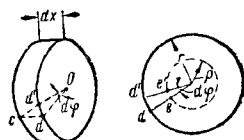


Фиг. 45

Если на поверхность круглого вала нанести до деформации сетку из системы параллельных кругов и образующих (фиг. 45), то, как показывает опыт, образующие после деформации получают форму винтовой линии, а круги остаются плоскими и взаимно параллельными, причём расстояние между ними остаётся неизменным.

Нанесённый на торце радиус остаётся после деформации прямым, но поворачивается на некоторый угол.

На основании изложенного можно сделать предположение о том, что при кручении круглые поперечные сечения сохраняют между собой первоначальные расстояния, остаются плоскими, и радиусы, проведённые в этих сечениях, не искривляются.



Фиг. 45а

При этих условиях элементы скручиваемого вала будут испытывать чистый сдвиг.

Пусть  $ab'$  — винтовая линия, совпадающая первоначально с образующей цилиндра (фиг. 45);  $d\varphi$  — угол закручивания на расстоянии  $dx$ , выраженный в радианах. Тогда при рассмотрении части этого вала (фиг. 45а) длиной  $dx$  имеют:

$$\cup dd' = r d\varphi,$$

$$\cup ee' = r d\varphi.$$

Отношение дуги  $ee'$  к длине  $dx$  есть относительный угол сдвига  $\gamma$  в точке на расстоянии  $\rho$  от центра, следовательно,

$$\gamma = \rho \frac{d\varphi}{dx}.$$

По закону Гука касательное напряжение  $\tau$  равно относительному углу сдвига  $\gamma$ , умноженному на модуль сдвига  $G$ , следовательно,

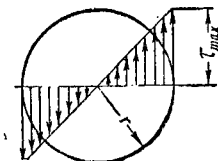
$$\tau = G \gamma = G \rho \frac{d\varphi}{dx}. \quad (58)$$

Величина напряжения, как показывает полученная формула, пропорциональна расстоянию  $\rho$  от оси стержня. Наибольшее на-

пряжение в плоскости поперечного сечения, очевидно, соответствует точкам, лежащим у контура сечения при  $\rho = r$  (фиг. 46):

$$\tau_{\max} = G \cdot r \cdot \frac{d\varphi}{dx}. \quad (59)$$

Напряжения эти будут действовать как по площадкам, совпадающим с поперечным сечением, так и по площадкам, лежащим в плоскостях, проходящих через ось стержня (фиг. 47).



Фиг. 46



Фиг. 47

Входящее в выражения (58) и (59) отношение  $\frac{d\varphi}{dx}$  называется относительным или погонным углом закручивания и определяется из того условия, что напряжения, действующие по поперечному сечению, должны приводиться к паре, момент которой равен крутящему моменту  $M^*$ :

$$\int_F \tau \rho dF = G \frac{d\varphi}{dx} \int_F \rho^2 dF = M^*.$$

Обозначая  $\int_F \rho^2 dF$  через  $I_p$  и называя его полярным моментом инерции сечения, находят:

$$\theta = \frac{d\varphi}{dx} = \frac{M^*}{GI_p}. \quad (60)$$

Применяя формулу (60), из формулы (58) получают:

$$\tau = \frac{M^*}{I_p} \cdot \rho. \quad (61)$$

Наибольших значений касательные напряжения достигают на поверхности вала при  $\rho = r$ :

$$\tau_{\max} = \frac{M^*}{I_p} r.$$

или

$$\tau_{\max} = \frac{M^*}{W_p}, \quad (62)$$

где  $W_p = \frac{I_p}{r}$  называется полярным моментом сопротивления и представляет собой отношение полярного момента инерции площади поперечного сечения к расстоянию от центра сечения до наиболее удаленной точки.

Для круглого поперечного сечения

$$I_p = 2\pi \int_0^r \rho^3 d\rho = \frac{\pi r^4}{2} = \frac{\pi d^4}{32};$$

$$W_p = \frac{\tau r^3}{2} = \frac{\pi d^3}{16},$$

или приближенно

$$W_p = 0,2 d^3.$$

Для кольцевого поперечного сечения с наружным диаметром  $d$  и внутренним  $d_1$

$$I_p = \frac{\pi d^4 - \pi d_1^4}{32} = \frac{\pi d^4}{32} \left[ 1 - \left( \frac{d_1}{d} \right)^4 \right],$$

$$W_p = \frac{\pi d^3}{16} \left[ 1 - \left( \frac{d_1}{d} \right)^4 \right]$$

или, если обозначить  $\frac{d_1}{d} = \alpha$ ,

$$I_p = \frac{\pi d^4}{32} (1 - \alpha^4),$$

$$W_p = \frac{\pi d^3}{16} (1 - \alpha^4).$$

Приближенно принимают

$$W_p = 0,2 d^3 (1 - \alpha^4).$$

Угол закручивания вала на бесконечно малой длине  $dx$

$$d\varphi = \frac{M^*}{GI_p} dx. \quad (63)$$

Угол закручивания какого-либо сечения вала, отстоящего на расстоянии  $x$  от заделки (фиг. 45), может быть определен путем интегрирования этого выражения в пределах от 0 до  $x$ :

$$\varphi = \frac{M^*}{GI_p} \int_0^x dx = \frac{M^* \cdot x}{G \cdot I_p}.$$

Наибольший угол закручивания будет между крайними сечениями на длине:

$$\varphi_l = \frac{M^* l}{GI_p}. \quad (64)$$

Для получения углов закручивания в градусах пользуются формулой:

$$\varphi_l = \frac{180}{\pi} \cdot \frac{M^* l}{GI_p}.$$

Эта формула обычно применяется при экспериментальном определении модуля упругости при сдвиге.

Если измерить угол закручивания испытуемого образца, возникший при данном крутящем моменте, то величину  $G$  можно легко определить из выражения

$$G = \frac{180}{\pi} \cdot \frac{M^* l}{I_p \cdot \varphi_l}.$$

В случае вала переменного сечения любой формы значение угла закручивания может быть определено по формуле:

$$d\varphi = \frac{M^*}{G} \frac{dx}{I_p(x)},$$

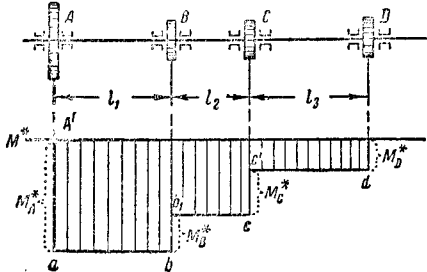
$$\varphi = \frac{M^*}{G} \int_0^l \frac{dx}{I_p(x)}.$$

# ВЫЧИСЛЕНИЕ КРУТЯЩИХ МОМЕНТОВ

Часто приходится определять диаметр вала по мощности  $N$  в лошадиных силах, которую передаёт вал, и числу его оборотов в минуту  $n$ ; в этом случае крутящий момент определяется по формуле

$$M^* = \frac{75 \cdot 100 \cdot 60}{2 \pi n} N = 71\,620 \frac{N}{n} \text{ (кгсм)}. \quad (65)$$

Эпюры крутящих моментов. Пусть вал (фиг. 48), посредством ведущего шкива  $A$  приводит в движение шкивы  $B, C, D$ .



Фиг. 48

Пренебрегая трением в подшипниках и другими сопротивлениями, имеют при установившемся движении:

$$M_A^* = M_B^* + M_C^* + M_D^*,$$

$M_A^*$  — крутящий момент от ведущего шкива  $A$ ,

$M_B^*, M_C^*$  и  $M_D^*$  — соответствующие крутящие моменты от ведомых шкивов,  $B, C, D$ .

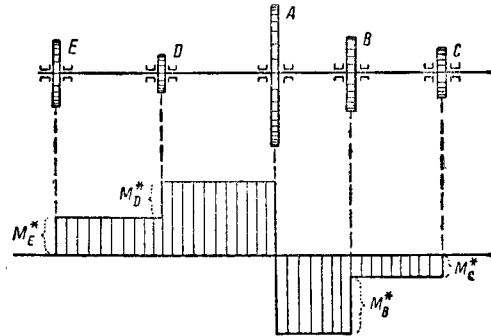
Предполагается, что крутящие моменты действуют в средних плоскостях шкивов. Моменты эти могут быть определены по мощности, передаваемой шкивами, и числу оборотов вала.

Для построения эпюры крутящих моментов (фиг. 48) проводят линию, параллельную оси вала. В точке  $A'$ , соответствующей средней плоскости шкива  $A$ , восстанавливают перпендикуляр к этой линии и на нём в выбранном масштабе откладывают величину крутящего момента  $M_A^*$ . На длине вала  $l_1$  этот момент не изменяется, поэтому проводят линию  $ab$ , параллельную оси. В точке  $B$  крутящий момент  $M_A^*$  уменьшится на величину  $M_B^* = bb_1$  и до точки  $c$  на длине  $l_2$  вновь не будет изменяться, поэтому проводят линию  $b_1c$ , параллельную оси вала. В точке  $c$  происходит уменьшение момента на величину  $M_C^*$ ; оставшаяся часть крутящего момента равна  $M_D^*$ .

Ступенчатая линия показывает изменение моментов по длине вала и представляет эпюру крутящих моментов. На эпюре видно, что крутящий момент  $M_A^*$  действует только на участке  $ab$ , а далее постепенно убывает. Вал, рассчитанный по наибольшему моменту  $M_A^*$ , имеет на остальных участках избыток

прочности. Выгоднее для экономии материала расположить ведущий шкив в средней части вала, чтобы раздача моментов происходила по обе стороны, по возможности поврну.

На (фиг. 49) представлена эпюра крутящих моментов для такого случая.



Фиг. 49

Имея эпюру крутящих моментов, можно определить угол закручивания для каждого участка. Так, например, угол закручивания на участке  $l_1$  (фиг. 48), будет:

$$\varphi_A = \frac{M_A^* l_1}{GI_p};$$

полный угол закручивания на всей длине вала

$$\varphi = \sum_1^n \frac{M_i^* l_i}{GI_p}.$$

## УСЛОВИЕ ПРОЧНОСТИ

При расчёте валов на кручение должно быть выполнено условие прочности, которое заключается в том, что наибольшие касательные напряжения не должны превышать допускаемых напряжений.

Для круглых валов это условие

$$\tau_{\max} = \frac{16 M^*}{\pi d^3} \leq R_s. \quad (66)$$

Отсюда при известном крутящем моменте и выбранном допускаемом напряжении можно определить необходимый диаметр вала

$$d = \sqrt[3]{\frac{16 M^*}{\pi \cdot R_s}},$$

или приближённо

$$d = \sqrt[3]{\frac{5 M^*}{R_s}}.$$

Если крутящий момент  $M^*$  выразить через мощность в лошадиных силах  $N$ , передаваемую на вал, и число оборотов вала в минуту  $n$ , то условие прочности примет вид

$$d = 71,5 \sqrt[3]{\frac{N}{R_s \cdot n}}.$$

Полученная формула показывает, что при данной мощности  $N$  увеличение числа оборотов ведёт к уменьшению диаметра вала.

## УСЛОВИЕ ЖЁСТКОСТИ

Практикой выработаны допускаемые пределы для угла закручивания валов.

В обычных условиях этот предел принимается равным  $1/4^\circ$  на каждый метр длины вала

$$\varphi_l = \frac{180^\circ}{\pi} \cdot \frac{M^* \cdot 100}{G \cdot I_p} \leq \frac{1^\circ}{4}. \quad (67)$$

Практикой выработаны высшие допустимые пределы для угла  $\varphi$ , которых нельзя превышать. Эти пределы таковы: в обычных условиях  $[\varphi] = 0,3^\circ$  на каждый метр длины вала; при переменных нагрузках  $[\varphi] = 0,15^\circ$ . Иногда для обычных условий принимают  $[\varphi] = 1^\circ$  на длину, равную 20 диаметрам вала.

В последнее время в советском машиностроении угол допускаемый угол закручивания  $[\varphi]$  принимается до  $2^\circ$  на 1 пог. м длины вала.

Подставив значения

$$I_p = \frac{\pi d^4}{32}; \quad M^* = 71\,620 \frac{N}{n},$$

$$G = 8 \cdot 10^5 \text{ кг/см}^2,$$

получают формулу

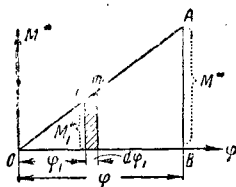
$$d = 12 \sqrt[4]{\frac{N}{n}}.$$

По этой формуле рассчитывают вал в том случае, когда

$$\frac{N}{n} < 1,$$

так как при этом соотношении диаметр вала получается большим, чем вычисленный из условия прочности.

## ЭНЕРГИЯ ДЕФОРМАЦИИ ПРИ КРУЧЕНИИ



Фиг. 50

Для определения потенциальной энергии по оси абсцисс откладывают углы закручивания  $\varphi$ , по оси ординат — соответствующие значения крутящего момента. В пределах упругих деформаций диаграмма представляется наклонной прямой  $OA$  (фиг. 50).

Чтобы перейти от какого-либо промежуточного состояния стержня, определяемого точкой  $m$ , к бесконечно близкому состоянию  $m_1$ , нужно крутящему моменту  $M_1^*$  дать некоторое приращение  $dM_1^*$ , причём угол закручивания  $\varphi_1$  возрастет на некоторую величину  $d\varphi_1$ . Работа внешних сил при этом представится площадкой, заштрихованной на фиг. 50. Полная работа внешних сил при изменении угла закручивания от нуля до  $\varphi$  будет:

$$U = \frac{M^* \varphi}{2}. \quad (68)$$

Пользуясь зависимостью между  $\varphi$  и  $M^*$ , можно потенциальную энергию выразить через  $\varphi$  или через  $M^*$ .

Подставляя формулу (64) в формулу (68), имеют:

$$U = \frac{M^{*2} l}{2 G I_p}. \quad (69)$$

В зависимости от  $\varphi$  потенциальная энергия

$$U = \frac{\varphi^2 G I_p}{2 l}.$$

При расчёте цилиндрических пружин потенциальную энергию удобнее выражать через объём, для чего подставляют в формулу (69)

$$M^* = R_s \cdot W_p.$$

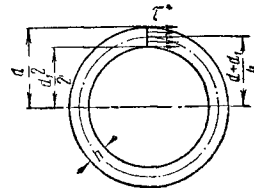
$$U = \frac{R_s^2 W_p^2 l}{2 G I_p} = \frac{R_s^2}{4 G} F \cdot l = \frac{R_s^2}{4 G} V, \quad (70)$$

где  $V$  — объём скручиваемого стержня.

## КРУЧЕНИЕ ПОЛОГО ВАЛА

Из формулы (61) видно, что материал вала у оси мало напряжён, следовательно, выгодно сделать вал полый. На практике полые валы встречаются в больших паровых машинах, в авиационных двигателях и т. д.

При рассмотрении кручения полых валов делают те же допущения, что и в случае сплошных валов.



Фиг. 51

Формула касательных напряжений для полого вала, имеющего внешние и внутренние диаметры  $d$  и  $d_1$  (фиг. 51), будет такой же, как и для сплошного вала, только изменится выражение полярного момента инерции, который для этого сечения равен

$$I_p = \frac{\pi d^4}{32} \left[ 1 - \left( \frac{d_1}{d} \right)^4 \right];$$

$$\tau_{\max} = \frac{16 M^*}{\pi d^3 \left[ 1 - \left( \frac{d_1}{d} \right)^4 \right]} = \frac{M^* \cdot d}{2 I_p}. \quad (71)$$

Угол закручивания равен:

$$\varphi = \frac{32 M^* l}{\pi d^4 \left[ 1 - \left( \frac{d_1}{d} \right)^4 \right] G} = \frac{M^* l}{G I_p}. \quad (72)$$

Из последних формул (71) и (72), приняв  $d_1 = \frac{d}{2}$ , можно видеть, что угол закручивания и наибольшее напряжение для полого вала по сравнению с теми же величинами для сплошного вала диаметром  $d$  увеличивается

примерно на 6%, тогда как вес вала уменьшается на 25%.

Если толщина стенки  $h$  полого вала очень мала сравнительно с диаметром, то касательные напряжения  $\tau$  могут быть приняты распределёнными равномерно по поперечному сечению вала, как это показано на фиг. 51.

Тогда величина крутящего момента определится из следующего уравнения:

$$M^* = F \tau r = \pi \frac{d + d_1}{2} h \tau \frac{d + d_1}{4}, \quad (73)$$

где  $F$  — площадь кольца,

$\frac{d + d_1}{2}$  — диаметр осевой линии кольцевого сечения вала;

$\frac{d + d_1}{4}$  — радиус осевой линии кольцевого сечения вала.

Обозначив через  $F_0$  площадь, заключённую внутри этой осевой линии, получают из уравнения (73) формулу

$$\tau = \frac{M^*}{2 F_0 h}. \quad (74)$$

Угол закручивания на единицу длины в этом случае будет равен:

$$\theta = \frac{M^*}{G I_p} = \frac{2 \tau_{\max}}{d G}$$

или, подставив вместо  $\tau_{\max}$  среднее напряжение  $\tau$  и вместо  $d$  — диаметр осевой линии  $\frac{d + d_1}{2}$ , получают:

$$\theta = \frac{4 \tau}{(d + d_1) G} = \frac{\tau s}{2 F_0 G}, \quad (75)$$

где  $s = \frac{\pi}{2} (d + d_1)$  — длина окружности осевой линии.

не может быть решена на основе тех предположений, которые сделаны для бруса круглого поперечного сечения. Эта задача усложняется благодаря тому, что в данном случае первоначально плоские поперечные сечения искривляются.

Характер распределения касательных напряжений для прямоугольного сечения изображён на фиг. 52.

Решение даёт следующие значения наибольших касательных напряжений, в серединах длинных сторон и относительного угла закручивания для бруса прямоугольного поперечного сечения.

$$\tau_{\max} = \frac{M^*}{\alpha b c^2}, \quad (76)$$

$$\theta = \frac{M^*}{\beta b c^3 G}, \quad (77)$$

где  $\alpha$  и  $\beta$  — коэффициенты, зависящие от соотношения сторон прямоугольника, данные в табл. 5;

$b$  — длинная сторона;

$c$  — короткая сторона.

При расчёте прямоугольных брусев на изгиб совместно с кручением приходится нередко вычислять напряжение  $\tau_1$  в серединах коротких сторон сечения. Оно определяется следующим равенством:

$$\tau_1 = \frac{M^*}{\gamma b c^2}.$$

Значения коэффициентов  $\alpha, \beta, \gamma$  для различных отношений  $\frac{b}{c}$  даны в табл. 5.

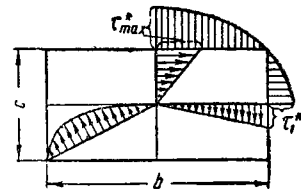
Величина наибольшего напряжения может быть определена с достаточной точностью из следующего приближённого выражения:

$$\tau_{\max} = \frac{M^*}{b c^2} \left( 3 + 1,8 \frac{c}{b} \right). \quad (78)$$

Таблица 5

Значения коэффициентов  $\alpha, \beta$  и  $\gamma$  для прямоугольных брусев

$\frac{b}{c}$	1,0	1,5	1,75	2,0	2,5	3,0	4,0	6,0	8,0	10,0	$\infty$
$\alpha$	0,208	0,231	0,239	0,246	0,258	0,267	0,282	0,299	0,307	0,313	0,333
$\beta$	0,141	0,196	0,214	0,229	0,249	0,263	0,281	0,299	0,307	0,313	0,333
$\gamma$	0,208	0,270	—	0,309	—	0,354	0,379	0,402	—	—	0,448



Фиг. 52

Уравнение (74) может быть применено также для случая тонких трубчатых валов и некруговых сечений, но с постоянной толщиной стенки.

### КРУЧЕНИЕ СТЕРЖНЕЙ НЕКРУГЛОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ

**Прямоугольное сечение.** Задача об определении касательных напряжений при скручивании прямоугольного поперечного сечения

узкое прямоугольное сечение и прокатные профили. Из табл. 5 видно, что при больших отношениях  $\frac{b}{c}$  коэффициенты  $\alpha$  и  $\beta$

близки к  $\frac{1}{3}$ . Поэтому для узких прямоугольных сечений, например, при  $\frac{b}{c} > 10$ , можно в практических расчётах принять

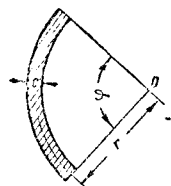
$$\alpha = \beta = \frac{1}{3}$$

и равенства (76) и (77) привести к следующему виду:

$$\tau_{\max} = \frac{3M^*}{bc^2}, \quad (79)$$

$$\theta = \frac{3M^*}{bc^3G}. \quad (80)$$

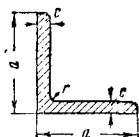
Эти формулы имеют большое практическое значение, потому что ими можно пользоваться не только для узкого прямо угольника, но и вообще для тонкостенных незамкнутых профилей, если вместо  $b$  подставить длину развёрнутой осевой линии сечения.



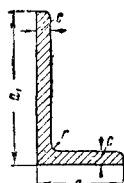
Фиг. 53

Например, для сечения в виде части кольца (фиг. 53) следует подставить  $b = r\varphi$ ; для равнобокого уголка (фиг. 54):  $b = 2a - c$ ; для неравнобокого же уголка (фиг. 55):  $b = a + a_1 - c$ .

Наибольшее напряжение для первого случая (фиг. 53) получится по формуле (79).

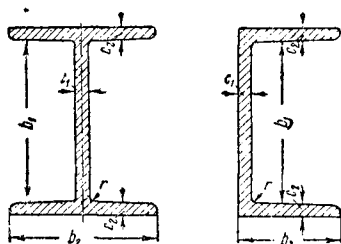


Фиг. 54



Фиг. 55

Для уголковых сечений наибольшее напряжение имеет место во входящем углу. Для получения напряжений во входящем углу следует найденное по формуле (79) напряжение умножить на некоторый коэффициент  $k_\tau$ , больший единицы и зависящий от соотноше-



Фиг. 56

ния толщины полок и радиуса  $r$  внутренней выкружки уголка (см. стр. 110):

$$\tau_{\max}^* = k_\tau \frac{3M^*}{bc^2}. \quad (81)$$

В случае корытного (швеллерного) или двутаврового сечений (фиг. 56), имеющих неодинаковую толщину стенки и полок, можно получить приближённое значение  $\theta$  и  $\tau$ , приняв жёсткость сечения при кручении равной сумме жёсткостей трёх прямоугольников, составляющих сечение.

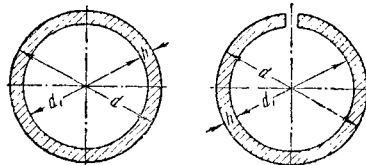
Для этих сечений, показанных на фиг. 56, в формуле (80) вместо  $bc^3$  надо подставить величину, равную

$$b_1c_1^3 + 2b_2c_2^3,$$

тогда

$$\theta = \frac{3M^*}{G(b_1c_1^3 + 2b_2c_2^3)}. \quad (82)$$

Чтобы определить напряжение, которое получается по серединам сторон  $b_2$ , необходимо умножить  $\theta$  по формуле (82) на  $c_2G$ , тогда



Фиг. 57

$$\tau = \frac{3M^*c_2}{b_1c_1^3 + 2b_2c_2^3}. \quad (83)$$

Это следует из сравнения между собой равенств (79) и (80), из которых видно, что напряжение равно относительному углу закручивания, умноженному на модуль упругости и толщину сечения.

Следует отметить, что формула (82) выведена заменой сплошного стержня тремя отдельными стержнями узкого прямоугольного сечения. На самом деле, вследствие жёсткого соединения между этими стержнями, угол скручивания имеет величину несколько меньше, чем получающаяся по формуле (82).

**Пример.** Рассмотрим кручение сплошной и разорванной круглых тонких труб одинаковых геометрических размеров (фиг. 57) под действием одинаковых крутящих моментов и сравним напряжения и углы закручивания.

Для сплошной трубы по формулам (71) и (72)

$$\tau = \frac{M^*}{I_p} \cdot \frac{d}{2} = \frac{16M^*}{\pi d^3 \left[1 - \left(\frac{d_1}{d}\right)^4\right]},$$

$$\theta = \frac{M^*}{GI_p} = \frac{32M^*}{\pi d^4 \left[1 - \left(\frac{d_1}{d}\right)^4\right] G}.$$

Для разорванной трубы по формулам (79) и (80) получают:

$$\tau_1 = \frac{3M^*}{bc^2} = \frac{24M^*}{\pi(d+d_1)(d-d_1)^2},$$

$$\theta_1 = \frac{3M^*}{bc^3G} = \frac{48M^*}{\pi(d+d_1)(d-d_1)^3G},$$

где  $b = \frac{\pi}{2}(d+d_1)$ ;

$$c = \frac{1}{2}(d-d_1).$$

Их соотношения:

$$\frac{\tau}{\tau_1} = \frac{2}{3} \frac{(1+\alpha)(1-\alpha)^2}{1-\alpha^4} = \frac{2}{3} \frac{(1-\alpha)}{(1+\alpha^2)};$$

$$\frac{\theta}{\theta_1} = \frac{2}{3} \frac{(1-\alpha)^2}{(1+\alpha^2)},$$

$$\text{где } \alpha = \frac{d_1}{d}.$$

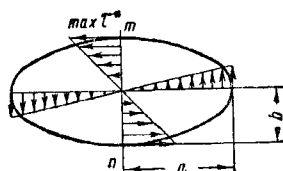
При  $\alpha = \frac{1}{2}$  получают:

$$\frac{\tau}{\tau_1} = \frac{4}{15},$$

$$\frac{\theta}{\theta_1} = \frac{2}{15}.$$

**Поперечное сечение вала-эллипса.** В случае эллиптического поперечного сечения наибольшие касательные напряжения имеют место в точках, лежащих на контуре и соответствующих концам малой оси (фиг. 58).

Для точек, расположенных по главным осям эллипса, касательные напряжения перпендикулярны к этим осям и изменяются по линейному закону.



Фиг. 58

Величина  $\tau_{\max}$  определяется по формуле:

$$\tau_{\max} = \frac{2 M^*}{\pi a b^2}. \quad (84)$$

В случае, если  $a = b$ , получают известное выражение для кругового вала.

Угол закручивания эллиптического вала:

$$\varphi = \frac{4 \pi^2 M^* I_p l}{G F^4}, \quad (85)$$

где  $F$  — площадь эллипса;

$I_p$  — полярный момент инерции поперечного сечения, равный:

$$I_p = \frac{\pi a b (a^2 + b^2)}{4}.$$

**Равиесторонний треугольник.** Наибольшее касательное напряжение имеет место по середине сторон и может быть определено из уравнения

$$\tau_{\max} = \frac{20 M^*}{b^3}. \quad (86)$$

Угол скручивания на единицу длины:

$$\theta = \frac{46,2 M^*}{b^4 \cdot G}. \quad (87)$$

**Правильный шестиугольник.** В этом случае

$$\tau_{\max} = \frac{M^*}{0,217 F \cdot d}, \quad (88)$$

$$\theta = \frac{M^*}{0,133 F \cdot d^2 \cdot G}. \quad (89)$$

**Правильный восьмиугольник.** В этом случае

$$\tau_{\max} = \frac{M^*}{0,223 F \cdot d}, \quad (90)$$

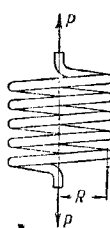
$$\theta = \frac{M^*}{0,130 F \cdot d^2 \cdot G}, \quad (91)$$

где  $d$  — диаметр вписанного круга;

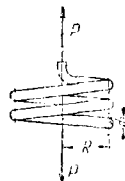
$F$  — площадь поперечного сечения.

## ВИНТОВАЯ ПРУЖИНА

В инженерной практике очень часто применяются винтовые пружины, подвергающиеся действию сил, сжимающих или растягивающих пружину. При проектировании таких пружин необходимо уметь вычислить наибольшее напряжение и определить деформацию пружины, её удлинение или осадку.



Фиг. 59



Фиг. 60

На фиг. 59 представлена винтовая пружина круглого поперечного сечения, подверженная действию осевых сил  $P$ .

Пусть  $R$  — радиус винтовой оси пружины;

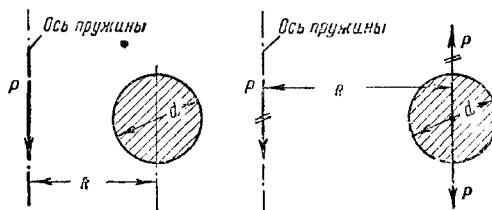
$D$  — диаметр винтовой оси пружины;

$r$  — радиус поперечного сечения стержня пружины;

$d$  — диаметр поперечного сечения стержня пружины;

$n$  — число витков;

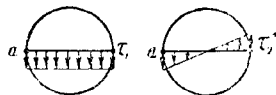
$G$  — модуль упругости второго рода.



Фиг. 61

Для вычисления напряжений пружину рассекать на две части сечением, проходящим через ось пружины; нижнюю часть отбрасывают и рассматривают равновесие верхней части (фиг. 60).

На оставшуюся часть пружины действуют внешняя сила  $P$  и напряжения по сечению



Фиг. 62

стержня пружины (фиг. 61). Для равновесия отсечённой части эти напряжения должны приводиться к силе, действующей по оси пружины сверху вниз. Таким образом, пружина находится под действием срезающего усилия  $P$  и пары  $PR$ , производящей кручение поперечного сечения против часовой стрелки.

Эпюра распределения напряжений от срезающего усилия и крутящей пары показана на фиг. 62.

Напряжения от действия срезающей силы определяются по формуле:

$$\tau_1 = \frac{P}{F} = \frac{P}{\pi r^2}.$$

Напряжения от кручения

$$\tau_2 = \frac{M^*}{W_p} = \frac{2 PR}{\pi r^3}.$$

На внутренней поверхности пружины напряжения  $\tau_1$  и  $\tau_2$  совпадают по направлению, а поэтому в точке  $a$  получится наибольшее напряжение, равное

$$\tau = \tau_1 + \tau_2 = \frac{16 PR}{\pi d^3} \left( 1 + \frac{d}{2D} \right). \quad (92)$$

При малом отношении  $\frac{d}{D}$  вторым членом в скобках пренебрегают, и формула (92) приобретает вид:

$$\tau = \frac{16 PR}{\pi d^3}. \quad (93)$$

Такое упрощение сводится к тому, что расчёт винтовых пружин ведут только от кручения, не принимая во внимание имеющих место срезающих напряжений.

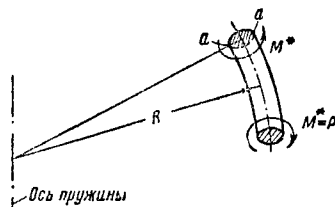
Задаваясь отношением  $\frac{D}{d}$  и обозначая его через  $m$ , получают

$$P = \frac{\pi d^3}{8m} \cdot \tau,$$

откуда

$$d = \sqrt[3]{\frac{8 P m}{\pi \tau}}.$$

Из уравнения (92) видно, что второй член в скобках увеличивается с увеличением отношения  $\frac{d}{D}$ . Влияние его становится значительным в мощных винтовых рессорах — таких, какие, например, применяются в железнодорожном подвижном составе.



Фиг. 63

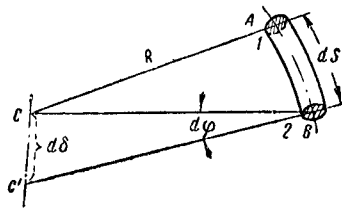
В таких случаях, приняв во внимание совместное действие перерезывающей силы и скручивающей пары, а также факт скручивания стержня с винтовой осью (фиг. 63), заменяют формулу для определения наибольшего касательного напряжения (92) следующим выражением:

$$\tau_{\max} = \frac{16 PR}{\pi d^3} \left( \frac{4m-1}{4m-4} + \frac{0,615}{m} \right), \quad (94)$$

где  $m = \frac{D}{d}$ .

Легко видеть, что поправочный коэффициент в скобках увеличивается с уменьшением  $m$ ; например: при  $m = 4$  этот коэффициент приблизительно равен 1,4, а при  $m = 10$  он равен 1,14.

При определении осадки пружины обычно принимают во внимание только действие скручивания витков. Если вырезать отрезок длиной  $ds$  двумя смежными сечениями 1—1, 2—2 (фиг. 64), причём эти сечения выбираются весьма близко, то можно принять, что до деформации радиусы, идущие от оси пружины к центрам проведённых сечений, лежат в одной плоскости и образуют плоский тре-



Фиг. 64

угольник ABC. После деформации вследствие скручивания участка стержня  $ds$  второе сечение повернётся относительно первого на угол  $d\varphi$ , значение которого будет равно:

$$d\varphi = \frac{M^* ds}{GI_p}.$$

Радиус BC тоже повернётся относительно радиуса AC на угол  $d\varphi$  и точка C переместится в  $C_1$ , что повлечёт опускание конца пружины на величину

$$CC_1 = R d\varphi = d\delta.$$

Если учесть, что все элементы  $ds$  стержня пружины деформируются таким образом, то полное опускание нижнего конца пружины  $\delta$ , т. е. её растяжение (сжатие) выразится суммой величин:

$$\delta = \sum R d\varphi = \frac{M^* R}{GI_p} \sum ds.$$

Величина  $\sum ds$  — полная длина стержня пружины.

Пренебрегая наклоном витков к горизонтали и принимая число их  $n$ , получают полную длину винтового стержня:

$$\sum ds = 2\pi R n.$$

Тогда

$$\delta = \frac{M^* R}{GI_p} 2\pi n R = \frac{4 PR^3 n}{Gr^4}. \quad (95)$$

Из последнего уравнения может быть определено число витков  $n$ :

$$n = \frac{Gr^4}{4 PR^3}, \quad \delta = \frac{d^4 G}{8 D^3 P} \delta. \quad (96)$$

Зависимость между  $\delta$  и  $P$  — прямолинейная.

На основании ранее выведенных уравнений потенциальная энергия деформации пружины равна:

$$U = \frac{1}{2} P \delta = \frac{2 P^2 R^3 n}{Gr^4}. \quad (97)$$



Так как

$$\tau = \frac{2PR}{\pi r^3},$$

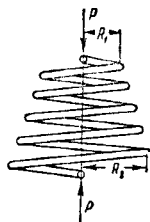
то, подставляя это выражение в формулу (97), получают:

$$U = \frac{2\pi Rn}{4G} \pi r^2 \tau^2.$$

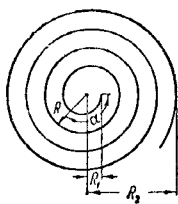
Так как  $2\pi Rn$  — длина стержня, а  $\pi r^2$  — площадь поперечного сечения, то

$$U = \frac{\tau^2}{4G} V,$$

где  $V$  — объём пружины.



Фиг. 65



Фиг. 66

Таким образом, задавшись предельной величиной напряжения  $\tau = R_s$ , можно вычислить объём пружины, необходимый для поглощения заданной величины энергии  $U$ :

$$V = \frac{4G}{R_s^2} \cdot U.$$

**Коническая круглая винтовая пружина.** Пружины, работающие на сжатие, делаются часто в приборостроении по типу, изображенному на фиг. 65, т. е. в форме конических винтовых пружин.

Подобная конструкция пружины обладает большей устойчивостью, чем соответствующая цилиндрическая винтовая пружина, и с выгодой применяется в тех случаях, когда не может быть укрепена при помощи направляющего стержня или наружного цилиндра. Если подобную пружину навивать таким образом, чтобы при сжатии витки пружины входили один в другой, то такая пружина может быть сжата до толщины проволоки, что иногда является крайне существенным.

Уравнение горизонтальной проекции такой пружины (фиг. 66), имеющей  $n$  витков, может быть выражено так:

$$R = R_1 + (R_2 - R_1) \frac{\alpha}{2\pi n}. \quad (98)$$

Крутящий момент, действующий в любом поперечном сечении пружины на расстоянии  $R$  от центральной линии (оси пружины):

$$M^* = PR = P \left[ R_1 + (R_2 - R_1) \frac{\alpha}{2\pi n} \right]. \quad (99)$$

Наибольший скручивающий момент будет при  $\alpha = 2\pi n$  и равен:

$$M_{\max}^* = P \cdot R_2.$$

Касательное напряжение определяется по формулам:

$$\tau = \frac{M^*}{W_p} = \frac{16P}{\pi d^3} \left[ R_1 + (R_2 - R_1) \frac{\alpha}{2\pi n} \right], \quad (100)$$

$$\tau_{\max} = \frac{16PR_2}{\pi d^3} \leq R_s.$$

Считая, что сила  $P$  действует вдоль оси пружины, — на основании тех же рассуждений, которые были сделаны при вычислении цилиндрической винтовой пружины, нетрудно написать, что перемещение элемента конической пружины будет:

$$d\delta = Rd\varphi,$$

отсюда

$$\delta = \int_0^{2\pi n} Rd\varphi. \quad (101)$$

В результате интегрирования получается формула для вычисления полной осадки конической винтовой пружины круглого поперечного сечения

$$\delta = \frac{16Pn}{d^4G} (R_2^2 + R_1^2) (R_2 + R_1). \quad (102)$$

Часто конические пружины начинают навивать с величины  $R_1$ , равной почти толщине проволоки, т. е.  $\frac{d}{2}$ . В таком случае можно

величиной  $R_1$  как малой, по сравнению с  $R_2$ , пренебречь, что позволяет уравнение (102) упростить и написать:

$$\delta = \frac{16P \cdot n}{d^4G} R_2^3.$$

Если принять  $R_2 = \frac{D_2}{2}$  и  $P = \frac{\pi d^3}{16} \cdot \frac{\tau}{R_2}$ , то

$$\delta = \frac{\pi}{4} n \frac{D_2^2 \tau}{dG}. \quad (103)$$

**Пружина некруглого сечения.** Расчёт винтовых пружин некруглого сечения будет отличаться только тем, что напряжение  $\tau$  и угол закручивания  $\varphi$  должны быть выражены по формулам кручения, соответствующим данному профилю.

В практике иногда применяются пружины прямоугольного (квадратного) сечения. В этих случаях рекомендуется рассчитывать напряжение и угол закручивания по формулам (76) и (77)

$$\tau_{\max} = \frac{PR}{\alpha bc^3}; \quad d\varphi = \frac{PRds}{G\beta bc^3},$$

$$\delta = \int_0^s Rd\varphi = \int_0^s \frac{PR^2ds}{G\beta bc^3}.$$

**Цилиндрические винтовые пружины из прутьев прямоугольного сечения ( $b \cdot c$ )** (фиг. 67, а). В этом случае наибольшее касательное напряжение:

$$\tau_{\max} = \frac{PR}{\alpha bc^3}.$$

Осадка пружин будет:

$$\delta = \frac{2\pi nR^3P}{G\beta bc^3}.$$

Пружины квадратного сечения (фиг. 67, б)  $b = c = a$ , последние уравнения примут вид:

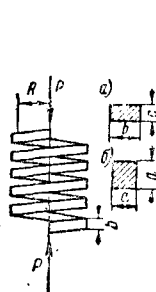
$$\left. \begin{aligned} \tau_{\max} &= 4,8 \frac{PR}{a^3} \\ \delta &= 14,2 \pi \cdot n \frac{R^3 P}{a^4 G} \end{aligned} \right\}.$$

Конические винтовые пружины из прутьев прямоугольного сечения ( $b \cdot c$ ) (фиг. 68).

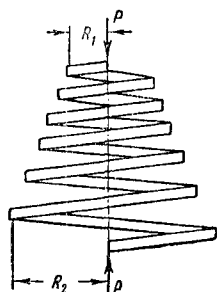
Верхний радиус конической пружины обозначается через  $R_1$ , а нижний через  $R_2$ .

Наибольший крутящий момент будет иметь место для сечения, соответствующего наибольшему радиусу пружины  $R_2$ , а поэтому наибольшее касательное напряжение

$$\tau_{\max} = \frac{PR_2}{\alpha bc^2}.$$



Фиг. 67



Фиг. 68

Осадка

$$\delta = \frac{\pi n P}{2G \beta bc^3} (R_2^2 + R_1^2) (R_2 + R_1).$$

Если верхний радиус пружины  $R_1 = 0$ , а нижний радиус  $R_2 = R$ , то для такой конической пружины осадка

$$\delta = \frac{\pi n R^3 P}{2G \beta bc^3}.$$

**Пример 1.** Для определения мощности паровой машины, делающей  $n=120$  об/мин, измеряют угол закручивания вала. Как велика мощность, если при диаметре вала  $d = 15$  см два сечения его, находящиеся в расстоянии  $l = 8$  м друг от друга, поворачиваются одно относительно другого на угол  $\varphi = 1/15$ . Модуль сдвига  $G = 800\,000$  кг/см<sup>2</sup>.

**Решение.** Пользуясь формулами (64) и (65), определяют мощность:

$$N = \frac{n \varphi G l P}{71\,620 l} = 556 \text{ л. с.}$$

**Пример 2.** Найти соотношение допускаемых крутящих моментов для двух валов — сплошного и полого, если материал, веса и длины одинаковы.

**Решение.** Условие равенства весов даёт выражение

$$d^3 = D^3 - D_0^3.$$

Моменты сопротивления полого и сплошного вала будут:

$$W_p^n = \frac{\pi}{16} D \left( D^4 - D_0^4 \right),$$

$$W_c^n = \frac{\pi d^4}{16}.$$

Выражение крутящих моментов для полого и сплошного вала

$$M_n^* = \frac{\pi}{16 D} \left( D^4 - D_0^4 \right) \cdot R_s$$

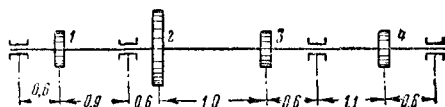
$$M_c^* = \frac{\pi d^4}{16} \cdot R_s.$$

Отношение крутящих моментов будет:

$$\frac{M_R^*}{M_c^*} = 2 \frac{D}{d} - \frac{d}{D}.$$

Обозначая отношение  $\frac{D}{d} = \alpha$ ,

$$\frac{M_n^*}{M_c^*} = 2\alpha - \frac{1}{\alpha}.$$



Фиг. 69

Если, например:

$$\alpha = 1,5, \text{ то } M_n^* = 2,333 M_c^*;$$

$$\alpha = 2,0, \text{ то } M_n^* = 3,500 M_c^*.$$

$$\alpha = 3,0, \text{ то } M_n^* = 5,667 M_c^*.$$

**Пример 3.** Ведущий шкив 2 (фиг. 69) передаёт валу из литой стали

$$N_2 = 20 \text{ л. с.}$$

и раздаёт через шкивы 1 и 4

$$N_1 = N_4 = 5 \text{ л. с.}$$

и через шкив 3

$$N_3 = 10 \text{ л. с.}$$

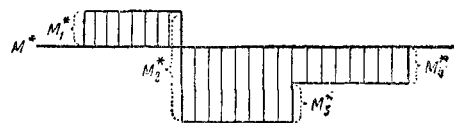
Требуется построить эпюру крутящих моментов, определить наибольшее касательное напряжение и наибольший угол закручивания, если диаметр вала  $d = 6,2$  см, число оборотов в минуту  $n = 150$ ,  $G = 8 \cdot 10^5$  кг/см<sup>2</sup>.

**Решение.** Крутящие моменты определяются по формуле (65):

$$M_1^* = M_4^* = 71\,620 \frac{N}{n} = 2\,387 \text{ кг см};$$

$$M_3^* = 4\,775 \text{ кг см};$$

$$M_2^* = 9\,550 \text{ кг см}.$$



Фиг. 70

После определения крутящих моментов строится эпюра (фиг. 70).

Наибольший скручивающий момент:

$$M_{\max}^* = M_2^* - M_1^* = M_3^* + M_4^* = 7\,162 \text{ кг см}.$$

Наибольшее напряжение:

$$\tau_{\max} = \frac{M_{\max}^*}{W_p} = 153 \text{ кг/см}^2.$$

Наибольший угол закручивания:

$$\varphi = \frac{180}{\pi} \frac{M_{\max}^* \cdot l}{G I_p} = 0,35^\circ > 0,25^\circ.$$

Вал удовлетворяет прочности, но не удовлетворяет условию деформации, поэтому необходимо сделать перерасчёты по жёсткости.

**Пример 4.** Подобрать вал прямоугольного сечения с отношением сторон  $\frac{b_2}{c} = 1,5$  и вал эллипс-

ческого сечения с отношением осей  $\frac{a}{b} = 1,5$  по допускаемому напряжению  $R_S = 500 \text{ кг/см}^2$ . Скручивающий момент  $M = 10^6 \text{ кгсм}$ .

**Решение.** Используя уравнение (76) для прямоугольного поперечного сечения

$$\tau_{\max} = \frac{M^*}{\alpha b c^2} < R_S,$$

откуда

$$b c^2 = \frac{M^*}{R_S \alpha}$$

или, заменяя

$$b = 1,5 c,$$

получают

$$1,5 c^3 = \frac{M^*}{R_S \alpha},$$

откуда

$$c = \sqrt[3]{\frac{M^*}{1,5 \alpha R_S}}.$$

По табл. 5 находят значение  $\alpha = 0,231$ . Подставляя численные данные для  $M^*$  и  $R_S$ , получают:

$$c = 8,33 \text{ см};$$

$$b = 12,5 \text{ см}.$$

Площадь сечения

$$F = b \cdot c = 104,1 \text{ см}^2.$$

Наибольшее значение касательного напряжения для эллиптического сечения определяется по формуле (84):

$$\tau_{\max} = \frac{2 M^*}{\pi a b^2} < R_S$$

или, принимая во внимание отношение  $\frac{a}{b} = 1,5$ ;

$$a = 1,5 b,$$

$$\tau_{\max} = \frac{2 M^*}{1,5 \pi b^2} < R_S,$$

откуда

$$b = \sqrt[3]{\frac{2 M^*}{1,5 \pi R_S}} = 4,4 \text{ см};$$

$$a = 6,6 \text{ см}.$$

Оси эллиптического сечения будут:

$$2b = 8,8 \text{ см},$$

$$2a = 13,2 \text{ см}.$$

Площадь сечения

$$F = \pi a b = 91,2 \text{ см}^2.$$

**Пример 5.** Определить допускаемую силу в стальной конической винтовой пружине при наибольшем возможном её сжатии, когда все витки приведены в одну плоскость. Наибольший и наименьший радиусы витков:

$$R_2 = 15 \text{ см и } R_1 = 5 \text{ см};$$

радиусы сечения:

$$r = 1 \text{ см}.$$

Число витков

$$n = \frac{R_2 - R_1}{2r} = 5; G = 8 \cdot 10^5 \text{ кг/см}^2;$$

высота пружины.

$$h = 5 \text{ см}.$$

**Решение.** Применяем формулу (102):

$$\delta = \frac{P \pi n (R_2^3 + R_1^3) (R_2 + R_1)}{2 I_p G},$$

по условию, что  $\delta = h$ .

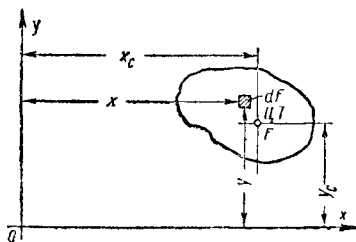
Решая относительно  $P$  и делая числовую подстановку, находят:

$$P = \frac{2h - \frac{\pi r^4}{2} G}{\pi n (R_2^3 + R_1^3) (R_2 + R_1)} = 160 \text{ кг}.$$

## МОМЕНТЫ ИНЕРЦИИ ПЛОСКИХ ФИГУР

### СТАТИЧЕСКИЙ МОМЕНТ

Рассматривая какую-либо плоскую фигуру (сечение), площадь которой обозначена через  $F$ , относят это сечение к системе прямоугольных координатных осей  $Ox$  и  $Oy$  (фиг. 71).



Фиг. 71

Выделяют бесконечно малую площадку  $dF$ . Расстояние этой элементарной площадки от оси  $Ox$  есть  $y$ ; произведение  $dF$  на  $y$  называется статическим моментом элементарной площадки относительно оси  $Ox$ .

Статический момент всей площади относительно оси  $Ox$  выразится так:

$$S_x = \int_F y dF. \quad (104)$$

Значок  $F$  внизу интеграла показывает, что интеграл определённый и интегрирование рас-

пространено по всей площади. Статический же момент относительно оси  $Oy$  равен:

$$S_y = \int_F x dF. \quad (105)$$

Положение центра тяжести какого-либо сечения относительно координатных осей  $Ox$  и  $Oy$  (фиг. 71) определяется из отношения статических моментов всего сечения относительно этих осей к площади сечения:

$$x_c = \frac{S_y}{F}, \quad (106)$$

$$y_c = \frac{S_x}{F}. \quad (107)$$

Если координатные оси проходят через центр тяжести сечения, то

$$x_c = y_c = 0.$$

Подставляя эти значения в уравнения (106) и (107), получают:

$$S_y = \int_F x dF = 0,$$

$$S_x = \int_F y dF = 0.$$

Следовательно, статические моменты площади сечения относительно осей, проходящих через центр тяжести сечения, всегда будут равны нулю.

Если сечение имеет одну ось симметрии, то эта ось всегда проходит через центр тяжести фигуры.

Если сечение имеет две оси симметрии, то центр тяжести этого сечения будет находиться в точке пересечения обеих осей симметрии.

Если заданную фигуру можно разбить на ряд простейших фигур, как то: прямоугольник, треугольник, круг и др., площади которых и координаты центров тяжести известны, то координаты центра тяжести всей фигуры определяются по формулам:

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^n x_i F_i}{\sum_{i=1}^n F_i}, \quad (108)$$

$$y_c = \frac{\sum_{i=1}^n y_i F_i}{\sum_{i=1}^n F_i}. \quad (109)$$

Формулы (108) и (109) аналогичны предыдущим (106) и (107), только знак интегрирования заменён знаком суммирования, причём суммирование должно быть распространено на все  $n$  простых фигур, составляющих заданную сплошную фигуру.

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОМЕНТОВ ИНЕРЦИИ

Осевым экваториальным моментом инерции сечения относительно какой-либо оси, лежащей в плоскости сечения, называется интеграл произведения элементарной площадки на квадрат расстояния от её центра тяжести до этой оси

$$I_x = \int_F y^2 dF, \quad (110)$$

$$I_y = \int_F x^2 dF. \quad (111)$$

Центробежным моментом инерции сечения относительно осей  $x$  и  $y$  называется интеграл произведения элементарной площадки на обе её координаты (фиг. 71):

$$I_{xy} = \int_F xy dF. \quad (112)$$

Полярным моментом инерции сечения относительно выбранной точки (полюса) называется интеграл произведения элементарной площадки на квадрат её радиуса — вектора, проведённого из этой точки:

$$I_p = \int_F \rho^2 dF. \quad (113)$$

## РАДИУСЫ ИНЕРЦИИ

Если среднее значение подинтегральной величины  $y$  обозначить через  $i_x$ , которое называют радиусом инерции фигуры  $F$  относительно оси  $Ox$ , то

$$I_x = i_x^2 \cdot F.$$

Таким образом, радиус инерции сечения  $F$  относительно любой оси определяется по формуле:

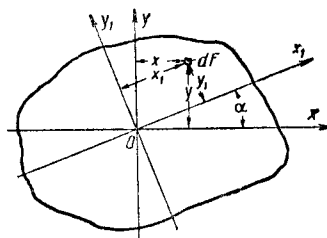
$$i_x = \sqrt{\frac{I_x}{F}}. \quad (114)$$

## Зависимость между моментами инерции экваториальными и полярным

На основании (110) и (111):

$$I_x + I_y = \int_F (x^2 + y^2) dF,$$

но  $x^2 + y^2 = \rho^2$



Фиг. 72

и, следовательно,

$$I_x + I_y = I_p. \quad (115)$$

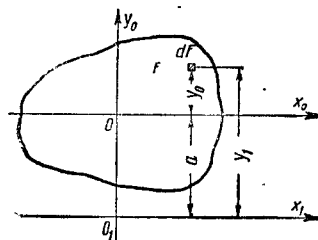
Полученное соотношение будет иметь место и для всякой другой прямоугольной системы координат  $x_1$  и  $y_1$ , повернутой относительно первоначальной системы на некоторый угол  $\alpha$  (фиг. 72):

$$I_{x_1} + I_{y_1} = I_x + I_y = I_p, \quad (116)$$

следовательно, сумма экваториальных моментов инерции относительно любых двух взаимно перпендикулярных осей есть величина постоянная и равная полярному моменту инерции этой же площади относительно точки пересечения этих осей.

## Зависимость между моментами инерции относительно взаимно параллельных осей

Пусть для сечения  $F$  (фиг. 73) произвольного очертания оси  $x_0, y_0$  — центральные оси, относительно которых моменты инерции  $I_{x_0}$  и



Фиг. 73

$I_{y_0}$  известны, и требуется найти момент инерции этой фигуры относительно какой-нибудь другой оси, параллельной одной из центральных, например, относительно оси  $x_1$ , удалённой от неё на расстояние  $a$ .

По самому определению момента инерции:

$$I_{x_1} = \int_F y_1^2 dF,$$

$$\text{но } y_1 = y_0 + a,$$

поэтому

$$I_{x_1} = \int_F y_0^2 dF + 2a \int_F y_0 dF + a^2 \int_F dF.$$

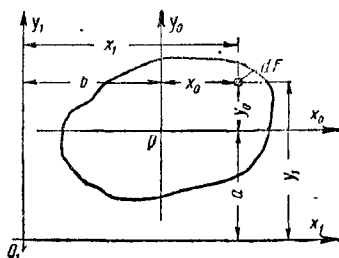
Но

$$\int_F y_0 dF = 0,$$

следовательно,

$$I_{x_1} = I_{x_0} + a^2 F. \quad (117)$$

Момент инерции площади фигуры относительно любой оси равняется моменту инерции этой площади относительно оси, ей параллельной, плюс произведение площади фигуры на квадрат расстояния между осями.



Фиг. 74

Из формулы (117) вытекает:

$$I_{x_0} = I_{x_1} - a^2 F. \quad (118)$$

Зная момент инерции относительно произвольной оси, можно получить момент инерции относительно центральной оси параллельной первой.

Из формул (117) и (118) видно, что из всех осей, параллельных между собой, центральная ось обладает наименьшим моментом инерции.

Аналогично формуле (117) выводится формула перехода и для центробежного момента инерции. Пусть (фиг. 74)  $x_0$  и  $y_0$  — центральные оси, а  $x_1$  и  $y_1$  — оси, параллельные центральным и удалённые от них на расстояния  $a$  и  $b$ .

Можно записать:

$$I_{x_1 y_1} = \int_F x_1 y_1 dF = \int_F (a + y_0) (b + x_0) dF,$$

или

$$I_{x_1 y_1} = I_{x_0 y_0} + abF, \quad (119)$$

так как  $\int_F x_0 dF$  и  $\int_F y_0 dF$  — статические моменты фигуры относительно центральных осей и потому равны нулю.

Центробежный момент инерции относительно произвольных осей равняется центробежному моменту инерции относительно центральных осей, параллельных произвольным, плюс произведение площади фигуры на координаты центра тяжести фигуры относительно произвольных осей.

### Изменение моментов инерции при повороте осей координат

Пусть новая система координат (фиг. 72) повернута относительно первоначальной на некоторый угол  $\alpha$ .

Зависимость между старыми и новыми координатами любой точки имеет вид:

$$x_1 = x \cos \alpha + y \sin \alpha,$$

$$y_1 = y \cos \alpha - x \sin \alpha.$$

Экваториальные и центробежные моменты инерции относительно новых осей определяются следующими формулами:

$$I_{x_1} = \int_F y_1^2 dF = I_x \cos^2 \alpha + I_y \sin^2 \alpha - I_{xy} \sin 2\alpha; \quad (120)$$

$$I_{y_1} = \int_F x_1^2 dF = I_x \sin^2 \alpha + I_y \cos^2 \alpha + I_{xy} \sin 2\alpha; \quad (121)$$

$$I_{x_1 y_1} = \int_F x_1 y_1 dF = \frac{I_x - I_y}{2} \sin 2\alpha + I_{xy} \cos 2\alpha. \quad (122)$$

Из формул (120) и (121) видно, что экваториальные моменты инерции являются функциями угла  $\alpha$  и при некотором значении этого угла достигают экстремальных значений. Те оси, относительно которых экваториальные моменты инерции имеют максимальное и минимальное значения, называются главными осями инерции. Моменты инерции относительно этих осей называются главными моментами инерции.

Для нахождения главных осей инерции нужно взять производную от  $I_{x_1}$  по  $\alpha$  и приравнять её нулю:

$$\frac{dI_{x_1}}{d\alpha} = (I_y - I_x) \sin 2\alpha -$$

$$- 2 I_{xy} \cos 2\alpha = 0, \quad (123)$$

откуда

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 I_{xy}}{I_y - I_x}. \quad (124)$$

Формулой (123) определяется положение главных осей инерции. Из сравнения (122) с (123) видно, что центробежный момент инерции относительно главных осей инерции равен нулю.

Для нахождения величин главных моментов инерции следует, пользуясь формулой (124), выразить через  $\operatorname{tg} 2\alpha$  значения других тригонометрических величин и подставить в формулы (120) и (121). В результате вычислений и некоторых алгебраических преобразований получают:

$$I_{\max} = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4 I_{xy}^2}; \quad (125)$$

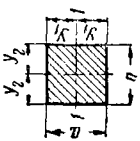
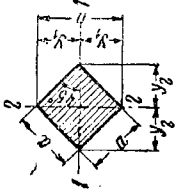
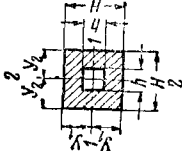
$$I_{\min} = \frac{I_x + I_y}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4 I_{xy}^2}. \quad (126)$$

Если оси  $x$  и  $y$  главные оси и моменты инерции относительно их известны, то мо-

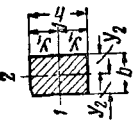
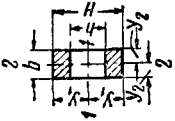
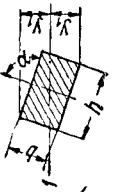


Таблица 6

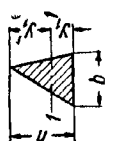
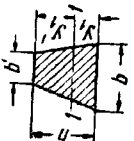

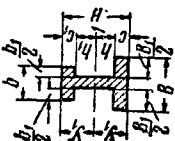
Площади, положение центра тяжести, моменты инерции и радиусы инерции

Форма сечения	Площадь сечения $F$	Расстояния $y_1$ и $y_2$ от центральных осей $I-1$ , $2-2$ до край- них точек сечения	Моменты инерции $I_1$ и $I_2$ и моменты сопротивления $W_1 = \frac{I_1}{y_1}$ и $W_2 = \frac{I_2}{y_2}$ по отношению к осям $I-1$ и $2-2$	Радиусы инерции $i_1 = \sqrt{\frac{I_1}{F}}$ и $i_2 = \sqrt{\frac{I_2}{F}}$
Квадрат 	$F = a^2$	$y_1 = y_2 = \frac{a}{2}$	$I_1 = I_2 = \frac{a^4}{12}$ $W_1 = W_2 = \frac{a^3}{6}$	$i_1 = i_2 = i = 0,289 a$ Эллипс инерции — круг
Любая центральная ось — главная Квадрат поставлен на ребро 	$F = a^2$	$y_1 = y_2 = 0,71 a$	$I_1 = I_2 = \frac{a^4}{12}$ $W_1 = W_2 = 0,018 a^3$ Срезка верхнего и нижнего углов увели- чивает $W_1$ ; при срезке углов на 1/18 диагонали $W_1$ достигает максимума, равного $0,124 a^3$	$i_1 = i_2 = i = 0,289 a$ Эллипс инерции — круг
Квадратное полное сечение 	$F = H^2 - h^2$	$y_1 = y_2 = \frac{H}{2}$	$I_1 = I_2 = \frac{H^4 - h^4}{12}$ $W = \frac{H^4 - h^4}{6H}$	$i_1 = i_2 = i = \sqrt{\frac{H^4 + h^4}{12}}$ Эллипс инерции — круг
Любая центральная ось — главная				

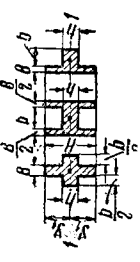
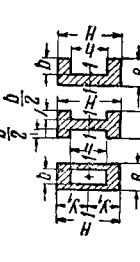
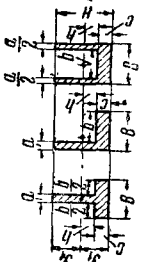
Продолжение табл. 6

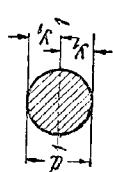
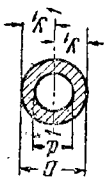
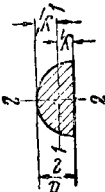
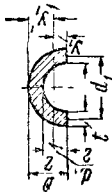
Форма сечения	Площадь сечения $F$	Расстояния $y_1$ и $y_2$ от центральных осей 1-1, 2-2 до крайних точек сечения	Моменты инерции $I_1$ и $I_2$ и моменты сопротивления $W_1 = \frac{I_1}{y_1}$ и $W_2 = \frac{I_2}{y_2}$ по отношению к осям 1-1 и 2-2	Радиусы инерции $i_1 = \sqrt{\frac{I_1}{F}}$ и $i_2 = \sqrt{\frac{I_2}{F}}$
Прямоугольник  Оси 1-1 и 2-2 — главные центральные	$F = bh$	$y_1 = \frac{h}{2}; y_2 = \frac{b}{2}$	$I_1 = \frac{bh^3}{12}; I_2 = \frac{hb^3}{12};$ $W_1 = \frac{bh^2}{6}; W_2 = \frac{hb^2}{6}$	$i_1 = 0,289 h$ $i_2 = 0,289 b$
Сечение из двух равных прямоугольников  Оси 1-1 и 2-2 — главные центральные	$F = b(H - h)$	$y_1 = \frac{H}{2}; y_2 = \frac{b}{2}$	$I_1 = \frac{b}{12}(H^3 - h^3); I_2 = \frac{H-h}{12}b^3$ $W_1 = \frac{b}{6H}(H^3 - h^3); W_2 = \frac{H-h}{6}b^3$	$i_1 = \sqrt{\frac{H^3 + Hh + h^3}{12}}$ $i_2 = 0,289 b$
Повернутый прямоугольник  Ось 1-1 — центральная	$F = bh$	$y_1 = \frac{h \cos \alpha + b \sin \alpha}{2}$	$I_1 = \frac{bh}{12}(h^2 \cos^2 \alpha + b^2 \sin^2 \alpha)$ $W_1 = \frac{bh}{6} \cdot \frac{h^2 \cos^2 \alpha + b^2 \sin^2 \alpha}{h \cos \alpha + b \sin \alpha}$	$i_1 = \sqrt{\frac{h^2 \cos^2 \alpha + b^2 \sin^2 \alpha}{12}}$



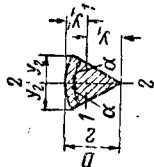
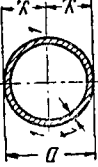
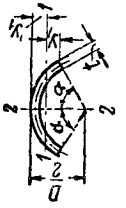
<p>Треугольник</p>  <p>Ось 1-1 — центральная</p>	$F = \frac{1}{2} b h$	$y_1 = \frac{1}{3} h$ $y_1' = \frac{2}{3} h$	$I_1 = \frac{b h^3}{36}$ $W_1 = \frac{b h^2}{12} \text{ (для нижних волокон)}$ $W_1' = \frac{b h^2}{24} \text{ (для верхних волокон)}$	$i = 0,236 h$
<p>Трапеция</p>  <p>Ось 1-1 — центральная</p>	$F = \frac{(b+b')}{2} h$	$y_1 = \frac{b+2b'}{3(b+b')} h$ $y_1' = \frac{2b+b'}{3(b+b')} h$	$I_1 = \frac{h^3(b^3+4bb'+b'^3)}{36(b+b')}$ $W_1 = \frac{I_1}{y_1} \text{ (для нижних волокон)}$ $W_1' = \frac{I_1}{y_1'} \text{ (для верхних волокон)}$	$i = \frac{h}{6(b+b')} \sqrt{2(b^3+4bb'+b'^3)}$
<p>Правильный многоугольник с n сторонами</p> 	$F = \frac{1}{4} n a^2 \operatorname{ctg} \alpha$	$y_1 = \frac{a}{2 \sin \alpha}$ $y_2 = \frac{a}{2 \operatorname{tg} \alpha}$	$I_1 = \frac{F(6y_1^2 - a^2)}{24}$ $I_2 = \frac{F(12y_2^2 + a^2)}{48}$	$i_1 = \sqrt{\frac{6y_1^2 - a^2}{24}}$ $i_2 = \sqrt{\frac{12y_2^2 + a^2}{48}}$
<p>Несимметричный двутавр, составленный из прямоугольников</p> $a = b - b_1$  <p>Ось 1-1 — главная центральная</p>	$F = b c_1 + a(h + h_1) + B c$	$y_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{a h^2 + B c_1^2 + b_1 c_1 (2H - c_1)}{a h + B c + b_1 c_1}$ $y_1' = H - y_1$	$I_1 = \frac{1}{3} (B y_1^3 - B_1 h^3 + b y_1^3 - b_1 h_1^3)$ $W_1 = \frac{I_1}{y_1} \text{ (для нижних волокон)}$ $W_1' = \frac{I_1}{y_1'} \text{ (для верхних волокон)}$	$i_1 = \sqrt{\frac{I_1}{F}}$

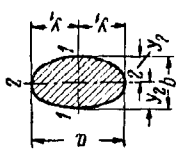
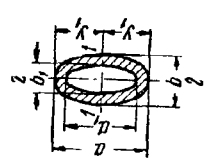
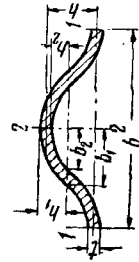
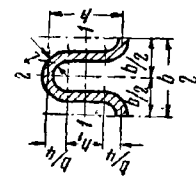
Продолжение табл. 6

Форма сечения	Площадь сечения $F$	Расстояния $y_1$ и $y_2$ от центральных осей 1-1, 2-2 до крайних точек сечения	Моменты инерции $I_1$ и $I_2$ и моменты сопротивления $W_1 = \frac{I_1}{y_1}$ и $W_2 = \frac{I_2}{y_2}$ по отношению к осям 1-1 и 2-2	Радиусы инерции $i_1 = \sqrt{\frac{I_1}{F}}$ и $i_2 = \sqrt{\frac{I_2}{F}}$
<p>Симметричное сечение, составленное из прямоугольников</p>  <p>Ось 1-1 — главная центральная</p>	$F = BH$	$y_1 = \frac{H}{2}$	$I_1 = \frac{BH^3 + bh^3}{12}$ $W_1 = \frac{BH^3 + bh^3}{6H}$	$i_1 = \sqrt{\frac{BH^3 + bh^3}{12(BH + bh)}}$
<p>Симметричное сечение, составленное из прямоугольников</p>  <p>Ось 1-1 — главная центральная</p>	$F = BH + bh$	$y_1 = \frac{H}{2}$	$I_1 = \frac{BH^3 + bh^3}{12}$ $W_1 = \frac{BH^3 + bh^3}{6H}$	$i_1 = \sqrt{\frac{BH^3 + bh^3}{12(BH + bh)}}$
<p>Несимметричное сечение, составленное из прямоугольников</p>  <p>Ось 1-1 — центральная</p>	$F = aH + bc$	$y_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{aH^2 + bc^2}{aH + bc}$ $y_2 = H - y_1$	$I_1 = \frac{1}{3} (By_1^3 - bh^3 + ay_1^3)$ $W_1 = \frac{I_1}{y_1} \quad (\text{для нижних волокон})$ $W_2 = \frac{I_1}{y_2} \quad (\text{для верхних волокон})$ $W_2^* < W_1$	$i_1 = \sqrt{\frac{I_1}{F}}$

<p>Сплошной круг</p>  <p>Любая центральная ось — главная</p>	$F = \frac{\pi d^2}{4}$	$y_1 = \frac{d}{2}$	$I_1 = \frac{\pi d^4}{64} \approx 0,05d^4$ $W_1 = \frac{\pi d^3}{32} \approx 0,1d^3$	$I_1 = I_2 = \frac{d^4}{4}$ <p>Эллипс инерции — круг</p>
<p>Полное круглое сечение</p> $a = \frac{d}{D}$  <p>Любая центральная ось — главная</p>	$F = \frac{\pi}{4} (D^2 - d^2)$	$y_1 = \frac{D}{2}$	$I_1 = \frac{\pi D^4}{64} (1 - a^4) \approx 0,05D^4 (1 - a^4)$ $W_1 = \frac{\pi D^3}{32} (1 - a^4) \approx 0,1D^3 (1 - a^4)$	$I = \sqrt{\frac{1}{16} (D^4 + d^4)}$ <p>Эллипс инерции — круг</p>
<p>Полукруг</p>  <p>Оси 1-1 и 2-2 — главные центральные</p>	$F = \frac{\pi d^2}{8}$	$y_1 = 0,2122d$ $y_1' = 0,2873d$	$I_1 = 0,00686d^4$ $I_2 = \frac{\pi d^4}{128} \approx 0,025d^4$	$I_1 = 0,132d$ $I_2 = \frac{d}{4}$
<p>Половина круглого полого сечения</p>  <p>Ось 1-1 — главная центральная</p>	$F = \frac{\pi}{8} (D^2 - d^2)$	$y_1 = \frac{2}{3\pi} \cdot \frac{D^2 + Dd + d^2}{D + d}$ $y_1' = \frac{D}{2} - y_1$	$I_1 = 0,00686(D^4 - d^4) - \frac{0,0177D^2d^2(D - d)}{D + d}$ <p>Если отношение <math>\frac{S}{d_1}</math> — очень мало:</p> $I_1 \approx 0,038d_1^4$	$I_1 = \sqrt{\frac{I_1}{F}}$

Продолжение табл. 6

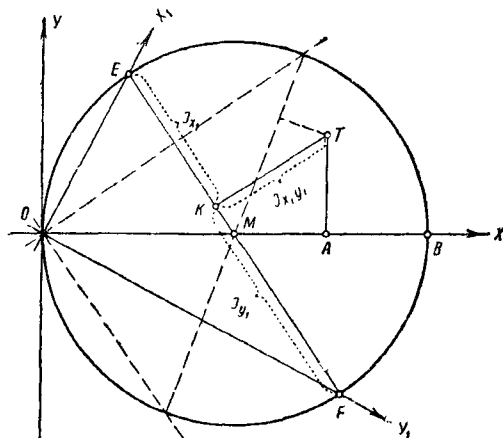
Форма сечения	Площадь сечения $F$	Расстояния $y_1$ и $y_2$ от центральных осей 1-1, 2-2 до крайних точек сечения	Моменты инерции $I_1$ и $I_2$ и моменты сопротивления $W_1 = \frac{I_1}{y_1}$ и $W_2 = \frac{I_2}{y_2}$ по отношению к осям 1-1 и 2-2	Радиусы инерции $i_1 = \sqrt{\frac{I_1}{F}}$ и $i_2 = \sqrt{\frac{I_2}{F}}$
<p>Круговой сектор</p>  <p>Оси 1-1 и 2-2—главные центральные</p>	$F = \alpha \frac{D^2}{4}$	$y_1' = \frac{D}{2} \left( 1 - \frac{2 \sin \alpha}{3\alpha} \right);$ $y_1 = D \frac{\sin \alpha}{3\alpha};$ $y_2 = -\frac{D}{2} \sin \alpha$	$I_1 = \frac{D^4}{64} \left( \alpha + \sin \alpha \cos \alpha - \frac{16 \sin^2 \alpha}{9\alpha} \right)$ $I_2 = \frac{D^4}{64} (\alpha - \sin \alpha \cdot \cos \alpha)$ $W_1 = \frac{I_1}{y_1}$ (для нижних волокон) $W_1' = \frac{I_1}{y_1'}$ (для верхних волокон) $W_2 = \frac{2I_2}{D \sin \alpha}$	$i_1 = \frac{D}{4} \sqrt{1 + \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{\alpha} - \frac{16 \sin^2 \alpha}{9\alpha^2}};$ $i_2 = \frac{D}{4} \sqrt{1 - \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{\alpha}}$
<p>Тонкое кольцо</p>  <p>Любая центральная ось—главная</p>	$F = \pi D t$	$y_1 = \frac{D}{2}$	$I_1 = \frac{\pi D^3}{8} t$ $W_1 = \frac{\pi D^3}{4} t$	$i = 0,353 D$
<p>Сектор тонкого кольца</p>  <p>Оси 1-1 и 2-2—главные центральные</p>	$F = \alpha D t$	$y_1 = \frac{D}{2} \left( \frac{\sin \alpha}{\alpha} - \cos \alpha \right)$ $y_1' = \frac{D}{2} \left( 1 - \frac{\sin \alpha}{\alpha} \right)$	$I_1 = \frac{D^3 t}{8} \left( \alpha + \sin \alpha \cos \alpha - \frac{2 \sin^2 \alpha}{\alpha} \right)$ $I_2 = \frac{D^3 t}{8} (\alpha - \sin \alpha \cos \alpha)$ $W_1 = \frac{I_1}{y_1}$ (для нижних волокон) $W_1' = \frac{I_1}{y_1'}$ (для верхних волокон) $W_2 = \frac{2I_2}{D \sin \alpha}$	$i_1 = \frac{D}{2} \sqrt{\alpha + \sin \alpha \cos \alpha - \frac{2 \sin^2 \alpha}{\alpha}}$ $i_2 = \frac{D}{2} \sqrt{\alpha - \sin \alpha \cos \alpha}$

<p>Сплошной эллипс</p>  <p>Оси 1-1 и 2-2 — главные центральные</p>	$F = \frac{\pi}{4} ab$	$y_1 = \frac{a}{2}$ $y_2 = \frac{b}{2}$	$I_1 = \frac{\pi a^3 b}{64}; \quad I_2 = \frac{\pi a b^3}{64}$ $W_1 = \frac{\pi a^2 b}{32}; \quad W_2 = \frac{\pi a b^2}{32}$	$I_1 = \frac{a}{4}$ $I_2 = \frac{b}{4}$
<p>Полый эллипс</p>  <p>Оси 1-1 и 2-2 — главные центральные</p>	$F \approx \frac{\pi}{4} (a_1 b_1 - a_2 b_2)$	$y_1 = \frac{a}{2}$	$I_1 = \frac{\pi}{64} (a_1^3 b_1 - a_2^3 b_2)$ $I_2 = \frac{\pi}{64} (b_1^3 a_1 - b_2^3 a_2)$ $W_1 = \frac{\pi}{32 a_1} (a_1^3 b_1 - a_2^3 b_2)$ $W_2 = \frac{\pi}{32 b_1} (a_1^3 b_1 - a_2^3 b_2)$	$I_1 = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{a_1^3 b_1 - a_2^3 b_2}{a_1 b_1 - a_2 b_2}}$
<p>Сечение волнистого железа</p> <p>Волна составлена из параболических дуг, <math>F, I, W</math> — на 1 м ширины</p> 	$F \approx -\frac{1}{3} l (2b + 5,2h)$	$y_1 = \frac{h+l}{2}$	$I_1 = \frac{64}{105} (b_1 h_1^3 - b_2 h_2^3)$ <p>где</p> $b_2 = \frac{1}{4} (b + 2,6l); \quad b_1 = \frac{1}{4} (b - 2,6l);$ $h_2 = \frac{1}{2} (h + l); \quad h_1 = \frac{1}{2} (h - l);$ $W_1 = \frac{2I}{h + l_1}$	$I_1 = \sqrt{\frac{3I_1}{l(2b + 5,2h)}}$
<p>Сечение балочного волнистого железа. Волна имеет форму дуги круга.</p> <p><math>F, I, W</math> — на 1 м ширины</p> 	$F = 2 \left( \frac{\pi b}{4} + h_1 \right) l_1$ <p>где</p> $h_1 = h - \frac{1}{2} b$	$y_1 = \frac{h+l}{2}$	$I_1 = \frac{\pi b h^3}{16} + b h_1^3 + \frac{\pi b h_1}{2} + \frac{2}{3} h_1^3$ <p>где</p> $h_1 = h - \frac{1}{2} b;$ $W_1 = \frac{2I_1}{h + l}$	$I_1 = \sqrt{\frac{I_1}{F}}$

Продолжение табл. 6

Форма сечения	Площадь сечения $F$	Расстояния $y_1$ и $y_2$ от центральных осей $I_1-I_1$ , $2-2$ до крайних точек сечения	Моменты инерции $I_1$ и $I_2$ и моменты сопротивления $W_1 = \frac{I_1}{y_1}$ и $W_2 = \frac{I_2}{y_2}$ по отношению к осям $I_1-I_1$ и $2-2$	Радиусы инерции $i_1 = \sqrt{\frac{I_1}{F}}$ и $i_2 = \sqrt{\frac{I_2}{F}}$
Сечение железнодорожных рельсов с обычным соотношением между размерами сечения. Высота рельса $h$ (см) (формулы приближенные)	$F \approx 0,238h^2$	$y_1 \approx 0,5h$	$I_1 \approx 0,032h^4$ $W_1 \approx 0,064h^3$	$i_1 \approx 0,37h$
Сечение прокатных балок стандартных размеров. Высота сечения $h$ (см) (формулы приближенные)			Двутавр на ребро $W_1 \approx \frac{(h+2)^3}{51} (\text{см}^3)$ Швеллер на ребро $W_1 \approx \frac{(h+5)^3}{31} (\text{см}^3)$	
Сечение любой формы. Формулы могут быть использованы только для ориентировочной оценки величины момента инерции и момента сопротивления относительно центральной оси	<p>Для сплошного сечения <math>I_1 \approx \frac{F^2 h}{2b}</math></p> <p>Для сплошного симметричного сечения <math>W_1 \approx \frac{F^2}{6b}</math></p> <p>Для полого сечения <math>I_1 \approx \frac{Eh}{6b} \left[ s + \frac{F(b-h)}{bh} \right] t</math></p> <p>Для полого симметричного сечения <math>W_1 \approx \frac{F}{3b} \left[ s + \frac{F(b-h)}{bh} \right] t</math></p> <p><math>F</math> — площадь внутри наружного контура сечения; <math>h</math> и <math>b</math> — высота и ширина сечения; <math>s</math> и <math>t</math> — длина периметра и толщина (для полого сечения)</p>			<p>С ошибкой приблизительно до 15%</p> <p>С ошибкой приблизительно до 25%</p>

диаметром круга; из главной точки инерции  $T$  опускают на  $EF$  перпендикуляр, который точкой  $K$  отсекает два отрезка  $KE$  и  $KF$ , являющиеся моментами инерции относительно взятых осей ( $KE$  — относительно оси  $OX_1$ ,



Фиг. 77

$KF$  — относительно оси  $OY_1$ ). Длина перпендикуляра  $TK$  представляет величину центробежного момента инерции.

### ПРИБЛИЖЁННЫЕ МЕТОДЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ МОМЕНТОВ ИНЕРЦИИ

Моменты инерции для фигур простого очертания могут быть найдены аналитическим путём.

В случае сложных геометрических фигур, которые могут быть разбиты на простейшие части, как то: прямоугольники, треугольники, части круга и т. д., находят момент инерции как сумму моментов инерции частей, пользуясь приведёнными выше формулами, связывающими моменты инерции для различных осей.

Если нельзя разложить фигуру только на простые части, то разбивку площади производят приближённо и применяют один из известных в математике способов приближённого вычисления определённых интегралов.

Чтобы определить, например, момент инерции площади (фиг. 78) относительно оси  $x$  по способу трапеций, разбивают фигуру на чётное число полос одинаковой ширины  $\Delta y$  параллельно оси  $x$  и измеряют длины  $b$  получающихся при этом параллельных линий и соответствующие им ординаты  $y_i$ .

Момент инерции  $I_x$  по правилу трапеции можно найти по формуле:

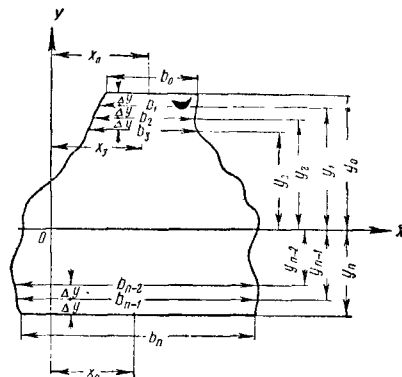
$$I_x = \Delta y \left( \frac{1}{2} b_0 y_0^2 + b_1 y_1^2 + b_2 y_2^2 + \dots + b_{n-1} y_{n-1}^2 + \frac{1}{2} b_n y_n^2 \right).$$

При этом  $b_0 y_0$  и  $b_n y_n$  соответствуют наиболее удалённым от оси  $x$  краям фигуры, а  $b_0$  и  $b_n$  длины сторон фигуры, параллельные

оси  $x$ . В случае криволинейного очертания фигуры  $b_0$  и  $b_n$  равны нулю.

Момент инерции относительно оси  $y$  или относительно любой иной оси определяется аналогично, причём, очевидно, фигура должна разбиваться на полосы, параллельные той оси, относительно которой определяется момент инерции. Вычисление статических моментов площадей будет отличаться только тем, что соответствующая координата будет входить в формулу не в квадрате, а в первой степени.

Для нахождения центробежного момента инерции можно одинаково пользоваться как разбивкой на полосы, параллельно оси  $x$ , так и на полосы, параллельные оси  $y$ . При



Фиг. 78

разбивке на полосы, параллельные оси  $x$ , для центробежного момента инерции по способу трапеций получают следующее выражение:

$$I_{xy} = \Delta y \left( \frac{1}{2} b_0 x_0 y_0 + b_1 x_1 y_1 + \dots + b_{n-1} x_{n-1} y_{n-1} + \frac{1}{2} b_n x_n y_n \right).$$

Более точно вычисления моментов инерции можно производить по формулам:

$$I_x = \frac{\Delta y}{3} (b_0 y_0^2 + 4 b_1 y_1^2 + 2 b_2 y_2^2 + 4 b_3 y_3^2 + \dots + 2 b_{n-2} y_{n-2}^2 + 4 b_{n-1} y_{n-1}^2 + b_n y_n^2);$$

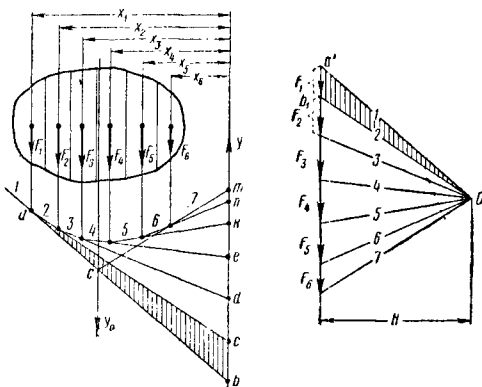
$$I_{xy} = \frac{\Delta y}{3} (b_0 x_0 y_0 + 4 b_1 x_1 y_1 + 2 b_2 x_2 y_2 + \dots + 2 b_{n-2} x_{n-2} y_{n-2} + 4 b_{n-1} x_{n-1} y_{n-1} + b_n x_n y_n).$$

### ГРАФИЧЕСКИЙ МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ СТАТИЧЕСКОГО МОМЕНТА ПЛОЩАДИ, ЕЁ ЦЕНТРА ТЯЖЕСТИ И МОМЕНТОВ ИНЕРЦИИ

Для сложных фигур часто пользуются графическим способом определения момента инерции при помощи верёвочного многоугольника, а также механическим способом при помощи интегратора.

Пусть дана площадь (фиг. 79) и требуется найти её статический момент относительно оси  $y$ .

Разбивают площадь на части  $F_1 \dots F_6$  и в центре тяжести каждой прикладывают вектор, изображающий её в некотором масштабе. Далее в произвольном масштабе строят векторный (силовой) многоугольник и по нему верёвочный, причём полюс  $O$  берётся произвольно.



Фиг. 79

Из подобия заштрихованных треугольников можно написать:

$$\frac{\overline{bc}}{a^1b^1} = \frac{x_1}{H}$$

( $H$  — называется полюсное расстояние), откуда

$$\overline{bc} \cdot H = x_1 \overline{a^1b^1},$$

но

$$\overline{a^1b^1} = F_1,$$

поэтому

$$\overline{bc} \cdot H = x_1 F_1.$$

Рассуждая подобным же образом, находят

$$F_1 x_1 = \overline{bc} \cdot H$$

$$F_2 x_2 = \overline{cd} \cdot H$$

$$\dots$$

$$\dots$$

$$F_6 x_6 = \overline{nm} \cdot H.$$

Складывая отдельно правые и левые части этих равенств получают:

$$F_1 x_1 + F_2 x_2 + \dots + F_6 x_6 = (\overline{bc} + \dots + \overline{nm}) H = \overline{bm} \cdot H.$$

Левая часть равенства представляет не что иное, как сумму произведений элементарных площадей на их расстояния до оси, т. е. статический момент.

$$S_y = \sum F \cdot x_i = H \overline{bm}.$$

Следовательно, для нахождения его достаточно помножить длину отрезка  $\overline{bm}$ , отсеянного продолжениями сторон верёвочного многоугольника на оси  $y$ , взятую в масштабе расстояний, на полюсное расстояние, взятое в масштабе площади.

Пусть фигура вычерчена в масштабе  $\frac{1}{10}$  (например: 1 мм чертежа равен 1 см; в масштабе площадей 1 мм<sup>2</sup> соответствует 1 см<sup>2</sup> = 100 мм<sup>2</sup>).

Если отрезок  $\overline{bm}$  при измерении оказался равным 25 мм, а  $H = 40$  мм, то искомый статический момент

$$S_y = 25 \cdot 10 \cdot 40 \cdot 100 = 10^6 \text{ мм}^3 = 10^3 \text{ см}^3.$$

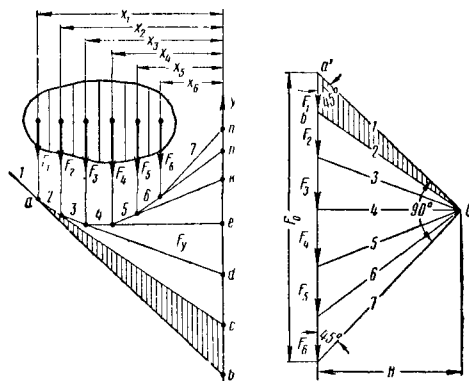
Точку приложения равнодействующей векторов, обозначенную через  $c$ , как известно, находят продолжая крайние стороны верёвочного многоугольника до взаимного пересечения. Проводя через эту точку прямую, параллельную векторам, получают направление, на котором лежит центр тяжести фигуры. Проведя то же построение для другого направления векторов, например, повернув фигуру на 90°, находят другую прямую, на которой лежит центр тяжести. Точка пересечения прямых, очевидно, будет центром тяжести фигуры.

Если момент инерции площади (фиг. 80) найти относительно оси  $y$ , то площадь разбивается на отдельные части  $F_1 F_2 \dots F_6$ , и искомый момент инерции приближённо выразится так:

$$I_y = F_1 x_1^2 + F_2 x_2^2 + \dots + F_6 x_6^2 = \sum_1^n F_i x_i^2.$$

Чем больше будет частей, на которые разбита фигура, тем ближе будет написанное выражение к истинному значению

$$I_y = \int_F x^2 dF.$$



Фиг. 80

Указанное составление и суммирование произведений вида  $F x^2$  весьма удобно делается графически (фиг. 80).

Разбив фигуру на части прямыми, параллельными оси, относительно которой хотят найти момент инерции, прикладывают в центре тяжести каждой части (элемента), площади, вектор, изображающий в масштабе эту площадь. Затем для этих векторов строят силовой и верёвочный многоугольники. Крайние лучи (первый и седьмой) проводят под



углом  $45^\circ$  до пересечения. Точка пересечения будет полюсом.

Из подобия треугольников имеют:

$$\begin{aligned} F_1 x_1 &= \overline{bc} \cdot H \\ &\dots \dots \dots \\ F_6 x_6 &= \overline{nm} \cdot H. \end{aligned}$$

После умножения обеих частей равенства на  $x_1, \dots, x_6$  имеют:

$$\begin{aligned} F_1 x_1^2 &= \overline{bc} \cdot x_1 \cdot H \\ &\dots \dots \dots \\ F_6 x_6^2 &= \overline{nm} \cdot x_6 \cdot H. \end{aligned}$$

Суммированием почленно получают:

$$I_y = F_1 x_1^2 + \dots + F_6 x_6^2 = H (\overline{bc} x_1 + \dots + \overline{nm} x_6),$$

но

$$\overline{bc} \cdot x_1 = 2 \text{ площ. } \Delta abc,$$

а сумма  $\overline{bc} x_1 + \dots + \overline{nm} x_6$  равняется удвоенной площади фигуры  $abmt$ , ограниченной верёвочным многоугольником, продолжениями крайних его сторон и осью  $y$ . Обозначая площадь этой фигуры через  $F_y$ , находят:

$$I_y = \Sigma F \cdot x_i^2 = 2H \cdot F_y.$$

Но из многоугольника сил нетрудно убедиться в том, что

$$2H = \Sigma F_i = F_0,$$

где через  $F_0$  обозначена площадь заданной фигуры.

Таким образом, окончательно

$$I_y = F_0 \cdot F_y.$$

Момент инерции заданной фигуры относительно оси  $y$  равен произведению площади фигуры на площадь, заключённую между верёвочным многоугольником, продолжениями крайних его сторон и осью  $y$ .

Аналогичным образом можно найти момент инерции заданной фигуры и относительно любой другой оси.

Пусть фигура вычерчена в масштабе  $1/10$ . Векторы отложены в масштабе  $1 \text{ мм}^2 = 10 \text{ мм}$ . После измерения оказалось, что

$$F_y = 80 \text{ мм}^2 \text{ и } H = 20 \text{ мм}.$$

$1 \text{ мм}^2$  площади чертежа фигуры равен в действительности  $100 \text{ мм}^2$ , следовательно, в силовом многоугольнике каждый миллиметр изображает  $100 \text{ мм}$ , и значит

$$H = 20 \cdot 100.$$

Так как  $1 \text{ мм}^2$  чертежа в действительности равен  $100 \text{ мм}^2$ , то

$$F_y = 80 \cdot 100 \text{ мм}^2.$$

Таким образом, окончательно

$$I_y = 2H F_y = 2 \cdot 20 \cdot 100 \cdot 80 \cdot 100 = 32 \cdot 10^6 \text{ мм}^4 = 3200 \text{ см}^4.$$

## ИЗГИБ, ВНЕШНИЕ СИЛЫ И НАПРЯЖЕНИЯ

### ПОНЯТИЯ О БАЛКАХ

Прямой брус, подверженный действию уравновешенных пар сил или сил, лежащих в плоскости, проходящей через ось бруса, и пересекающих последнюю под прямым углом, испытывает изгиб.

Брусья, подверженные действию изгиба, называются балками. Плоскость, проходящая через ось и одну из главных осей инерции поперечного сечения балки, называется главной плоскостью балки.

В зависимости от действия внешней нагрузки на балку различаются следующие случаи изгиба.

1. Если внешние силы действуют в одной из главных плоскостей балки, то имеет место случай плоского изгиба, который характерен тем, что изогнутая ось балки лежит в плоскости действия внешних сил.

2. В случае, когда внешние силы не располагаются в одной из главных плоскостей балки, изогнутая ось не лежит в плоскости действия внешних сил. Это так называемый случай косоугольного изгиба.

3. Если на балку действуют две равные и противоположные пары, приложенные по концам, то балка испытывает чистый изгиб. В соответствии с положением плоскости действия изгибающих пар чистый изгиб может быть плоским или косым.

В поперечных сечениях балки, подверженной чистому изгибу, возникают только нормальные напряжения.

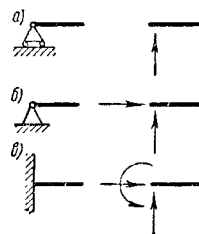
4. При действии на балку любой системы уравновешенных поперечных сил, в поперечных сечениях балки возникают не только нормальные напряжения, но и касательные напряжения. Такой случай называется поперечным изгибом, который, в зависимости от положения плоскости действия внешних сил, может быть плоским или косым.

Внешняя нагрузка на балке уравновешивается опорными реакциями, возникающими на опорах балки. Род опорной реакции зависит от устройства опоры.

Опоры балок обычно бывают трёх типов.

1. **Подвижная шарнирная опора** (фиг. 81 а) позволяет опорному сечению балки свободно поворачиваться вокруг шарнира, расположенного в центре тяжести этого сечения, а также допускает поступательное движение опорного сечения в каком-либо направлении; обычно это направление параллельно оси балки.

Таким образом, эта опора препятствует перемещению конца балки только в одном направлении, обычно в направлении, перпендикулярном к оси балки.



Фиг. 81

Реакция такой опоры проходит через центр шарнира и направлена перпендикулярно плоскости скольжения опоры; поэтому для определения опорной реакции в подвижной шарнирной опоре достаточно установить только её величину, так как направление и точка приложения её известны.

Следовательно, действие неподвижной шарнирной опоры эквивалентно одной реактивной силе.

2. **Неподвижная шарнирная опора** (фиг. 81, б) допускает свободное вращение опорного сечения вокруг шарнира, но препятствует перемещению как вдоль оси, так и поперёк.

При определении опорных реакций в такой опоре известной является только точка приложения реактивной силы, совпадающая с центром шарнира, но неизвестны ни величина реакции, ни её направление. Обычно эта реакция заменяется двумя её составляющими, одной направленной по оси балки, и другой, направленной перпендикулярно оси.

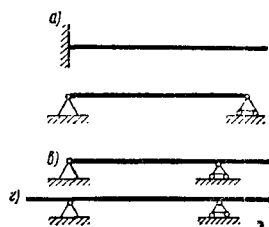
Таким образом действие неподвижной шарнирной опоры эквивалентно действию двух реактивных сил.

3. **Неподвижная заземляющая опора** (фиг. 81, в) не допускает никаких перемещений опорного сечения.

Действие такой опоры эквивалентно действию реактивного момента, препятствующему вращению опорного сечения балки, и действию двух реактивных сил, не допускающих поступательного движения.

При определении опорных реакций заделка конца балки даёт три неизвестные величины.

Балка может быть закреплена различными комбинациями описанных опор. Реактивные силы лежат в плоскости действия внешних



Фиг. 82

сил и уравновешивают их. Так как условия равновесия для системы сил, лежащих в плоскости, дают только три уравнения, то неизвестные опорные реакции балки могут быть определены из уравнений статики только в случае, если число реакций не превосходит трёх. Такие балки называются статически определимыми.

Типы статически определимых однопролётных балок показаны на фиг. 82.

Фиг. 82, а изображает консоль. Один конец этой балки заделан, в то время как второй конец совершенно свободен.

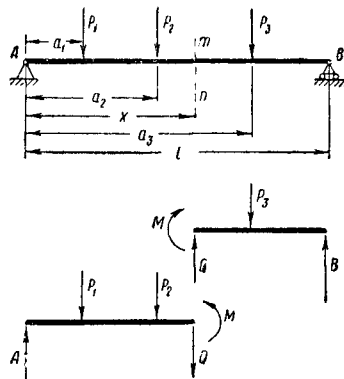
Фиг. 82, б изображает простую балку, свободно лежащую на двух опорах. Одна из опор подвижная шарнирная, а другая неподвижная шарнирная.

Фиг. 82, в изображает консольную балку с выступающими за опору одним или двумя концами.

Балки, в которых комбинация опор такова, что число неизвестных реактивных сил больше трёх, называются статически неопределимыми. В этих случаях к числу уравнений статики добавляются уравнения, вытекающие из условий деформации.

## ИЗГИБАЮЩИЕ МОМЕНТЫ И ПЕРЕРЕЗЫВАЮЩИЕ СИЛЫ В БАЛКАХ

Рассматривается балка, изгибаемая произвольной поперечной нагрузкой, действующей в одной из главных плоскостей (фиг. 83). Для определения внутренних усилий, балку рассекают поперечным сечением  $mn$  на расстоянии  $x$  от левой опоры, отбрасывают ле-



Фиг. 83

вую часть и рассматривают равновесие оставшейся правой части. Действие левой, отброшенной части на правую заменяют усилиями, приложенными к сечению  $mn$ . Эти усилия должны быть статически эквиваленты системе сил, действующих на левую часть балки. Они приводятся к поперечной силе

$$Q = A - P_1 - P_2$$

и к паре сил с моментом

$$M = Ax - P_1(x - a_1) - P_2(x - a_2).$$

Если теперь отбросить правую часть балки и рассмотреть равновесие левой части, то усилия в рассматриваемом сечении привелись бы к той же силе  $Q$  и паре  $M$ , но противоположного направления.

Сила  $Q$ , равная алгебраической сумме проекций всех сил на ось, перпендикулярную к оси балки, действующих по одну сторону сечения  $mn$ , называется **перерезывающей силой** в данном сечении.

Момент  $M$ , равный алгебраической сумме моментов всех сил, действующих по одну сторону сечения  $mn$ , относительно центра тяжести этого сечения, называется **изгиба-**

ющим моментом в данном сечении.

Поперечная сила считается положительной, если равнодействующая проекций всех сил, лежащих слева от рассматриваемого сечения, направлена вверх (фиг. 84).

Изгибающий момент считается положительным, если алгебраическая сумма моментов всех сил, действующих слева от сечения, относительно центра тяжести этого сечения, имеет направление по часовой стрелке (фиг. 85).



Фиг. 84

При определении перерезывающих сил и изгибающих моментов по нагрузкам, действующим справа от рассматриваемого сечения, за положительные направления перерезывающей силы и изгибающего момента принимаются соответственно направления вниз и против часовой стрелки.

Согласно изложенному правилу знаков положительным изгибающим моментам соответствует изгиб балки выпуклостью вниз, а отрицательным изгибающим моментам — выпуклостью вверх.

Для наглядного изображения изменения внутренних усилий в сечениях балки по её длине обычно строят графики, у которых ось совпадает с осью балки, а ординатами являются, отложенные в определённом масштабе величины перерезывающих сил или изгибающих моментов в сечениях, соответ-



Фиг. 85

ствующих данным абсциссам. Эти графики носят название эпюр перерезывающих сил или изгибающих моментов соответственно.

При построении эпюр перерезывающих сил положительные ординаты откладываются выше оси, а отрицательные — ниже оси.

Ординаты эпюры изгибающих моментов обычно откладываются в сторону растянутого волокна балки. Иногда при построении эпюр изгибающих моментов положительные ординаты откладывают в сторону сжатого волокна.

### ТЕОРЕМА Д. И. ЖУРАВСКОГО

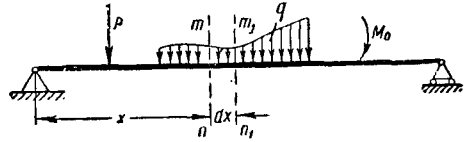
Эта теорема рассматривает зависимость между изгибающим моментом, перерезывающей силой и нагрузкой. Выделив из произвольной балки с любой нагрузкой двумя поперечными сечениями элемент длиной  $dx$  (фиг. 86), заменяют действие отброшенных частей усилиями, приложенными к сечениям (фиг. 87).

Условия равновесия рассматриваемого элемента балки дадут:

$$\frac{dQ}{dx} = -q, \quad (130)$$

$$\frac{dM}{dx} = Q. \quad (131)$$

Зависимость (130) показывает, что первая производная по  $x$  от перерезывающей силы в сечении с абсциссой  $x$  равна интенсивности сплошной нагрузки в том же сечении.

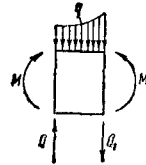


Фиг. 86

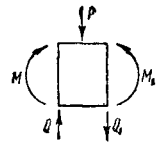
Из зависимости (131) видно, что первая производная по  $x$  от изгибающего момента в сечении с абсциссой  $x$  равна перерезывающей силе в рассматриваемом сечении.

Вышеуказанные зависимости называются теоремой Д. И. Журавского.

Знак минус в правой части зависимости (130) получен потому, что положительное направление сплошной нагрузки принято сверху вниз.



Фиг. 87



Фиг. 88

Если между смежными поперечными сечениями действует сосредоточенный груз  $P$  (фиг. 88), то из условий равновесия

$$Q_1 = Q - P.$$

Следовательно, при переходе через точку приложения сосредоточенной силы имеет место резкое изменение перерезывающей силы на величину  $P$ .

Из уравнения (131) можно заключить, что в точке приложения сосредоточенной силы должно быть резкое изменение величины производной:

$$\frac{dM}{dx}.$$

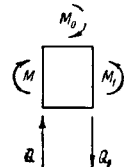
Если между смежными поперечными сечениями действует сосредоточенный момент  $M_0$  (фиг. 89), то условия равновесия дают

$$Q_1 = Q$$

и

$$M_1 = M - M_0.$$





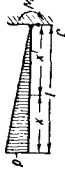
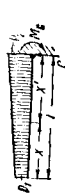
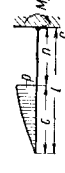
Следовательно, при переходе через точку приложения сосредоточенного момента имеет место резкое изменение величины изгибающего момента на величину  $M_0$ .



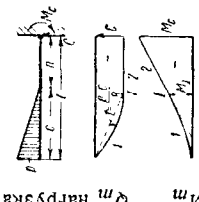
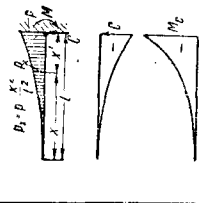
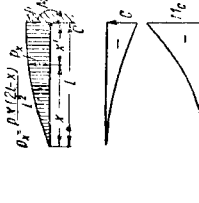
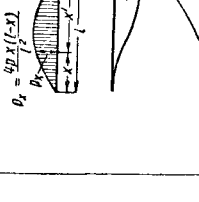
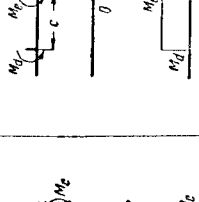
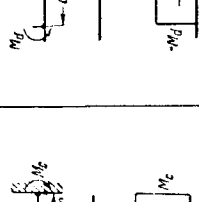
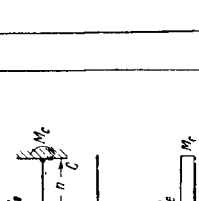
Фиг. 89

Таблица 7

Эпюры поперечных сил и изгибающих моментов для консолей

 <p><math>Q, M</math> нагрузка</p>						
$C = \sum_{k=1}^n P_k$ $M_c = + \sum_{k=1}^n P_k \cdot c_k$	$C = p \cdot l$ $M_c = \frac{p \cdot l^2}{2}$	$C = p \cdot c$ $M_c = \frac{p \cdot c}{2} \cdot (l + n)$	$C = \frac{p \cdot l}{2}$ $M_c = \frac{p \cdot l^2}{6}$	$C = \frac{p \cdot i}{2}$ $M_c = \frac{p \cdot l^2}{3}$	$C = (p_1 + p_2) \cdot \frac{l}{2}$ $M_c = (2p_1 + p_2) \cdot \frac{l^2}{6}$	$C = \frac{p \cdot c}{2}$ $M_c = \frac{p \cdot c^2}{6} + \frac{p \cdot c \cdot n}{2}$
$Q_m = - \sum_{k=1}^{m-1} P_k = Q_{m-1} - P_{m-1}$	$Q = -p \cdot x$	$Q_1 = -p \cdot x$ $Q_2 = -p \cdot c$	$Q = -\frac{p}{2l} \cdot x^2$	$Q = -p \cdot x + \frac{p}{2l} \cdot x^2$	$Q = -p_1 \cdot x - \frac{p_2 - p_1}{2l} \cdot x^2$	$Q_1 = -\frac{p}{2c} \cdot x^2$ $Q_2 = -\frac{p \cdot c}{2}$
$M_m = - \sum_{k=1}^{m-1} P_k \cdot (c_k - x'_m) = M_{m-1} + Q_m \cdot \lambda_m$	$M = -\frac{p \cdot x^2}{2}$	$M_1 = -\frac{p \cdot x^2}{2}$ $M_l = -\frac{p \cdot c^2}{2}$ $M = + \frac{p \cdot c^2}{2} - p \cdot c \cdot x$	$M = -\frac{p}{6l} \cdot x^3$	$M = -\frac{p \cdot x^3}{2} + \frac{p}{6l} \cdot x^3$	$M = -\frac{p_1 \cdot x^2}{2} - \frac{p_2 - p_1}{6l} \cdot x^3$	$M_1 = -\frac{p}{6c} \cdot x^2$ $M_l = -\frac{p}{6} \cdot c^2$ $M_2 = + \frac{p \cdot c^2}{3} - \frac{p \cdot c \cdot x}{2}$
$x_0 = l$	$x_0 = l$	$x_0 = l$	$x_0 = l$	$x_0 = l$	$x_0 = l$	$x_0 = l$
$M_{\max} = -M_c$	$M_{\max} = -\frac{p \cdot l^2}{2}$	$M_{\max} = -\frac{p \cdot c}{2} (l + n)$	$M_{\max} = -\frac{p \cdot l^2}{6}$	$M_{\max} = -\frac{p \cdot l^2}{3}$	$M_{\max} = -\frac{p_1}{6} \cdot \frac{l^3}{(2p_1 + p_2)}$	$M_{\max} = -\frac{p \cdot c^2}{6} - \frac{p \cdot c}{2} \cdot n$

Продолжение табл. 7

 <p><math>Q_m</math> напыжка</p>						
$C = \frac{p \cdot c}{2}$ $M_c = \frac{p \cdot c^3}{3} + \frac{p \cdot c}{2} \cdot n$	$C = \frac{p \cdot l}{3}$ $M_c = \frac{p \cdot l^3}{12}$	$C = \frac{2}{3} p \cdot l$ $M_c = \frac{p \cdot l^3}{4}$	$C = \frac{2}{3} p \cdot l$ $M_c = \frac{p \cdot l^3}{3}$	$C = 0$ $M_c = M_d + M_e$	$C = 0$ $M_c = M_d - M_e$	
$Q_1 = -p \cdot x + \frac{p}{2} \cdot x^2$ $Q_2 = -\frac{p \cdot c}{2}$	$Q = -\frac{p}{3l^2} \cdot x^3$	$Q = -\frac{p \cdot x^3}{l} + \frac{p}{3} \cdot \frac{x^3}{l^3} \cdot x^2$	$Q = -\frac{2p}{l} \cdot x^2 + \frac{4}{3} \cdot \frac{p}{l^3} \cdot x^3$	$Q = 0$	$Q = 0$	
$M_1 = -\frac{p \cdot x^3}{2} + \frac{p}{6c} \cdot x^3$ $M_I = -\frac{p \cdot c^3}{3}$ $M_2 = +\frac{p \cdot c^3}{6} - \frac{p \cdot c}{2} \cdot x$	$M = -\frac{p}{12l^2} \cdot x^4$	$M = -\frac{p}{3l} \cdot x^3 + \frac{p}{12l^3} \cdot x^4$	$M = -\frac{2p}{3l} \cdot x^3 + \frac{1}{3} \cdot \frac{p}{l^3} \cdot x^4$	$M_1 = -M_d$ $M_2 = -(M_d + M_e)$	$M_1 = -M_d$ $M_2 = -(M_d - M_e)$	
$x_0 = l$	$x_0 = l$	$x_0 = l$	$x_0 = l$	$-$	$-$	
$M_{\max} = -\frac{p \cdot c^3}{3} - \frac{p \cdot c}{2} \cdot n$	$M_{\max} = -\frac{p \cdot l^3}{12}$	$M_{\max} = -\frac{p \cdot l^3}{4}$	$M_{\max} = -\frac{p \cdot l^3}{3}$	$M_{\max} = -(M_d + M_e)$	$M_{\max} = M_d - M_e$	$2 M_d > M_e M_{\max} = -M_d$ $2 M_d < M_e M_{\max} = M_d - M_e$



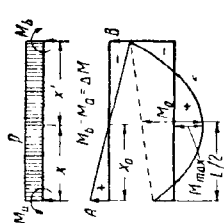
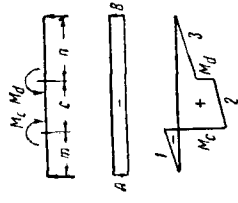
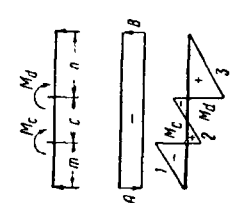
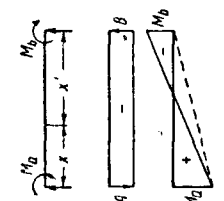
Продолжение табл. 8

$Q = \frac{p \cdot l}{6} \cdot \left( 1 - \frac{3 x^2}{l^2} \right) =$ $= \frac{p \cdot l}{6} - \frac{p}{2} \cdot x + \frac{p \cdot l}{2} \cdot \omega R$	$Q = A - \frac{p_1 + p_2}{2} \cdot x -$ $- \frac{(p_1 - p_2) \cdot l}{2} \cdot \omega R$	$M = \frac{l^2}{2} \cdot p_1 \cdot \omega R -$ $- (p_1 - p_2) \cdot \frac{l^2}{6} \cdot \omega D$	$M_I = \frac{p \cdot c^2}{3 l} \cdot n$ $M_1 = M_I \cdot \frac{x}{c} + \frac{p \cdot c^2}{6} \cdot \omega D$ $M_2 = M_I \cdot \frac{x'}{n}$	$Q_1 = A - \frac{p}{2} \cdot x + \frac{p \cdot c}{2} \cdot x$ $\times \omega R = A - \frac{p \cdot x^2}{2 c}$ $Q_2 = - \frac{p \cdot c^3}{3 l}$	$Q_1 = + \frac{p \cdot c^2}{6 l}$ $Q_2 = A - p \cdot \frac{(x - m)^2}{2 c}$	$M_I = \frac{p \cdot c^3}{6 l} \cdot m$ $M_1 = M_I \cdot \frac{x}{m}$ $M_2 = M_I \cdot \frac{x'}{c} + \frac{p \cdot c^3}{6} \cdot \omega D$	$Q_1 = p \cdot \frac{c_2 - c_1}{3}$ $Q_1 = A - \frac{p \cdot x^3}{2 c_1}$ $Q_2 = - B + \frac{p \cdot x^2}{2 c_2}$	$M_I = p \cdot \frac{c_1 \cdot c_2}{3}$ $M_1 = \frac{p \cdot c_2}{3} \cdot x + p \cdot \frac{c_1^2}{6} \cdot \omega D$ $M_2 = \frac{p \cdot c_1}{3} \cdot x' + \frac{p \cdot c_2^2}{6} \cdot \omega D$	$c_1 > c_2 \quad x_0 = \sqrt{\frac{c_1 \cdot (l - c_2)}{3}}$ $c_1 < c_2 \quad x'_0 = \sqrt{\frac{c_1 \cdot (l - c_1)}{3}}$
$x_0 = \frac{l}{\sqrt{3}} = 0,5774 l$	$R = \sqrt{\frac{p_1^2 + p_1 p_2 + p_2^2}{3 p_1^2}} ;$ $\mu = \frac{p_2}{p_1}$	$x_0 = \frac{1 - R}{1 - \mu} \cdot l$	$M_{\max} = \frac{p_1 \cdot l^3}{6}$ $\frac{2 R^2 - \mu \cdot (1 + \mu)}{(1 - \mu)^2}$	$x_0 = c \cdot \sqrt{1 - \frac{2}{3} \cdot \frac{c}{l}}$	$M_{\max} = \frac{p \cdot x_0^3}{3 c}$	$x_0 = m + c \cdot \sqrt{\frac{c}{3 l}}$	$M_{\max} = \frac{p \cdot c^3}{6 l}$ $\rightarrow \left( m + \frac{2}{3} c \cdot \sqrt{\frac{c}{3 l}} \right) =$ $= A \cdot \left( x_0 - \frac{c}{3} \sqrt{\frac{c}{3 l}} \right)$	$M_{\max} = \frac{2}{3} A \cdot x_0$ $M'_{\max} = \frac{2}{3} B \cdot x'_0$	





Продолжение табл. 8

			
$A = -\frac{M_a - M_b}{l}$ $B = +\frac{M_a + M_b}{l}$	$A = -\frac{M_c - M_d}{l}$ $B = +\frac{M_c + M_d}{l}$	$A = -\frac{M_c + M_d}{l}$ $B = +\frac{M_c + M_d}{l}$	$A = -\frac{M_a - M_b}{l}$ $B = +\frac{M_a + M_b}{l}$
$Q = -\frac{M_a + M_b}{l}$	$Q = -\frac{M_c - M_d}{l}$	$Q = -\frac{M_c + M_d}{l}$	$Q = -\frac{M_a + M_b}{l}$
$M = \frac{M_a \cdot x' - M_b \cdot x}{l}$	$M_1 = -(M_c - M_d) \cdot \frac{x}{l}$ $M_2 = +M_c \cdot \frac{x'}{l} + M_d \cdot \frac{x}{l}$ $M_3 = + (M_c - M_d) \cdot \frac{x'}{l}$	$M_1 = -(M_c + M_d) \cdot \frac{x}{l}$ $M_2 = +M_c \cdot \frac{x'}{l} - M_d \cdot \frac{x}{l}$ $M_3 = + (M_c + M_d) \cdot \frac{x'}{l}$	$M = \frac{p l^2}{2} \omega R - \Delta M \frac{x}{l} - M_a$ $M_0 = \frac{p l^2}{8}$
$M_a > M_b \quad x_0 = 0$ $M_a < M_b \quad x_0 = l$	$x_0 = m$ для $M_c > M_d$	$x_0 = m \text{ или } x_0' = n$	$x_0 = \frac{l}{2} - \frac{\Delta M}{p l}$ $M = 0 \text{ для } x = x_0 \pm \sqrt{x_0^2 - \frac{2 M_a}{p}}$
$M_{\max} = +M_a$ $M'_{\max} = -M_b$	$M_{\max} = -(M_c - M_d) \cdot \frac{m}{l}$ или $M_{\max} = M_c - (M_c - M_d) \cdot \frac{m}{l}$	$M_{\max} = \text{абсол. наибольш. знач.}$ $M_1, M_2, M_3$	$M_{\max} = \frac{p x_0^2}{2} - M_a$ $= \frac{p l^2}{2} - \frac{M_a + M_b}{2} + \frac{\Delta M^2}{2 p l^2}$

На основании предыдущего следует:

1. Изгибающий момент достигает максимума или минимума в тех сечениях, где перерезывающая сила равна нулю.

2. В пределах данного участка балки порядок эпюры  $M$  всегда на одну степень выше порядка эпюры  $Q$ , а порядок эпюры  $Q$  — на одну степень выше порядка грузовой линии.

3. Под точкой приложения сосредоточенной силы в эпюре перерезывающих сил должен быть скачок на величину этой силы, а в эпюре изгибающих моментов должен быть перелом.

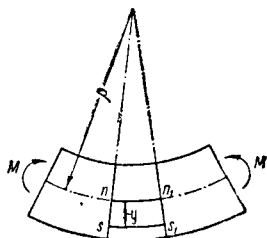
4. В местах, где приложены сосредоточенные моменты эпюра перерезывающих сил не меняется, а в эпюре изгибающих моментов должен быть скачок на величину этого момента.

Эпюры перерезывающих сил и изгибающих моментов для различных случаев загрузки балок приведены в табл. 7 и 8.

## НАПРЯЖЕНИЯ

### Нормальные напряжения

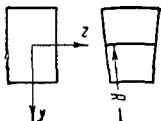
Если на боковых гранях балки, подверженной чистому изгибу (фиг. 90), до деформации нанести систему продольных и попе-



Фиг. 90

речных линий, то после деформации продольные линии изгибаются, поперечные остаются прямыми и поворачиваются так, что остаются перпендикулярными к продольным волокнам балки.

Опыт показывает, что и поперечные сечения балок изменяют свой вид (фиг. 91). Так, например, в случае балки прямоугольного сечения вертикальные стороны прямоугольника становятся наклонными, а все горизонтальные линии сечения искривляются таким образом, что остаются нормальными к боковым сторонам.



Фиг. 91

Измерением на поверхности балки можно установить, что на выпуклой стороне происходят удлинения продольных волокон, а на вогнутой укорочение.

Это служит основанием для предположения, что поперечные сечения балки, первоначально плоские и параллельные при изгибе, остаются плоскими, но наклоняются

друг к другу и что продольные волокна на выпуклой стороне испытывают простое растяжение, а на вогнутой стороне — простое сжатие.

Промежуточный слой, где волокна не изменяют своей длины, при изгибе называется **нейтральным слоем**.

Линию пересечения этого слоя с плоскостью поперечного сечения называют **нейтральной осью** или **нейтральной линией**.

Из геометрических построений на фиг. 90 видно, что относительное удлинение какого-либо волокна  $ss_1$  на расстоянии  $y$  от нейтральной слоя  $n-n$  равно:

$$\epsilon = \frac{y}{\rho}, \quad (132)$$

где  $\rho$  — радиус кривизны нейтрального слоя.

Продольные волокна балки при изгибе испытывают простое растяжение или сжатие, следовательно, напряжение

$$\sigma = E \frac{y}{\rho}. \quad (133)$$

Это значит, что нормальные напряжения изменяются по высоте поперечного сечения линейно, достигая максимальных значений в волокнах, наиболее удалённых от нейтральной оси.

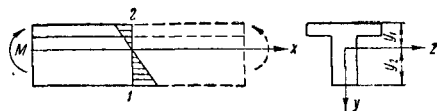
В полученном выражении неизвестны положение нейтральной оси и кривизна изогнутой оси балки  $\frac{1}{\rho}$ .

Для определения неизвестных используются условия равновесия (фиг. 92):

$$\int_F \frac{Ey}{\rho} dF = 0, \quad (134)$$

$$\int_F \frac{Ey^2}{\rho} dF = M. \quad (135)$$

Уравнение (134) показывает, что нейтральная ось проходит через центр тяжести сечения.



Фиг. 92

Уравнение (135) даёт

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI}, \quad (136)$$

где  $I = \int_F y^2 dF$  есть экваториальный момент инерции поперечного сечения относительно нейтральной оси.

После подстановки (136) в (133) напряжение будет равно:

$$\sigma = \frac{My}{I}. \quad (137)$$

Наибольшего значения нормальные напряжения достигают в волокнах, наиболее удалённых от нейтральной оси.

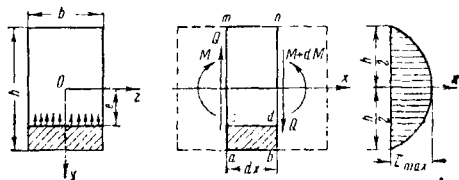
$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{M}{W_1} \\ \sigma_2 &= \frac{M}{W_2} \end{aligned} \right\} \quad (138)$$

Здесь  $W_1 = \frac{I}{y_1}$  и  $W_2 = \frac{I}{y_2}$  называются моментами сопротивления поперечного сечения балки.

Моменты инерции и моменты сопротивления поперечных сечений различной формы приведены в табл. 6.

### Касательные напряжения

**Прямоугольное поперечное сечение.** Приближённая формула для определения касательных напряжений может быть получена, если предположить, что касательные напряжения в каждой точке поперечного сечения параллельны перерезывающей силе  $Q$  и имеют постоянную величину для всех точек, одинаково удалённых от нейтральной оси (фиг. 93).



Фиг. 93

Величина касательных напряжений определяется из условий равновесия элемента балки  $a b c d$ , выделенного двумя поперечными сечениями  $m-a$  и  $n-b$  и сечением  $c-d$ , параллельным нейтральному слою (фиг. 93).

При рассмотрении условий равновесия этого элемента действие отброшенных частей заменяется напряжениями, приложенными по его граням. По граням, совпадающим с поперечными сечениями, будут действовать нормально и касательные напряжения. По грани  $cd$ , продольного сечения, в силу закона взаимности будут действовать касательные напряжения  $\tau$ , равные по величине касательным напряжениям в точках поперечного сечения, удалённых от нейтральной оси на расстояние  $e$ . Нормальные напряжения по этой грани отсутствуют.

Сумма проекций на ось  $x$  всех сил, действующих на рассматриваемый элемент, даст уравнение

$$\begin{aligned} & - \int_e^{\frac{h}{2}} \frac{M \cdot y}{I} dF - \tau b dx + \\ & + \int_e^{\frac{h}{2}} \frac{(M + dM)}{I} dF = 0, \end{aligned}$$

откуда, учитывая, что  $\frac{dM}{dx} = Q$  и обозначая

$$\int_e^{\frac{h}{2}} y dF \text{ через } S,$$

$$\tau = \frac{Q \cdot S}{I \cdot b}, \quad (139)$$

где  $\tau$  — касательное напряжение в точке поперечного сечения на расстоянии  $e$  от нейтральной оси;

$Q$  — перерезывающая сила в рассматриваемом поперечном сечении;

$S$  — статический момент заштрихованной части поперечного сечения ниже рассматриваемой точки относительно нейтральной оси;

$I$  — экваториальный момент инерции всего поперечного сечения относительно нейтральной оси;

$b$  — ширина балки.

Если подставить в (139) значения

$$S = \frac{b}{2} \left( \frac{h^2}{4} - e^2 \right)$$

и

$$I = \frac{bh^3}{12},$$

то формула для напряжений примет следующий вид:

$$\tau = \frac{6Q}{bh^3} \left( \frac{h^2}{4} - e^2 \right). \quad (140)$$

Касательные напряжения по плоскости поперечного сечения, как это видно из выражения (140), изменяются по параболическому закону. Наибольшего значения они достигают по нейтральному слою, где  $e=0$ :

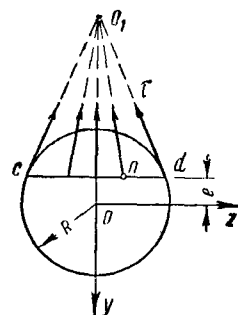
$$\tau_{\max} = \frac{3}{2} \frac{Q}{bh}. \quad (141)$$

**Круглое поперечное сечение.** При определении касательных напряжений в балках круглого поперечного сечения предполагают, что в любой точке  $n$  поперечного сечения полное касательное напряжение направлено к точке  $O_1$  пересечения касательных к концам хорды  $cd$ , проведённой через рассматриваемую точку, параллельно нейтральной оси (фиг. 94).

В качестве второго допущения предполагается, что вертикальные составляющие полного касательного напряжения одинаковы для всех точек линии  $cd$ , одинаково удалённых от нейтральной оси.

Величина вертикальной составляющей напряжения может быть определена по формуле (139), в которой нужно положить (фиг. 94):

$$\begin{aligned} b &= 2 \sqrt{R^2 - e^2}, \\ S &= \frac{2}{3} (R^3 - e^3), \end{aligned}$$



Фиг. 94

откуда

$$\tau_1 = \frac{Q(R^2 - e^2)}{3I}.$$

Полное напряжение в точках  $c$  и  $d$ :

$$\tau = \tau_1 \frac{R}{\sqrt{R^2 - e^2}} = \frac{QR \sqrt{R^2 - e^2}}{3I}. \quad (142)$$

Наибольшего значения напряжения достигают в точках нейтральной оси, при  $e=0$ .

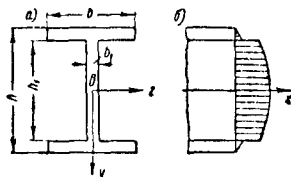
Так как

$$I = \frac{\pi R^4}{4},$$

то

$$\tau_{\max} = \frac{4}{3} \frac{Q}{\pi R^2} = \frac{4}{3} \frac{Q}{F}. \quad (143)$$

**Двутавровое поперечное сечение.** Касательные напряжения в балках двутаврового сечения определяются по формуле (139).



Фиг. 95

Наибольшего значения напряжения достигает в точках на нейтральной оси (фиг. 95,  $a$ ):

$$\tau_{\max} = \frac{Q}{b_1 I} \left[ \frac{bh^2}{8} - \frac{bh_1^2}{8} (b - b_1) \right]. \quad (144)$$

Распределение напряжений по поперечному сечению показано на фиг. 95,  $b$ . Касательные напряжения, распределенные по сечению стенки, дают усилие, которое почти равно перерезывающей силе  $Q$ .

В случае, когда  $b_1$  очень мало по сравнению с  $b$ , распределение напряжений по высоте стенки почти равномерное, и для приближенных вычислений можно пользоваться формулой

$$\tau_{\max} = \frac{Q}{b_1 h_1}. \quad (145)$$

### Главные напряжения

Главные напряжения и главные направления при изгибе определяются по формулам:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{1}{2} [\sigma + \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}] \\ \sigma_2 &= \frac{1}{2} [\sigma - \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}] \end{aligned} \right\}, \quad (146)$$

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2\tau}{\sigma}. \quad (147)$$

Значения  $\sigma$  и  $\tau$ , входящие в формулы (146) и (147), могут быть легко определены для любой точки поперечного сечения при помощи формул (137) и (139).

Наибольшее касательное напряжение при изгибе равно

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \quad (148)$$

и наклонено под углом  $45^\circ$  к главным направлениям.

### УСЛОВИЯ ПРОЧНОСТИ ПРИ ИЗГИБЕ

Прочность балки будет обеспечена, если наибольшие значения нормальных и касательных напряжений нигде не превосходят допускаемых.

Для балок, материал которых одинаково сопротивляется как растяжению, так и сжатию, условия прочности имеют вид:

$$\sigma_{\max} \leq R, \quad (149)$$

$$\tau_{\max} \leq R_s, \quad (150)$$

где  $R$  — допускаемое напряжение при растяжении и сжатии;

$R_s$  — допускаемое напряжение при сдвиге.

Наибольшие нормальные и касательные напряжения для любого случая изгиба балки могут быть определены при помощи формул (146) и (148).

Такая проверка называется полной проверкой прочности.

Полную проверку прочности приходится производить в случаях, когда поперечное сечение имеет сложное очертание с резкими изменениями ширины, например, в случае составных балок двутаврового сечения и т. п.

В большинстве случаев при проверке прочности бывает достаточно определить крайнее нормальное напряжение в сечении с наибольшим изгибающим моментом и касательное напряжение у нейтрального слоя в сечении с наибольшей перерезывающей силой. Полученные таким образом напряжения не должны превышать допускаемых

$$\frac{M_{\max}}{W} \leq R,$$

$$\frac{Q_{\max} \cdot S}{I b} \leq R_s.$$

В случае, если допускаемые напряжения на растяжение и сжатие различны, то должны быть удовлетворены три условия прочности

$$\sigma_{\max} \leq R_z; \quad (151)$$

$$\sigma_{\min} \leq R_d; \quad (152)$$

$$\tau_{\max} \leq R_s. \quad (153)$$

Здесь  $R_z$  — допускаемое напряжение на растяжение;

$R_d$  — допускаемое напряжение на сжатие.

# ИЗОГНУТАЯ ОСЬ СТЕРЖНЯ

## УПРУГАЯ КРИВАЯ

При расчёте балок приходится определять не только величину напряжений, которые возникают при действии заданных нагрузок, но и величину соответствующих прогибов. Нахождение прогибов составляет сущность расчёта балок на жёсткость.

Условие жёсткости балки будет выполнено тогда, когда наибольший прогиб не будет превосходить некоторой допускаемой величины, выражаемой обычно в долях пролёта балки.

Чтобы составить уравнение изогнутой оси балки, используется зависимость (136)

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI}$$

и известное из курса дифференциальной геометрии соотношение:

$$\frac{1}{\rho} = \pm \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}.$$

В формулу входят первая и вторая производные от прогибов  $y$  по абсциссам  $x$ . Но первая производная  $\frac{dy}{dx}$  равна тангенсу угла наклона —  $\operatorname{tg} \varphi$ , образуемого касательной к упругой линии с осью абсцисс. Величина эта так же, как и прогиб, весьма невелика. Квадратом этой величины в знаменателе правой части формулы можно пренебречь по сравнению с единицей. Тогда приближённое выражение для кривизны балки примет вид:

$$\frac{1}{\rho} = \pm \frac{d^2y}{dx^2}. \quad (154)$$

Если приравнять правые части (136) и (154), то дифференциальное уравнение упругой кривой будет

$$\pm EI \frac{d^2y}{dx^2} = M. \quad (155)$$

## КЛАССИЧЕСКИЙ МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ ДЕФОРМАЦИИ

Обе части уравнения (155) интегрируют два раза:

$$\left. \begin{aligned} \pm EI \frac{dy}{dx} &= \int M dx + C_1 \\ \pm EI y &= \int \left[ \int M dx \right] dx + C_1 x + C_2 \end{aligned} \right\}. \quad (156)$$

Для определения постоянных интегрирования используются условия опорных закреплений и непрерывности функции  $y = f(x)$ .

Правило знаков схематически изображено на фиг. 96.

**Пример 1.** Консольная балка длиной  $l$  заделана одним концом; на свободный конец действует сила  $P$  (фиг. 97).

Найти уравнение углов наклона и уравнение упругой линии, определить наибольший угол наклона и прогиб.

5 Том II

**Решение.** Начало координат в точке  $O$ ; ось  $x$  направляется по оси балки, а ось  $y$  — перпендикулярно к ней (вверх).

Изгибающий момент для сечения на расстоянии  $x$  от начала координат будет:

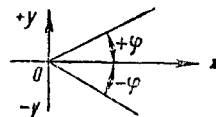
$$M = -Px.$$

Интегрирование дифференциального уравнения (155) даёт:

$$EI y' = M = -Px;$$

$$EI y' = -\frac{Px^2}{2} + C_1;$$

$$EI y = -\frac{Px^3}{6} + C_1 x + C_2.$$



Фиг. 96

Постоянные интегрирования определяются из условий закреплений балки;

$$[y]_{x=l} = 0,$$

$$[\varphi]_{x=l} = 0,$$

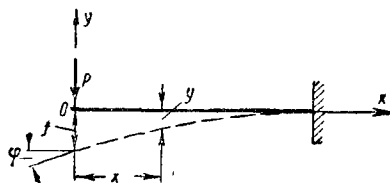
которые дают

$$C_1 = \frac{1}{2} Pl^2; C_2 = -\frac{1}{3} Pl^3.$$

Наибольший прогиб и угол наклона касательной будет при  $x = 0$ , т. е. на свободном конце балки:

$$f = -\frac{1}{3} \frac{Pl^3}{EI},$$

$$\varphi = \frac{1}{2} \frac{Pl^2}{EI}.$$

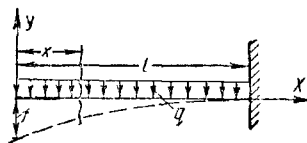


Фиг. 97

Общие уравнения углов наклона касательной и упругой линии:

$$EI \varphi = -\frac{P}{2} (x^2 - l^2);$$

$$EI y = -\frac{P}{6} (x^3 - 3l^2 x + 2l^3).$$



Фиг. 98

**Пример 2.** Консоль несёт нагрузку, равномерно распределённую по её длине. Величина нагрузки, приходящейся на единицу длины балки, равна  $q$  кг/пог.м (фиг. 98). Найти уравнение упругой линии и наибольший прогиб.

**Решение.** Изгибающий момент в сечении с абсциссой  $x$  равен

$$M = -\frac{1}{2} qx^2.$$

Повторное интегрирование дифференциального уравнения (155) даёт:

$$EI y' = -\frac{1}{6} qx^3 + C_1.$$

$$EI y = -\frac{1}{24} qx^4 + C_1 x + C_2.$$

Условия закрепления балки имеют вид:

$$\text{при } x = l \quad y = 0,$$

$$\text{при } x' = l \quad y' = 0,$$

из которых определяются постоянные интегрирования:

$$C_2 = -\frac{1}{8} q l^4, \quad C_1 = \frac{1}{6} q l^3.$$

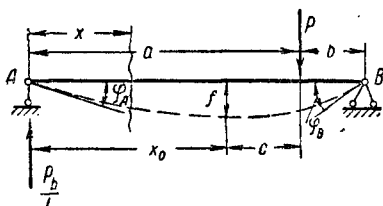
Уравнение упругой линии будет иметь вид:

$$EI y = -\frac{1}{24} q (x^4 - 4l^3 x + 3l^4).$$

Наибольший прогиб при  $x = 0$  равен:

$$f = -\frac{1}{8} \frac{q l^4}{EI}.$$

**Пример 3.** Балка, пролётом  $l$ , свободно лежащая на опорах  $A$  и  $B$ , изгибается сосредоточенной силой  $P$  (фиг. 99).



Фиг. 99

Определить наибольший прогиб, а также углы поворота опорных сечений  $A$  и  $B$  (предполагая, что  $a > b$ ).

**Решение.** Изгибающий момент для первого участка ( $0 < x < a$ ):

$$M = \frac{P \cdot b}{l} x.$$

Изгибающий момент для второго участка ( $a < x < l$ ):

$$M = \frac{Pb}{l} x - P(x - a).$$

Уравнение упругой линии и углов поворота для каждого участка:

$$EI y' = \frac{Pbx}{2l} + C_1; \quad EI y' = \frac{Pb}{2l} x^2 - \frac{P}{2} (x - a)^2 + C_2;$$

$$EI y = \frac{Pbx^2}{6l} + C_1 x + C_3; \quad EI y = \frac{Pb}{6l} x^3 -$$

$$- \frac{P}{6} (x - a)^3 + C_2 x + C_4.$$

Постоянные интегрирования определяются из следующих условий:

- 1) при  $x = 0$ ;  $y = 0$ ;  $C_3 = C_4 = 0$ ;
- 2) при  $x = l$ ;  $y = 0$ ;  $C_1 = C_2 = -\frac{Pab}{6l} (b + l)$ ;
- 3) при  $x = a$ ;  $y_{I \text{ уч}} = y_{II \text{ уч}}$ ;  $C_3 = C_4$ ;
- 4) при  $x = a$ ;  $y'_{I \text{ уч}} = y'_{II \text{ уч}}$ ;  $C_1 = C_2$ .

Для определения  $f$ , надо приравнять нулю значение угла поворота на первом участке:

$$\frac{Pb}{2l} x^2 - \frac{Pab}{6l} (l + b) = 0.$$

Отсюда

$$x_0 = a \sqrt{\frac{1}{3} + \frac{2}{3} \frac{b}{a}}.$$

После подстановки значения  $x_0$  уравнение прогиба примет вид:

$$f = -\frac{Pab(l+b)}{27lEI} \sqrt{3a(l+b)}.$$

Если сила  $P$  приложена в середине, то

$$a = b = \frac{l}{2}.$$

Тогда

$$f = -\frac{Pl^3}{48EI}.$$

Значения углов поворота сечений  $A$  и  $B$ :

$$EI \varphi_A = -\frac{Pab}{6l} (l + b);$$

$$EI \varphi_B = \frac{Pab}{6l} (l + a).$$

Расстояние сечения с наибольшим прогибом от левой опоры

$$x_0 = a \sqrt{\frac{1}{3} + \frac{2}{3} \frac{b}{a}}$$

будет меняться в зависимости от положения сосредоточенного груза  $P$  в пролёте. При подходе груза вплотную к правой опоре, т. е. при  $b = 0$ , место наибольшего прогиба

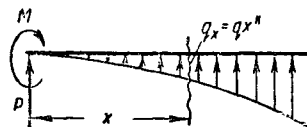
$$x_0 = a \sqrt{\frac{1}{3}} = 0,577 a = 0,577 l,$$

т. е. оно отстоит от середины пролёта на 7,7% пролёта.

Практически, имея в виду, что в средней части балки упругая линия очень пологая, можно считать, что максимальный прогиб всегда будет по середине пролёта.

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДЕФОРМАЦИЙ МЕТОДОМ НАЧАЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ

Этот метод в сущности является развитием предыдущего и отличается от него тем, что постоянные интегрирования определяются в зависимости от условия в начальном сечении балок, а не на обеих опорах, как это имело место в предыдущем способе.



Фиг. 100

Балка загружена моментом  $M$ , сосредоточенной силой  $P$  и нагрузкой, изменяющейся по закону  $q_x = qx^n$  (фиг. 100). Положительное действие всех перечисленных факторов для левоотсечённой части балки будет направлено снизу вверх и по часовой стрелке. Для указанных нагрузок дифференциальное уравнение изгиба:

$$EI y'' = M_x.$$

От действия  $P$  и  $M$  в рассматриваемом сечении возникнет изгибающий момент

$$M'_x = P \cdot x + M.$$

От действия сплошной нагрузки на основании (130) и (131):

$$M''_x = \int Q_x dx = \iint q_x dx dx.$$

После подстановки в последнее уравнение закона изменения нагрузки будет:

$$M''_x = q \iint x^n dx dx = \frac{q \cdot x^{n+2}}{(n+1)(n+2)}.$$

Если принять

$$q_x^{(n)} = n!q,$$

то

$$M_x'' = q_x^{(n)} \cdot \frac{x^{n+2}}{(n+2)!}.$$

Суммарное выражение изгибающего момента

$$M_x = M + P \cdot x + q_x^{(n)} \frac{x^{n+2}}{(n+2)!}. \quad (157)$$

Подставив (157) в дифференциальное уравнение (153), интегрируя его дважды:

$$\left. \begin{aligned} EI y' &= Mx + \frac{Px^2}{2} + q_x^{(n)} \frac{x^{n+3}}{(n+3)!} + C_1 \\ EI y &= \frac{Mx^2}{2} + \frac{Px^3}{6} + q_x^{(n)} \frac{x^{n+4}}{(n+4)!} + C_1 x + C_2 \end{aligned} \right\} \quad (158)$$

Произвольные постоянные определяются из условий:

$$1) [y']_{x=0} = \varphi_0,$$

$$2) [y]_{x=0} = y_0.$$

После подстановки будет:

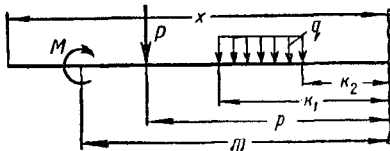
$$EI \varphi_0 = C_1;$$

$$EI y_0 = C_2.$$

Окончательный вид общих формул, выражающих прогиб и поворот любого сечения бруса:

$$\left. \begin{aligned} EI \varphi_x &= EI \varphi_0 + Mx + \frac{Px^2}{2} + \\ &+ q_x^{(n)} \frac{x^{n+3}}{(n+3)!} \\ EI y_x &= EI y_0 + EI \varphi_0 x + \frac{Mx^2}{2} + \\ &+ \frac{Px^3}{6} + q_x^{(n)} \frac{x^{n+4}}{(n+4)!} \end{aligned} \right\} \quad (159)$$

Приведённые выражения представляют собой универсальные формулы упругой кривой.



Фиг. 101

Основное их преимущество состоит в том, что в процессе расчёта нет надобности прибегать к интегрированию, так как она выполнена в общей форме.

Если силовой фактор приложен не в начале балки, а на расстоянии  $b$  от данного сечения, то его влияние приходится учитывать коэффициентом, подсчитанным для отрезка  $b$ .

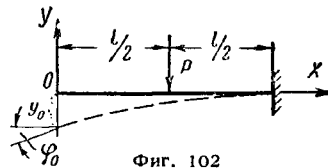
Ниже приводится пример общего составления выражения угла поворота и прогиба для нагрузки, изображённой на фиг. 101.

В этом случае  $n = 0$ ;

$$q_x^{(n)} = q n! = q.$$

Тогда формулы примут следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} EI \varphi_x &= EI \varphi_0 + Mx - \frac{P}{2} p^2 - \\ &- \frac{q}{6} (k_1^3 - k_2^3) \\ EI y_x &= EI y_0 + EI \varphi_0 x + \frac{Mx^2}{2} - \\ &- \frac{P}{6} p^3 - \frac{q}{24} (k_1^4 - k_2^4) \end{aligned} \right\} \quad (160)$$



Фиг. 102

Значения начальных деформаций  $\varphi_0$  и  $y_0$  определяются в зависимости от закрепления бруса. Общая схема нахождения упругой кривой такова:

1. По правилам статики определяются величины опорных реакций, причём в дальнейшем они принимаются за активно действующие на балку силы.

2. По приведённым выше уравнениям (159) в зависимости от опорных закреплений пишутся условия, отрицающие наличие соответствующих перемещений. Из полученных таким способом уравнений определяются начальные деформации.

3. По тем же уравнениям (159) составляются общие выражения прогиба и поворота для любой точки балки.

**Пример 1.** Консоль длиной  $l$  нагружена на половине длины сосредоточенной силой  $P$ . Найти прогиб и угол наклона касательной к упругой линии в точке  $O$  (фиг. 102).

**Решение.** По уравнению (159) будет:

$$[EI y]_{x=l} = EI \varphi_0 - \frac{P}{2} \left( \frac{l}{2} \right)^2 = 0,$$

$$[EI y]_{x=l} = EI y_0 + EI \varphi_0 l - \frac{P}{6} \left( \frac{l}{2} \right)^3 = 0.$$

Отсюда

$$\varphi_0 = \frac{Pl^2}{8EI},$$

$$y_0 = \frac{5}{48} \frac{Pl^3}{EI}.$$

**Пример 2.** Консоль длиной  $l$  нагружена на половину длины равномерно распределённой нагрузкой  $q$  кг/м (фиг. 103). Найти прогиб и угол наклона касательной в точке  $O$ .

**Решение.** По уравнениям (159) и (160) будет:

$$[EI \varphi]_{x=l} = EI \varphi_0 - \frac{q}{6} \left[ l^3 - \left( \frac{l}{2} \right)^3 \right] = 0;$$

$$[EI y]_{x=l} = EI y_0 + EI \varphi_0 l - \frac{q}{24} \left[ l^4 - \left( \frac{l}{2} \right)^4 \right] = 0.$$

Отсюда

$$\varphi_0 = \frac{7}{48} \frac{ql^3}{EI},$$

$$y_0 = \frac{41}{384} \frac{ql^4}{EI}.$$

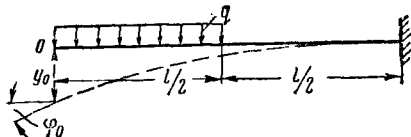
Если балка будет нагружена по всей длине, то угол поворота и прогиб в точке  $O$  будут равны:

$$\varphi_0 = \frac{ql^3}{6EI}; y_0 = -\frac{ql^4}{8EI}.$$

**Пример 3.** Для балки, лежащей на двух опорах и нагруженной равномерно распределённой нагрузкой по всему пролёту (фиг. 104), найти угол поворота на левой опоре и прогиб по середине.

**Решение.** Опорные реакции:

$$A = B = \frac{ql}{2}.$$



Фиг. 103

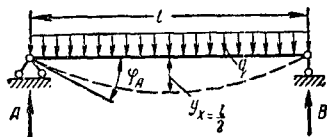
Прогиб на правой опоре отсутствует. Поэтому угол поворота в точке  $A$  определится из уравнения:

$$[EIy]_{x=l} = EI\varphi_0 l + \frac{ql}{2} \cdot \frac{l^3}{6} - \frac{ql^4}{24} = 0,$$

отсюда

$$\varphi_0 = -\frac{ql^3}{24EI}.$$

(знак минус указывает, что поворот касательной к упругой кривой совершается по часовой стрелке).



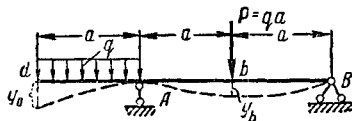
Фиг. 104

Зная  $\varphi_0$  по формуле (159), находят прогиб по середине:

$$[EIy]_{x=\frac{l}{2}} = -\frac{ql^3}{24} \cdot \frac{l}{2} + \frac{ql}{2} \left( \frac{l}{2} \right)^2 \cdot \frac{1}{6} - q \left( \frac{l}{2} \right)^4 \cdot \frac{1}{24} = -\frac{5}{384} ql^4$$

(знак минус указывает, что перемещение направлено вниз).

**Пример 4.** Для балки, нагруженной, как показано на фиг. 105, определить прогибы в точках  $b$  и  $d$ , если  $qa = P$ .



Фиг. 105

**Решение.** Опорные реакции

$$A = \frac{7}{4}P, B = \frac{1}{4}P.$$

Из граничных условий на опорах вытекают следующие уравнения:

$$[EIy]_{x=a} = EIy_0 + EI\varphi_0 a - \frac{q}{24} a^4 = 0,$$

$$[EIy]_{x=3a} = EIy_0 + EI\varphi_0 \cdot 3a - \frac{q}{24} [(3a)^4 - (2a)^4] + \frac{7}{4}P \cdot \frac{1}{6} (2a)^3 - \frac{P}{6} a^3 = 0.$$

Отсюда

$$EI\varphi_0 = EI\varphi_d = \frac{1}{4}Pa^3,$$

$$EIy_0 = EIy_d = -\frac{5}{24}Pa^3.$$

Прогиб в точке  $b$  будет:

$$[EIy]_{x=2a} = EIy_0 + EI\varphi_0 \cdot 2a - \frac{q}{24} [(2a)^4 - a^4] + \frac{7}{4}P \cdot \frac{1}{6} a^3 = -\frac{1}{24}Pa^3.$$

**Пример 5.** Для балки, нагруженной частично распределённой нагрузкой по закону треугольника (фиг. 106), найти углы поворота опорных сечений и прогиб в точке  $c$ .

**Решение.** Опорные реакции:

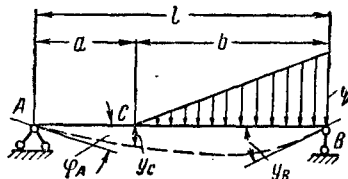
$$A = \frac{qb^2}{6l}, B = \frac{qb}{6l} (2b + 3a).$$

Из условия отсутствия прогиба на правой опоре будет:

$$[EIy]_{x=l} = EI\varphi_0 l + \frac{A}{6} l^3 - \frac{q}{b} \cdot \frac{1}{120} b^5 = 0,$$

отсюда

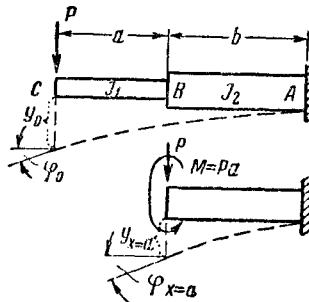
$$EI\varphi_0 = \frac{qb^5}{360} \left( 3 \frac{b}{l} - 10 \frac{l}{b} \right).$$



Фиг. 106

Угол поворота правого опорного сечения:

$$[EI\varphi]_{x=l} = EI\varphi_0 + \frac{A}{2} l^2 - \frac{qb^4}{b \cdot 24} = -\frac{qb^4}{360} \left( 3 \frac{b}{l} + 20 \frac{l}{b} - 15 \right).$$



Фиг. 107

Прогиб в точке  $c$  будет:

$$[EIy]_{x=a} = EI\varphi_0 a + \frac{A}{6} a^3 = \frac{qb^3}{360} a \left( 3 \frac{b}{l} - 10 \frac{l}{b} \right) + \frac{qb^3 a^3}{36 l}.$$

Для случая, когда  $b = l$ ,

$$EI\varphi_0 = \frac{7}{360}ql^3.$$

$$[EI\varphi]_{x=l} = \frac{8}{360}ql^3.$$

**Пример 6.** Найти прогиб на конце ступенчатой балки  $AC$ , если момент инерции части  $AB = I_1$ , а части  $BC = I_2$  (фиг. 107).

**Решение.** По формулам (160) угол поворота и прогиб (при  $x = a$ ) будут:

$$[EI_1\varphi]_{x=a} = EI_1\varphi_0 - P \frac{a^2}{2}.$$

$$[EI_1 y]_{x=a} = EI_1 y_0 + EI_1 \varphi_0 a - \frac{Pa^3}{6}.$$



Для определения начального прогиба и угла поворота используют условие отсутствия прогиба и угла поворота в заделке. Отбрасывая часть балки левее сечения  $x = a$  и заменяя действие её эквивалентной системой сил, находят:

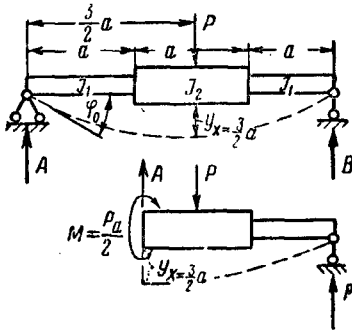
$$[EI_1 \varphi]_{x=b} = [EI_1 \varphi]_{x=a} - \frac{P}{2} b^2 - Pab = 0,$$

$$[EI_1 y]_{x=b} = [EI_1 y]_{x=a} + \\ + [EI_1 \varphi]_{x=a} \cdot b - \frac{Pb^3}{6} - \frac{Pab^2}{2} = 0,$$

отсюда

$$\varphi_0 = -\frac{Pa^3}{2EI_1} + \frac{Pb}{2EI_2} (2a + b);$$

$$y_0 = -\frac{Pa^3}{3EI_1} - \frac{Pb}{3EI_2} (3a^2 + 3ab + b^2).$$



Фиг. 108

Если принять  $a = b$ , то

$$\varphi_0 = -\frac{Pa^3}{2E} \left( \frac{1}{I_1} + \frac{3}{I_2} \right),$$

$$y_0 = -\frac{Pa^3}{3E} \left( \frac{1}{I_1} + \frac{7}{I_2} \right).$$

**Пример 7.** Определить начальный угол поворота и прогиб в середине балки ступенчатого вида, изображённой на фиг. 108.

**Решение.** По уравнениям (160) угол поворота при  $x = a$  и  $x = \frac{3}{2}a$ :

$$[EI_1 \varphi]_{x=a} = EI_1 \varphi_0 + \frac{P}{2} \cdot \frac{1}{2} a^2;$$

$$[EI_1 \varphi]_{x=\frac{3}{2}a} = [EI_1 \varphi]_{x=a} + \frac{P}{2} \cdot \frac{1}{2} \left( \frac{a}{2} \right)^2 + \\ + \frac{P}{2} a \cdot \frac{a}{2} = 0.$$

Отсюда

$$\varphi_0 = -\frac{Pa^3}{16E} \left( \frac{4}{I_1} + \frac{5}{I_2} \right).$$

Значение прогиба при  $x = a$  будет:

$$[y]_{x=a} = \varphi_0 a + \frac{Pa^2}{12EI_1} = -\frac{Pa^3}{48E} \left( \frac{8}{I_1} + \frac{15}{I_2} \right).$$

Прогиб в середине равен:

$$[EI_1 y]_{x=\frac{3}{2}a} = [EI_1 y]_{x=a} + [EI_1 \varphi]_{x=a} \cdot \frac{a}{2} + \\ + \frac{1}{2} \cdot \frac{P}{2} \cdot a \cdot \frac{a^2}{4} + \frac{1}{6} \cdot \frac{P}{2} \cdot \frac{a^3}{8},$$

$$[y]_{x=\frac{3}{2}a} = -\frac{Pa^3}{48E} \left( \frac{8}{I_1} + \frac{19}{I_2} \right).$$

## ГРАФОАНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ ДЕФОРМАЦИИ ПРИ ИЗГИБЕ

На основании (130) и (131) можно написать следующую зависимость между изгибающим моментом  $M$  и интенсивностью сплошной нагрузки  $q$ :

$$\frac{d^2 M}{dx^2} = q. \quad (161)$$

Если сравнить полученное уравнение с уравнением изогнутой оси балки (155), которому можно придать вид

$$\frac{d^2 (EI y)}{dx^2} = M, \quad (162)$$

то нетрудно установить полную аналогию этих зависимостей. Эта аналогия даёт возможность определить величину  $EI y$  по известной эпюре изгибающих моментов  $M$  тем же путём, каким определяется изгибающий момент по известной нагрузке, действующей на балку.

Следовательно, если на фиктивную балку, соответствующую действительной, действует нагрузка, изменяющаяся по тому же закону, как эпюра изгибающих моментов в действительной балке, то изгибающий момент в любом сечении фиктивной балки  $M_\phi$  будет равен величине  $EI y$ :

$$EI y = M_\phi,$$

откуда

$$y = \frac{M_\phi}{EI}, \quad (163)$$

а на основании (131) перерезывающая сила в любом сечении фиктивной балки будет представлять собой произведение угла поворота того же сечения действительной балки на жёсткость  $EI$ :

$$EI \varphi = Q_\phi,$$

откуда

$$\varphi = \frac{Q_\phi}{EI}. \quad (164)$$

Схема действительной балки	Схема фиктивной балки


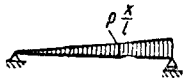
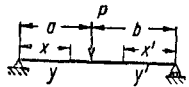


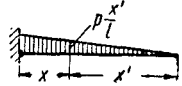

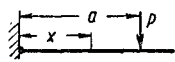


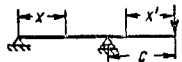
Фиг. 109

При пользовании графоаналитическим методом следует иметь в виду, что длины участков фиктивных балок те же, что и действительных, но опоры и сопряжения участков фиктивной балки выбираются так, чтобы были удовлетворены условия (163) и (164), т. е. соответствовали условиям деформации действительной балки.

Схемы действительных и соответствующих им фиктивных балок приведены на фиг. 109.



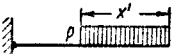




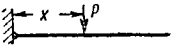



Таблица 9

## Деформации балок

Случаи нагрузки	Уравнение упругой линии	
	$E I y = \frac{p l^4}{24} \left( \frac{x}{l} - 2 \frac{x^3}{l^3} + \frac{x^4}{l^4} \right)$	$E I f = \frac{5 p l^4}{384}$
	$E I y = \frac{p l^4}{360} \left( 7 \frac{x}{l} - 10 \frac{x^3}{l^3} + 3 \frac{x^4}{l^4} \right)$	
	$E I y = \frac{P a^3 b^3}{6 l} \left( 2 \frac{x}{a} + \frac{x}{b} - \frac{x^3}{a^3 b} \right), x < a$ $E I y' = \frac{P a^3 b^3}{6 l} \left( 2 \frac{x'}{b} + \frac{x'}{a} - \frac{x'^3}{a b^3} \right), x' < b$	$E I y_c = \frac{P l^3 a^3 b^3}{3 l^3 l^3}$ $x_c = a$
	$E I y = \frac{l^3}{6} (M_a \omega'_D + M_b \omega_D)$	
	$E I y = \frac{p l^4}{24} \left( 6 \frac{x^2}{l^2} - 4 \frac{x^3}{l^3} + \frac{x^4}{l^4} \right)$	$E I f = \frac{p l^4}{8}$
	$E I y = \frac{p l^4}{120} \left( 4 - 5 \frac{x'}{l} + \frac{x'^4}{l^4} \right)$	
	$E I y = \frac{p l^3}{6} \left( 3 \frac{x^2}{l^2} - \frac{x^3}{l^3} \right)$	$E I f = \frac{P l^3}{3}$
	$E I y = \frac{P a^3}{6} \left( 3 \frac{x^2}{a^2} - \frac{x^3}{a^3} \right), x < a$ $E I y = \frac{P a^3}{6} \left( 3 \frac{x}{a} - 1 \right), x > a$	
	$E I y = \frac{M x^2}{2}$	
	$E I y = \frac{p l^3 c^3}{12} \omega_D \text{ (пролёт)}$ $E I y' = -\frac{p c^3 l}{24} \left( \frac{4 l + 3 c}{l} - 4 \frac{l + c x'}{l c} + \frac{c}{l} \frac{x'^4}{c^4} \right)$ (консоль)	$E I f = \frac{p (4 l + 3 c) c^3}{24}$
	$E I y = -\frac{p l^3 c}{6} \omega_D \text{ (пролёт)}$ $E I y' = \frac{P l c^3}{6} \left( 2 \frac{l + c}{l} - \frac{2 l + 3 c x'}{l c} + \frac{c}{l} \frac{x'^3}{c^3} \right)$ (консоль)	$E I f = \frac{P (l + c) c^3}{3}$

Прогобы и углы поворота для балок, заделанных одним концом

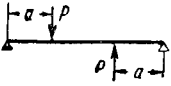
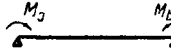

Таблица 10

Нагрузка	$EJ f$	$EJ \varphi$
	$\frac{p l^4}{8}$	$\frac{p l^3}{6}$
	$\frac{p l^4}{24} \left( \frac{x}{l} \right)^3 \left( 4 - \frac{x}{l} \right)$	$\frac{p x^3}{6}$
	$\frac{p l^4}{24} \frac{x'}{l} \left( 8 - 6 \frac{x'}{l} + \frac{x'^3}{l^2} \right)$	$\frac{p l^3}{6} \frac{x'}{l} \left( 3 - 3 \frac{x'}{l} + \frac{x'^3}{l^3} \right)$
	$\frac{p l^4}{30}$	$\frac{p l^3}{24}$
	$\frac{11}{120} p l^4$	$\frac{p l^3}{8}$
	$\frac{p l^4}{30} \frac{x'}{l} \left( 5 - 5 \frac{x'}{l} + \frac{x'^3}{l^2} \right)$	$\frac{p l^3}{24} \frac{x'}{l} \left( 6 - 8 \frac{x'}{l} + 3 \frac{x'^3}{l^3} \right)$
	$\frac{p l^4}{120} \frac{x'}{l} \left( 30 - 10 \frac{x'}{l} + \frac{x'^3}{l^2} \right)$	$\frac{p l^3}{24} \frac{x'}{l} \left( 6 - 4 \frac{x'}{l} + \frac{x'^3}{l^3} \right)$
	$\frac{1}{6} P l^3 \left( \frac{x}{l} \right)^3 \left( 3 - \frac{x}{l} \right)$	$\frac{P x^3}{2}$
	$\frac{P l^3}{3}$	$\frac{P l^3}{2}$
	$\frac{M l^3}{2}$	$M l$
	$\frac{M l^3}{2} \left[ 1 - \left( \frac{x}{l} \right)^3 \right]$	$M x$

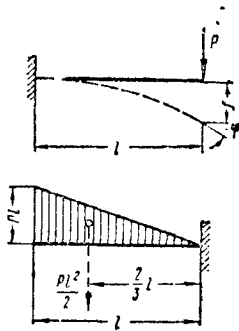
Углы поворота на опорах для однопролётных балок

Случай нагрузки	$E J \varphi_a$	$E J \varphi_b$
	$\frac{p l^3}{24}$	$\frac{p l^3}{24}$
	$\frac{p l^3}{24} \frac{a^3}{l^3} \left( 2 - \frac{a}{l} \right)^2 = \frac{p l^3}{24} [1 - 2\omega_\varphi]$	$\frac{p l^3}{24} \frac{a^3}{l^3} \left( 2 - \frac{a}{l} \right) = \frac{p l^3}{12} \omega_\varphi$
	$\frac{p l^3}{24} \frac{a'^3}{l^3} \left( 2 - \frac{a'}{l} \right)^2 = \frac{p l^3}{12} \omega_\varphi'$	$\frac{p l^3}{24} \frac{a'^3}{l^3} \left( 2 - \frac{a'}{l} \right) = \frac{p l^3}{24} (1 - 2\omega_\varphi')$
	$\frac{p l^3}{48} \frac{c}{l} \left( 3 - \frac{c^2}{l^2} \right)$	$\frac{p l^3}{48} \frac{c}{l} \left( 3 - \frac{c^2}{l^2} \right)$
	$\frac{7 p_b l^3}{360}$	$\frac{p_b l^3}{45}$
	$\frac{p_a l^3}{45}$	$\frac{7 p_a l^3}{360}$
	$\frac{1}{360} (8 p_a + 7 p_b) l^3$	$\frac{1}{360} (7 p_a + 8 p_b) l^3$
	$\frac{p l^3}{360} \frac{a^3}{l^3} \left( 41 - 45 \frac{a}{l} + 12 \frac{a^2}{l^2} \right)$	$\frac{p l^3}{90} \frac{a^3}{l^3} \left( 5 - 3 \frac{a^2}{l^2} \right)$
	$\frac{p l^3}{360} \frac{b^3}{l^3} \left( 10 - 3 \frac{b^2}{l^2} \right)$	$\frac{p l^3}{360} \frac{b^3}{l^3} \left( 20 - 15 \frac{b}{l} + 3 \frac{b^2}{l^2} \right)$
	$\frac{5}{192} p l^3$	$\frac{5}{192} p l^3$
	$\frac{p l^3}{30}$	$\frac{p l^3}{30}$
	$\frac{p l^3}{6} \left( \frac{a'}{l} - \frac{a'^2}{l^2} \right) = \frac{p l^3}{6} \omega_D'$	$\frac{p l^3}{6} \left( \frac{a}{l} - \frac{a^2}{l^2} \right) = \frac{p l^3}{6} \omega_D$
	$\frac{p l^3}{16}$	$\frac{p l^3}{16}$
	$\frac{P}{2} a \left( 1 - \frac{a}{l} \right) l = \frac{P l^3}{2} \omega_R$	$\frac{P}{2} a \left( 1 - \frac{a}{l} \right) l = \frac{P l^3}{2} \omega_R$

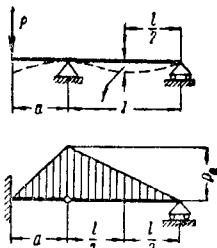
Продолжение табл. 11

Случай нагрузки	$E J \varphi_a$	$E J \varphi_b$
	$\frac{P a}{6 l} \left(1 - \frac{a}{l}\right) \left(1 - 2 \frac{a}{l}\right) l =$ $= -\frac{P l^3}{6} (\omega_D' - \omega_D)$	$-\frac{P a}{6 l} \left(1 - \frac{a}{l}\right) \left(1 - 2 \frac{a}{l}\right) l =$ $= \frac{P l^3}{6} (\omega_D + \omega_D')$
	$\frac{l}{6} (2 M_a + M_b)$	$\frac{l}{6} (M_a + 2 M_b)$
	$-\frac{M l}{6} \left[1 - 3 \left(\frac{a'}{l}\right)^2\right] = -\frac{M l}{6} \omega_M'$	$\frac{M l}{6} \left[1 - 3 \left(\frac{a}{l}\right)^2\right] = \frac{M l}{6} \omega_M$

Пример 1. Для консоли, показанной на фиг. 110, определить прогиб и угол поворота сечения под силой.



Фиг. 110



Фиг. 111

Решение. Фиктивная балка загружается опорой изгибающих моментов действительной балки, которую принимают за фиктивную нагрузку.

Изгибающий момент в заделке фиктивной балки:

$$M_\phi = \frac{Pl \cdot l}{2} \cdot \frac{2}{3} l = \frac{Pl^3}{3}.$$

На основании (163) искомый прогиб равен

$$f = \frac{Pl^3}{3 EI}.$$

Перерезывающая сила в заделке фиктивной балки:

$$Q_\phi = \frac{Pl^2}{2}.$$

На основании (164) искомый угол поворота:

$$\varphi = \frac{Pl^2}{2 EI}.$$

Пример 2. Определить прогиб по середине пролёта балки, изображённой на фиг. 111.

Решение. Изгибающий момент в сечении по середине пролёта фиктивной балки:

$$M_\phi = \frac{Pal}{6} \cdot \frac{l}{2} - \frac{Pal}{8} \cdot \frac{l}{6} = \frac{Pal^3}{16}.$$

Искомый прогиб на основании (163) равен

$$f = \frac{Pal^3}{16 EI}.$$

Значения деформации балок для различных нагрузок приведены в табл. 9, 10 и 11.

## СЛОЖНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ

### КОСОЙ ИЗГИБ

Косым изгибом называется случай, когда внешние силы не располагаются в одной из главных плоскостей балки. В этом случае изогнутая ось не будет лежать в плоскости действия сил.

Нормальные напряжения при косом изгибе. Пусть силовая линия  $pp$  (линия пересечения плоскости действия сил с поперечным сечением балки) образует с главной осью инерции  $y$  угол  $\alpha$  (фиг. 112).

Разложим изгибающий момент  $M$  на составляющие в главных плоскостях балки.

Момент в плоскости  $xu$  будет изгибать балку вокруг оси  $z$ . Этот момент:

$$M_z = M \cos \alpha. \quad (165)$$

Момент в плоскости  $xz$ , изгибающий балку вокруг оси  $y$ , равен:

$$M_y = M \sin \alpha. \quad (166)$$

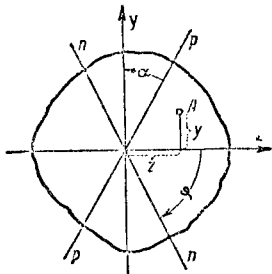
Каждый из составляющих моментов вызывает плоский изгиб.

На основании принципа независимости действия сил нормальное напряжение в любой точке  $A$  поперечного сечения с координатами  $y, z$  от действия  $M$  может быть

определено, как сумма нормальных напряжений, вызываемых отдельно составляющими  $M_z$  и  $M_y$ . Тогда по уравнению (137) напряжение:

$$\sigma = \frac{M_z \cdot y}{I_z} + \frac{M_y \cdot z}{I_y}, \quad (167)$$

где  $I_z$  и  $I_y$  — главные моменты инерции.



Фиг. 112

В формуле (167) следует считать моменты  $M_z$  и  $M_y$  положительными, если они изгибают балку выпуклостью в сторону положительной оси  $y$  и соответственно  $z$ .

#### Уравнение нейтральной (нулевой) линии

Нейтральная линия представляет собой геометрическое место точек, нормальные напряжения в которых равны нулю.

На основании выражений (165, 166 и 167) уравнение нейтральной линии имеет вид

$$\frac{\cos \alpha}{I_z} y + \frac{\sin \alpha}{I_y} z = 0. \quad (168)$$

Уравнение (168) показывает, что нулевая линия  $nn$  проходит через центр тяжести и образует с осью  $z$  угол  $\varphi$ , определяемый формулой:

$$\operatorname{tg} \varphi = -\frac{I_z}{I_y} \operatorname{tg} \alpha. \quad (169)$$

В этой формуле угол  $\alpha$  отсчитывается от силовой линии  $pp$  к оси  $y$ , а угол  $\varphi$  — от оси  $z$  к нейтральной линии (фиг. 112), при этом положительным значениям углов соответствует отсчёт по направлению против часовой стрелки.

Формула (169) показывает, что нейтральная линия не перпендикулярна к силовой линии и что обе линии всегда проходят через разные квадранты.

В частном случае, когда  $I_y = I_z$ , нейтральная линия занимает положение перпендикулярное к силовой линии. Следовательно, при  $I_y = I_z$ , косою изгиб не может иметь места. (Например, для квадратного или круглого поперечного сечения и др.).

#### Деформации при косом изгибе

Величина прогиба при косом изгибе определяется как геометрическая сумма прогибов от каждого составляющего плоского изгиба в отдельности.

Если обозначить составляющий прогиб вдоль оси  $z$  через  $f_z$ , а в направлении оси  $y$  — через  $f_y$ , то полный прогиб будет равен

$$f = \sqrt{f_z^2 + f_y^2}. \quad (170)$$

**Пример.** Подобрать сечение прямоугольной деревянной обрешётки, свободно лежащей по стропильным фермам, находящейся под действием равномерно распределённой нагрузки  $q = 650 \text{ кг/м}$ . Пролёт  $l = 4 \text{ м}$ . Угол наклона верхних поясов ферм к горизонту  $\alpha = 16^\circ$  (фиг. 113).

Допускаемое напряжение  $R = 110 \text{ кг/см}^2$ .

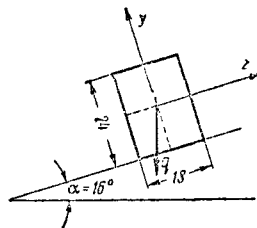
**Решение.** Опасное сечение находится в середине пролёта. Полный изгибающий момент в этом сечении

$$M = \frac{ql^2}{8} = \frac{650 \cdot 4^2}{8} = 1300 \text{ кг} \cdot \text{м}.$$

Составляющие моменты в главных плоскостях:

$$M_z = M \cos \alpha = 0,96 \cdot 1300 = 1248 \text{ кг} \cdot \text{м};$$

$$M_y = M \sin \alpha = 0,28 \cdot 1300 = 364 \text{ кг} \cdot \text{м}.$$



Фиг. 113

Условия прочности:

$$\sigma = \frac{M_z}{W_z} + \frac{M_y}{W_y} < 110 \text{ кг/см}^2$$

или

$$\frac{1}{W_z} \left( M_z + \frac{W_z}{W_y} \cdot M_y \right) < 110 \text{ кг/см}^2.$$

Для прямоугольных балок наиболее рациональное отношение высоты к ширине:

$$\frac{h}{b} = \frac{7}{5}.$$

Следовательно, и

$$\frac{W_z}{W_y} = \frac{7}{5}.$$

отсюда

$$\sigma = \frac{124800 + \frac{7}{5} 36400}{W_z} < 110 \text{ кг/см}^2;$$

$$W_z = \frac{175800}{110} = 1600 \text{ см}^3;$$

$$b = \sqrt[3]{\frac{1600 \cdot 6}{\left(\frac{7}{5}\right)^2}} = 17,1 \text{ см};$$

$$h = \frac{7}{5} 17,1 = 23,8 \text{ см},$$

сечение обрешётки можно принять  $18 \cdot 24 \text{ см}$ .

#### СОВМЕСТНОЕ ДЕЙСТВИЕ ИЗГИБА С РАСТЯЖЕНИЕМ ИЛИ СЖАТИЕМ

**Нормальные напряжения.** Если силы, действующие на брус, пересекают его ось под любым углом, то каждую из сил можно разложить на две составляющие: одну из составляющих направить по оси бруса, а другую перпендикулярно к ней.

Поперечные силы будут изгибать брус, а продольные будут его растягивать или сжимать.

Пренебрегая влиянием продольных сил на изгиб, что возможно в случае коротких стоек, мы можем получить напряжение в любой точке поперечного сечения бруса на основании принципа независимости действия сил, суммируя напряжения от растяжения или сжатия с напряжениями от изгиба.

Если обозначить через  $N$  сумму всех продольных сил, а через  $M_z$  и  $M_y$  — составляющие изгибающего момента в этом сечении, относительно главных осей инерции  $z$  и  $y$ , то нормальное напряжение в какой-либо точке  $A$  с координатами  $y$  и  $z$ :

$$\sigma = \pm \frac{N}{F} \pm \frac{M_z \cdot y}{I_z} \pm \frac{M_y \cdot z}{I_y}, \quad (171)$$

где  $F$  — площадь поперечного сечения бруса;  
 $I_z$  и  $I_y$  — главные моменты инерции поперечного сечения.

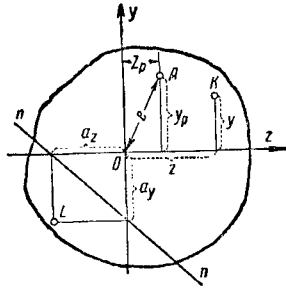
Знаки в этой формуле выбирают в зависимости от направлений продольной силы и изгибающих моментов.

#### Внецентренное растяжение или сжатие

Внецентренное растяжение или сжатие получается при действии на брус двух равных и противоположных сил, направленных по прямой, параллельной оси стержня (фиг. 114). Расстояние  $e$  от точки приложения сил до центра тяжести сечения называется эксцентриситетом (фиг. 115).



Фиг. 114



Фиг. 115

Если приложить к центрам тяжести торцевых сечений бруса  $O''$  по две равных и противоположно направленных силы  $P$ , что не нарушает равновесия, то заданную систему сил можно привести к системе ей эквивалентной, состоящей из двух сжимающих сил, действующих по оси бруса, и двух взаимно противоположных изгибающих пар. Момент каждой из этих пар:

$$M = Pe.$$

Разлагая эти пары на составляющие  $M_z$  и  $M_y$ , лежащие в плоскостях главных осей инерции  $z$  и  $y$ , и применяя принцип независимости действия сил, можно получить формулу для определения нормальных напряжений в любой точке  $K$  поперечного сечения:

$$\sigma = - \left( \frac{P}{F} + \frac{M_z}{I_z} y + \frac{M_y}{I_y} z \right), \quad (172)$$

где  $F$  — площадь поперечного сечения;  
 $I_z$  и  $I_y$  — главные моменты инерции;  
 $y$  и  $z$  — координаты точки  $K$ , в которой определяется напряжение.

Если обозначить координаты точки приложения силы  $P$  через  $z_p$  и  $y_p$ , то

$$M_z = P \cdot y_p;$$

$$M_y = P \cdot z_p$$

и формуле (172) можно придать следующий вид:

$$\sigma = - \frac{P}{F} \left( 1 + \frac{y_p \cdot y}{i_z^2} + \frac{z_p \cdot z}{i_y^2} \right), \quad (173)$$

где

$$i_z = \sqrt{\frac{I_z}{F}} \quad \text{и} \quad i_y = \sqrt{\frac{I_y}{F}}$$

представляют собой радиусы инерции сечения относительно главных осей.

В формулах (172) и (173) знаки соответствуют внецентренному сжатию и взятому на фиг. 115 расположению координатных осей. При внецентренном растяжении перед скобкой следует поставить знак плюс.

#### Нейтральная линия

Уравнение нейтральной линии:

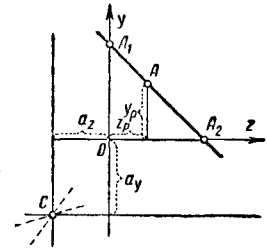
$$\frac{y_p \cdot y}{i_z^2} + \frac{z_p \cdot z}{i_y^2} + 1 = 0. \quad (174)$$

Положение нейтральной линии определяется отрезками  $a_z$  и  $a_y$ , которые она отсекает на главных осях  $z$  и  $y$ :

$$\left. \begin{aligned} a_z &= - \frac{i_y^2}{z_p} \\ a_y &= - \frac{i_z^2}{y_p} \end{aligned} \right\}. \quad (175)$$

Из формулы (175) видно, что координаты  $z_p$  и  $y_p$  точки приложения силы и отрезки  $a_z$  и  $a_y$  обладают свойством взаимности: если приложить силу в точке  $L$  с координатами  $a_z$  и  $a_y$ , то нейтральная линия отсечёт на координатных осях отрезки  $z_p$  и  $y_p$ .

Между взаимным расположением точки приложения силы и нейтральной линией имеет место ещё одна зависимость: если точка  $A$  приложения силы  $P$  перемещается по некоторой прямой  $A_1, A_2$ , то нейтральная линия вращается вокруг точки  $C$  (фиг. 116) и, обратно, — вращение нейтральной линии вокруг постоянной точки связано с перемещением точки приложения сил по прямой.



Фиг. 116

#### Ядро сечения

Из формулы (175) видно, что по мере приближения точки приложения силы к центру тяжести сечения нейтральная линия удаляется от него, поэтому при некоторых положениях точки приложения силы нейтральная линия будет проходить вне сечения, и, следовательно, в сечении будут напряжения одного знака.

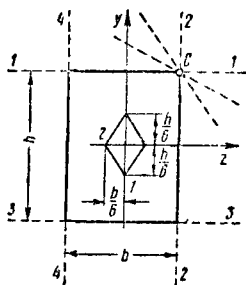
Та площадь вокруг центра тяжести сечения, внутри которой можно располагать точку приложения силы, не вызывая в сечении напряжения разного знака, называется ядром сечения.

Если точку приложения силы перемещать по периметру ядра сечения, то нейтральная линия будет огибать контур сечения, касаясь его.

Это свойство даёт возможность в каждом частном случае определить границы ядра сечения.

**Пример.** Построить ядро сечения для прямоугольного профиля (Фиг. 117).

**Решение.** Контур сечения огибают нейтральной линией, придавая ей последовательно положения 1-1, 2-2, 3-3, 4-4.



Фиг. 117

Первому положению нейтральной линии соответствует точка 1 границы ядра сечения. Координаты этой точки определяются по формулам (175):

$$a_{z_1} = -\frac{b^2}{12} = 0;$$

$$a_{y_1} = -\frac{h^2}{12} = -\frac{h}{6}.$$

Положение нейтральной линии 2-2 соответствует точке 2 границы ядра. Координаты этой точки:

$$a_{z_2} = -\frac{b}{6},$$

$$a_{y_2} = 0.$$

При переходе из положения 1-1 в положение 2-2 нейтральная линия поворачивается вокруг вершины угла С.

Следовательно, граница ядра сечения между точками 1 и 2 очерчивается по прямой 1-2.

Ядро сечения для прямоугольного профиля имеет вид ромба, диагонали которого совпадают с главными осями и равны соответственно:

$$\frac{h}{3} \text{ и } \frac{b}{3}.$$

Форма и размеры ядра сечения для различных профилей приведены в табл. 12.

### СОВМЕСТНОЕ ДЕЙСТВИЕ ИЗГИБА С КРУЧЕНИЕМ

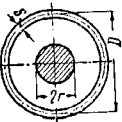
При совместном действии изгиба и кручения в любой точке поперечного сечения вала возникают нормальные напряжения от изгибающих моментов, касательные напряжения от скручивающих моментов и касательные напряжения от перерезывающих сил. Последние имеют обычно второстепенные значения.

Таблица 12  
Форма и размеры ядра сечения

Форма поперечного сечения и форма ядра сечения	Размеры ядра сечения
<p>Квадрат</p>	$y_1 = y_2 = \frac{a}{6}$ $r_{\min} = 0,1179a$
<p>Прямоугольник</p>	$y_1 = \frac{b}{6}; y_2 = \frac{h}{6}$ $r_{\min} = \frac{bh}{6\sqrt{b^2 + h^2}}$
<p>Треугольник равнобедренный</p>	$y_1 = \frac{h}{6}; y_2 = \frac{h}{12}; y_3 = \frac{b}{8}$ <p>Форма ядра подобна сечению</p>
<p>Полый прямоугольник</p>	$y_1 = \frac{1}{6} \frac{h_1 b_1^3 - h_2 b_2^3}{b_1 h_1 - b_2 h_2}$ $y_2 = \frac{1}{6} \frac{b_1 h_1^3 - b_2 h_2^3}{h_1 b_1 - h_2 b_2}$ <p>при <math>b_1 = h_1 = a_1</math> и <math>b_2 = h_2 = a_2</math> (квадрат)</p> $r_{\min} = 0,1179a_1 \left[ 1 + \left( \frac{a_2}{a_1} \right)^3 \right]$
<p>Восьмиугольник</p>	$r_{\min} = 0,2256R$ <p>Если восьмиугольник полый [радиусы описанных кругов наружного <math>R_1</math>, внутреннего <math>R_2</math>, толщина стенки равна <math>0,924(R_1 - R_2)</math>], то</p> $r_{\min} = 0,2256R_1 \left[ 1 + \left( \frac{R_2}{R_1} \right)^3 \right]$
<p>Круг</p>	$r = \frac{1}{8} d$



Продолжение табл. 12

Форма поперечного сечения и форма ядра сечения	Размеры ядра сечения
<p>Круг полый</p> 	$r = \frac{D}{8} \left[ 1 + \left( \frac{d}{D} \right)^4 \right]$
<p>Тонкостенная труба</p> 	$r = \frac{D}{4}$

Их наибольшие значения получаются на нейтральной оси, где нормальные напряжения от изгиба равны нулю. Поэтому наибольшее главное напряжение обыкновенно имеет место у точки, где нормальное напряжение от изгибающего момента и касательное напряжение от скручивающего момента достигают максимума.

Расчёт валов при совместном действии изгиба и кручения заключается в определении главных напряжений в самой напряжённой точке опасного сечения и сравнении полученного напряжения с допускаемым по какой-либо из теорий прочности.

**Изгиб и кручение круглых валов.** В этом случае наибольшее нормальное напряжение получается в точках, наиболее удалённых от нейтральной оси, а именно:

$$\sigma = \frac{32M}{\pi d^3}, \quad (176)$$

где  $M$  — изгибающий момент;  
 $d$  — диаметр вала.

Касательное напряжение в этой же точке от скручивающей пары

$$\tau = \frac{16M^*}{\pi d^3}, \quad (177)$$

где  $M^*$  — крутящий момент.

Главные нормальные напряжения

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\max} &= \frac{16}{\pi d^3} (M + \sqrt{M^2 + M^{*2}}) \\ \sigma_{\min} &= \frac{16}{\pi d^3} (M - \sqrt{M^2 + M^{*2}}) \end{aligned} \right\} \quad (178)$$

Наибольшее касательное напряжение в той же точке на основании (148)

$$\tau_{\max} = \frac{16}{\pi d^3} \sqrt{M^2 + M^{*2}}. \quad (179)$$

Расчёт валов из пластических металлов обычно производят по теории наибольших касательных напряжений (стр. 78).

Условие прочности по этой теории имеет вид:

$$\frac{16}{\pi d^3} \sqrt{M^2 + M^{*2}} \leq R_s, \quad (180)$$

где  $R_s$  — допускаемое напряжение при сдвиге.

Из условия (180) можно по заданному допускаемому напряжению определить диаметр вала

$$d = \sqrt[3]{\frac{16}{\pi R_s} \sqrt{M^2 + M^{*2}}}. \quad (181)$$

**Полый вал с наружным диаметром  $d$  и внутренним  $d_1$ .** Главные нормальные напряжения

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\max} &= \frac{16}{\pi d^3 (1 - \alpha^4)} (M + \sqrt{M^2 + M^{*2}}) \\ \sigma_{\min} &= \frac{16}{\pi d^3 (1 - \alpha^4)} (M - \sqrt{M^2 + M^{*2}}) \end{aligned} \right\} \quad (182)$$

Наибольшее касательное напряжение

$$\tau_{\max} = \frac{16}{\pi d^3 (1 - \alpha^4)} \sqrt{M^2 + M^{*2}}. \quad (183)$$

Формула для определения диаметра вала по теории наибольших касательных напряжений будет иметь вид:

$$d = \sqrt[3]{\frac{16}{\pi R_s (1 - \alpha^4)} \sqrt{M^2 + M^{*2}}}. \quad (184)$$

В этих формулах  $R_s$  — допускаемое напряжение при сдвиге, а

$$\alpha = \frac{d_1}{d}.$$

## ТЕОРИИ ПРОЧНОСТИ

Проверка прочности элементов конструкций и сооружений при действии простого растяжения или сжатия не представляет затруднений, так как в этом случае предельное напряжение  $\sigma_0$  легко определяется из опыта.

Для материалов в хрупком состоянии за предельное напряжение  $\sigma_0$  принимается предел прочности.

При пластическом состоянии предельное напряжение принимается равным пределу текучести.

Эти величины зависят только от физических свойств материала и для одного и того же материала являются постоянными.

Задаваясь определённым коэффициентом запаса  $n$ , можно получить допускаемые напряжения на растяжение  $R_z$  и на сжатие  $R_d$ , разделив соответствующие предельные напряжения  $\sigma_0$  на коэффициент запаса.

Таким образом, в случае простого растяжения или сжатия можно всегда гарантиро-

вать прочность элемента, если соблюдены условия:

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= \frac{P}{F} \leq R_z \\ \text{или} \\ \sigma &= \frac{P}{F} \leq R_d \end{aligned} \right\}.$$

Значительно сложнее обстоит дело с проверкой прочности элементов, находящихся в сложном напряжённом состоянии, так как в этом случае на величину предельного напряжения, кроме физических свойств материала, влияют величины и характер действия нагрузок, а также форма изучаемого элемента. Так как в инженерной практике может встретиться бесчисленное множество комбинаций нагрузок и форм элементов конструкций, воспринимающих эти нагрузки, то экспериментальное определение предельных напряжений для каждого случая привело бы к огромному количеству опытов, осуществление которых не представляется возможным.

Эта задача разрешается при помощи теорий прочности, которые дают возможность судить о прочности элемента, в сложном напряжённом состоянии по предельному напряжению, определённом из опыта при простом растяжении или сжатии.

Так как напряжённое состояние любой точки изучаемого элемента при любой комбинации действующих на него сил, в самом общем случае, характеризуется тремя главными напряжениями  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  и  $\sigma_3$ , задача теории прочности может быть сформулирована так:

составить условие прочности для общего случая напряжённого состояния, если известны главные напряжения  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  и  $\sigma_3$  и определены из опыта для данного материала предельные напряжения  $\sigma_0$  при простом растяжении и сжатии.

Ниже изложены некоторые из существующих теорий прочности.

### ТЕОРИЯ НАИБОЛЬШИХ НОРМАЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ

Разрушение элемента в сложном напряжённом состоянии наступит тогда, когда наибольшее нормальное напряжение в нём достигнет предельного напряжения  $\sigma_0$  при простом растяжении или сжатии.

Следовательно, если  $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ , то условие прочности (35) будут иметь вид:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &\leq R_z \\ \sigma_3 &\leq R_d \end{aligned} \right\}. \quad (185)$$

### ТЕОРИЯ НАИБОЛЬШИХ ДЕФОРМАЦИЙ

Согласно этой теории, фактором, вызывающим разрушение, является наибольшая относительная линейная деформация. Предполагается, что в общем случае сложного напряжённого состояния разрушение элемента обусловливается достижением наибольшей относительной линейной деформацией предельной величины относительного удлинения или укорочения  $\epsilon_0$ , возникающего при простом растяжении или сжатии.

Таким образом, если  $\epsilon_1 > \epsilon_2 > \epsilon_3$ , то разрушение наступит при  $\epsilon_1 = \epsilon_0$ . Допускаемая величина относительной деформации, очевидно, будет:

$$\epsilon_0 = \frac{R}{E},$$

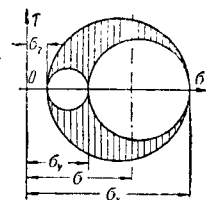
где  $R$  — наибольшая по абсолютному значению величина  $R_z$  или  $R_d$ ;  
 $E$  — модуль упругости.

Условие прочности:

$$\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) \leq R. \quad (186)$$

### ТЕОРИЯ НАИБОЛЬШИХ КАСАТЕЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ

Для материалов с одинаковой сопротивляемостью растяжению и сжатию. По этой теории предполагается, что элемент в сложном напряжённом состоянии будет разрушен тогда, когда наибольшее касательное напряжение достигнет предельной величины касательного напряжения при простом растяжении. В этом случае допускаемая величина для наибольшего касательного напряжения



Фиг. 118

равна  $\frac{R}{2}$ . Если в опас-

ной точке исследуемого элемента  $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ , то условию прочности можно придать вид:

$$\sigma_1 - \sigma_3 \leq R. \quad (187)$$

Для материалов с различной сопротивляемостью растяжению и сжатию. На фиг. 118 показан общий случай напряжённого состояния тела при помощи кругов напряжений. Нормальные и касательные напряжения по любой площадке изображаются координатами соответствующих точек, лежащих в пределах заштрихованной площади.

По чертежу ясно, что из всех точек с одинаковыми нормальными напряжениями наиболее опасными являются точки, лежащие на периметре большого круга, так как в этих точках касательные напряжения достигают наибольших значений. Поэтому для определения предельных напряжений достаточно пользоваться одной внешней окружностью.

На фиг. 119 правый круг с диаметром  $OA$  изображает предельное состояние при простом растяжении, левый круг с диаметром  $OC$  — предельное состояние при простом сжатии, а средний круг с диаметром  $BD$  — при чистом сдвиге. Если эти круги построить по данным опыта, то предельное состояние при любом сложном напряжённом состоянии изобразится кривыми, огибающими эти предельные окружности.

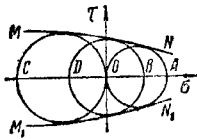
Если огибающие кривые  $MN$  и  $M_1N_1$  заменить прямыми (фиг. 120), то по известным предельным напряжениям при простом растяжении  $\sigma_0$  и при простом сжатии  $\sigma'_0$ , пре-

дельное напряжение при чистом сдвиге  $\tau_0$  определится из чертежа

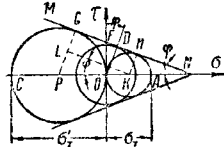
$$\tau_0 = \overline{OD} = \overline{OF} \cos \varphi = \frac{1}{2} LK \cos \varphi = \\ = \frac{1}{4} (\sigma_0 - \sigma'_0) \cos^2 \varphi,$$

где

$$\cos \varphi = \frac{\sqrt{PK^2 - PL^2}}{PK} = \frac{\sqrt{\sigma_0 \cdot \sigma'_0}}{\frac{1}{2} (\sigma_0 - \sigma'_0)}.$$



Фиг. 119



Фиг. 120

Следовательно,

$$\tau_0 = \frac{\sigma_0 \cdot \sigma'_0}{\sigma_0 - \sigma'_0}.$$

В общем случае напряжённого состояния круг напряжений займёт некоторое промежуточное положение. Предельное состояние выразится следующим соотношением между главными напряжениями:

$$\sigma_1 - \frac{\sigma_0}{\sigma'_0} \sigma_3 = \sigma_0,$$

которое легко получается из геометрических построений на фиг. 120.

Условие прочности:

$$\sigma_1 - n \sigma_3 \leq R_z, \quad (188)$$

где  $n = \frac{R_z}{R_d}$ .

### ТЕОРИЯ ВНУТРЕННЕГО ТРЕНИЯ

До перехода за предел упругости сопротивление тела определяется сцеплением частиц между собой. За пределом упругости, когда уже появились некоторые сдвиги, сопротивление тела определяется не только силами сцепления, но и внутренним трением, возникающим между частицами материала.

Предполагается, что свойства этого внутреннего трения аналогичны свойствам обычного трения первого рода при нажатии двух тел. Следовательно, сила трения  $T$  пропорциональна нажатии  $N$ :

$$T = fN,$$

где  $f$  — коэффициент трения.

Таким образом, по этой теории сопротивление сдвига будет тем больше, чем больше соответствующее сжимающее нормальное напряжение. При наличии растягивающих нормальных напряжений силы внутреннего трения будут иметь обратный знак и уже не увеличивают, а уменьшают сопротивление материала.

Если через  $c$  обозначить предельное напряжение при сдвиге, то условие безопасности против скольжения:

$$|\tau| + f \sigma \leq c. \quad (189)$$

Величины  $\tau$  и  $\sigma$  могут быть выражены через главные напряжения. Если  $\sigma_1 > \sigma_3 > \sigma_2$ , то условие прочности:

$$\sigma_1 - \frac{1}{(f + \sqrt{1 + f^2})^2} \cdot \sigma_3 \leq \frac{2c}{f + \sqrt{1 + f^2}}. \quad (190)$$

Сравнение (188) с (190) даст:

$$\left. \begin{aligned} f &= \frac{R_d - R_z}{2\sqrt{R_z R_d}} \\ c &= \frac{1}{2} \sqrt{R_z R_d} \end{aligned} \right\}. \quad (191)$$

### ТЕОРИЯ НАИБОЛЬШИХ УДЛИНЕНИЙ И СДВИГОВ

Эта теория базируется на рассмотрении деформаций, причём она ограничивает как величины относительных удлинений и сжатий, так и величины относительных сдвигов.

Для относительных удлинений и сжатий в качестве пределов принимают величины их, соответствующие пределу упругости при растяжении и сжатии, а предел для относительного сдвига принимают равным его величине, соответствующей пределу упругости при чистом сдвиге (при кручении).

В этой теории имеется в виду мягкая сталь, и предел упругости при растяжении и сжатии принимается одинаковым, а предел упругости при кручении равным 0,6 величины предела упругости при растяжении и сжатии.

Условие прочности выражается двумя неравенствами, которые должны быть удовлетворены одновременно; если предположить, что

$$\sigma_1 > \sigma_2 \text{ и } \sigma_3 = 0,$$

то

$$|\sigma_1 - \mu \sigma_3| \leq R, \quad (192)$$

$$\max \tau \leq 0,6 R. \quad (193)$$

### ТЕОРИЯ УДЕЛЬНОЙ ЭНЕРГИИ ДЕФОРМАЦИИ

Эта теория основывается на предположении, что количество работы, приходящейся на единицу объёма тела и необходимой для того, чтобы довести материал до предельного состояния, одинаково, независимо от характера напряжённого состояния. Удельная работа деформации или численно ей равная потенциальная энергия единицы объёма, выраженная через главные напряжения  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  и  $\sigma_3$ , в общем случае напряжённого состояния равна (фиг. 121)

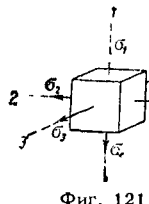
$$V = \frac{1}{2E} [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \\ - 2\mu (\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_1 \sigma_3 + \sigma_2 \sigma_3)]. \quad (194)$$

Эту работу следует сравнивать с работой, затраченной в случае простого растяжения—

сжатия до предельного состояния. Выражение этой работы:

$$V_0 = \frac{\sigma_0^2}{2E}. \quad (195)$$

$$\text{Условия прочности:} \\ V \leq V_0. \quad (196)$$



После подстановки (194) и (195) в (196) и замены  $\sigma_i$  через  $R$  будет:

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3) \leq R^2. \quad (197)$$

### ТЕОРИЯ УДЕЛЬНОЙ ЭНЕРГИИ ИЗМЕНЕНИЯ ФОРМЫ

Предлагается при условии  $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 < 0$  вместо выражения полной потенциальной энергии брать только ту часть потенциальной энергии, которая не связана с изменением объема. Такое предположение обосновывается тем, что появление остаточной деформации в материале, как правило, сопровождается сдвигами. Развитие же сдвигов ведёт, как известно, главным образом, к изменению формы тела без изменения его объема.

Эта теория хорошо согласуется с опытом и считается в настоящее время одной из наиболее совершенных теорий прочности.

Потенциальная энергия при деформации 1 см<sup>3</sup> материала выражается уравнением (194).

Это выражение путём алгебраических преобразований можно свести к виду:

$$U = \frac{1-2\mu}{E}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2 + \frac{1+\mu}{6E}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2]. \quad (198)$$

Потенциальная энергия, представленная первым членом этой формулы, связана с той частью деформации, которая влечёт за собой изменение объема элемента, а второй член этой формулы выражает потенциальную энергию изменения формы элемента.

Для получения энергии изменения формы при простом растяжении или сжатии до предельного состояния, во втором члене формулы (198) нужно положить

$$\sigma_1 = \sigma_0, \text{ а } \sigma_2 = \sigma_3 = 0, \\ \text{что даёт}$$

$$U_0 = \frac{1+\mu}{3E} \sigma_0^2.$$

Если предельное напряжение  $\sigma_0$  заменить допускаемым  $R$ , то можно представить условие прочности в следующем виде:

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 \leq 2R^2. \quad (199)$$

### ТЕОРИЯ ПРОЧНОСТИ Ю. И. ЯГН

Известно, что задача, которая решается теориями прочности, состоит в отыскании функций вида:

$$f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = c_1, \quad (200)$$

которая определяла бы условие для главных напряжений  $\sigma_1, \sigma_2$  и  $\sigma_3$ , при котором напряжённое состояние будет обладать одинаковой степенью безопасности.

Для пластических материалов эта функция имеет вид (199).

Ю. И. Ягн полагает, что с достаточной точностью можно в общем виде зависимость (200) представить в форме уравнения второй степени, поставив условие, что оно подобно выражению (199) было симметричным по отношению ко всем трём главным напряжениям, что вытекает из предполагаемой изотропности материала.

Этому требованию удовлетворяет следующая функция:

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + m(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2 + n(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = l. \quad (201)$$

Левая часть выражения (201) состоит из потенциальной энергии изменения формы элемента  $u''$ , потенциальной энергии изменения объема элемента  $u'$  и относительного приращения объема (объемная деформация), которая пропорциональна сумме трёх главных нормальных напряжений. Уравнение (201) можно представить в виде:

$$u'' + u' + \varepsilon_v = l. \quad (202)$$

Коэффициенты  $m, n$  и  $l$  для каждого материала должны быть определены из опытов, причём проще всего очевидно пользоваться испытаниями на растяжение, сжатие и сдвиг (кручение). Тогда коэффициенты  $m, n$  и  $l$  выразятся в зависимости от допускаемых напряжений:  $R_z, R_d$  и  $R_s$ .

Условия (201) для случаев:

растяжения  $\sigma_1 = R_z; \sigma_2 = \sigma_3 = 0;$

сжатия  $\sigma_1 = \sigma_2 = 0; \sigma_3 = -R_d;$

сдвига (кручения)  $\sigma_1 = -\sigma_2 = R_s; \sigma_3 = 0,$  дают

$$R_z^2(2+m) + nR_z = l,$$

$$R_d^2(2+m) - nR_d = l,$$

$$6R_s^2 = l.$$

Совместное решение последних уравнений даёт:

$$m = \frac{2}{R_z}(3R_d - R_z)$$

$$l = 6R_s^2.$$

$$n = \frac{6R_s^2}{R_z R_d}(R_d - R_z)$$

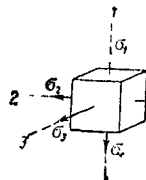
После подстановки полученных коэффициентов в (201) будет:

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + \frac{2}{R_z}(3R_d - R_z)(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2 + \frac{6R_s^2}{R_z R_d}(R_d - R_z)(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \leq 6R_s^2 \quad (203)$$

сжатия до предельного состояния. Выражение этой работы:

$$V_0 = \frac{\sigma_0^2}{2E}. \quad (195)$$

$$\text{Условия прочности:} \\ V \leq V_0. \quad (196)$$



Фиг. 121

После подстановки (194) и (195) в (196) и замены  $\sigma_0$  через  $R$  будет:

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3) \leq R^2. \quad (197)$$

### ТЕОРИЯ УДЕЛЬНОЙ ЭНЕРГИИ ИЗМЕНЕНИЯ ФОРМЫ

Предлагается при условии  $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 < 0$  вместо выражения полной потенциальной энергии брать только ту часть потенциальной энергии, которая не связана с изменением объёма. Такое предположение обосновывается тем, что появление остаточной деформации в материале, как правило, сопровождается сдвигами. Развитие же сдвигов ведёт, как известно, главным образом, к изменению формы тела без изменения его объёма.

Эта теория хорошо согласуется с опытом и считается в настоящее время одной из наиболее совершенных теорий прочности.

Потенциальная энергия при деформации 1 см<sup>3</sup> материала выражается уравнением (194). Это выражение путём алгебраических преобразований можно свести к виду:

$$U = \frac{1-2\mu}{E}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2 + \frac{1+\mu}{6E}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2]. \quad (198)$$

Потенциальная энергия, представленная первым членом этой формулы, связана с той частью деформации, которая влечёт за собой изменение объёма элемента, а второй член этой формулы выражает потенциальную энергию изменения формы элемента.

Для получения энергии изменения формы при простом растяжении или сжатии до предельного состояния, во втором члене формулы (198) нужно положить

$$\sigma_1 = \sigma_0, \text{ а } \sigma_2 = \sigma_3 = 0,$$

что даёт

$$U_0 = \frac{1+\mu}{3E} \sigma_0^2.$$

Если предельное напряжение  $\sigma_0$  заменить допускаемым  $R$ , то можно представить условие прочности в следующем виде:

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 \leq 2R^2. \quad (199)$$

### ТЕОРИЯ ПРОЧНОСТИ Ю. И. ЯГН

Известно, что задача, которая решается теориями прочности, состоит в отыскании функций вида:

$$f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = c_1, \quad (200)$$

которая определяла бы условие для главных напряжений  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  и  $\sigma_3$ , при котором напряжённое состояние будет обладать одинаковой степенью безопасности.

Для пластических материалов эта функция имеет вид (199).

Ю. И. Ягн полагает, что с достаточной точностью можно в общем виде зависимость (200) представить в форме уравнения второй степени, поставив условие, что оно подобно выражению (199) было симметричным по отношению ко всем трём главным напряжениям, что вытекает из предполагаемой изотропности материала.

Этому требованию удовлетворяет следующая функция:

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + m(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2 + n(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = l. \quad (201)$$

Левая часть выражения (201) состоит из потенциальной энергии изменения формы элемента  $u^*$ , потенциальной энергии изменения объёма элемента  $u'$  и относительного приращения объёма (объёмная деформация), которая пропорциональна сумме трёх главных нормальных напряжений. Уравнение (201) можно представить в виде:

$$u^* + u' + \epsilon_v = l. \quad (202)$$

Коэффициенты  $m$ ,  $n$  и  $l$  для каждого материала должны быть определены из опытов, причём проще всего очевидно пользоваться испытаниями на растяжение, сжатие и сдвиг (кручение). Тогда коэффициенты  $m$ ,  $n$  и  $l$  выразятся в зависимости от допускаемых напряжений:  $R_z$ ,  $R_d$  и  $R_s$ .

Условия (201) для случаев:

растяжения  $\sigma_1 = R_z$ ;  $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ ;

сжатия  $\sigma_1 = \sigma_3 = 0$ ;  $\sigma_2 = -R_d$ ;

сдвига (кручения)  $\sigma_1 = -\sigma_2 = R_s$ ;  $\sigma_3 = 0$ , дают

$$R_z^2(2+m) + nR_z = l,$$

$$R_d^2(2+m) - nR_d = l,$$

$$6R_s^2 = l.$$

Совместное решение последних уравнений даёт:

$$m = \frac{2}{R_z}(3R_d - R_z)$$

$$l = 6R_s^2.$$

$$n = \frac{6R_s^2}{R_z R_d}(R_d - R_z)$$

После подстановки полученных коэффициентов в (201) будет:

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + \frac{2}{R_z}(3R_d - R_z)(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2 + \frac{6R_s^2}{R_z R_d}(R_d - R_z)(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \leq 6R_s^2 \quad (203)$$

Таблица 13

Сравнение расчётов по формулам различных теорий прочности

Наименование теории прочности	Расчётная формула	Случай, когда $\sigma_1$ , $\sigma_2$ и $\sigma_3$ определяются уравнениями: $\sigma_1 = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau^2}$ $\sigma_2 = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) - \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau^2}$ $\sigma_3 = 0$	Частный случай, когда $\sigma_y = 0$
Теория наибольших нормальных напряжений	$\sigma_1 < R_z$ $ \sigma_2  <  R_d $	$\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau^2} < R_z$ $ \sigma_2  = \left  \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau^2} \right  < R_d$	$\sigma_1 = \frac{\sigma_x}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{4} + 4\tau^2} < R_z$ $ \sigma_2  = \left  \frac{\sigma_x}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{4} + 4\tau^2} \right  < R_d$
Теория наибольших удлинений	$\epsilon_1 < \epsilon_d$ ; $ \epsilon_2  < \epsilon_d$ $\sigma_1 - \mu\sigma_2 < R_z$ $ \sigma_2 - \mu\sigma_1  < R_d$	$\frac{1-\mu}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1+\mu}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau^2} < R_z$ $\left  \frac{1-\mu}{2}(\sigma_x + \sigma_y) - \frac{1+\mu}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau^2} \right  < R_d$	$\frac{1-\mu}{2}\sigma_x + \frac{1+\mu}{2}\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{4} + 4\tau^2} < R_z$ $\left  \frac{1-\mu}{2}\sigma_x - \frac{1+\mu}{2}\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{4} + 4\tau^2} \right  < R_d$
Теория наибольших касательных напряжений ( $R_z = R_d$ )	$\max \tau < R_s$ $\sigma_1 - \sigma_2 < R_{zd}$	$\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau^2} < R_{zd}$	$\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{4} + 4\tau^2} < R_{zd}$
Теория наибольших касательных напряжений ( $R_z \neq R_d$ )	$\sigma_1 - n\sigma_2 < R_z$ $n = \frac{R_z}{R_d}$	$\frac{1-n}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1+n}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau^2} < R_z$	$\frac{1-n}{2}\sigma_x + \frac{1+n}{2}\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{4} + 4\tau^2} < R_z$
Теория внутреннего трения	$\frac{ \tau  + f\sigma}{1} < c$ $\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{R_d - R_z} \left( f + \sqrt{1 + f^2} \right) < \frac{2c}{f + \sqrt{1 + f^2}}$ $f = \frac{2\sqrt{R_z R_d}}{R_d - R_z}$ ; $c = \frac{1}{2}\sqrt{R_z R_d}$	$\frac{1-n}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1+n}{2}\sqrt{(\sigma_x + \sigma_y)^2 + 4\tau^2} < R_z$	$\frac{1-n}{2}\sigma_x + \frac{1+n}{2}\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{4} + 4\tau^2} < R_z$

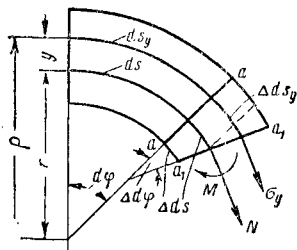
Продолжение табл. 13

Наименование теории прочности	Расчётная формула	Случай, когда $\sigma_1$ , $\sigma_2$ и $\sigma_3$ определяются уравнениями: $\sigma_1 = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x + \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}$ $\sigma_2 = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) - \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x + \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}$ $\sigma_3 = 0$	Частный случай, когда $\sigma_y = 0$
Теория наибольших удлинений и сдвигов	$ \sigma_1 - \mu\sigma_2  \leq R_{zd}$ $\max \tau \leq 0,6R_{zd}$	$\left  \frac{1-\mu}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1+\mu}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} \right  \leq R_{zd}$ $\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} \leq 1,2R_{zd}$	$\left  \frac{1-\mu}{2}\sigma_x + \frac{1+\mu}{2}\sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau_{xy}^2} \right  \leq R_{zd}$ $\sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau_{xy}^2} \leq 1,2R_{zd}$
Теория удельной энергии деформации	$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3) \leq R_z^2$ $\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \tau_{xy}^2 - 2\mu\sigma_1\sigma_2 \leq R_z^2$	$\sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - 2\mu\sigma_x\sigma_y + 2(1+\mu)\tau_{xy}^2} \leq R_z$	$\sqrt{\sigma_x^2 + 2(1+\mu)\tau_{xy}^2} \leq R_z$
Теория удельной энергии изменений формы	$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 \leq 2R_z^2$ $\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2 \leq 2R_s^2$	$\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + \sigma_x^2 + \sigma_y^2 + 3\tau_{xy}^2} \leq R_z$	$\sqrt{\sigma_x^2 + 3\tau_{xy}^2} \leq R_z$
Теория прочности Ю. И. Ягн	$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + \frac{2}{R_z}(3R_d - R_z)(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2 + \frac{6R_s}{R_z R_d}(R_d - R_z)(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \leq 6R_s^2$	$(2+m)\left(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + 2\tau_{xy}^2\right) - 2(1-m)(\sigma_x\sigma_y - \tau_{xy}^2) + n(\sigma_x + \sigma_y) \leq 6R_s^2$ $m = \frac{2}{R_z}(3R_d - R_z); \quad n = \frac{6R_s}{R_z R_d}(R_d - R_z)$	$\sqrt{\frac{1}{6}\left[(2+m)\left(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + 2\tau_{xy}^2\right) + 2(1-m)\tau_{xy}^2 + n\sigma_y\right]} \leq R_s$
Теория прочности хрупких материалов	$\sqrt{\frac{2}{\pi} \cdot \frac{E\tau}{a_{ik}}} \leq R_z$		

## РАСЧЁТ БРУСЬЕВ БОЛЬШОЙ КРИВИЗНЫ

### НАПРЯЖЕНИЕ В КРИВОМ БРУСЕ С ПОПЕРЕЧНЫМ СЕЧЕНИЕМ, ИМЕЮЩИМ ОСЬ СИММЕТРИИ В ПЛОСКОСТИ КРИВИЗНЫ

Из кривого бруса (фиг. 122) выделяется элементарный отрезок длиной  $ds$ , измеряемый по произвольному волокну. Будем считать начальное сечение этого отрезка закреплённым. Пусть в этом случае второе его сечение, находящееся под одновременным воздействием внутренних усилий  $M$  и  $N$ , приложенных в уровне волокна  $ds$ , в соответствии с гипотезой плоских сечений переместится как целое в новое положение  $a_1 - a_1$ . Это перемещение определяется двумя параметрами — линейным перемещением на величину  $\Delta ds$  и вращением на угол  $\Delta d\varphi$ .



Фиг. 122

На основании геометрических построений получается:

$$\epsilon_y = \frac{\Delta ds_y}{ds_y} = \frac{\Delta ds + y \Delta d\varphi}{r \Delta d\varphi} = \frac{1}{\rho} \left( r \frac{\Delta ds}{\Delta d\varphi} + y \right) = \frac{1}{\rho} (r\epsilon + y\alpha).$$

Здесь  $\epsilon = \frac{\Delta ds}{ds}$  — относительное удлинение волокна;

$\alpha = \frac{\Delta d\varphi}{d\varphi}$  — относительный поворот сечения.

Эти величины принимаются за новые два параметра, определяющие смещение плоскости  $a - a$ . Выражение нормального напряжения для волокна  $ds_y$ :

$$\sigma_y = \frac{E}{\rho} (r\epsilon + y\alpha). \quad (206)$$

Для определения двух параметров перемещения  $\epsilon$  и  $\alpha$ , входящих в полученное выражение нормального напряжения, составляют два уравнения статики:

$$\int_F \sigma_y dF = N; \quad \int_F \sigma_y y \cdot dF = M.$$

Значение  $\sigma_y$  подставляют по формуле (206):

$$Er\epsilon \int \frac{dF}{\rho} + E\alpha \int \frac{y dF}{\rho} = N;$$

$$Er\epsilon \int \frac{y dF}{\rho} + E\alpha \int \frac{y^2 dF}{\rho} = M.$$

В состав уравнений вошли геометрические характеристики, в которых элемент

площади  $dF$  разделён на радиус кривизны  $\rho$  волокна:

$$\left. \begin{aligned} \int \frac{dF}{\rho} &= F_\rho \text{ — радиальная площадь} \\ \int \frac{y \cdot dF}{\rho} &= S_\rho \text{ — радиальный статический момент} \\ \int \frac{y^2 dF}{\rho} &= I_\rho \text{ — радиальный момент инерции} \end{aligned} \right\} \quad (207)$$

Примеры их подсчёта будут приведены ниже.

Для разделения неизвестных  $\epsilon$  и  $\alpha$  по уравнениям выбирают такое волокно  $ds$ , для которого  $\int \frac{y}{\rho} dF = 0$ , т. е. совмещают его с центром тяжести радиальной площади.

Тогда из уравнений статики:

$$\epsilon = \frac{N}{r E F_\rho}; \quad \alpha = \frac{M}{E I_\rho}. \quad (208)$$

Подстановка  $\epsilon$  и  $\alpha$  в формулу (206) даёт значение  $\sigma_y$ :

$$\sigma_y = \frac{1}{\rho} \left( \frac{N}{F_\rho} + \frac{M \cdot y}{I_\rho} \right). \quad (209)$$

Эта формула нормального напряжения структурно совпадает с соответственной формулой теории прямого бруса при внецентренном растяжении.

Определение положения центра тяжести радиальной площади может быть выполнено общим приёмом написания статических моментов:

$$\begin{aligned} r = \frac{S_\rho}{F_\rho} &= \frac{\int \rho \frac{dF}{\rho}}{\int \frac{dF}{\rho}} = \frac{F}{F_\rho}; \\ r &= \frac{F}{F_\rho}, \end{aligned} \quad (210)$$

т. е. это есть частное от деления простой площади на радиальную. Волокно  $ds$  в этом случае оказывается по отношению к центру тяжести  $F$  сдвинутым к центру кривизны.

Пользуясь тем же общим принципом, можно непосредственно написать и формулу касательных напряжений

$$\tau_y = \frac{Q_y \cdot S_y}{\rho b I_\rho}. \quad (211)$$

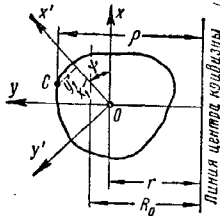
### ОБЩИЙ СЛУЧАЙ ВНЕЦЕНТРЕННОГО ДЕЙСТВИЯ СИЛ НА ПЛОСКИЙ КРИВОЙ БРУС С ПОПЕРЕЧНЫМ СЕЧЕНИЕМ ЛЮБОЙ ФОРМЫ

На фиг. 123 изображено поперечное сечение произвольного вида кривого бруса, отнесённое к произвольным осям  $(x; y)$  с началом координат в произвольной точке  $O$ .

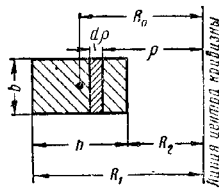


Применяя закон плоских сечений, считают, что поперечное сечение, переместившись в новое положение, может быть определено тремя величинами:

- 1) перемещением точки  $O$  на величину  $\Delta ds$ ;
- 2) вращением относительно оси  $x'$  на величину  $d\alpha$ ;
- 3) вращением относительно оси  $y'$  на величину  $d\beta$ .



Фиг. 123



Фиг. 124

В этом случае относительная деформация волокна, совпадающего с точкой  $C$  поперечного сечения, будет:

$$\begin{aligned}\epsilon_c &= \frac{\Delta ds_c}{ds_c} = \frac{\Delta ds + y' d\alpha + x' d\beta}{r d\varphi} = \\ &= \frac{1}{r} \left( r \frac{\Delta ds}{ds} + y' \frac{d\alpha}{d\varphi} + x' \frac{d\beta}{d\varphi} \right); \\ \epsilon_c &= \frac{1}{r} (r\epsilon + y'\alpha + x'\beta);\end{aligned}$$

$\epsilon = \frac{\Delta ds}{ds}$  — относительное удлинение волокна

для точки  $O$ ;

$\alpha = \frac{d\alpha}{d\varphi}$  — относительное вращение около оси  $x'$ ;

$\beta = \frac{d\beta}{d\varphi}$  — относительное вращение около оси  $y'$ ;

$d\varphi$  — центральный угол элементарного отрезка кривого бруса.

Нормальное напряжение:

$$\sigma_c = \frac{F}{\rho} (r\epsilon + y'\alpha + x'\beta). \quad (212)$$

Величины  $\epsilon$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  принимаются за параметры, определяющие смещение поперечного сечения. Они определяются из трёх уравнений статики, считая, что в общем случае на поперечное сечение действуют усилия  $N$ ,  $M_x$ ,  $M_y$ .

Уравнения статики будут иметь вид:

$$\int \sigma_c dF = N; \quad \int \sigma_c y' dF = M'_x; \quad \int \sigma_c x' dF = M'_y.$$

Подстановка  $\sigma_c$  в подинтегральные выражения даёт:

$$\begin{aligned}Er\epsilon \int \frac{dF}{\rho} + E\alpha \int \frac{y' dF}{\rho} + E\beta \int \frac{x' dF}{\rho} &= N; \\ Er\epsilon \int \frac{y' dF}{\rho} + E\alpha \int \frac{y'^2 dF}{\rho} + E\beta \int \frac{x' y' dF}{\rho} &= M'_x; \\ Er\epsilon \int \frac{x' dF}{\rho} + E\alpha \int \frac{x' y' dF}{\rho} + E\beta \int \frac{x'^2 dF}{\rho} &= M'_y.\end{aligned}$$

Если удовлетворить условиям

$$\int \frac{x' dF}{\rho} = 0; \quad \int \frac{y' dF}{\rho} = 0; \quad \int \frac{x' y' dF}{\rho} = 0, \quad (213)$$

то все уравнения разделяются. Из этих уравнений легко определить параметры  $\epsilon$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$

$$\epsilon = \frac{N}{rEF_\rho}; \quad \alpha = \frac{M'_x}{EI_x}; \quad \beta = \frac{M'_y}{EI_y}. \quad (214)$$

Подстановка в формулу (212) даёт:

$$\sigma_c = \frac{1}{\rho} \left( \frac{N}{F_\rho} + \frac{M'_x y'}{I_x} + \frac{M'_y x'}{I_y} \right). \quad (215)$$

Это есть самая общая формула напряжённого состояния кривого бруса.

Условия (213) указывают, что начало координат следует взять в центре тяжести радиальной площади, а оси повернуть до совпадения с главными.

Поворот осей подсчитывают по формуле:

$$\operatorname{tg} 2\psi = -\frac{2I_{xy}}{I_x - I_y}. \quad (216)$$

Здесь

$$\begin{aligned}I_x &= \int \frac{y^2 dF}{\rho}; \quad I_y = \int \frac{x^2 dF}{\rho}; \quad I_{xy} = \\ &= \int \frac{xy dF}{\rho}.\end{aligned} \quad (217)$$

Переход к радиальным характеристикам в осях  $x'y'$  выполняется по обычным формулам сопротивления материалов.

## ВЫЧИСЛЕНИЕ РАДИАЛЬНЫХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК

### Радиальные площади

#### Прямоугольник

$$F_\rho = \int \frac{dF}{\rho}. \quad (218)$$

Разбивая сечение на элементарные полоски толщиной  $d\rho$  (фиг. 124), получают:

$$dF = b d\rho.$$

$$F_\rho = \int_{R_1}^{R_2} \frac{b d\rho}{\rho} = b \ln \frac{R_2}{R_1}. \quad (219)$$

#### Трапеция (фиг. 125)

Применяя тот же приём, находят:

$$F_\rho = \left[ \frac{b_2 R_1 - b_1 R_2}{h} \right] \ln \frac{R_1}{R_2} - (b_2 - b_1). \quad (220)$$

#### Круг (фиг. 126)

$$F_\rho = \pi \left[ 2R_0 - \sqrt{4R_0^2 - d} \right]. \quad (221)$$

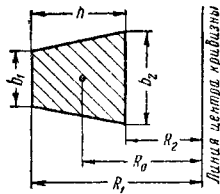
Пользуясь формулами (219), (220) и (221), можно для соответствующих профилей подсчитать положение центра тяжести радиальной площади (фиг. 127

$$r = \frac{F}{F_\rho}. \quad (222)$$

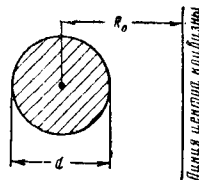
Вторая координата центра тяжести при несимметричном профиле может быть найдена способом статических моментов.

Радиальный статический момент в этом случае приходится определять относительно горизонтальной оси. Например, радиальный статический момент прямоугольника относительно оси, проходящей через основание, равен:

$$S_\rho = F_\rho \cdot \frac{b}{2} = \frac{b^2}{2} \ln \frac{R_1}{R_2}. \quad (223)$$



Фиг. 125



Фиг. 126

Путём суммирования отсюда можно перейти к любому профилю, составленному из прямоугольников.

#### Радиальный момент инерции

Радиальный момент инерции относительно оси x (фиг. 128):

$$I_x = \int \frac{y^2 dF}{\rho}.$$

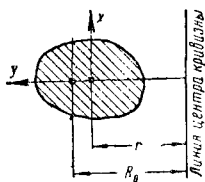
Выполняя преобразование:

$$\begin{aligned} I_x &= \int \frac{y^2 dF}{\rho} = \int \frac{y + r - r}{\rho} y dF = \\ &= \int y dF - r \int \frac{y dF}{\rho} = \\ &= \int y dF = F (R_0 - r), \end{aligned} \quad (224)$$

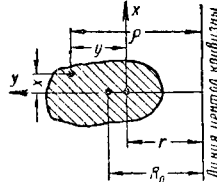
где  $F$  — площадь сечения;

$R_0$  — расстояние до центра тяжести площади  $F$ ;

$r$  — расстояние до центра тяжести радиальной площади  $F_\rho$ .



Фиг. 127



Фиг. 128

С помощью формулы (224) радиальный момент инерции подсчитывается для всех тех сечений, для которых определено  $r$ .

Подсчёт  $r$  выполняется по формуле (222).

Радиальный момент инерции относительно горизонтальной оси  $y$  подсчитывается по формуле (фиг. 129):

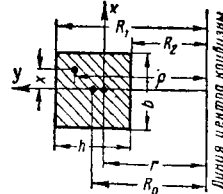
$$I_y = \int \frac{x^2 dF}{\rho}.$$

В случае прямоугольника (элемент прокатного профиля) полагают  $dF = dx dp$ :

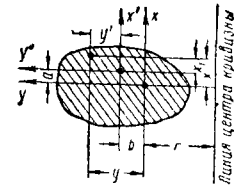
$$I_y = \int \left[ \int x^2 dF \right] \frac{dp}{\rho} = \int \frac{b^3}{12} \cdot \frac{dp}{\rho} = \frac{b^3}{12} \ln \frac{R_1}{R_2},$$

$$I_y = \frac{b^3}{12} \ln \frac{R_1}{R_2}. \quad (225)$$

Пользуясь формулой (225), можно получить величины  $I_y$  для любого профиля, составленного из прямоугольников суммированием.



Фиг. 129



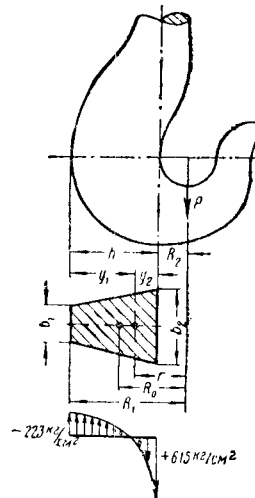
Фиг. 130

Легко показать, что для рассматриваемого случая центробежный момент инерции равен нулю:

$$\begin{aligned} I_{xy} &= \int \frac{xy dF}{\rho} = \int \frac{x(y + r - r) dF}{\rho} = \\ &= \int \frac{xy dF}{\rho} - r \int \frac{xdF}{\rho} = \int x dF = 0, \end{aligned}$$

т. е. прямоугольные оси  $x$  и  $y$  являются главными для радиальной площади (главные радиальные центральные оси инерции).

Формулы преобразования радиальных моментов инерции при изменении координатных осей. Если первоначальные оси сов-



Фиг. 131

мещены с центром тяжести радиальной площади, то при параллельном перенесении осей на отрезки  $a$  и  $b$ , считающиеся по осям  $x'$  и  $y'$ , моменты инерции в новых осях  $x'$  и  $y'$  будут иметь следующие выражения (фиг. 130):

$$\left. \begin{aligned} y' &= y - b; \quad x' = x - a; \\ I_{x'} &= I_x + b^2 F_\rho \\ I_{y'} &= I_y + a^2 F_\rho \\ I_{x'y'} &= I_{xy} + ab F_\rho \end{aligned} \right\} \quad (226)$$

Формулы, соответствующие вращению осей, будут иметь вид (120—122). Главные радиальные осевые моменты инерции вычисляются по формуле:

$$I_{1,2} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}. \quad (227)$$

**Пример.** Определить напряжения в крюке с трапециoidalной формой поперечного сечения при следующих данных (фиг. 131):

$$P = 2 \text{ т}; b_1 = 1 \text{ см}; b_2 = 4 \text{ см};$$

$$R_2 = 3 \text{ см}; h = 9,5 \text{ см}; R_1 = 12,5 \text{ см}.$$

**Решение:**

1. Радиус кривизны (отнесённой к центру тяжести  $F$ )

$$R_0 = R_2 + \frac{b_1 + 2b_2}{b_1 + b_2} \cdot \frac{h}{3} = 6,8 \text{ см}.$$

2. Радиальная площадь и её центр тяжести

$$F_\rho = \left[ \frac{b_2 R_1 - b_1 R_2}{h} \right] \ln \frac{R_1}{R_2} - (b_2 - b_1) = 4,08 \text{ см};$$

$$F = \frac{b_1 + b_2}{2} h = 23,7 \text{ см}^2; r = \frac{F_\rho}{F} = 5,80 \text{ см}; R_0 - r = 1 \text{ см}.$$

3. Радиальный момент инерции

$$I_\rho = F (R_0 - r) = 23,7 \text{ см}^4.$$

4. Внутренние усилия

$$N = 2000 \text{ кг}; M = P r = 11600 \text{ кг} \cdot \text{см}.$$

5. Напряжения в крайних волокнах

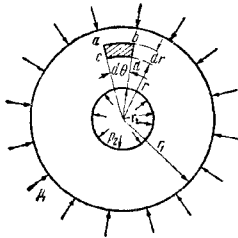
$$\rho_1 = \frac{1}{R_1} \left[ \frac{N}{F_\rho} - \frac{M}{I_\rho} y_1 \right] = -223 \text{ кг/см}^2;$$

$$\sigma_2 = \frac{1}{R_2} \left[ \frac{N}{F_\rho} + \frac{M}{I_\rho} y_2 \right] = 615 \text{ кг/см}^2.$$

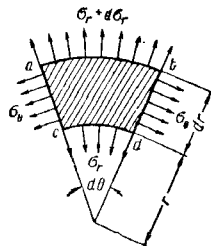
Эпюра напряжений, возникающая в поперечном сечении крюка, изображена на фиг. 131.

## ТОЛСТОСТЕННЫЕ ЦИЛИНДРЫ

Напряжённое состояние и деформации толстостенного цилиндра, подверженного действию равномерно распределённых наружных и внутренних давлений, симметричны относительно оси цилиндра. В силу этого по радиальным и концентрическим цилиндрическим сечениям стенки цилиндра будут действовать главные нормальные напряжения. Обычно обозначают эти главные напряжения соответственно через  $\sigma_\theta$  и  $\sigma_r$ .



Фиг. 132



Фиг. 133

Пусть  $r_1$  и  $r_2$  — наружный и внутренний радиусы поперечного сечения цилиндра, а  $p_1$  и  $p_2$  — наружное и внутреннее давления (фиг. 132).

Выделяют из стенки цилиндра двумя концентрическими и двумя радиальными сечениями элемент  $abcd$ . Размер элемента в направлении оси трубы считают равным единице. По внутренней цилиндрической грани элемента действуют напряжения  $\sigma_r$  (фиг. 133), по наружной цилиндрической грани — напряжение  $\sigma_r + d\sigma_r$ , по его радиальным граням — напряжение  $\sigma_\theta$ .

Условия равновесия рассматриваемого элемента дают только одно уравнение, которое можно получить, проектируя все силы, приложенные к элементу, на направление среднего радиуса элемента

$$(\sigma_r + d\sigma_r) (r + dr) d\theta - \sigma_r r d\theta - 2\sigma_\theta dr \sin \frac{d\theta}{2} = 0,$$

где  $dr$  — размер элемента в радиальном направлении, а

$d\theta$  — центральный угол.

Пренебрегая членами высшего порядка малости, а также учитывая, что  $\sin \frac{d\theta}{2} = \frac{d\theta}{2}$  и сокращая на  $dr \cdot d\theta$ , получают:

$$\sigma_r - \sigma_\theta + \frac{d\sigma_r}{dr} \cdot r = 0. \quad (228)$$

В этом уравнении два неизвестных напряжения  $\sigma_r$  и  $\sigma_\theta$ . Задача статически неопределима. Второе уравнение может быть получено из условий деформации цилиндра. Так как поперечные сечения цилиндра при деформации остаются плоскими, относительное удлинение рассматриваемого элемента в направлении оси цилиндра выражается формулой:

$$\epsilon_z = -\frac{\mu}{E} (\sigma_r + \sigma_\theta) = \text{const}.$$

Следовательно, должна существовать зависимость

$$\sigma_r + \sigma_\theta = \text{const}$$

или

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{d\sigma_\theta}{dr} = 0. \quad (229)$$

Решая совместно уравнения (228) и (229), находят:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= -\frac{A}{r^2} + B \\ \sigma_\theta &= \frac{A}{r^2} + B \end{aligned} \right\}. \quad (230)$$

Произвольные постоянные  $A$  и  $B$  определяются из граничных условий:

$$\begin{aligned} \text{при } r = r_1 \quad \sigma_r &= -p_1; \\ r = r_2 \quad \sigma_r &= -p_2. \end{aligned} \quad (231)$$

После определения произвольных постоянных  $A$  и  $B$  и подстановки их значений в (230) получают

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{p_2 r_2^2 - p_1 r_1^2}{r_1^2 - r_2^2} - \frac{(p_2 - p_1) r_1^2 r_2^2}{(r_1^2 - r_2^2) r^2} \\ \sigma_\theta &= \frac{p_2 r_2^2 - p_1 r_1^2}{r_1^2 - r_2^2} + \frac{(p_2 - p_1) r_1^2 r_2^2}{(r_1^2 - r_2^2) r^2} \end{aligned} \right\}. \quad (232)$$

Формулы (232) показывают, что опасными являются напряжения  $\sigma_\theta$ . Наибольшего значения они достигают на внутренней поверхности цилиндра.

Деформация цилиндра будет заключаться в его удлинении и в радиальном перемещении всех точек его поперечных сечений. Если обозначить радиальное перемещение внутренней цилиндрической поверхности рассматриваемого элемента через  $u$  (фиг. 134), то точки наружной поверхности переместятся в том же направлении на величину  $u + du$ . Таким образом, толщина элемента  $dr$  увеличится на  $du$  и относительное удлинение в радиальном направлении будет

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E} [\sigma_r - \mu \sigma_\theta] = \frac{du}{dr}. \quad (233)$$

Относительное удлинение в направлении напряжения  $\sigma_\theta$  будет равно относительному удлинению радиуса  $r$ :

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{E} [\sigma_\theta - \mu \sigma_r] = \frac{u}{r}. \quad (234)$$

Радиальное перемещение  $u$  может быть определено из (234) и (232)

$$u = \frac{1}{E} \left[ (1 - \mu) \frac{p_2 r_2^2 - p_1 r_1^2}{r_1^2 - r_2^2} \cdot r + (1 + \mu) \frac{(p_2 - p_1) r_1^2 r_2^2}{(r_1^2 - r_2^2) r} \right]. \quad (235)$$

Цилиндр подвержен действию только внутреннего давления  $p_2$ . Формулы для напряжений получают из (232) после подстановки в них  $p_1 = 0$ .

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{p_2 r_2^2}{(r_1^2 - r_2^2)} \left[ 1 - \frac{r_1^2}{r^2} \right] \\ \sigma_\theta &= \frac{p_2 r_2^2}{(r_1^2 - r_2^2)} \left[ 1 + \frac{r_1^2}{r^2} \right] \end{aligned} \right\}. \quad (236)$$

Увеличение внутреннего радиуса цилиндра на основании (235) будет:

$$|u|_{r=r_1} = \frac{p_2 \cdot r_2}{E} \left[ \frac{r_1^2 + r_2^2}{r_1^2 - r_2^2} + \mu \right]. \quad (237)$$

Цилиндр подвержен действию только внешнего давления  $p_1$ . Полагая в (232)

$p_2 = 0$ , получают формулы для напряжений

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= -\frac{p_1 r_1^2}{(r_1^2 - r_2^2)} \left[ 1 - \frac{r_2^2}{r^2} \right] \\ \sigma_\theta &= -\frac{p_1 r_1^2}{(r_1^2 - r_2^2)} \left[ 1 + \frac{r_2^2}{r^2} \right] \end{aligned} \right\}. \quad (238)$$

Уменьшение наружного радиуса от наружного давления на основании (235) равно:

$$|u|_{r=r_1} = \frac{p_1 r_1}{E} \left[ \frac{r_1^2 + r_2^2}{r_1^2 - r_2^2} - \mu \right]. \quad (239)$$

**Составные цилиндры.** Для улучшения работы цилиндров, подвергнутых внутреннему давлению, применяют составные цилиндры (фиг. 135), в которых создают начальные напряжения. Для этого наружный диаметр внутреннего цилиндра делается несколько больше внутреннего диаметра наружного цилиндра. Наружный цилиндр насаживается на внутренний в горячем состоянии. После остывания размеры наружного цилиндра сокращаются и по поверхности соприкосновения цилиндров появляются давления, сжимающие внутреннюю трубу. Начальное давление обозначают через  $p$ .

Пусть наружный радиус внутреннего цилиндра больше внутреннего радиуса наружного цилиндра до нагрева на величину  $\delta$ . После остывания под действием начального давления  $p$  наружный радиус внутреннего цилиндра уменьшится на величину  $\delta_1$ , а внутренний радиус наружного цилиндра увеличится на величину  $\delta_2$ , так как при этом эти радиусы выравниваются, нужно считать, что

$$\delta_1 + \delta_2 = \delta,$$

или на основании (237) и (239):

$$\frac{p r_3}{E} \left[ \frac{r_3^2 + r_2^2}{r_3^2 - r_2^2} - \mu \right] + \frac{p r_3}{E} \left[ \frac{r_1^2 + r_3^2}{r_1^2 - r_3^2} + \mu \right] = \delta,$$

откуда

$$p = \frac{E \delta}{r_3^3} \frac{(r_1^2 - r_3^2)(r_3^2 - r_2^2)}{2(r_1^2 - r_2^2)}. \quad (240)$$

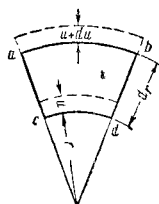
По вычисленному начальному напряжению (240) при помощи формул (236) ~ (239) можно рассчитать напряжения в любой точке составной трубы.

**Пример.** Определить толщину стенки цилиндра, подверженного внутреннему давлению  $p_2 = 200 \text{ кг/см}^2$ , если внутренний диаметр цилиндра  $d_2 = 43,1 \text{ см}$ , а допускаемое напряжение на растяжение  $R_z = 4100 \text{ кг/см}^2$ .

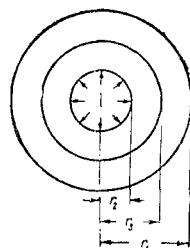
**Решение.** Опасными являются точки внутренней поверхности цилиндра. Главные напряжения в этих точках на основании (236) равны:

$$\sigma_1 = \sigma_\theta = p_2 \frac{r_1^2 + r_2^2}{r_1^2 - r_2^2};$$

$$\sigma_2 = \sigma_r = -p_2.$$



Фиг. 134



Фиг. 135

Условие прочности по теории наибольших нормальных напряжений имеет вид (185):

$$p_2 \frac{r_1^2 + r_2^2}{r_1^2 - r_2^2} \leq R_z,$$

откуда

$$r_1 = r_2 \sqrt{\frac{R_z + p_2}{R_z - p_2}} = 21,55 \sqrt{\frac{4 \cdot 100 - 200}{4 \cdot 100 + 200}} = 22,63 \text{ см},$$

следовательно, толщина стенки  $\delta = 22,63 - 21,55 = 1,08 \text{ см}$ .

По теории наибольших касательных напряжений (187)

$$p_2 \frac{r_1^2 + r_2^2}{r_1^2 - r_2^2} + p_2 \leq R_z,$$

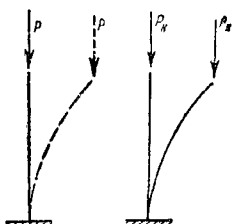
откуда

$$r_1 = r_2 \sqrt{\frac{R_z}{R_z - 2p_2}} = 21,55 \sqrt{\frac{4 \cdot 100}{3 \cdot 100}} = 22,7 \text{ см};$$

$$\delta = 22,70 - 21,55 = 1,15 \text{ см}.$$

## ПРОДОЛЬНЫЙ ИЗГИБ

Рассматривается достаточно длинный, по сравнению с его поперечными размерами, призматический стержень, нижний конец которого заделан, а верхний, свободный конец несёт постепенно нарастающую осевую сжимающую силу  $P$ . Пока сжимающая сила  $P$  сравнительно мала, прямолинейная форма стержня будет устойчивой. При попытках отклонить его в сторону, например, путём приложения горизонтальной силы, он будет возвращаться к первоначальной прямолинейной форме, как только будет удалена добавочная сила, вызвавшая отклонение



Фиг. 136

Фиг. 137

(фиг. 136). При постепенном возрастании силы  $P$  стержень будет всё медленнее возвращаться к первоначальной прямолинейной форме после отклонения его в сторону. Можно довести силу  $P$  до такой величины, при которой стержень после небольшого отклонения его в сторону уже не выпрямится, а останется искривлённым. Если, не удаляя силы  $P$ , выпрямить стержень, то он сохранит прямолинейную форму (фиг. 137). При этом значении силы, называемой критической  $P_k$ , имеет место состояние безразличного равновесия. Под действием этой силы стержень может быть и прямым и искривлённым. В дальнейшем, при бесконечно малом увеличении сжимающей силы, равновесие прямолинейной формы становится неустойчивым (фиг. 138): достаточно небольшого эксцентриситета сжимающей силы  $P$ , неоднородности материала по сечению, лёгкого сотрясения или любого другого воздействия, выводящего стержень из прямолинейной формы, чтобы стержень искривился и не только не вернулся к первоначальной форме, а продолжал искривляться под действием всё возрастающих при искривлении изгибающих моментов.

Описанное явление потери устойчивости при сжатии называется продольным изгибом.

Во избежание продольного изгиба в элементах сооружений и конструкциях, подверженных осевому сжатию, сжимающая сила не должна достигать критического значения  $P_k$ . Поэтому сжатые стержни, помимо усло-

вия прочности (7), должны удовлетворять также и условию устойчивости:

$$\sigma = \frac{P}{F} \leq R_y = \frac{\sigma_k}{m},$$

здесь  $P$  — осевая сжимающая сила;

$F$  — площадь поперечного сечения стержня;

$R_y$  — допускаемое напряжение на устойчивость;

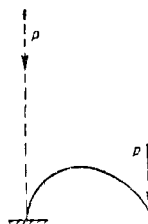
$\sigma_k = \frac{P_k}{F}$  — критическое напряжение;

$m$  — коэффициент запаса на устойчивость.

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ КРИТИЧЕСКОЙ СИЛЫ

Критической силой  $P_k$  называется то наименьшее значение осевой сжимающей силы, при которой прямолинейная форма оси сжатого стержня перестаёт быть формой устойчивого равновесия.

Во всех случаях закрепления концов стержня критическая сила определяется как осевая сила, способная удержать стержень в слегка изогнутой форме.



Фиг. 138



Фиг. 139

Пусть вертикальный призматический стержень длиной  $l$  заделан нижним концом; к верхнему, свободному концу приложена осевая сжимающая сила  $P$  (фиг. 139).

Полагая, что стержень слегка изогнулся в плоскости наименьшей жёсткости, получают изгибающий момент в любом сечении стержня:

$$M = P(f - y),$$

где  $f$  — стрела прогиба верхнего свободного конца;

$y$  — прогиб в рассматриваемом сечении.

Если осевая сжимающая сила  $P$  достигла критического значения, то изогнутая форма стержня должна быть формой равно-

весия, следовательно, должна удовлетворять дифференциальному уравнению изогнутой оси стержня:

$$B \frac{d^2 y}{dx^2} = P(f - y), \quad (241)$$

где  $B = EI_{\min}$  — наименьшая жёсткость стержня при изгибе. Интеграл уравнения (241) имеет вид:

$$y = C_1 \cos nx + C_2 \sin nx + f, \quad (242)$$

где

$$n = \sqrt{\frac{P}{B}}. \quad (243)$$

Граничные условия на концах стержня таковы:

$$\text{при } x = 0 - y = 0; \quad \frac{dy}{dx} = 0;$$

$$\text{при } x = l - y = f. \quad (244)$$

Подстановка (244) в (242) приводит к уравнению:

$$\cos nl = 0, \quad (245)$$

которое удовлетворяется при

$$nl = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2} \text{ и т. д.}$$

Наименьшее значение сжимающей силы, способной удержать изогнутый стержень в равновесии, будет соответствовать первому значению аргумента  $nl$ , следовательно, критическая сила, равна:

$$P_k = \frac{\pi^2 B}{4l^2} = 2,4674 \frac{B}{l^2}. \quad (246)$$

Вывод формулы (246) показывает, что величина критической силы  $P_k$  зависит от размеров стержня, формы его поперечного сечения и модуля упругости материала. Помимо этого, на величину критической силы влияют также и граничные условия, вытекающие из условий закрепления концов стержня. В общем случае любых условий закрепления концов стержня критическая сила:

$$P_k = K \frac{B}{l^2}, \quad (247)$$

где  $K$  есть коэффициент устойчивости, зависящий в случае стержней постоянного сечения только от способа закрепления концов стержня.

В табл. 14 приведены значения коэффициентов  $K$  для обычно встречающихся в практике случаев закрепления концов стержня. Формула (247) может быть преобразована к следующему виду:

$$P_k = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{(\mu l)^2}, \quad (248)$$





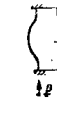
где  $\mu$  — коэффициент приведения длины, зависящий от способа закрепления концов (табл. 14).

Критическое напряжение

$$\sigma_k = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \quad (249)$$

Таблица 14

Значения коэффициентов устойчивости  $K$  и коэффициентов приведённой длины  $\mu$

Схема	Условия закрепления	$K$	$\mu$
	Стержень с одним свободным и другим заделанным концом	2,4674	2
	Стержень с шарнирно опёртыми концами	9,8696	1
	Нижний конец стержня заделан, верхний может перемещаться, но не может поворачиваться	9,8696	1
	Нижний конец стержня заделан, верхний шарнирно опёрт	20,1906	0,7
	Стержень с заделанными концами	39,4784	0,5

где  $\lambda = \frac{\mu l}{i_{\min}}$  — гибкость стержня, представляющая отношение приведённой длины стержня  $\mu l$  к наименьшему радиусу поперечного сечения стержня  $i_{\min}$ .

### СЛУЧАЙ УПРУГИХ ОПОР

1. Нижний конец стержня заделан, верхний упруго опёрт (фиг. 140). Интегрирование дифференциального уравнения изогнутой оси стержня с учётом граничных условий даёт:

$$\operatorname{tg} nl = nl \left( 1 - \frac{n^2 B}{cl} \right). \quad (250)$$

Здесь  $c$  — коэффициент, характеризующий упругость верхней опоры, представляющей величину горизонтальной реакции при отклонении её на  $f = 1$ .

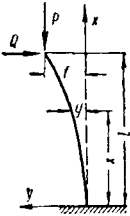
Из уравнения (250) можно определить  $n$ , а по известному  $n$ , при помощи формулы (243), и критическую силу.

2. Оба конца упруго зажаты. Предполагается, что концы стержня не могут перемещаться горизонтально, но могут иметь

упругий поворот. При повороте конца стержня на угол  $\theta$  возникает реактивный момент:

$$M = c\theta.$$

Интегрирование дифференциального уравнения изогнутой оси стержня при соблюдении граничных условий приводит к уравнениям:



и

$$u \operatorname{tg} u + \frac{Pl}{2c} = 0 \quad (251)$$

$$P_k = 4u^2 \frac{B}{l^2}. \quad (252)$$

### ПРОДОЛЬНЫЙ ИЗГИБ ОТ ТЕМПЕРАТУРНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ

Фиг. 140

Стержень, концы которого закреплены так, что удлинение его невозможно, при нагревании до некоторой критической температуры начнёт искривляться.

Сжимающее напряжение в стержне при повышении температуры на  $\Delta t$  равно;

$$\sigma = E\alpha\Delta t. \quad (253)$$

Критическое напряжение при продольном изгибе

$$\sigma_k = \frac{P_k}{F} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{F(\mu l)^2}. \quad (254)$$

Приравняв правые части (253) и (254), получают критическое повышение температуры:

$$\Delta t = \frac{\pi^2 I_{\min}}{\alpha F(\mu l)^2} = \frac{\pi^2}{\alpha} \left( \frac{i_{\min}}{\mu l} \right)^2, \quad (255)$$

где  $I_{\min}$  — наименьший радиус инерции сечения;

$\mu$  — коэффициент, зависящий от заделки концов стержня (табл. 14).

### ВЛИЯНИЕ ЭКСЦЕНТРИСИТЕТА ПРИЛОЖЕНИЯ СЖИМАЮЩЕЙ СИЛЫ

Пусть сжимающие силы действуют эксцентрично на стержень, оба конца которого шарнирно опёрты и лежат в плоскости наименьшей жёсткости стержня (фиг. 141). Дифференциальное уравнение изогнутой оси стержня будет

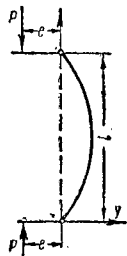
$$B \frac{d^2 y}{dx^2} + P \cdot y = -P \cdot e. \quad (256)$$

Решение этого уравнения, удовлетворяющее граничным условиям, имеет вид:

$$y = e \left( \operatorname{tg} \frac{nl}{2} \sin nx + \cos nx - 1 \right), \quad (257)$$

где

$$n = \sqrt{\frac{P}{B}}.$$



Фиг. 141

Прогиб посредине

$$y_{\max} = e \left( \sec \frac{nl}{2} - 1 \right). \quad (258)$$

Уравнение (258) показывает, что когда  $nl$  стремится к числу  $\pi$ , т. е.  $P$  приближается к  $P_k$ , то прогиб неопределённо возрастает, следовательно, имеет место продольный изгиб.

### ВЛИЯНИЕ НАЧАЛЬНОЙ КРИВИЗНЫ

Если начальное искривление оси стержня можно принять по синусоиде

$$y = a \sin \frac{\pi x}{l},$$

то уравнение изогнутой оси стержня будет:

$$y = \frac{a}{\frac{P_k}{P} - 1} \cdot \sin \frac{\pi x}{l}, \quad (259)$$

где  $P$  — осевая сжимающая сила;

$P_k$  — критическая сила.

Из (259) видно, что когда величина сжимающей силы приближается к критическому значению, прогиб неопределённо возрастает — возникает продольный изгиб.

### СИЛЫ, ПРИЛОЖЕННЫЕ В РАЗЛИЧНЫХ ТОЧКАХ ОСИ СТЕРЖНЯ

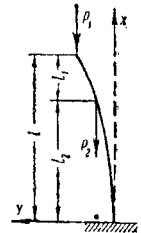
Стержень с нижним, заделанным и верхним, свободным концом нагружен осевой силой  $P_1$ , приложенной к верхнему концу, и осевой силой  $P_2$ , приложенной на расстоянии  $l_2$  от заделки (фиг. 142).

Критическая нагрузка:

$$P_1 + P_2 = \frac{KB}{l^2}. \quad (260)$$

Коэффициент устойчивости  $K$  зависит от отношений

$$\frac{l_2}{l} \text{ и } \frac{P_2}{P_1}.$$



Фиг. 142

Значения коэффициентов  $K$  даны в табл. 15.

Таблица 15

Значения коэффициентов устойчивости  $K$ 

$\frac{P_2}{P_1}$ \ $\frac{l_2}{l}$	0,1	0,5	1	2	5	10	20	50	100
0,2	2,71	3,68	4,88	7,21	13,80	23,20	36,30	51,00	56,50
0,4	2,69	3,52	4,47	6,07	9,19	11,60	13,30	14,50	15,00
0,5	2,66	3,38	4,14	5,27	7,06	8,21	8,96	9,49	9,67
0,6	2,63	3,21	3,76	4,50	5,50	6,05	6,43	6,67	6,76
0,8	2,56	2,82	3,04	3,28	3,55	3,68	3,76	3,82	3,83

## ПРОДОЛЬНЫЙ ИЗГИБ ПРИ РАВНОМЕРНО РАСПРЕДЕЛЁННОЙ НАГРУЗКЕ

Критическая нагрузка

$$Q_k = (ql)_k = \frac{KB}{l^3}. \quad (261)$$

Здесь коэффициент устойчивости  $K$  зависит от способа закрепления концов стержня. Значения коэффициентов  $K$  приведены в табл. 16.

Таблица 16

Значения коэффициентов устойчивости  $K$

Схема	Условия закрепления	$K$
	Стержень с одним свободным и другим заделанным концом	7,87
	Стержень с шарнирно опёртыми концами	18,50
	Нижний конец стержня заделан, верхний может перемещаться, но не может поворачиваться	18,90
	Стержень с заделанными концами	73,60

## ПРОДОЛЬНЫЙ ИЗГИБ ПРИ ОДНОВРЕМЕННОМ ДЕЙСТВИИ РАСПРЕДЕЛЁННОЙ И СОСРЕДОТОЧЕННОЙ НАГРУЗОК

Критическая нагрузка

$$P_k = K \frac{B}{l^2}. \quad (262)$$

В табл. 17 даны коэффициенты устойчивости  $K$  в зависимости от способа закрепления концов стержня и отношения  $m = \frac{Q}{P}$ , где  $Q = ql$  есть равномерно распределённая нагрузка, а  $P_e$  — критическая сила для рассматриваемого стержня, без учёта распределённой нагрузки, определяемая по формуле (247) и табл. 14.

Из табл. 17 видно, что с возрастанием отношения  $m = \frac{Q}{P_e}$  критическая сила умень-

Таблица 17

Значения коэффициента устойчивости  $K$

Условия закрепления	Стержень с одним свободным и другим заделанным концом	Нижний конец стержня заделан, верхний может перемещаться, но не может поворачиваться	Стержень с шарнирно опёртыми концами
$m = \frac{Q}{P_e}$			
0	2,47	9,87	9,87
0,25	2,28	8,70	8,64
0,50	2,08	7,85	7,40
0,75	1,91	6,09	6,17
1,00	1,72	4,75	4,94
1,92	—	0	—
2,00	0,96	— 0,81	0
3,00	0,15	— 5,91	— 4,94
3,18	0	—	—
4,00	— 0,69	— 11,50	— 9,87
5,00	— 1,56	— 17,37	— 14,80
10,10	— 6,95	— 49,20	— 39,50

шается, при некотором значении отношения  $m$  достигает нуля, а затем становится отрицательной. Например, для стержня с двумя шарнирно опёртыми концами критическая сила равна нулю при  $m = 2$ . Это значит, что стержень начинает изгибаться от одной распределённой нагрузки и никакой сосредоточенной силы на концах он уже выдержать не может.

При дальнейшем возрастании отношения  $m$ , для того чтобы стержень не изогнулся, необходимо верхний его конец подвесить. Поэтому в табл. 17 коэффициенты устойчивости  $K$  имеют отрицательный знак.

Для стержня с шарнирно опёртыми концами критическая сила может быть также определена по приближённой формуле:

$$P_k = P_e - \frac{Q}{2}. \quad (263)$$

## ПРОДОЛЬНЫЙ ИЗГИБ В УПРУГОЙ СРЕДЕ

Предполагается, что реакция упругой среды, приходящаяся на элемент длины стержня, пропорциональна длине элемента стержня и величине прогиба  $y$  в рассматриваемом сечении (фиг. 143).

Для стержня с шарнирно опёртыми концами при заданном коэффициенте упругости среды  $k$ , длине  $l$  и жёсткости стержня  $B$  критическая сила:

$$P_k = \frac{\pi^2 B}{l^2} \left( n^2 + \frac{\gamma}{n^2} \right), \quad (264)$$

где

$$\gamma = \frac{kl^4}{\pi^2 B}, \quad (265)$$

а  $n$  — число полувольт, определяемое из уравнения

$$\gamma = n^2 (n + 1)^2. \quad (266)$$



Фиг. 143



### ВЛИЯНИЕ ПЕРЕРЕЗЫВАЮЩЕЙ СИЛЫ НА КРИТИЧЕСКУЮ НАГРУЗКУ

Для выяснения влияния перерезывающей силы на значение критической нагрузки рассматривают стержень с нижним заделанным и верхним свободным концом под действием осевой сжимающей силы  $P$ . Предполагают, что под влиянием этой силы стержень слегка искривился.

Изгибающий момент в любом сечении стержня на расстоянии  $x$  от нижнего конца

$$M = P(f - y).$$

Кривизна упругой линии, вызванная изгибающим моментом, равна:

$$\frac{P(f - y)}{B},$$

где  $B$  — наименьшая жёсткость стержня.

Перерезывающая сила в том же сечении стержня равна:

$$Q = P \frac{dy}{dx}.$$

Изменение уклона упругой кривой, вызванное этой силой, равно:

$$\frac{\alpha Q}{FG},$$

где  $F$  — площадь поперечного сечения;  $\sqrt{}$

$G$  — модуль сдвига;  $\sqrt{}$

$\alpha$  — числовой множитель, зависящий от формы поперечного сечения; для прямоугольного поперечного сечения этот множитель равен 1,2, для круглого — 1,11.

Дополнительная кривизна упругой кривой от действия перерезывающей силы будет:

$$\frac{\alpha}{FG} \cdot \frac{dQ}{dx} = \frac{\alpha P}{FG} \cdot \frac{d^2 y}{dx^2}.$$

Полная кривизна упругой кривой получается путём сложения кривизны, вызванной изгибающим моментом с кривизной вследствие сдвига:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{P(f - y)}{B} + \frac{\alpha P}{FG} \cdot \frac{d^2 y}{dx^2},$$

откуда

$$B \frac{d^2 y}{dx^2} \left(1 - \frac{\alpha P}{FG}\right) - P(f - y) = 0$$

или

$$B \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{P}{1 - \frac{\alpha P}{FG}} \cdot (f - y). \quad (267)$$

Это есть уравнения упругой кривой стержня с учётом перерезывающих сил.

Полученное уравнение отличается от уравнения (241) только множителем  $\frac{1}{1 - \frac{\alpha P}{FG}}$  в правой части. Поступая так же, как и при решении уравнения (241), получают:

$$\frac{P}{B \left(1 - \frac{\alpha P}{FG}\right)} = \frac{\pi^2}{4l^2},$$

откуда

$$P_k = \frac{\pi^2 B}{4l^2} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{\alpha}{FG} \cdot \frac{\pi^2 B}{4l^2}\right)}. \quad (268)$$

Формула (268) выведена для случая стержня с одним закреплённым и другим свободным концом.

Из этого вывода ясно, что в любом случае закрепления концов стержня критическая нагрузка с учётом влияния перерезывающей силы может быть определена выражением:

$$P_k = \frac{P_e}{1 + \frac{\alpha P_e}{FG}}, \quad (269)$$

где  $P_e$  представляет собой критическую силу для рассматриваемого стержня без учёта влияния перерезывающих сил и определяется по формуле (247) или (248), а также табл. 14.

Из выражения (269) видно, что благодаря действию перерезывающих сил критическая

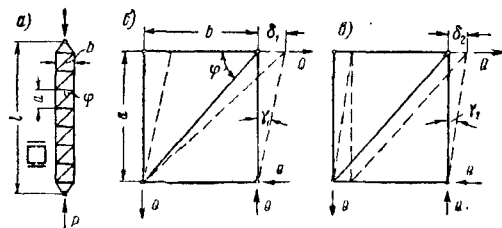
нагрузка уменьшилась в отношении  $\frac{1}{1 + \frac{\alpha P_e}{FG}}$ .

Для стержня сплошного сечения это отношение мало отличается от единицы, поэтому влиянием перерезывающей силы в этих случаях обычно пренебрегают.

Влияние перерезывающих сил имеет существенное значение в случае составных стержней, состоящих из параллельных поясов, соединённых решётками или планками.

### ПРОДОЛЬНЫЙ ИЗГИБ СОСТАВНЫХ СТЕРЖНЕЙ

Рассматривается составной стержень, показанный на фиг. 144, а, состоящий из параллельных поясов, соединённых решёткой в виде диагоналей и распорок. Если решётчатая стойка имеет много панелей (не



Фиг. 144

менее 4—5), то для приближённого вычисления критической нагрузки может быть применена формула (269).

Влияние перерезывающей силы  $Q$  заключается в том, что под действием этой силы будут иметь место удлинения и укорочения диагоналей и распорок в каждой панели соединительной решётки, и следовательно, первоначально прямоугольные панели соединительной решётки перекосятся.

Если обозначить через  $\delta_1$  сдвиг какой-либо из панелей вследствие удлинения диагонали, а через  $\delta_2$  сдвиг той же панели от

укорочения распорок, то, как нетрудно видеть из фигур 144, б и 144, в,

$$\delta_1 = \frac{Qa}{F_d E \sin \varphi \cos^2 \varphi}; \delta_2 = \frac{Qb}{F_b E},$$

где через  $F_d$  обозначена площадь сечения двух диагоналей, а через  $F_b$  — двух распорок, по одной с каждой стороны стойки.

Угол перекашивания или относительный сдвиг рассматриваемой панели:

$$\frac{\delta_1 + \delta_2}{a} = Q \left[ \frac{1}{F_d E \sin \varphi \cos^2 \varphi} + \frac{b}{a F_b E} \right]. \quad (a)$$

При выводе формулы (269) относительный сдвиг, вызываемый действием перерезывающей силы, равнялся  $Q \frac{\alpha}{FG}$ . Следовательно, для получения величины критической силы рассматриваемого составного стержня в формуле (269) множитель  $\frac{\alpha}{FG}$  следует заменить выражением, заключённым в скобки в правой части (а).

Таким образом,

$$P_k = \frac{P_e}{1 + P_e \left[ \frac{1}{F_d E \sin \varphi \cos^2 \varphi} + \frac{b}{a F_b E} \right]}, \quad (270)$$

где  $P_e = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$ ;

$I = 2I_c + F_c \frac{b^2}{2}$  — момент инерции попереч-

ного сечения стойки;

$F_c$  — площадь поперечного сечения каждой из двух ветвей, образующих решётчатую стойку;

$I_c$  — момент инерции площади поперечного сечения каждой ветви относительно её собственной центральной оси, параллельной оси изгиба;

$F_d$  — площадь сечения двух диагоналей;

$F_b$  — площадь сечения двух распорок.

Если в каждой панели имеется по две диагонали (фиг. 145, а), то распорки не принимают участия в передаче перерезывающей силы, поэтому для получения критической силы в формуле (270) следует исключить член, содержащий  $F_b$ . Тогда

$$P_k = \frac{P_e}{1 + P_e \frac{1}{F_d E \sin \varphi \cos^2 \varphi}}, \quad (271)$$

где  $F_d$  — площадь поперечного сечения четырёх диагоналей в одной и той же панели.

Формула (271) справедлива также для системы, показанной на фиг. 145, б.

Формула (271) может применяться также и для системы, показанной на фиг. 145, в,

только в этом случае под  $F_d$  следует понимать площадь поперечного сечения двух диагоналей.

Для составных стержней, связанных только системой распорок (фиг. 146):

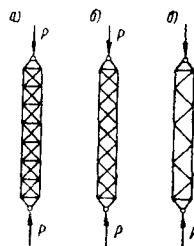
$$P_k = \frac{P_e}{1 + P_e \left[ \frac{ab}{12 EI_b} + \frac{a^2}{24 EI_c} \right]}, \quad (272)$$

где  $b$  — длина распорки;

$a$  — расстояние между распорками;

$I_b$  — наименьший момент инерции одной распорки;

$I_c$  — наименьший момент инерции поперечного сечения одной ветви.



Фиг. 145



Фиг. 146

## ПРОДОЛЬНЫЙ ИЗГИБ СТЕРЖНЕЙ ПЕРЕМЕННОГО СЕЧЕНИЯ

**Несимметричный стержень переменного сечения с нижним заделанным и верхним свободным концом.** Рассматривается стержень с нижним заделанным и верхним, свободным концом, к которому приложена осевая сжимающая сила  $P$  (фиг. 147).

Допускают, что момент инерции поперечного сечения стойки меняется пропорционально некоторой степени расстояния до определённой точки  $O$ . Тогда в любом поперечном сечении  $mn$ , на расстоянии  $x$  от точки  $O$  момент инерции:

$$I_x = I \left( \frac{x}{a} \right)^n, \quad (273)$$

где  $I_x$  — момент инерции в рассматриваемом сечении;

$I$  — момент инерции на нижнем конце стержня;

$n$  — положительное целое или дробное число;

$a$  — расстояние от верхнего сечения до точки  $O$ ;

$x$  — расстояние от рассматриваемого сечения до точки  $O$ .

Рассматривая различные значения  $n$ , можно получить различные типы колонн. Например,  $n = 1$  соответствует случаю сплошного стержня с переменной шириной и постоянной толщиной;  $n = 2$  даёт случай сплошной стойки в форме параболоида вращения или решётчатой стойки пирамидальной формы, составленной из четырёх уголков, соединённых диагоналями;  $n = 4$  соответствует случаю конической стойки.

Таблица 18

Значения коэффициентов устойчивости  $K$  для несимметричного стержня переменного сечения с нижним заделанным и верхним свободным концом

$n \backslash \frac{l}{I}$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
1	1,445	1,620	1,750		1,965		2,150		2,320		2,467
2	0,250	1,350	1,593	1,763	1,904	2,023	2,128	2,223	2,311	2,392	2,497
3		1,250	1,535		1,880		2,125		2,310		2,467
4		1,202	1,505	1,710	1,870	2,002	2,116	2,217	2,308	2,391	2,467

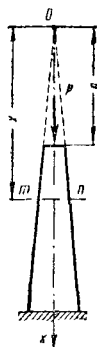
Дифференциальное уравнение упругой кривой (фиг. 148):

$$EI \left( \frac{x}{a} \right)^n \frac{d^2 y}{dx^2} + Py = 0. \quad (274)$$

Для определения двух произвольных постоянных имеется два граничных условия:

$$Iy_{x=a} = 0; \left( \frac{dy}{dx} \right)_{x=a+l} = 0.$$

Решение дифференциального уравнения (274) с соблюдением граничных условий даёт возможность для любого значения показателя степени  $n$ , характеризующего закон изменения момента инерции поперечного сечения стержня вдоль его оси, вычислить критическую силу.



Фиг. 147



Фиг. 148

Решение это, имеющее большое практическое значение, принадлежит академику А. Н. Диннику, который показал, что уравнение (274) интегрируется при помощи функций Бесселя при любом  $n$ , за исключением единственного случая, когда  $n = 2$ . Но при  $n = 2$  интеграл уравнения (274) может быть получен в элементарных функциях.

Критическая сила:

$$P_K = \frac{KEI}{l^2}. \quad (275)$$

Значения коэффициента  $K$ , входящего в формулу (275), для случаев, когда  $n = 1, 2, 3$  и 4, приведены в табл. 18.

Несимметричный стержень переменного сечения с шарнирно опёртыми концами (фиг. 149). Если момент инерции поперечного сечения стержня изменяется по степенному закону (273), то критическая сила может быть также представлена формулой

(275). Коэффициенты устойчивости  $K$  в этом случае даны в табл. 19.

Таблица 19

Значения коэффициентов устойчивости  $K$  для несимметричного стержня переменного сечения с шарнирно опёртыми концами

$n \backslash \frac{l}{I}$	0,1	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
1	4,67	5,41	6,78	7,78	8,85	9,86
2	3,60	4,73	6,39	7,70	8,83	9,86
3	3,24	4,52	6,23	7,64	8,83	9,86
4	3,12	4,41	6,24	7,64	8,83	9,86

Симметричная стойка переменного сечения с шарнирно опёртыми концами. Соединяя решение дифференциального уравнения (274) с решением дифференциального



Фиг. 149



Фиг. 150

уравнения для призматического стержня, А. Н. Динник решил более общую задачу о продольном изгибе стержня, у которого средняя часть призматическая, а концевые — переменного сечения с моментом инерции, изменяющимся по степенному закону (273) (фиг. 150).

Дифференциальное уравнение (274) изогнутой оси концевой участка стержня:

$$EI \left( \frac{x}{a} \right)^n \frac{d^2 y}{dx^2} + Py = 0.$$

Для среднего призматического участка дифференциальное уравнение изогнутой оси:

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} + Py = 0. \quad (276)$$

Четыре произвольные постоянные, которые войдут при интегрировании уравнений (274) и (276), определяются из следующих четырёх граничных условий:

1. На конце стойки прогиб  $y = 0$ .
2. В сечении, где сопрягается средняя призматическая часть стержня с крайним, решение уравнения (274) должно совпасть с решением уравнения (276).
3. В том же сечении должны совпадать и первые производные решения уравнений (274) и (276).
4. В среднем сечении стойки, расположенном по оси симметрично  $\frac{dy}{dx} = 0$ .

Решение дифференциальных уравнений (274) и (276) с использованием описанных граничных условий даёт возможность определить критическую силу  $P_{кр}$ .

Критическая сила может быть опять представлена формулой (275).

Коэффициенты устойчивости  $K$  для этого случая приведены в табл. 20.

Таблица 20

Значения коэффициентов устойчивости  $K$  для симметричного стержня переменного сечения с шарнирно опёртыми концами

$\frac{i}{l}$ \ $\frac{a}{l}$	0	0,2	0,4	0,6	0,8	$n$
0	5,78	7,04	8,35	9,36	9,80	1
	1,00	1,56	2,78	6,25	9,59	2
	0	0	0	0	0	3
	0	0	0	0	0	4
0,1	6,48	7,58	8,63	9,46	9,82	1
	5,40	6,67	8,08	9,25	9,79	2
	5,01	6,32	7,84	9,14	9,77	3
	4,81	6,11	7,68	9,10	9,77	4
0,2	7,01	7,99	8,90	9,73	9,82	1
	6,37	7,49	8,61	9,44	9,81	2
	6,14	7,31	8,49	9,39	9,81	3
	6,02	7,20	8,42	9,33	9,80	4
0,4	7,87	8,59	9,19	9,70	9,83	1
	7,61	8,42	9,15	9,63	9,84	2
	7,52	8,38	9,10	9,62	9,84	3
	7,48	8,33	9,10	9,62	9,84	4
0,6	8,61	9,12	9,55	9,76	9,85	1
	8,51	9,04	9,48	9,74	9,85	2
	8,50	9,02	9,46	9,74	9,85	3
	8,47	9,01	9,45	9,74	9,85	4
0,8	9,27	9,53	9,68	9,82	9,86	1
	9,24	9,50	9,70	9,82	9,86	2
	9,23	9,50	9,69	9,81	9,86	3
	9,23	9,49	9,69	9,81	9,86	4

## ПРЕДЕЛЫ ПРИМЕНИМОСТИ ФОРМУЛ, ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ КРИТИЧЕСКИЕ НАГРУЗКИ

Приведённые выше формулы для определения критических нагрузок выведены в предположении прямолинейной зависимости деформаций от напряжений. Следовательно, формулы эти справедливы только тогда, когда сжимающее напряжение в стержне не превосходит предела пропорциональности.

Условие применимости этих формул определяется неравенством

$$\sigma_k = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} < \sigma_{пр}$$

или

$$\lambda \geq \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_{пр}}}, \quad (277)$$

где  $\lambda$  — гибкость стержня;

$E$  — модуль упругости материала стержня;

$\sigma_{пр}$  — предел пропорциональности при осевом сжатии.

Условие (277) даёт возможность установить пределы применимости формул, определяющих критические нагрузки для любого материала, если известны модуль упругости  $E$  и предел пропорциональности  $\sigma_{пр}$ .

Из этого условия видно, что приведённые выше формулы для определения критических нагрузок справедливы только для длинных стержней, гибкость которых удовлетворяет неравенству (277).

В табл. 21 приведены предельные значения гибкости  $\lambda$  для некоторых строительных материалов.

Таблица 21

Значения предельных наименьших гибкостей, при которых продольный изгиб происходит в условиях прямолинейной зависимости между напряжениями и деформациями

Материал	$\sigma_{пр}$ в кг/см <sup>2</sup>	Предельная гибкость $\lambda$
Сталь . . . .	3 400	114,7
Сталь . . . .	3 860—4 700	110
Чугун . . . .	—	80
Дерево . . . .	—	110

## ЭМПИРИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ КРИТИЧЕСКИХ НАГРУЗОК

В стойках, гибкость которых меньше, чем это требуется неравенством (277), продольный изгиб происходит в условиях, когда между напряжениями и деформациями нет прямолинейной зависимости. Такие колонны и стойки часто встречаются на практике.

Для выяснения вопроса о критических нагрузках для таких стоек были произведены многочисленные опыты.

Проф. Ясинский на основании этих опытов составил эмпирические формулы для

критических напряжений в стержнях с постоянным поперечным сечением.

Для некоторых строительных материалов эти формулы приводятся ниже:

для стали с пределом прочности  $\sigma_b = 3400 \text{ кг/см}^2$ :

$$\sigma_k = \left( 3391 - 16,48 \frac{l}{i} \right) \text{ кг/см}^2; \quad (278)$$

для литой стали с пределом прочности:

$$\sigma_b = 3860 - 4700 \text{ кг/см}^2;$$

$$\sigma_k = \left( 3387 - 14,83 \frac{l}{i} \right) \text{ кг/см}^2; \quad (279)$$

для чугуна:

$$\sigma_k = \left[ 7760 - 120 \frac{l}{i} + 0,53 \left( \frac{l}{i} \right)^2 \right] \text{ кг/см}^2; \quad (280)$$

для дерева:

$$\sigma_k = \left( 293 - 1,94 \frac{l}{i} \right) \text{ кг/см}^2. \quad (281)$$

В этих формулах:  $l$  — приведённая длина стержня;

$i$  — минимальный радиус инерции поперечного сечения стойки.

### РАСЧЁТ СЖАТЫХ СТЕРЖНЕЙ НА УСТОЙЧИВОСТЬ

При проектировании сжатых элементов конструкций и сооружений необходимо иметь в виду:

условие прочности

$$\sigma = \frac{P}{F_{\text{netto}}} \leq R = \frac{\sigma^0}{n} \quad (282)$$

и условие устойчивости

$$\sigma = \frac{P}{F_{\text{brutto}}} \leq R_y = \frac{\sigma_k}{m}, \quad (283)$$

где  $P$  — осевая сжимающая сила;

$F$  — площадь поперечного сечения стержня;

$R$  — основное допускаемое напряжение на прочность при осевом сжатии стержня;

$R_y$  — допускаемое напряжение на устойчивость для сжатых стержней;

$\sigma^0$  — предельное напряжение при сжатии, равное для пластичных материалов пределу текучести  $\sigma_T$ , а для хрупких — пределу прочности  $\sigma_b$ ;

$\sigma_k$  — критическое напряжение при продольном изгибе;

$n$  — коэффициент запаса на прочность;

$m$  — коэффициент запаса на устойчивость.

В практических расчётах обычно допускаемое напряжение на устойчивость  $R_y$  выражается через основное допускаемое на-

пряжение на прочность  $R$  следующей зависимостью:

$$R_y = \varphi R.$$

Здесь  $\varphi$  — коэффициент уменьшения основного допускаемого напряжения, который на основании (282) и (283) равен:

$$\varphi = \frac{\sigma_k}{\sigma^0} \cdot \frac{n}{m}. \quad (284)$$

Тогда условие (283) может быть представлено в таком виде:

$$\sigma = \frac{P}{F_{\text{brutto}}} \leq \varphi R. \quad (285)$$

Значения коэффициентов  $\varphi$  для некоторых строительных материалов при гибкости, изменяющейся от 0 до 200, приведены в табл. 22.

Таблица 22

Значения коэффициентов  $\varphi$  уменьшения основного допускаемого напряжения на сжатие

Гиб- кость	Значения коэффициентов $\varphi$ для				
	стали марок			чугуна	дерева
	Ст. Ос, Ст. 1, Ст. 2, Ст. 3, Ст. 4	Ст. 5	СПК		
—	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
10	0,99	0,98	0,97	0,97	0,99
20	0,96	0,95	0,95	0,91	0,97
30	0,94	0,92	0,91	0,81	0,93
40	0,92	0,89	0,87	0,69	0,87
50	0,89	0,86	0,83	0,57	0,80
60	0,86	0,82	0,79	0,44	0,71
70	0,81	0,76	0,72	0,34	0,60
80	0,75	0,70	0,65	0,26	0,48
90	0,69	0,62	0,55	0,20	0,38
100	0,60	0,51	0,43	0,16	0,31
110	0,52	0,43	0,35	—	0,25
120	0,45	0,37	0,30	—	0,22
130	0,40	0,33	0,26	—	0,18
140	0,36	0,29	0,23	—	0,16
150	0,32	0,26	0,21	—	0,14
160	0,29	0,24	0,19	—	0,12
170	0,26	0,21	0,17	—	0,11
180	0,23	0,19	0,15	—	0,10
190	0,21	0,17	0,14	—	0,09
200	0,19	0,16	0,13	—	0,08

### ПРОДОЛЬНО-ПОПЕРЕЧНЫЙ ИЗГИБ

Совместное действие на брус осевых сжимающих сил и произвольной поперечной нагрузки в случае, когда жёсткость изгиба велика и деформациями изгиба можно пренебречь, рассмотрено на стр. 74. Однако в гибких стержнях прогибы оказывают значительное влияние на величины изгибающих моментов, а следовательно, и на напряжённое состояние стержня. Такой случай совместного действия осевых сжимающих сил и поперечной нагрузки носит название продольно-поперечного изгиба.

Сжатый стержень с шарнирно опёртыми концами под действием одной поперечной силы, приложенной в произвольной точке. Стержень (фиг. 151) подвергается действию осевых сжимающих сил  $P$  и поперечной силы  $Q$  на расстоянии  $s$  от правой опоры. Длину стержня (пролёт) обозначают через  $l$ , а жёсткость при изгибе — через  $EI$ .

Предполагается, что изгиб происходит в плоскости, проходящей через одну из главных осей инерции поперечного сечения стержня.

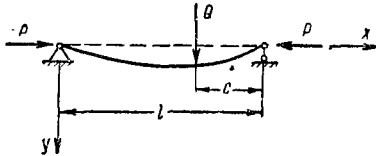
Дифференциальное уравнение изогнутой оси стержня

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{Qc}{l} x - Py, \text{ при } x \leq l - c; \quad (286)$$

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{Q(l-c)(l-x)}{l} - Py, \quad (287)$$

при  $x \geq l - c$ .

Решения двух уравнений второго порядка (286) и (287) будут содержать четыре постоянных интегрирования. Для их определения имеется четыре граничных условия, которые заключаются в том, что на концах стержня прогибы равны нулю, а в точке приложения силы  $Q$  должны совпадать решения уравнений (286) и (287) и их первые производные.



Фиг. 151

Интегралы уравнений (286) и (287) после подстановки в них значений постоянных интегрирования будут иметь вид:

$$y = \frac{Q \sin kc}{Pk \sin kl} \sin kx - \frac{Qc}{Pl} x, \quad \text{при } x \leq l - c; \quad (288)$$

$$y = \frac{Q \sin k(l-c)}{Pk \sin kl} \sin k(l-x) - \frac{Q(l-c)(l-x)}{Pl}, \text{ при } x \geq l - c, \quad (289)$$

$$\text{где } k = \sqrt{\frac{P}{EI}}.$$

Уравнения (288) и (289) дают возможность определить прогиб любой точки стержня.

Первая производная по  $x$  уравнений (288) и (289) даёт выражение для углов наклона касательной к изогнутой кривой стержня. Вторая производная этих уравнений, умноженная на жёсткость изгиба  $EI$ , представляет собой выражения для изгибающего момента.

Изгибающий момент в любом поперечном сечении стержня может быть определён также путём сложения момента от поперечной нагрузки  $Q$  с моментом  $P \cdot y$ , соответствующим продольной силе  $P$ .

$$M = M_0 + P \cdot y, \quad (290)$$

где  $M_0$  — изгибающий момент только от поперечной нагрузки;

$y$  — прогиб в рассматриваемом сечении стержня, определяемый выражением (288) или (289).

Уравнения (288) и (289) дают возможность получить решения ряда практически важных случаев продольно-поперечного изгиба.

**Сжатый стержень с шарнирно опёртыми концами под действием одной поперечной силы, приложенной по середине пролёта.** Уравнение изогнутой оси стержня получается из уравнения (288) путём подстановки  $c = \frac{l}{2}$ .

Наибольший прогиб по середине пролёта равен

$$f = \frac{Ql^3}{48EI} \frac{3(\operatorname{tg} u - u)}{u^3}, \quad (291)$$

где

$$u = \frac{kl}{2} = \frac{l}{2} \sqrt{\frac{P}{EI}}.$$

Первый множитель в правой части формулы (291) представляет собой прогиб, вызванный только одной поперечной силой  $Q$ . Влияние продольных сил  $P$  выражается вторым множителем этой формулы.

Исследование формулы (291) показывает, что когда величина сжимающих сил  $P$  мала, второй множитель близок к единице. По мере возрастания сжимающих сил  $P$  этот множитель также увеличивается и стремится к бесконечности, когда величина сжимающих сил  $P$  достигает критического значения

$$P_k = \frac{\pi^2 EI}{l^2}. \quad (292)$$

Наибольший изгибающий момент возникает в сечении по середине пролёта

$$M_{\max} = \frac{Ql}{4} \cdot \frac{\operatorname{tg} u}{u}. \quad (293)$$

В практических расчётах часто пользуются приближённой формулой для определения наибольшего прогиба по середине

$$f = \frac{f_0}{1 - \frac{P}{P_k}}, \quad (294)$$

где  $f_0$  — прогиб по середине пролёта только от поперечной нагрузки;

$P$  — величина осевых сжимающих сил;

$P_k$  — критическая сила, определяемая по формуле (292).

На основании (290) наибольший изгибающий момент

$$M_{\max} = \frac{Ql}{4} + \frac{Pf_0}{1 - \frac{P}{P_k}}. \quad (295)$$

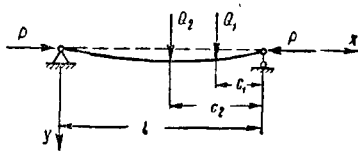
**Сжатый стержень с шарнирно опёртыми концами под действием нескольких поперечных сил (фиг. 152).** Комбинируя решения (288) и (289), можно получить уравнение изогнутой оси для любого участка сжатого стержня с шарнирно опёртыми концами при действии на него системы поперечных сил  $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$ .

Уравнение изогнутой оси стержня на участке между поперечными силами  $Q_m$  и  $Q_{m+1}$  имеет вид:

$$y = \frac{\sin kx}{P_k \sin kl} \sum_{i=1}^{i=m} Q_i \sin kc_i - \frac{x}{Pl} \sum_{i=1}^{i=m} Q_i c_i +$$

$$+ \frac{\sin k(l-x)}{P_k \sin kl} \sum_{i=m+1}^{i=n} Q_i \sin k(l-c_i) -$$

$$- \frac{l-x}{Pl} \sum_{i=m+1}^{i=n} Q_i (l-c_i). \quad (296)$$



Фиг. 152

Путём дифференцирования этого уравнения можно получить угол наклона касательной к изогнутой оси и изгибающий момент для любого поперечного сечения стержня.

Сжатый стержень с шарнирно опёртыми концами под действием равномерно распределённой поперечной нагрузки (фиг. 153). Рассматривая элемент нагрузки  $qdc$  как сосредоточенную силу и заменяя

в уравнении (296) суммирование  $\sum_{i=1}^{i=n}$  интегрированием от 0 до  $l-x$ , а суммирование  $\sum_{i=m+1}^{i=n}$  — интегрированием от  $l-x$  до  $l$ , получают

$$y = \frac{ql^4}{16EIu^3} \left[ \frac{\cos u \left(1 - \frac{2x}{l}\right)}{\cos u} - 1 \right] -$$

$$- \frac{ql^3}{8EIu^4} \cdot x(l-x), \quad (297)$$

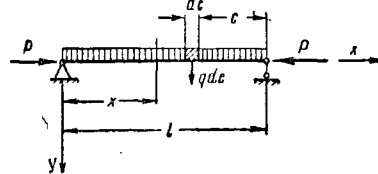
где

$$u = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{P}{P_k}}.$$

Наибольший прогиб будет по середине:

$$f = \frac{5ql^4}{384EI} \cdot \frac{24 \left( \sec u - 1 - \frac{1}{2} u^2 \right)}{5u^4}. \quad (298)$$

Здесь, как и в предыдущих случаях, первый множитель представляет собой прогиб, вызванный поперечной равномерно распределённой нагрузкой, а второй — влияние



Фиг. 153

продольных сжимающих сил, которое возрастает по мере увеличения сжимающих сил и стремится к бесконечности, когда сжимающие силы достигают критической величины

$$P_k = \frac{\pi^2 EI}{l^2}.$$

Наибольший изгибающий момент возникает в сечении по середине пролёта

$$M_{\max} = \frac{ql^2}{8} \frac{2(1 - \cos u)}{u^2 \cos u}. \quad (299)$$

Приближенные значения прогиба и изгибающего момента по середине пролёта могут быть определены по формулам (294) и (296)

$$f = \frac{f_0}{1 - \frac{P}{P_k}} = \frac{5ql^4}{384EI \left(1 - \frac{P}{P_k}\right)}; \quad (300)$$

$$M_{\max} = \frac{ql^2}{8} + \frac{Pl_0}{1 - \frac{P}{P_k}} =$$

$$= \frac{ql^2}{8} \left[ \frac{1 + 1,028 \left(\frac{P}{P_k}\right)^2}{1 - \left(\frac{P}{P_k}\right)^2} \right]. \quad (301)$$

## КОНТАКТНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ

В местах соприкосновения двух сжатых упругих тел под действием усилий возникают контактные напряжения.

Упругие тела, соприкасаясь в свободном состоянии в точке или по линии, при сжатии их касаются по некоторой поверхности, имеющей кривизну, несколько отличную от первоначальной кривизны обоих тел до сжатия. Сжимающие напряжения на контуре такой поверхности равны нулю, а по направлению к центру контура возрастают, достигая в нём своего максимума. С возрастанием давления, в пределах упругости материала, увеличиваются и поверхность соприкосновения и сжимающие напряжения.

Давление, достигающее предела упругости, вызывает на контуре площадки появления трещинок, когда металл хрупкий, и

остаточную деформацию, когда металл вязкий.

### ФОРМА ПЛОЩАДКИ СОПРИКАСАНИЯ

Проекция площадки соприкосновения имеет форму эллипса, полуоси которого являются функциями радиусов кривизны соприкасающихся тел, их модулей упругости и силы сжатия (фиг. 154).

Эти величины находятся в следующей зависимости:

$$a = \mu \sqrt[3]{\frac{3P(\vartheta_1 + \vartheta_2)}{8(\rho_{11} + \rho_{12} + \rho_{21} + \rho_{22})}}; \quad (302)$$

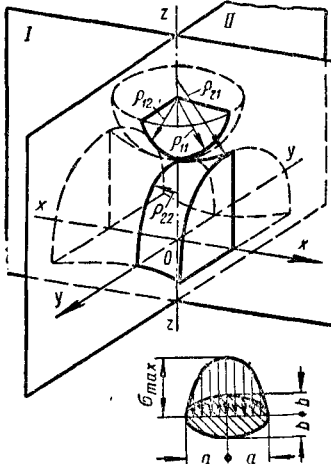
$$b = \nu \sqrt[3]{\frac{3P(\vartheta_1 + \vartheta_2)}{8(\rho_{11} + \rho_{12} + \rho_{21} + \rho_{22})}}, \quad (303)$$

где  $a$  — большая полуось эллипса в см;  
 $b$  — малая полуось эллипса в см;  
 $P$  — сила, с которой тела прижаты друг к другу, в кг;  
 $\vartheta_1$  и  $\vartheta_2$  — коэффициенты эластичности, зависящие от модуля упругости материала, причём

$$\vartheta = \frac{4(m^2 - 1)}{Em^2}, \quad (304)$$

$$\vartheta = \frac{32}{9E}, \quad (a)$$

где  $E$  — модуль упругости в кг/см<sup>2</sup>;  
 $m$  — число Пуассона, выражающее отношение продольного удлинения к поперечному сжатию;  $m \approx 3$ ;  
 $f_{11}$  и  $f_{12}$  — величины, обратные радиусам главных кривизн (в точке касания тел) первого тела;  
 $\rho_{21}$  и  $\rho_{22}$  — величины, обратные радиусам главных кривизн (в точке касания тел) второго тела;  
 $\mu$  и  $\nu$  — коэффициенты, учитывающие кривизну тел в точке их взаимного касания.



Фиг. 154

Численные значения коэффициентов  $\mu$  и  $\nu$  определяются посредством вспомогательного угла  $\theta$ , косинус которого выражается через кривизны обоих тел

$$\cos \theta = \frac{\sqrt{(\rho_{11} - \rho_{12})^2 + 2(\rho_{11} - \rho_{12})(\rho_{21} - \rho_{22}) \cos 2\omega + (\rho_{21} - \rho_{22})^2}}{\rho_{11} + \rho_{12} + \rho_{21} + \rho_{22}}, \quad (305)$$

где  $\omega$  — угол между соответствующими главными сечениями обоих соприкасающихся тел.

Пользуясь кривыми графика (фиг. 155) или табл. 23, по углу  $\theta$  определяют соответствующие значения  $\mu$  и  $\nu$ .

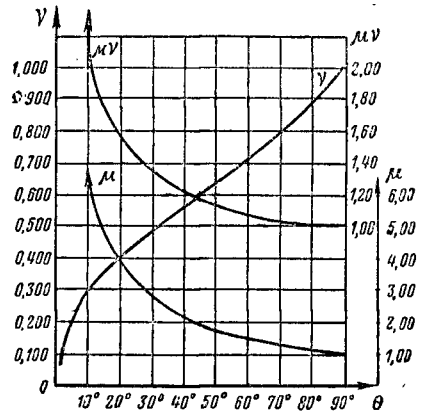
Зависимость между  $\mu$ ,  $\nu$  и  $\theta$  может быть выражена при помощи вспомогательного угла  $\alpha$  следующими уравнениями:

$$\sin^2 \frac{\theta}{2} = \operatorname{ctg}^2 \alpha \frac{L - I}{I},$$

Таблица 23

Числовые значения  $\mu$  и  $\nu$  в зависимости от  $\cos \theta$ 

$\cos \theta$	$\mu$	$\nu$	$\mu\nu$	$\cos \theta$	$\mu$	$\nu$	$\mu\nu$
0,0000	1,000	1,0000	1,000	0,8310	2,469	0,5217	1,288
0,0466	1,032	1,9696	1,001	0,8350	2,494	0,5186	1,293
0,1075	1,076	0,9318	1,003	0,8389	2,521	0,5155	1,300
0,1674	1,148	0,8791	1,008	0,8428	2,548	0,5124	1,306
0,2545	1,198	0,8472	1,015	0,8468	2,576	0,5093	1,312
0,3204	1,252	0,8114	1,025	0,8507	2,605	0,5061	1,318
0,3954	1,345	0,7717	1,038	0,8545	2,635	0,5029	1,325
0,4795	1,456	0,7278	1,060	0,8584	2,666	0,4996	1,332
0,5342	1,540	0,6992	1,078	0,8623	2,698	0,4963	1,338
0,5819	1,607	0,6701	1,092	0,8661	2,731	0,4930	1,346
0,6113	1,684	0,6580	1,108	0,8699	2,765	0,4897	1,354
0,6521	1,775	0,6359	1,128	0,8737	2,800	0,4863	1,362
0,6716	1,826	0,6245	1,140	0,8774	2,837	0,4828	1,370
0,6920	1,882	0,6127	1,153	0,8811	2,874	0,4794	1,378
0,7126	1,943	0,6006	1,168	0,8849	2,914	0,4759	1,388
0,7332	2,011	0,5881	1,182	0,8885	2,954	0,4723	1,395
0,7538	2,087	0,5752	1,200	0,8922	2,996	0,4687	1,404
0,7579	2,103	0,5726	1,204	0,8958	3,040	0,4650	1,416
0,7620	2,119	0,5699	1,208	0,8994	3,085	0,4613	1,423
0,7661	2,136	0,5672	1,210	0,9030	3,132	0,4576	1,432
0,7702	2,153	0,5646	1,215	0,9065	3,181	0,4538	1,444
0,7743	2,171	0,5618	1,220	0,9100	3,233	0,4499	1,455
0,7784	2,189	0,5591	1,222	0,9134	3,286	0,4460	1,466
0,7825	2,207	0,5564	1,228	0,9169	3,326	0,4420	1,476
0,7866	2,226	0,5536	1,232	0,9203	3,366	0,4379	1,486
0,7907	2,245	0,5508	1,237	0,9237	3,406	0,4338	1,496
0,7948	2,265	0,5480	1,240	0,9271	3,446	0,4297	1,506
0,7988	2,286	0,5452	1,246	0,9305	3,486	0,4256	1,516
0,8029	2,306	0,5423	1,250	0,9339	3,526	0,4215	1,526
0,8069	2,328	0,5395	1,256	0,9373	3,566	0,4174	1,536
0,8110	2,350	0,5366	1,260	0,9407	3,606	0,4133	1,546
0,8150	2,372	0,5336	1,266	0,9441	3,646	0,4092	1,556
0,8190	2,395	0,5307	1,270	0,9475	3,686	0,4051	1,566
0,8230	2,419	0,5277	1,277	0,9509	3,726	0,4010	1,576
0,8270	2,443	0,5247	1,282	0,9543	3,766	0,3969	1,586



Фиг. 155

где  $L$  и  $I$  — обозначают полные эллиптические интегралы первого и второго рода.

$$L = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\Delta\varphi}; \quad I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Delta\varphi d\varphi,$$

где  $\Delta\varphi = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \varphi}$ ,



Если задаваться некоторыми значениями  $a$ , то можно, пользуясь этими формулами и таблицами эллиптических интегралов, определить соответствующие значения для  $\mu$ ,  $\nu$  и  $\theta$  и затем методом интерполирования по значению  $\theta$  находить значения двух других переменных.

### УПРУГАЯ ДЕФОРМАЦИЯ ДВУХ СЖАТЫХ ТЕЛ

Величина упругой деформации (сближение обоих тел под действием нагрузки)

$$\delta = \frac{3P}{8\pi} \frac{\vartheta_1 + \vartheta_2}{a} \int_0^\infty \frac{dz}{V(1+k^2z^2)(1+z^2)}, \quad (306)$$

где  $z$  — нормаль к любой точке эллипса деформации до пересечения её с полуэллипсоидом напряжений, выражающая напряжение в данной рассматриваемой точке (фиг. 156);

$k = \frac{b}{a}$  — отношение малой полуоси к большой полуоси эллипса деформации.

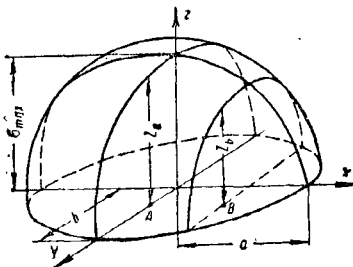
При  $k = 1$  эллипс превращается в круг:

$$(\rho_{11} = \rho_{12} \text{ и } \rho_{21} = \rho_{22}),$$

$$\delta = \frac{3P}{16} \cdot \frac{\vartheta_1 + \vartheta_2}{a}, \quad (307)$$

так как при этом

$$\int_0^\infty \frac{dz}{V(1+k^2z^2)(1+z^2)} = 1,57.$$

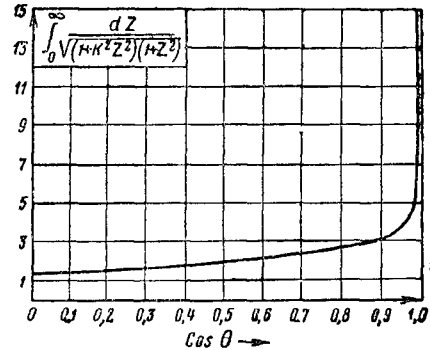


Фиг. 156

Эллиптический интеграл в уравнении (306) можно определить при помощи табл. 24 или по графикам (фиг. 157 и 158), по вспомогательному углу  $\theta$ , косинус которого определяется по уравнению (305).

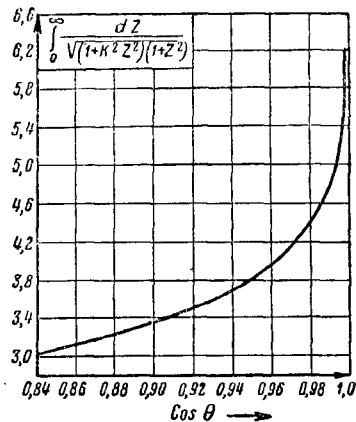
### НАПРЯЖЕНИЯ ПО ПЛОЩАДКЕ СОПРИКАСАНИЯ ДВУХ СЖАТЫХ ТЕЛ

При помощи уравнений (302) и (303) можно определить размеры площадки соприкосновения обоих тел.



Фиг. 157

Возникающие вследствие деформации тел напряжения по всей площадке соприкосновения распределяются по закону третьей координаты



Фиг. 158

наты ( $z$ ) полуэллипсоида, построенного на этой площадке (фиг. 156).

По отношению к площадке соприкосновения система координат выбирается таким образом (фиг. 156), что плоскость  $xy$  совпадает с плоскостью площадки, ось  $x$  совпадает с полуосью  $a$ , ось  $y$  совпадает с полуосью  $b$ , а третья ось  $z$  направлена нормально к плоскости  $xy$ .

Таблица 24

Значения эллиптического интеграла  $\int_0^\infty \frac{dz}{V(1+k^2z^2)(1+z^2)}$

$\cos \theta$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,85	0,88	0,9	0,92	0,94	0,96	0,98	0,99
$\int_0^\infty \frac{dz}{V(1+k^2z^2)(1+z^2)}$	1,57	1,7	1,85	2,0	2,15	2,28	2,5	2,7	2,9	3,04	3,2	3,34	3,5	3,66	3,93	4,35	4,75

Полуэллипсоид, изображающий характер распределения нормальных напряжений по площадке соприкасания, определяется по уравнению:

$$z = \frac{3P}{2\pi ab} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} \quad (308)$$

При  $x = 0$  и  $y = 0$  это уравнение даёт непосредственно величины наибольшего напряжения  $\sigma_{\max}$ , возникающего в центре эллипса

$$\sigma_{\max} = \frac{3P}{2\pi ab} \text{ кг/см}^2. \quad (309)$$

Среднее напряжение  $\sigma_{cp}$  по всей площадке соприкасания равно отношению силы  $P$ , сжимающей оба тела, к площади ( $\pi \cdot a \cdot b$ ), т. е.

$$\sigma_{cp} = \frac{P}{\pi ab} \text{ кг/см}^2. \quad (310)$$

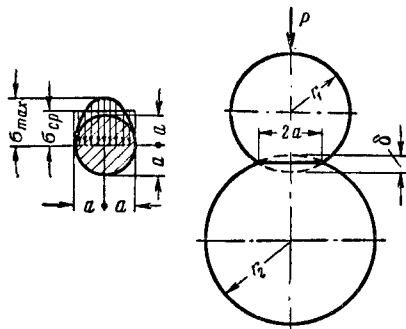
Выразив в уравнении (308) полуоси эллипса  $a$  и  $b$  через главные кривизны  $\rho$  обоих тел и через их модули упругости  $E$ , можно получить согласно (302), (303), (304) и (а) общий вид уравнения максимального напряжения:

$$\sigma_{\max} \approx \frac{0,92}{\mu\nu} \sqrt{\left[ \frac{(\rho_{11} + \rho_{12} + \rho_{21} + \rho_{22})}{\vartheta_1 + \vartheta_2} \right]^2 P} \text{ кг/см}^2. \quad (311)$$

#### ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ ПРИМЕНЕНИЯ ПРИВЕДЁННЫХ ФОРМУЛ

На основе приведённых выше уравнений можно определить величины деформаций и напряжений, возникающие в месте взаимного касания двух тел любой кривизны.

Ниже приводятся наиболее часто встречающиеся на практике случаи касания тел под нагрузкой.



Фиг. 159

**Сжатие двух шаров** (фиг. 159). Материал обоих шаров различен. По уравнению (304) и (а)

$$\vartheta_1 = \frac{32}{9E_1}; \quad \vartheta_2 = \frac{32}{9E_2}.$$

Контура площадки соприкасания двух сжатых шаров представляет собой круг. Так как кривизны  $\rho_{11} = \rho_{12}$  и  $\rho_{21} = \rho_{22}$ , то согласно уравнению (305) и по графику (фиг. 155) имеют  $\mu \cdot \nu = 1$ .

Радиус кругового контура по формулам (302) или (303)

$$a = b = \sqrt[3]{\frac{3P(\vartheta_1 + \vartheta_2)}{16(\rho_1 + \rho_2)}} \text{ см.} \quad (312)$$

Если кривизну  $\rho$  выразить через  $\frac{1}{r_1}$  и  $\frac{1}{r_2}$ , а коэффициенты эластичности  $\vartheta_1$  и  $\vartheta_2$  через  $\frac{32}{9E}$ , то

$$a = b = 0,872 \sqrt[3]{\frac{P \left( \frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} \right)}{\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}}} \text{ см,} \quad (312a)$$

где  $r_1$  и  $r_2$  — радиусы шаров.

Из уравнения (307) сближение шаров:

$$\delta = 0,33 \sqrt[3]{P^2 (\vartheta_1 + \vartheta_2)^2 \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right)} \text{ см.} \quad (313)$$

Наибольшее напряжение в центре площадки по формуле (309)

$$\begin{aligned} \sigma_{\max} &= 1,5 \frac{P}{\pi a^2} = \\ &= 0,63 \sqrt[3]{\left( \frac{\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}}{\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2}} \right)^2 \cdot P} \text{ кг/см}^2. \end{aligned} \quad (314)$$

Материал одинаков для обоих шаров:

$$\vartheta_1 = \vartheta_2 = \frac{32}{9E}.$$

Радиус кругового контура площадки соприкасания находим по формуле (312a)

$$a = 1,1 \sqrt[3]{\frac{P}{E} \cdot \frac{1}{\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}}} \text{ см.} \quad (315)$$

Сближение обоих шаров

$$\delta = 1,22 \sqrt[3]{\frac{P^2}{E^2} \cdot \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right)} \text{ кг/см}^2. \quad (316)$$

Наибольшее напряжение в центре площадки соприкасания

$$\sigma_{\max} = 0,388 \sqrt[3]{PE^2 \cdot \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right)^2} \text{ кг/см}^2. \quad (317)$$

**Сжатие шара с плоскостью** (фиг. 160). Шар и плита из различного материала. По уравнению (304) и (а):

$$\vartheta_1 = \frac{32}{9E_1}; \quad \vartheta_2 = \frac{32}{9E_2}.$$

Радиус кривизны плоскости  $r_2 = \infty$ .

Подставляя в уравнение (312a) значение  $r_2 = \infty$ , получают для круглого контура площадки соприкасания

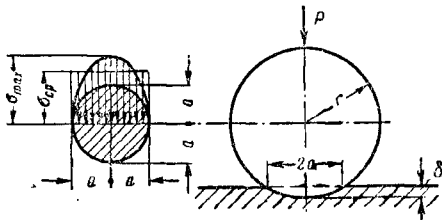
$$a = 0,872 \sqrt[3]{P \cdot r \left( \frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} \right)} \text{ см.} \quad (318)$$

Сближение обоих тел, полагая в уравнении (313)  $r_2 = \infty$

$$\delta = 0,33 \sqrt[3]{\frac{P^2 (\vartheta_1 + \vartheta_2)^2}{r}}. \quad (319)$$

Наибольшее сжимающее напряжение в центре площадки соприкасания по формулам (308) и (314)

$$\begin{aligned} \sigma_{\max} &= 1,5 \frac{P}{\pi a^2} = 1,46 \sqrt[3]{\frac{P}{r^2 (\vartheta_1 + \vartheta_2)^2}} = \\ &= 0,63 \sqrt[3]{\frac{P}{r^2 \left( \frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} \right)^2}}. \quad (320) \end{aligned}$$



Фиг. 160

Шар и плита из одинакового материала:

$$\vartheta_1 = \vartheta_2 = \frac{32}{9E}.$$

Радиус контура площадки соприкасания по формуле (315)

$$a = 1,1 \sqrt[3]{\frac{P \cdot r}{E}} \text{ см.} \quad (321)$$

Сближение обоих тел по формуле (307)

$$\delta = \frac{3P}{16} \frac{\vartheta_1 + \vartheta_2}{a} = \frac{3P}{16} \frac{\vartheta_1 + \vartheta_2}{1,1 \sqrt[3]{\frac{P \cdot r}{E}}}$$

или

$$\delta = 1,22 \sqrt[3]{\frac{P^2}{E^2 \cdot r}} \text{ см.} \quad (322)$$

Максимально сжимающее напряжение в центре площадки по формуле (317), принимая  $r_2 = \infty$

$$\sigma_{\max} = 0,398 \sqrt[3]{\frac{PE^2}{r^2}} \text{ кг/см}^2. \quad (323)$$

Сжатие двух параллельных цилиндров (фиг. 161). Материал обоих цилиндров различен:

$$\vartheta_1 = \frac{32}{9E_1}; \quad \vartheta_2 = \frac{22}{9E_2}.$$

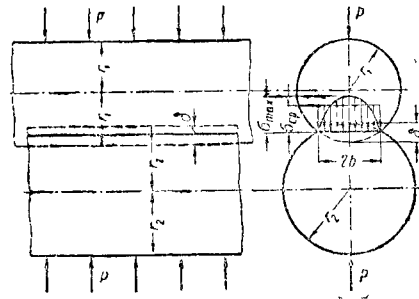
Площадка соприкасания представляет собой прямоугольник бесконечной длины с шириной  $2b$ .

Полуширина площадки соприкасания цилиндров будет:

$$b = \sqrt{\frac{p}{\pi} \cdot \frac{\vartheta_1 + \vartheta_2}{\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}}} \quad \text{или} \quad b = 1,07 \sqrt{\frac{1}{p} \cdot \frac{1}{\frac{E_1}{r_1} + \frac{E_2}{r_2}}} \text{ см.} \quad (324)$$

где  $p$  для случая касания цилиндров означает давление на погонную единицу длины цилиндра в кг/см:

$$p = \frac{P}{l}.$$



Фиг. 161

Наибольшее напряжение по площадке соприкасания обоих цилиндров будет:

$$\sigma_{\max} = \frac{2p}{\pi \cdot b} = 0,637 \frac{p}{b}, \quad (325)$$

или после подстановки значения  $b$  из формулы (324):

$$\begin{aligned} \sigma_{\max} &= 1,13 \sqrt{\frac{p \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right)}{\vartheta_1 + \vartheta_2}} \\ \text{или} \quad \sigma_{\max} &= 0,59 \sqrt{\frac{p \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right)}{\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2}}} \text{ кг/см}^2. \quad (326) \end{aligned}$$

Материал обоих цилиндров одинаков:

$$\vartheta_1 = \vartheta_2 = \frac{32}{9E}.$$

Полуширина  $b$  площадки соприкасания по уравнению (324):

$$b = 1,52 \sqrt{\frac{p}{E} \cdot \frac{1}{\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}}} \text{ см.} \quad (327)$$

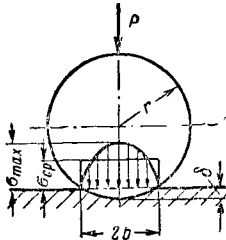
Наибольшее напряжение по формуле (326):

$$\sigma_{\max} = 0,418 \sqrt{p \cdot E \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right)} \text{ кг/см}^2. \quad (328)$$

Сжатие цилиндра с плоскостью (фиг. 162). Контур площадки соприкасания здесь такой же, как и в случае параллельного касания двух цилиндров.

Материал цилиндра и плиты различный:

$$\vartheta_1 = \frac{32}{9E_1}; \quad \vartheta_2 = \frac{32}{9E_2}.$$



Фиг. 162

Полуширина площадки соприкасания по формуле (324), принимая  $r_2 = \infty$ .

$$\left. \begin{aligned} b &= \sqrt{\frac{pr}{\pi} (\vartheta_1 + \vartheta_2)} \\ \text{или} \\ b &= 1,07 \sqrt{p \cdot r \left( \frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} \right)} \end{aligned} \right\} \text{ см.} \quad (329)$$

Наибольшее напряжение по формуле (325):

$$\sigma_{\max} = 0,637 \frac{p}{b} = 0,637 \frac{p}{\sqrt{\frac{pr}{\pi} (\vartheta_1 + \vartheta_2)}}$$

или по уравнению (326)

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\max} &= 1,13 \sqrt{\frac{p}{r (\vartheta_1 + \vartheta_2)}} \\ \sigma_{\max} &= 0,59 \sqrt{\frac{p}{r \left( \frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} \right)}} \end{aligned} \right\} \text{ кг/см}^2. \quad (330)$$

Материал цилиндра и плиты одинаков:

$$\vartheta_1 = \vartheta_2 = \frac{32}{9E}.$$

Полуширина площадки соприкасания  $b$  по формуле (329):

$$b = 1,52 \sqrt{\frac{p \cdot r}{E}}. \quad (331)$$

Наибольшее сжимающее напряжение по формуле (330):

$$\sigma_{\max} = 0,418 \sqrt{\frac{p \cdot E}{r}}. \quad (332)$$

## КОНЦЕНТРАЦИЯ НАПРЯЖЕНИЙ

Резкие изменения формы тела обуславливают неравномерное распределение напряжений.

Учение о концентрации напряжений (о местных напряжениях) исследует влияние этих резких изменений формы на характер распределения напряжений.

Напряжение  $\sigma_0$  или  $\tau_0$ , определённое элементарными методами теории сопротивления материалов, называется номинальным напряжением.

Отношение наибольшего напряжения  $\sigma_{\max}$  или  $\tau_{\max}$  к номинальному напряжению называется коэффициентом концентрации:

$$\left. \begin{aligned} k_\sigma &= \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_0} \\ k_\tau &= \frac{\tau_{\max}}{\tau_0} \end{aligned} \right\}. \quad (333)$$

Если материал обладает упругими свойствами, то отношения (333) в большинстве случаев не зависят ни от величины номинального напряжения, ни от материала.

### КОНЦЕНТРАЦИЯ НАПРЯЖЕНИЙ ПРИ РАСТЯЖЕНИИ ИЛИ СЖАТИИ

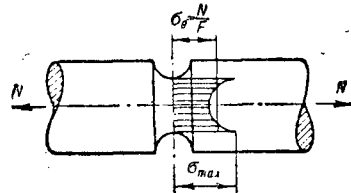
Номинальное напряжение:

$$\sigma_0 = \frac{N}{F},$$

где  $N$  — продольная сила (фиг. 163), а  $F$  — площадь с учётом ослабления сечения.

1. Брус, поперечное сечение которого меняется по линейному закону. При рас-

тяжении симметричного клина (фиг. 164) точное решение, основанное на теории упругости, показывает, что нормальные напряжения в каком-нибудь поперечном сечении распределяются неравномерно. Наибольшее напряжение имеет место в точке  $O$ , наименьшее — на краях в точках  $m$  и  $n$ .



Фиг. 163

Величина радиальных напряжений:

$$\sigma_r = k \frac{P}{hr} \cos \theta, \quad (334)$$

где  $\theta$  — угол между осью  $X$  и направлением  $OF$ ;

$r$  — расстояние точки  $F$  от  $O$ ;

$k$  — коэффициент, зависящий от величины угла  $2\varphi$  у вершины клина и определяется по формуле:

$$k = \frac{1}{\varphi + \frac{1}{2} \sin 2\varphi}.$$

Формула (334) даёт величину главных напряжений.

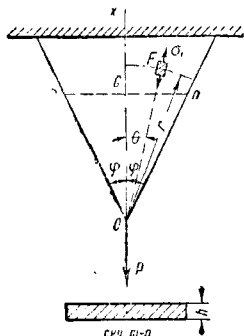
Величина нормальных напряжений  $\sigma_x$  по поперечному сечению:

$$\sigma_x = \sigma_1 \cos^2 \theta = k \frac{P}{r^2} \cos^2 \theta. \quad (335)$$

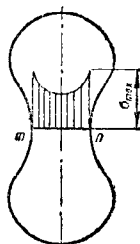
Разница между наибольшими и наименьшими нормальными напряжениями возрастёт с увеличением угла  $\varphi$ . При  $\varphi = 10^\circ$  эта разность составляет около 6% от среднего напряжения, получаемого делением растягивающей силы  $P$  на площадь поперечного сечения  $тп$ .

2. Брусок, имеющий резкое изменение поперечного сечения (восьмёрка). Исследование напряжений при растяжении брусков типа восьмёрки показывает, что коэффициент концентрации напряжений в точках  $m$  и  $n$  будет равен 1,75 (фиг. 165), т. е.

$$k_\sigma = 1,75,$$



Фиг. 164

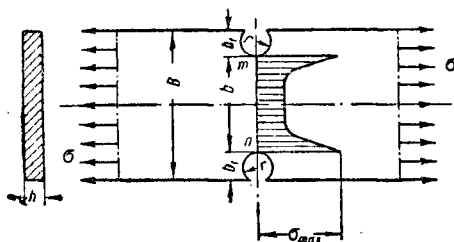


Фиг. 165

наибольшее напряжение

$$\sigma_{\max} = k_\sigma \cdot \sigma_0.$$

3. Брус прямоугольного сечения с двумя выточками (фиг. 166). В табл. 25 приведены коэффициенты концентрации  $k_\sigma$  в зависимости



Фиг. 166

от отношений радиуса  $r$  закругления выточки к ширине  $B$  неослабленного сечения, а также от глубины выточки  $b_1$  к радиусу закругления  $r$ .

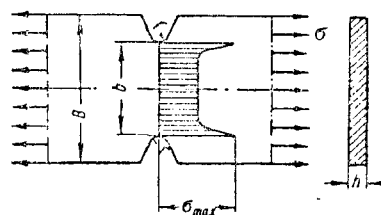
Таблица 25

Значения коэффициента концентрации  $k_\sigma$

$r/B$	0,05	0,035	0,15	0,225	0,30	0,40	0,52	0,75
$b_1/r$								
0,5	2,25	2,10	1,95	1,85	1,70	1,60	1,50	1,35
1,0	2,57	2,34	2,16	1,96	1,81	1,65	1,51	1,36
1,5	2,72	2,50	2,26	2,00	1,84	1,65	1,51	1,36
2,0	2,90	2,64	2,32	2,03	1,85	1,65	1,51	1,36
3,0	—	2,84	2,40	2,05	1,86	1,65	1,51	1,36
4,0	—	2,94	2,43	2,06	1,86	1,65	1,51	1,36

В случае, когда  $\frac{b_1}{r} = 1$ , коэффициент концентрации

$$k_\sigma = 2,75 \left(1 - \frac{b_1}{B}\right) + 0,32 \left(\frac{b_1}{B}\right)^2 + 0,68 \left(\frac{b_1}{B}\right)^3. \quad (336)$$



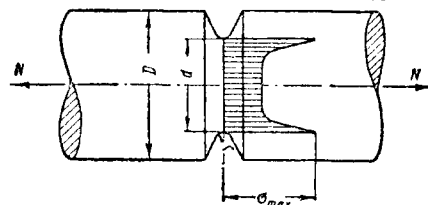
Фиг. 167

4. Брус прямоугольного поперечного сечения с двумя V-образными выточками (фиг. 167). Значение коэффициентов  $k_\sigma$  в зависимости от отношения  $\frac{r}{b}$  приведены в табл. 26.

Таблица 26

$r/b$	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,40	0,50
$k_\sigma$	4,1	3,0	2,5	2,2	2,0	1,9	1,7	1,55

5. Круглый брус сплошного поперечного сечения с V-образной выточкой (фиг. 168).



Фиг. 168

Значение коэффициентов концентрации установлено экспериментальным путём.

Коэффициенты  $k_\sigma$  в зависимости от отношения  $\frac{r}{d}$  приведены в табл. 27.

Таблица 27

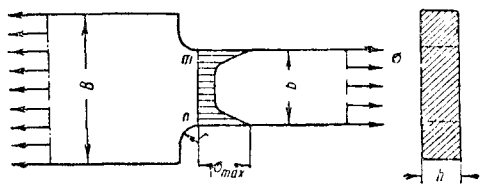
$r/d$	0,05	0,10	0,15	0,20	0,30	0,40	0,50
$k_\sigma$	3,4	2,5	2,1	1,9	1,62	1,5	1,4

6. Прямоугольная полоса, имеющая два участка различной ширины. В случае полосы, имеющей два участка различной ширины, наибольшие нормальные напряжения будут в точках  $m$  и  $n$  узкой части у начала закруглений (фиг. 169):

$$\sigma_{\max} = k_\sigma \cdot \sigma_0,$$

где  $\sigma_0$  — равномерное растягивающее напряжение, действующее на конце узкой части, и

$k_\sigma$  — коэффициент концентрации, зависящий от радиуса  $r$  дуги сопряжения и от отношения  $\frac{B}{b}$ . Этот коэффициент приведён в табл. 28.



Фиг. 169

Таблица 28

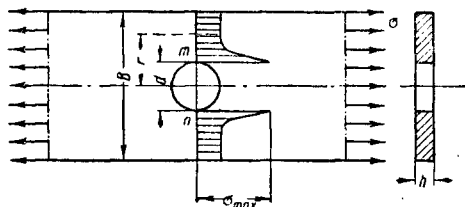
$\frac{B}{b} \backslash \frac{r}{b}$	1/16	1/8	3/16	1/4	3/8	1/2
6,0	—	2,7	2,3	2,0	1,8	1,6
3,0	3,10	2,66	2,28	2,0	1,76	1,6
2,5	3,10	2,58	2,18	1,90	1,65	1,51
2,0	2,66	2,29	1,97	1,74	1,52	1,41
1,75	2,42	2,14	1,87	1,66	1,45	1,35
1,50	2,20	2,00	1,77	1,58	1,39	1,31
1,375	2,10	1,92	1,72	1,54	1,35	1,28
1,250	1,96	1,84	1,66	1,50	1,32	1,26
1,225	1,86	—	1,60	—	—	—

Для случая, когда  $\frac{B}{b}$  будет больше 3, коэффициент концентрации

$$k_\sigma = 1,3 + 0,172 \frac{b}{r}. \quad (337)$$

Из таблицы видно, что коэффициент  $k_\sigma$  увеличивается при увеличении отношения  $\frac{B}{b}$  и при уменьшении радиуса выкружки.

7. Прямоугольный брус с круглым отверстием в центре. В этом случае в точках  $m$  и  $n$  по краям отверстия имеется сильная концентрация напряжений. Распределение напряжений по сечению, проходящему через центр отверстия, показано на фиг. 170.



Фиг. 170

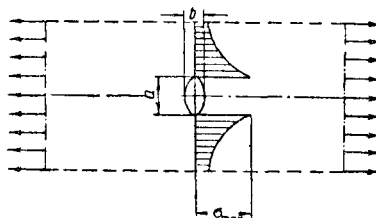
Когда отверстие мало по сравнению с шириной полосы, нормальные напряжения в любой точке этого сечения на расстоянии  $r$  от центра отверстия определяются по формуле:

$$\sigma = \frac{\sigma_0}{2} \left( 2 + \frac{1}{4} \frac{a^2}{r^2} + \frac{3}{16} \frac{a^4}{r^4} \right), \quad (338)$$

где  $\sigma_0$  — среднее значение растягивающего напряжения, если пренебречь отверстием в полосе.

Из диаграммы, представленной на фиг. 170, видно, что концентрация напряжений имеет местный характер.

Так, например, в точках  $m$  и  $n$ , т. е. при  $r = \frac{d}{2}$ , напряжение будет  $\sigma_{\max} = 3\sigma_0$  и быстро уменьшается по мере удаления от этих перенапряжённых точек; на расстоянии от края отверстия, равном радиусу его, т. е. при  $r = d$ , напряжение  $\sigma$  составляет только  $\frac{39}{32}\sigma_0$ , при  $r = 2d$   $\sigma = \frac{65}{64}\sigma_0$ .



Фиг. 171

8. Пластика бесконечной ширины с эллиптическим отверстием (фиг. 171). Наибольшее нормальное напряжение будет по концам вертикальной оси отверстия.

Напряжение определяется по формуле, выведенной Колосовым:

$$\sigma_{\max} = \sigma_0 \left( 1 + 2 \frac{a}{b} \right), \quad (339)$$

где  $a$  — диаметр эллипса, перпендикулярный направлению растяжения;  
 $b$  — другой диаметр эллипса.

Коэффициент концентрации

$$k_\sigma = 1 + 2 \frac{a}{b}. \quad (340)$$

Когда  $a = b$ , то получается ранее разобранный случай круглого отверстия.

В предельном случае, когда малая ось эллиптического отверстия стремится к нулю, оно переходит в трещину или щель.

Если направление этой трещины не совпадает с линией действия сил, то по концам её возникают очень высокие напряжения, даже при малой нагрузке. Благодаря сильной концентрации напряжений по концам трещины последняя стремится увеличить свою длину.

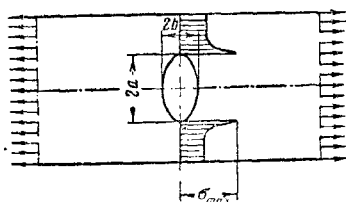
Распространение трещины можно ограничить путём увеличения радиуса кривизны по её концам. Обычно это делается путём про сверливания круглых отверстий у концов трещины.

9. Пластика конечной ширины с эллиптическим отверстием (фиг. 172). Наибольшее нормальное напряжение

$$\sigma_{\max} = k_\sigma \sigma_0$$

где

$$k_{\sigma} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2q^2} - \frac{(a+b)(a^2 + 2b^2 - ab)}{8q^4a^2}} - \frac{(a+b)(a^2 - b^2)(a^2 + 4b^2 - ab)}{16q^4a^2} \quad (341)$$



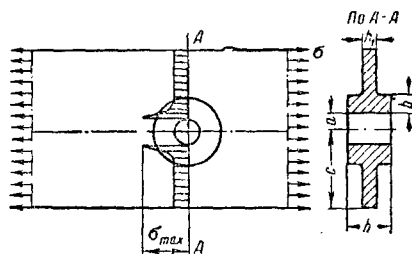
Фиг. 172

В большинстве случаев достаточно принять:

$$k_{\sigma} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2q^2}}, \quad (342)$$

где  $q = \frac{x}{a}$ .

10. Пластика с круговым отверстием, укрепленным втулкой (фиг. 173) Исследование данной задачи проведено С. П. Тимошенко, который нашёл для определённых



Фиг. 173

соотношений значения коэффициентов концентрации напряжений. Так, например, при соотношении  $\frac{h}{h_1} = 11 \frac{b}{2a} = 0,01$  он даёт следующую таблицу для определения коэффициента концентрации напряжений:

Таблица 29

$c/a$	4	5	6
$k_{\sigma}$	2,50	2,53	2,56

В табл. 30 приводятся значения коэффициента концентрации  $k_{\sigma}$  в зависимости от отношения

$$\frac{F_1}{F_2},$$

где  $F_1 = 2h_1a$ ,  
 $F_2 = (h - h_1)b$ .

Таблица 30

$F_1/F_2$	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50
$k_{\sigma}$	2,53	2,17	1,90	1,69	1,53

Этими результатами можно пользоваться также и в случае другой формы поперечного сечения утолщения, если только радиально

размер  $b$  ребра мал по сравнению с радиусом  $a$  отверстия.

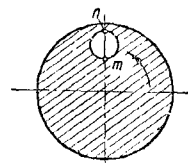
## КОНЦЕНТРАЦИЯ НАПРЯЖЕНИЙ ПРИ КРУЧЕНИИ

Номинальное напряжение:

$$\tau_0 = \frac{M_k}{I_p} \rho,$$

где  $M_k$  — крутящий момент,  
 $I_p$  — полярный момент инерции поперечного сечения;  
 $\rho$  — расстояние от центра тяжести сечения до рассматриваемой точки.

1. Круглое продольное отверстие небольшого размера в поперечном сечении скручиваемого вала (фиг. 174). При решении этой задачи очень удобно пользоваться гидродинамической аналогией, по которой следует, что задача о кручении цилиндрических стержней постоянного сечения математически идентична задаче движения идеальной жидкости, вращающейся с постоянной угловой скоростью внутри цилиндрической оболочки, имеющей то же сечение, что и скручиваемый стержень.



Фиг. 174

Линейную скорость движущейся жидкости в какой-нибудь точке можно рассматривать как изображение скалывающего напряжения в этой же точке поперечного сечения скручиваемого стержня.

Влияние малого отверстия на вал круглого сечения в гидродинамической модели равносильно воздействию неподвижного сплошного цилиндра такого же размера, введённого в поток движущейся жидкости. В непосредственной близости к цилиндру скорости частиц сильно изменяются. Скорости впереди и сзади цилиндра уменьшаются до нуля, между тем как у боковых точек  $m$  и  $n$  они удвоятся. Поэтому из-за такого рода отверстия удваивается наибольшее напряжение при кручении в той части вала, где оно расположено.

Таким образом, в этом случае коэффициент концентрации

$$k_{\sigma} = 2,0.$$

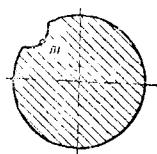
Необходимо иметь в виду, что концентрация напряжения в этом случае даёт отношение наибольшего местного напряжения не к наибольшему напряжению у поверхности целого вала, а к величине того напряжения, которое получилось бы в том месте, где расположено отверстие.

2. Продольный полукруглый желобок на поверхности вала небольшого размера (фиг. 175). Небольшой полукруглый паз на поверхности вала, параллельный его длине, производит такой же эффект, как и круглое продольное отверстие небольшого размера

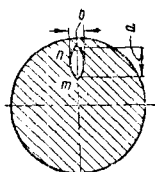
в поперечном сечении скручиваемого вала. Касательное напряжение вблизи точки  $m$  будет примерно вдвое больше того, которое получается для точек поверхности вала на далёком расстоянии от паза

$$k_\tau = 2,0.$$

3. Эллиптическое продольное отверстие небольшого размера в поперечном сечении скручиваемого вала (фиг. 176). Если одна из главных осей эллипса  $a$  имеет радиальное



Фиг. 175



Фиг. 176

направление, а другая главная ось —  $b$ , то наибольшее напряжение возникает в точке  $n$  по краю отверстия на конце оси  $a$ , причём наибольшее напряжение будет зависеть от отношения  $\frac{a}{b}$ . Влияние эллиптической полости на напряжение будет больше тогда, когда большая ось эллипса расположена в радиальном направлении. Этим объясняется почему радиальные трещины так сильно понижают прочность вала при кручении.

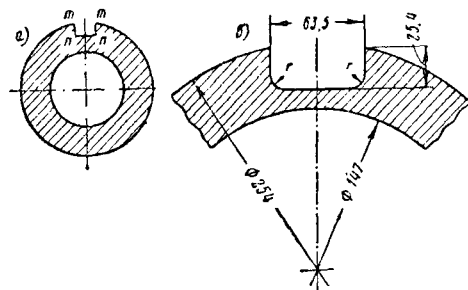
В этом случае коэффициент концентрации

$$k_\tau = 1 + \frac{a}{b}.$$

Если  $a = b$ , то  $k_\tau = 2,0$ .

Это же уравнение может быть применено к случаю, когда на скручиваемом валу будет канавка полуэллиптического вида, выточенная на поверхности вала.

4. Прямоугольное углубление (гнездо шпонки) (фиг. 177). Для случая паза с резко выточенными углами для шпонки гидродинамическая аналогия показывает, что ско-



Фиг. 177

рость жидкости в наружных углах (точки  $m$ ) равна нулю; следовательно, касательные напряжения в соответствующем валу при кручении должны быть также в этих углах равны нулю. В точках  $n$ , т. е. в вершинах входящих углов, скорости движущейся жидкости теоретически равны бесконечности. При кручении соответствующего вала касательные напряжения в точках  $n$  обращаются также

в бесконечность, т. е. незначительный крутящий момент будет вызывать появление в этих точках остаточных деформаций. Концентрация напряжений может быть смягчена, если закруглить углы.

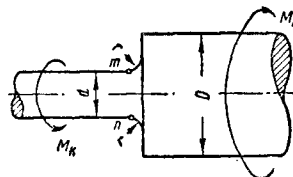
Опытные данные, полученные при испытании полого вала, имеющего наружный диаметр 254 мм и внутренний — 147 мм, с пазом для шпонки глубиной 25,4 мм и шириной в 63,5 мм при переменном радиусе закругления  $r$  в углах паза, показывают, что наибольшие касательные напряжения в закруглённых углах равны наибольшему напряжению в валу без паза для шпонок, умноженным на коэффициент  $k_\tau$ , значение которого для различных радиусов  $r$  даны в табл. 31 (в мм).

Таблица 31

$r$	2,54	5,08	7,62	10,16	12,70	15,24	17,78
$k_\tau$	5,4	3,4	2,7	2,3	2,1	2,0	1,9

Из таблицы видно, что коэффициент концентрации можно сильно понизить увеличением радиуса  $r$  выкружки го входящих углах.

5. Бал, состоящий из двух частей различных диаметров (фиг. 178). Концентрация



Фиг. 178

напряжений имеет место в точках  $m$  и  $n$  в начале сопряжения двух участков. Величина этих небольших напряжений зависит от отношений  $\frac{r}{d}$  и  $\frac{D}{d}$ , где  $r$  — есть радиус дуги сопряжения, а  $d$  и  $D$  — диаметры двух участков вала. Эти высокие местные напряжения, не являясь опасными для пластических материалов при постоянной нагрузке, могут быть опасными при наличии переменных напряжений, что имеет место у гребных валов и у валов двигателей внутреннего сгорания.

Величина наибольшего касательного напряжения

$$\tau_{\max} = k_\tau \tau_0,$$

$$\text{где } \tau_0 = \frac{M_k}{W_p}.$$

Величина  $k_\tau$  может быть определена на основании кривых (фиг. 179), где абсцисса — значения  $\frac{D}{d}$ , а ординаты являются коэффициентами  $k_\tau$  при различных значениях отношения  $\frac{2r}{d}$  радиуса выкружки к меньшему радиусу вала. Путём интерполяции по этим кривым можно найти с достаточной точностью значение коэффициента концентрации напряжений  $k_\tau$  в любом частном случае.



Имеется формула для определения наибольших местных напряжений при кручении валов, имеющих части различных диаметров. Эта формула имеет следующий вид:

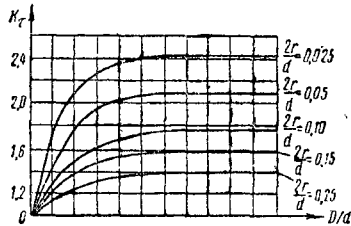
$$k_{\tau} = \frac{1}{2D} \left[ \frac{3(d+2r)(d+4r)}{d+6r} + \frac{(D-d-2r)(d+12r)}{6r} \right]. \quad (343)$$

Если

$$D-d=2r,$$

то значение  $k_{\tau}$  принимает вид:

$$k_{\tau} = \frac{1}{2D} \left[ \frac{3(d+2r)(d+4r)}{d+6r} \right]. \quad (344)$$



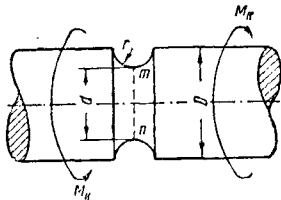
Фиг. 179

В табл. 32 даны значения коэффициентов  $k_{\tau}$  при различных соотношениях  $r$ ,  $d$  и  $D$ .

Таблица 32

$r/d$	$D/d$	0,005	0,01	0,02	0,03	0,04	0,06	0,08	0,10	0,12
2,00	—	3,0	2,25	2,00	1,82	1,65	1,51	1,44	1,30	1,30
1,33	—	2,7	2,16	1,91	1,76	1,60	1,48	1,40	1,35	1,35
1,20	3,00	2,5	2,00	1,75	1,62	1,50	1,40	1,34	1,30	1,30
1,09	2,20	1,88	1,53	1,40	1,30	1,20	1,16	1,15	1,15	1,15

6. Вал с полукруглой выточкой (фиг. 180). При обычных размерах выкружки величина концентрации напряжений  $k_{\tau} = 1,75$  от величины наибольших касательных напряжений в участке вала диаметра  $d$ .



Фиг. 180

Коэффициент концентрации для вала с полукруглой выточкой:

$$k_{\tau} = \frac{(d+2r)^2(D-d+2r)+4r^2(D-d-2r)}{D(d+4r)2r} \quad (345)$$

Если

$$D-d=2r,$$

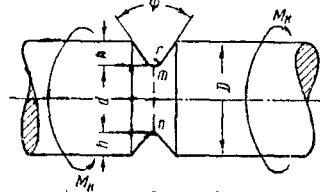
$$\text{то } k_{\tau} = \frac{3}{2} \frac{(2D-d)}{(3D-2d)}$$

и

$$k_{\tau} = \frac{2D}{2D-d}.$$

Значение  $k_{\tau}$  зависит от соотношений  $r$ ,  $d$  и  $D$ ,  
где  $D$  — диаметр вала;  
 $d$  — диаметр по месту выточки;  
 $r$  — радиус закругления самой выточки.

7. Вал с угловой выточкой (фиг. 181). В этом случае также наибольшие касательные напряжения будут в точках  $m$  и  $n$ ,



Фиг. 181

причем коэффициент концентрации  $k_{\tau}$ , определяемый по табл. 33, зависит от глубины выточки  $h$ , радиуса закругления  $r$  и угла  $\phi$ .

Таблица 33

$\begin{array}{c} h/r \\ \psi \end{array}$	0,5	1	3	5	9
0°	1,85	2,01	2,66	3,23	4,54
60°	1,84	2,00	2,54	3,06	3,90
90°	1,81	1,95	2,40	2,64	3,12
120°	1,66	1,75	1,95	2,06	2,13

8. Кручение прокатных профилей. Наибольшие напряжения будут иметь место во входящих углах.

Значение коэффициента концентрации

$$k_{\tau} = 1,74 \sqrt[3]{\frac{c}{r}}, \quad (346)$$

где  $c$  — наибольшая толщина сечения в месте входящего угла;

$r$  — радиус внутренней выкружки угла.

## КОНЦЕНТРАЦИЯ НАПРЯЖЕНИЙ ПРИ ИЗГИБЕ

Номинальное напряжение:

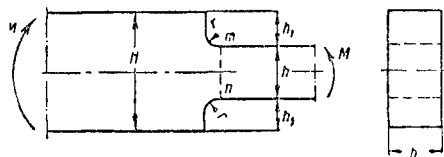
$$\sigma_0 = \frac{M \cdot y}{I},$$

где  $M$  — изгибающий момент;

$I$  — момент инерции поперечного сечения относительно нейтральной оси;

$y$  — расстояние от нейтральной оси до рассматриваемой точки.

1. Изгиб плоского стержня с сопряжением частей различных поперечных сечений (фиг. 182). Наибольшее напряжение  $\sigma_{\max}$  возникает в более узкой части у начала закругления:



Фиг. 182

Наибольшее напряжение  $\sigma_{\max}$  возникает в более узкой части у начала закругления:

$$\sigma_{\max} = k_{\sigma} \sigma_0.$$

$$\text{Номинальное напряжение } \sigma_0 = \frac{6M}{bd^2}.$$

Коэффициент концентрации  $k_{\sigma}$ , определяемый по табл. 34, зависит от отношений

$$\frac{r}{h} \text{ и } \frac{h_1}{r},$$

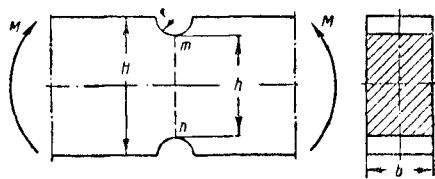
где  $r$  — радиус закругления сопряжения, а

$$h_1 = \frac{H-h}{2}.$$

Таблица 34

$r/h$	0,05	0,10	0,20	0,27	0,50	1,0
$h_1/r$						
0,5	1,61	1,49	1,39	1,34	1,22	1,07
1,0	1,91	1,70	1,48	1,38	1,22	1,08
1,5	2,00	1,73	1,50	1,39	1,23	1,08
2,0	—	1,74	1,52	1,39	1,23	1,09
3,5	—	1,75	1,54	1,40	1,23	1,10

2. Изгиб бруса прямоугольного поперечного сечения с двумя полукруглыми выточками (фиг. 183). Наибольшие нормальные напряжения, как показывает эксперимент, будут в точках  $m$  и  $n$ .



Фиг. 183

Коэффициент концентрации определяется по табл. 35.

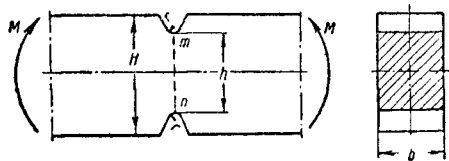
Таблица 35

$r/h$	0,05	0,10	0,20	0,30	0,75
$h_1/r$					
0,5	1,90	1,75	1,54	1,40	1,17
1,0	2,20	1,86	1,59	1,45	1,18
1,5	—	1,91	1,60	1,45	1,18
2,0	—	1,94	1,60	1,46	1,18
3,0	—	2,00	1,61	1,47	1,18
4,0	—	2,05	1,62	1,47	1,18

3. Изгиб бруса прямоугольного поперечного сечения с двумя V-образными выточками (фиг. 184). В этом случае коэффициент концентрации зависит от отношения

$$\frac{r}{h}.$$

Наибольшие нормальные напряжения будут в точках  $m$  и  $n$ .

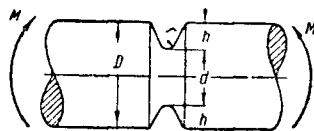


Фиг. 184

Значения коэффициента концентрации для этого случая приведены в табл. 36.

Таблица 36

$r/h$	0,025	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,40	0,50
$k_{\sigma}$	3,6	2,9	2,2	1,9	1,7	1,6	1,5	1,4	1,3



Фиг. 185

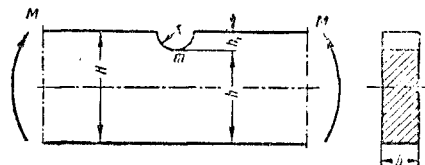
4. Изгиб бруса круглого поперечного сечения с кольцевой V-образной выточкой (фиг. 185). В этом случае коэффициент концентрации зависит от отношения

$$\frac{r}{d},$$

где  $r$  — радиус закругления и  $d$  — диаметр ослабленного сечения. Величина коэффициента концентрации определяется по табл. 37.

Таблица 37

$r/d$	0,05	0,10	0,15	0,20	0,30	0,40	0,50
$k_{\sigma}$	2,55	2,00	1,74	1,60	1,43	1,31	1,25



Фиг. 186

5. Изгиб бруса прямоугольного поперечного сечения с одной полукруглой выточкой (фиг. 186). Для частного случая,

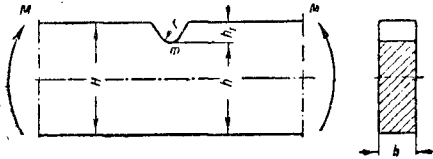
когда отношение  $\frac{r}{H} = 0,125$ , коэффициент концентрации нормальных напряжений определяется по табл. 38.

Таблица 38

$h/r$	0,66	1,33	2,00	2,67	3,33	4,00	4,67	5,33	6,00	6,57	7,34
$k_\sigma$	1,86	2,04	1,97	1,92	1,84	1,76	1,65	1,55	1,46	1,35	1,06

6. Изгиб бруса прямоугольного поперечного сечения с одной V-образной выточкой (фиг. 187). Когда  $h_1$  мало по сравнению с  $h$ , коэффициент концентрации:

$$k_\sigma = 1 + 2 \sqrt{\frac{h_1}{r}}.$$



Фиг. 187

7. Изгиб бруса прямоугольного сечения с одним круглым отверстием по оси (фиг. 188). В балке прямоугольного сечения, без отверстия, шириной  $2c$  и высотой  $2b$ , находящейся под действием постоянного изгибающего момента  $M$ , напряжения

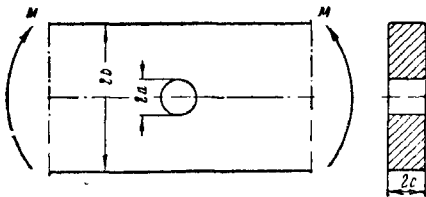
$$\sigma = \frac{M}{I} \cdot y \text{ или } \sigma = \frac{3M}{4b^3c} \cdot y.$$

В точках любого из кругов радиуса  $a$  с центром в начале координат радиальные напряжения:

$$\sigma_r = -\frac{1}{4} \frac{M}{I} a (\sin \theta + \sin 3\theta) \quad (347)$$

или

$$\sigma_r = -\frac{3}{16} \frac{M}{b^3c} a (\sin \theta + \sin 3\theta).$$



Фиг. 188

При помощи наложения можно получить напряжения для балок с круглым отверстием на нейтральной оси, находящейся под действием постоянного изгибающего момента:

$$\sigma_1 = \frac{M}{I} \cdot \frac{a^3}{4} \left[ \left( \frac{3r}{a^3} + \frac{a}{r^3} \right) \sin \theta - \left( \frac{4a^3}{r^3} - \frac{a}{r^3} + \frac{r}{a^3} \right) \sin 3\theta \right] \quad (348)$$

или

$$\sigma_1 = \frac{3Ma^3}{16b^3c} \left[ \left( \frac{3r}{a^3} + \frac{a}{r^3} \right) \sin \theta - \left( \frac{4a^3}{r^3} - \frac{a}{r^3} + \frac{r}{a^3} \right) \sin 3\theta \right],$$

при  $r = a$ .

$$\sigma_1 = 2 \frac{M}{I} a \sin \theta (2 \sin^2 \theta - 1) \quad (349)$$

или

$$\sigma_1 = \frac{3}{2} \frac{M}{b^3c} a \sin \theta (2 \sin^2 \theta - 1).$$

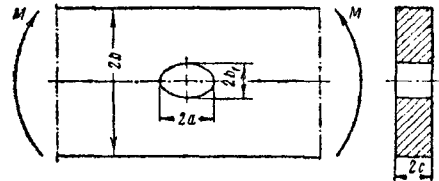
Максимум нормальных напряжений будет

при  $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$

$$\sigma_{\max} = 2 \frac{M}{I} a \text{ или } \sigma_{\max} = 2 \sigma_0.$$

Коэффициент концентрации:

$$k_\sigma = 2.$$



Фиг. 189

8. Изгиб бруса прямоугольного сечения с эллиптическим отверстием по оси (фиг. 189). Для небольшого эллиптического отверстия с осями  $2a$  и  $2b$  наибольшие напряжения возникают в точках у концов малой оси:

$$\sigma_{\max} = k_\sigma \sigma_0,$$

где  $k_\sigma = 1 + \frac{b_1}{a}$ ;

$$\sigma_0 = \frac{M}{I} b_1$$

или

$$\sigma_{\max} = \frac{3M}{4b^3c} b_1 \left( 1 + \frac{b_1}{a} \right). \quad (350)$$

Если большая ось  $2a$  совпадает с осью балки, то

$$\sigma_{\max} = \frac{4}{3} \frac{M}{b^3c} \cdot a \left( 1 + \frac{a}{b_1} \right). \quad (351)$$

## ДИНАМИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ В СОПРОТИВЛЕНИИ МАТЕРИАЛОВ

Динамическими задачами сопротивления материалов принято называть такие случаи, когда напряжённое состояние и деформации упругих тел обуславливаются не только внешней нагрузкой, но и силами инерции, возникающими при движении. Известно, что

сила инерции равна произведению массы тела на ускорение и направлена в сторону, противоположную ускорению.

Если силы инерции определены, то движущееся тело в любой момент времени может рассматриваться, как находящееся в состоя-

нии мгновенного равновесия, если к действующим на него силам присоединить силы инерции.

### НАПРЯЖЕНИЯ В ТРОСЕ ПРИ РАВНОУСКОРЕННОМ ПОДЪЁМЕ ГРУЗА

Груз  $Q$ , подвешенный к тросу, движется вверх с постоянным ускорением  $a$ . Отсекая нижнюю часть троса длиной  $x$ , заменяют действие верхней части неизвестной силой  $S$  (фиг. 190), представляющей собой натяжение троса. Сила инерции отсечённой части направлена в сторону, противоположную движению груза, и равна

$$\frac{Q + \gamma Fx}{g} \cdot a,$$

где  $\gamma$  — объёмный вес троса;  
 $F$  — площадь поперечного сечения троса;  
 $g$  — ускорения силы тяжести.

Если присоединить к действующим на рассматриваемую часть силам найденную силу инерции, то условия равновесия дадут

$$Q + \gamma Fx + \frac{Q + \gamma Fx}{g} a = S.$$

Растягивающее напряжение в тросе:

$$\sigma_d = \frac{S}{F} = \frac{Q + \gamma Fx}{F} \left(1 + \frac{a}{g}\right). \quad (352)$$

Множитель перед скобкой в правой части этого выражения представляет собой напряжение в тросе при статическом действии груза [формула 10], т. е.

$$\frac{Q + \gamma Fx}{F} = \sigma_{ст}.$$

Следовательно

$$\sigma_d = \sigma_{ст} \left(1 + \frac{a}{g}\right). \quad (353)$$

Из выражения (353) видно, что при равноускоренном движении

$$\sigma_d > \sigma_{ст},$$

при равномерном движении

$$\sigma_d = \sigma_{ст},$$

а при равнозамедленном движении

$$\sigma_d < \sigma_{ст}.$$

### НАПРЯЖЕНИЯ ВО ВРАЩАЮЩЕМСЯ КОЛЬЦЕ

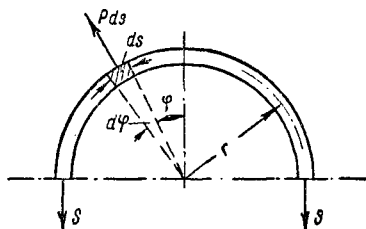
Рассматривается тонкое круговое кольцо, вращающееся вокруг оси, проходящей через его центр с постоянной угловой скоростью  $\omega$ . Возникающие при этом силы инерции (центробежные силы) распределяются равномерно по кольцу и направлены по радиусам от центра наружу. На единицу длины кольца приходится сила инерции

$$p = \frac{\gamma F}{g} \omega^2 r,$$

где  $\gamma$  — вес единицы объёма кольца;  
 $F$  — площадь сечения кольца;  
 $g$  — ускорение силы тяжести;  
 $r$  — средний радиус кольца.

Для определения напряжений в кольце рассекают кольцо диаметрально сечением (фиг. 191). Действие отброшенной части заменяют кольцевыми растягивающими силами  $S$ , которые из условий равновесия, равны:

$$s = \int p ds \cos \varphi = \frac{\gamma F \omega^2 r^2}{g} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi d\varphi = \frac{\gamma F \omega^2 r^2}{g}.$$



Фиг. 191

Напряжения в кольце:

$$\sigma_d = \frac{\gamma \omega^2 r^2}{g} = \frac{\gamma}{g} v^2. \quad (354)$$

где  $v$  — линейная скорость обода кольца.

Формула (354) показывает, что величина напряжений для данного материала зависит только от скорости  $v$ .

Напряжения в стальном кольце ( $\gamma = 7,86 \frac{г}{см^3}$ ), при различных окружных скоростях вращения:

$v$ м/сек	30	60	90	120	150	180	240	300
$\sigma_d$ кг/см <sup>2</sup>	75	300	665	1 200	1 850	2 650	4 750	7 500

Этим способом обычно рассчитывают обо-  
да маховиков.

### НАПРЯЖЕНИЯ В СПАРНИКАХ И ШАТУНАХ (фиг. 192)

В любой точке спарника силы инерции всегда направлены параллельно кривошипам.

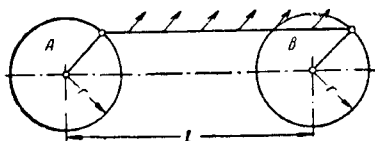
Если  $q = \gamma F$  — вес единицы длины спарника, то сила инерции будет

$$\frac{\gamma F}{g} \omega^2 r,$$

где  $\omega$  — угловая скорость вращения колёс.

Наиболее опасным будет крайнее нижнее положение спарника, при котором силы

инерции будут совпадать по направлению с собственным весом.



Фиг. 192

В этом случае нагрузка на единицу длины спарника будет:

$$\gamma F + \frac{\gamma F}{g} \omega^2 r.$$

Рассматривая спарник, как балку с шарнирными опорами, можно найти наибольший изгибающий момент, возникающий по середине пролёта:

$$M_{\max} = \frac{\gamma F l^2}{8} (1 + \omega^2 r).$$

Помимо изгиба спарник испытывает ещё сжатие или растяжение силами  $P$ , передающими вращение от колеса  $A$  к колесу  $B$ .

Наибольшее напряжение в спарнике будет равно

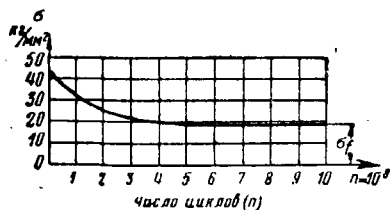
$$\sigma_{\max} = \frac{P}{F} + \frac{\gamma F l^2}{8 W} (1 + \omega^2 r), \quad (355)$$

где  $W$  — момент сопротивления поперечного сечения спарника.

## ДОПУСКАЕМЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ ПЕРЕМЕННЫХ НАГРУЗОК

### ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ОБЩИЙ СЛУЧАЙ

Основным фактором, определяющим прочность при переменных нагрузках, или так называемую вибрационную прочность, является предел усталости  $\sigma_f$  материала при заданном цикле периодически воздействующих нагрузок. Явление усталости — явление разрушения материала при напряжениях,



Фиг. 193

меньших предела прочности в силу переменности силового воздействия.

**Предел усталости** — это наибольшее напряжение, при котором явление усталости отсутствует.

Практически за предел усталости, например для сталей, принимают то наибольшее напряжение, при котором отсутствует разрушение по миновании  $10 \cdot 10^6$  циклов переменной нагрузки. На фиг. 193 изображена диаграмма усталости — зависимость между разрушающими напряжениями и соответствующим им числом циклов, служащая основанием определения  $\sigma_f$  — предела усталости.

Периодический закон изменения напряжений, график которого приведён на фиг. 194, характеризуется следующими величинами: среднее напряжение

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{\max} + \sigma_{\min}}{2};$$

амплитуда напряжений

$$\sigma_a = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2}.$$

Асимметрия цикла выражается двояким способом:

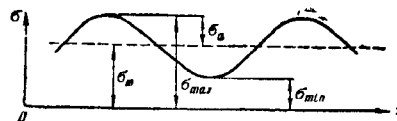
$$r = \frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}};$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\sigma_a}{\sigma_m}.$$

Для однозначного цикла  $r = 0$ .

Для знакопеременного симметричного цикла  $r = -1$ .

Соответствующие пределы усталости обозначаются  $\sigma_0$ ;  $\sigma_{-1}$ .



Фиг. 194

Распределение пределов усталости в функции асимметрии цикла даётся диаграммой (фиг. 195), получаемой экспериментально. В ней по оси  $x$  откладываются средние напряжения  $\sigma_m$ , а по оси  $y$  — максимальные напряжения на пределе усталости  $\sigma_f$ . Граница I соответствует постоянной нагрузке, граница II — однозначному циклу, граница III — знакопеременному симметричному циклу. Для данного цикла, характеризуемого величинами  $\sigma_m$  и  $\sigma_a$ , в том случае, если не учитываются дополнительные факторы динамики и концентрации напряжений по диаграмме распределения усталости, в этом общем случае следует подобрать такую вертикаль, для которой:

$$\frac{\sigma_a}{\sigma_m} = \frac{R_f}{R_m}.$$

Предел усталости для этого цикла определится тогда из выражения:

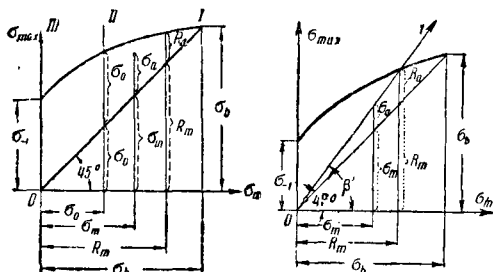
$$\sigma_f = R_f = R_a = R_m.$$

Для перехода к допускаемому напряжению следует ещё учесть коэффициент запаса  $n$ , принимаемый равным от 1,5 до 2,0 ( $R_f$  — до-

пускаемое напряжение при коэффициенте запаса, равном 1).

Задача отыскания  $R_f$  решается графически, путём проведения луча  $0-1$  (фиг. 196) под углом  $\beta'$ , определяемым по формуле:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \beta' &= \frac{R_a + R_m}{R_{\pi}} = 1 + \frac{R_a}{R_m} = \\ &= 1 + \frac{\sigma_a}{\sigma_m} = 1 + \operatorname{tg} \beta; \end{aligned}$$



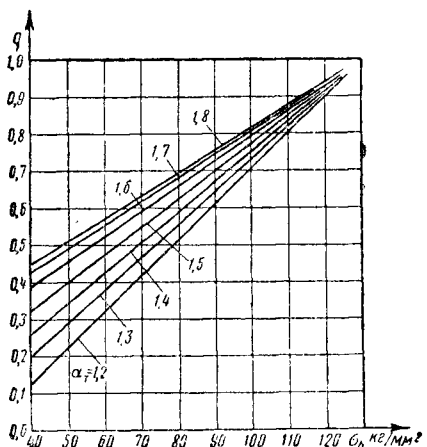
Фиг. 195

Фиг. 196

Факторы динамики  $k$  (динамический коэффициент) и концентрации напряжений  $\alpha_f$  (так называемый эффективный коэффициент концентрации, определённый по условиям испытания на усталость) следует учесть так, чтобы их влияние было пропорционально амплитуде  $R_a$  (т. е. переменной части допускаемого напряжения). Для этой цели следует ординаты диаграммы пределов усталости предварительно разделить на величину

$$\Delta = \frac{R_a}{\sigma_{-1}} \cdot \alpha_f \cdot k$$

и затем провести описанную выше операцию определения предела усталости.



Фиг. 197

Значение коэффициента концентрации  $\alpha_f$  берётся либо из экспериментальных данных, либо вычисляется по теоретическому значению коэффициента концентрации  $\alpha_T$  по формуле

$$\alpha_f = 1 + (\alpha_T - 1) q,$$

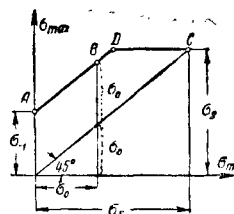
где  $q$  — коэффициент чувствительности, определяющий снижение влияния концентрации на усталость за счёт пластических свойств материала, берётся из графика фиг. 197, который построен в функции временного сопротивления стали и  $\alpha_T$ .

Общая проверка вибрационной прочности производится по формуле:

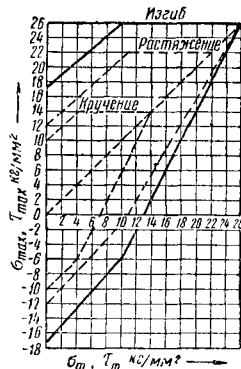
$$\sigma_m + \alpha_f k \cdot \sigma_a \leq \frac{R_f}{n}. \quad (356)$$

## АНАЛИТИЧЕСКИЙ РАСЧЁТ

Для приближённого построения диаграммы необходимо по данным испытания на знакопеременную симметричную и однозначную нагрузки получить величины  $\sigma_{-1}$  и  $\sigma_0$ . Если одновременно ограничить диаграмму пределом текучести, то по указанным трём точкам

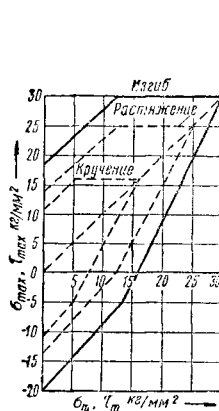


Фиг. 198

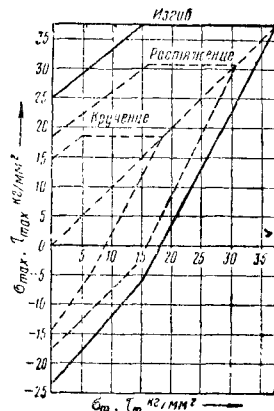


Фиг. 199

определяется вид диаграммы, (фиг. 198).



Фиг. 200



Фиг. 201

В том случае, если известен предел усталости, только для симметричного цикла, то спрямлённая диаграмма по двум точкам приобретает вид, изображённый на фиг. 203. Пользуясь ею, можно получить аналитическое выражение предела усталости, составив два уравнения:

$$\frac{R_a}{\sigma_{-1}} = \frac{\sigma_s - R_m}{\sigma_s};$$

$$\frac{R_a}{R_m} = \operatorname{tg} \beta.$$

Отсюда

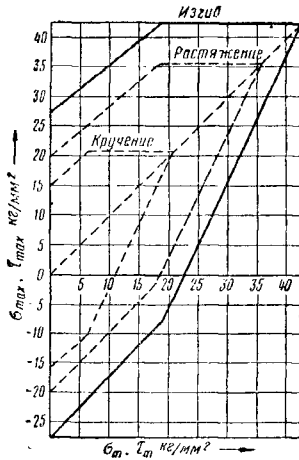
$$R_f = R_a + R_m = \sigma_s \cdot \frac{1 + \operatorname{tg} \beta}{1 + \frac{\sigma_s}{\sigma_{-1}} \operatorname{tg} \beta},$$

или

$$R_f = \sigma_s \cdot \varphi, \quad (357)$$

где

$$\varphi = \frac{1 + \operatorname{tg} \beta}{1 + \frac{\sigma_s}{\sigma_{-1}} \cdot \operatorname{tg} \beta}. \quad (358)$$

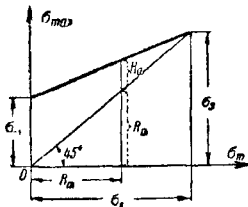


Фиг. 202

Множитель  $\varphi$  есть коэффициент уменьшения напряжений на усталость.

При учёте динамики и концентрации напряжений начальную ординату диаграммы следует разделить на величину  $\Delta = \alpha_f \cdot k$ . В этом случае формулы приобретают вид:

$$R_f = \sigma_s \cdot \varphi, \quad \varphi = \frac{1 + \operatorname{tg} \beta}{1 + \frac{\sigma_s}{\sigma_{-1}} \alpha_f \cdot k \cdot \operatorname{tg} \beta}. \quad (359)$$



Фиг. 203

Формула (359) вполне универсальна и применима к любому типу деформаций — действию осевой силы, изгибу и кручению.

Пусть  $\eta = \frac{\sigma_s}{\sigma_{-1}}$  для осевой силы и изги-

ба и  $\eta = \frac{\tau_s}{\tau_{-1}}$  для сдвига и кручения.

Тогда для сталей можно в формулу (359) подставить значения, приведённые в табл. 39.

Таблица 39

Вид воздействия	Предел текучести	Предел усталости (симм. цикл.)	$\eta$
Осевая сила . . . . .	0,6	0,28	2,2
Изгиб . . . . .	0,6	0,4	1,5
Кручение . . . . .	0,3	0,22	1,4

### МЕТОДИКА РАСЧЁТА ПРИ СЛОЖНОМ НАПРЯЖЁННОМ СОСТОЯНИИ

При наличии периодически меняющихся нормальных и касательных напряжений условие вибрационной прочности, записанное по теории касательных напряжений, имеет вид:

$$\left( \frac{\sigma}{R_{fs}} \right)^2 + \left( \frac{\tau}{R_{ft}} \right)^2 \leq 1; \quad (360)$$

$$R_{fs} = R \varphi_\sigma; \quad R_{ft} = \frac{R}{2} \varphi_\tau,$$

где при коэффициенте запаса  $n = 1$   $R = R_s$ ;

$$\varphi_\sigma = \frac{1 + \operatorname{tg} \beta_\sigma}{1 + \eta_\sigma \cdot \alpha_{fs} \cdot k \cdot \operatorname{tg} \beta_\tau};$$

$$\eta = \frac{\tau_s}{\tau_{-1}},$$

$$\varphi_\tau = \frac{1 + \operatorname{tg} \beta_\tau}{1 + \eta_\tau \alpha_{ft} \cdot k \cdot \operatorname{tg} \beta_\tau};$$

$$\eta_\sigma = \frac{\sigma_s}{\sigma_{-1}};$$

$$\sigma = \sigma_m + \alpha_{fs} \cdot k_\sigma \cdot \sigma_n;$$

$$\tau = \tau_m + \alpha_{ft} \cdot k_\tau \cdot \tau_n.$$

Следуя этой методике, удобно применить формулу так называемого расчётного напряжения:

$$\sigma_r = \sqrt{\left( \frac{\sigma}{\varphi_\sigma} \right)^2 + 4 \left( \frac{\tau}{\varphi_\tau} \right)^2}. \quad (361)$$

Условие вибрационной прочности в этом случае будет иметь обычный вид

$$\sigma_r \leq R$$

(основные допускаемые напряжения с учётом коэффициента запаса  $n$ ).

Для случая энергетической теории прочности (учёт энергии изменения формы) величина расчётного напряжения

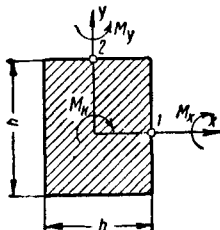
$$\sigma_r = \sqrt{\left( \frac{\sigma}{\varphi_\sigma} \right)^2 + 3 \left( \frac{\tau}{\varphi_\tau} \right)^2}. \quad (362)$$

При заданном типе, периодически изменяющегося напряжённого состояния, можно вычислить также фактический коэффициент

запаса  $n$  по формуле, имеющей одинаковый вид для обеих теорий прочности:

$$\frac{1}{n^2} = \left( \frac{\sigma}{R_{fs}} \right)^2 + \left( \frac{\tau}{R_{\tau}} \right)^2. \quad (363)$$

Формулам (361) и (362) целесообразно придать развёрнутый вид для наиболее частого случая изгиба и кручения круглого и прямоугольного поперечного сечения, а именно:



Фиг. 204

1. По теории касательного напряжения:

$$\sigma_r = \frac{M_r}{W_{экр}};$$

$$M_r = \sqrt{\left( \frac{M_{изг}}{\varphi_\sigma} \right)^2 + \left( \frac{M_{кр}}{\varphi_\tau} \right)^2};$$

$$M_{изг} = M_{изг}^a + \alpha_f k M_{кр}^m;$$

$$M_{кр} = M_{кр}^a + \alpha_f \cdot k \cdot M_{кр}^m.$$

2. По энергетической теории:

$$M_r = \sqrt{\left( \frac{M_{изг}}{\varphi_\sigma} \right)^2 + 0,75 \left( \frac{M_{кр}}{\varphi_\tau} \right)^2}.$$

Прямоугольное поперечное сечение (фиг. 204):

$$\frac{h}{b} = h > 1.$$

3. Расчётные напряжения по теории касательных напряжений: для точки 1

$$\sigma_{r,1} = \frac{M_{r,1}}{W_y},$$

$$M_{r,1} = \sqrt{\left( \frac{M_y^2}{\varphi_\sigma} \right)^2 + \left( \frac{n}{3\alpha} \cdot \frac{M_x}{\varphi_\tau} \right)^2};$$

для точки 2

$$\sigma_{r,2} = \frac{M_{r,2}}{W_x},$$

$$M_{r,2} = \sqrt{\left( \frac{M_x}{\varphi_\sigma} \right)^2 + \left( \frac{n^2 \gamma}{3\alpha} \cdot \frac{M_x}{\varphi_\tau} \right)^2}.$$

Для перехода к энергетической теории следует перед вторым слагаемым ввести множитель 0,75.

#### ЛИТЕРАТУРА И ИСТОЧНИКИ

1. Беляев Н. М. Сопротивление материалов. М.—Л., Гостехиздат, 1949, 751 с.
2. Бейзельман Р. Д. и др. Подшипники качения. М., Машгиз, 1945, 308 с.
3. Дарков А. В. и Кузнецов В. И. Статика сооружений. Изд. 2-е. М., Трансжелдориздат, 1940, 412 с.
4. Динник А. Н. Продольный изгиб. М., ОНТИ, 1939.
5. Жемочкин Б. Н. и Синицын А. П. Практические методы расчёта фундаментных балок и плит на упругом основании без гипотезы Винклера. М., Стройиздат, 1947, 148 с.
6. Кузнецов В. И. Вопросы статического расчёта верхнего строения пути. М., Трансжелдориздат, 1940, 134 с.
7. Лейбензон Л. С. Курс теории упругости. М.—Л., Гостехиздат, 1947, 464 с.
8. Машиностроение. Энциклопедический справочник. Т. 1, книга 2-я.
9. Одинг И. А. Прочность металлов. Л.—М., ОНТИ, 1937, 564 с.
10. Одинг И. А. Допускаемые напряжения в машиностроении и циклическая прочность металлов. М., Машгиз, 1947, 184 с.
11. Пономарёв С. Д. Современные методы расчёта витых пружин. «Вестник машиностроения», 1947, № 5.
12. Серенсен С. В. Прочность металла и расчёт деталей машин. М.—Л., ОНТИ, 1937, 252 с.
13. Смирнов А. Ф. Статическая и динамическая устойчивость сооружений. М., Трансжелдориздат, 1947, 308 с.
14. Тимошенко С. П. Устойчивость упругих систем. Пер. с англ., М.—Л., Гостехиздат, 1946, 532 с.
15. Урбан И. В. Вибрационная прочность. Труды МЭМИИТ, вып. 28. М., Трансжелдориздат, 1949.
16. Филоненко-Бородич М. М. Теория упругости. М.—Л., Гостехиздат, 1947, 300 с.



# ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ



Основной задачей теории упругости является определение напряжённого состояния и деформаций тел, подверженных действию внешних нагрузок.

В приведённых ниже основных положениях теории упругости рассматриваются только сплошные тела, обладающие идеальной упругостью, изотропностью и однородностью. Кроме того, предполагается, что деформации, вызываемые действием внешних нагрузок, малы по сравнению с размерами тела.

Вначале определяются статические величины, характеризующие напряжённое состояние материала, затем рассматриваются геометрические величины, определяющие деформацию тела. Связь между статическими и геометрическими величинами осуществляется при помощи линейных зависимостей, представляющих собой обобщение взятого из опыта закона Гука.

Математическим выражением описанных свойств и зависимостей является система дифференциальных уравнений с частными производными, или так называемые основные уравнения теории упругости, интегрирование которых даёт ответ на поставленную задачу.

В отличие от теории сопротивления материалов, которая, преследуя те же цели, путём введения упрощающих гипотез и ограничений получает элементарные решения отдельных частных случаев этой задачи, теория упругости даёт более строгие и общие решения. Это позволяет рассматривать в теории упругости такие вопросы, которые не могут быть разрешены элементарно теорией сопротивления материалов. Решения теории упругости служат также для оценки степени точности элементарных решений, применяемых в инженерной практике.

## ТЕОРИЯ НАПРЯЖЕНИЙ

**Составляющие напряжения.** Напряжённое состояние в точке определяется напряжениями по трём взаимно перпендикулярным площадкам, проведённым через эту точку. Площадки обычно выбирают параллельными координатным плоскостям. Полные напряжения, действующие по каждой из указанных площадок, раскладывают на три составляющие, параллельные трём координатным осям  $x$ ,  $y$  и  $z$ . Нормальные составляющие обозначают буквой  $\sigma$  со значком, показываю-

щим направление внешней нормали к площадке, по которой действует напряжение, касательные составляющие — буквой  $\tau$  с двумя значками, из которых первый показывает направление внешней нормали к площадке, а второй — направление составляющей.

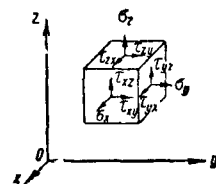
По трём взаимно перпендикулярным площадкам получится девять составляющих:

$$\sigma_x, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \sigma_y, \tau_{yx}, \tau_{yz}, \sigma_z, \tau_{zx}, \tau_{zy}.$$

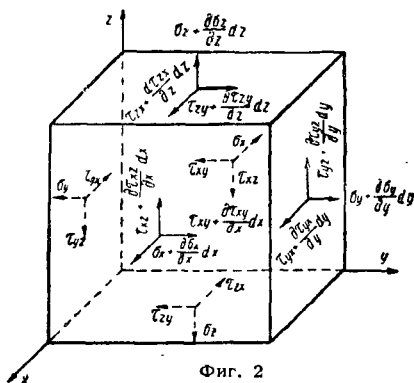
Эти величины называются составляющими напряжения в данной точке (фиг. 1).

Положительные направления составляющих напряжения по площадке, внешняя нормаль к которой имеет направление координатной оси, совпадают с направлениями соответствующих координатных осей. Для площадки с внешней нормалью, направленной в сторону, обратную направлению координатной оси, положительные направления составляющих напряжения противоположны направлениям координатных осей.

**Дифференциальные уравнения равновесия.** Из тела, находящегося под действием



Фиг. 1



Фиг. 2

взаимно уравновешенных внешних сил, выделяется вокруг какой-либо точки бесконечно малый элемент в форме параллелепипеда с гранями  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$  (фиг. 2). Действие отброшенных частей заменяется силами, прило-

женными к граням. Кроме того, предполагается, что существуют объёмные силы.

Составляющие объёмной силы, отнесённой к единице объёма параллелепипеда обозначены через  $X$ ,  $Y$  и  $Z$ .

Выделенный мысленно из тела параллелепипед должен оставаться в равновесии под действием объёмных сил и сил на его поверхности, следовательно, сумма проекций всех этих сил на каждую из координатных осей, а также сумма моментов их относительно каждой из осей должна равняться нулю.

Первое условие даёт три уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + Y &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (1)$$

Эти уравнения называются дифференциальными уравнениями равновесия.

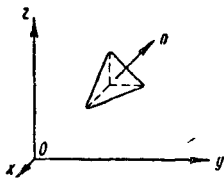
Из второго условия вытекает ещё три уравнения, которые с точностью до величин третьего порядка малости имеют вид:

$$\tau_{yz} = \tau_{zy}; \quad \tau_{zx} = \tau_{xz}; \quad \tau_{xy} = \tau_{yx}. \quad (2)$$

Из полученных равенств вытекает весьма важное следствие: на всяких двух взаимно перпендикулярных гранях скалывающие напряжения, направленные перпендикулярно к общему ребру этих граней, всегда взаимно равны и направлены оба одновременно либо к этому ребру, либо от него. Это есть закон парности касательных напряжений.

Равенства (2) показывают, что из девяти составляющих напряжения оказывается только шесть различных.

Напряжения по наклонным площадкам. Условия на поверхности. Вокруг какой-либо точки тела выделяется бесконечно малый тетраэдр, три грани которого параллельны координатным плоскостям, а четвёртая наклонная, с внешней нормалью  $n$  (фиг. 3).



Фиг. 3

Проекция полного напряжения по наклонной грани на координатные оси обозначены через  $p_x$ ,  $p_y$  и  $p_z$ . Если отбросить величины третьего порядка малости, то условия равновесия рассматриваемого тетраэдра дадут три уравнения:

$$\left. \begin{aligned} p_x &= \sigma_x \cos(nx) + \tau_{yx} \cos(ny) + \tau_{zx} \cos(nz) \\ p_y &= \tau_{xy} \cos(nx) + \sigma_y \cos(ny) + \tau_{zy} \cos(nz) \\ p_z &= \tau_{xz} \cos(nx) + \tau_{yz} \cos(ny) + \sigma_z \cos(nz) \end{aligned} \right\}. \quad (3)$$

При помощи этих уравнений можно по известным составляющим напряжения в данной точке определить напряжения по любой наклонной площадке, проходящей через эту точку.

Если наклонную грань тетраэдра совместить с поверхностью тела, то уравнения (3)

связжут составляющие напряжения с внешними нагрузками, приложенными к поверхности тела. В этом случае уравнения (3) называются условиями на поверхности.

**Главные напряжения.** Через каждую точку тела можно провести три взаимно перпендикулярные площадки, по которым нормальные напряжения достигают экстремальных значений, а касательные напряжения равны нулю. Эти площадки называются главными площадками; напряжения, действующие по этим площадкам, — главными напряжениями, а их направления — главными осями, или главными направлениями.

Пусть площадка с внешней нормалью  $n$  является главной площадкой. Напряжение по ней обозначено буквой  $\sigma$ . Проекция этого напряжения на координатные оси  $x$ ,  $y$  и  $z$  будут соответственно равны  $\sigma \cos(nx)$ ,  $\sigma \cos(ny)$  и  $\sigma \cos(nz)$ .

На основании уравнений (3) получают:

$$\left. \begin{aligned} (\sigma_x - \sigma) \cos(nx) + \tau_{yx} \cos(ny) + \tau_{zx} \cos(nz) &= 0 \\ \tau_{xy} \cos(nx) + (\sigma_y - \sigma) \cos(ny) + \tau_{zy} \cos(nz) &= 0 \\ \tau_{xz} \cos(nx) + \tau_{yz} \cos(ny) + (\sigma_z - \sigma) \cos(nz) &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (4)$$

Эти три линейных, однородных уравнения относительно  $\cos(nx)$ ,  $\cos(ny)$  и  $\cos(nz)$  дадут решение, отличное от нуля только в том случае, если определитель этих уравнений равен нулю, т. е.

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma \end{vmatrix} = 0.$$

Следовательно:

$$\begin{aligned} \sigma^3 - (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \sigma^2 + (\sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x + \sigma_x \sigma_y - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2 - \tau_{xy}^2) \sigma - (\sigma_x \sigma_y \sigma_z + 2 \tau_{yz} \tau_{zx} \tau_{xy} - \sigma_x \tau_{yz}^2 - \sigma_y \tau_{zx}^2 - \sigma_z \tau_{xy}^2) &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Три корня этого кубического уравнения дают значения трёх главных напряжений  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  и  $\sigma_3$ .

Подставляя последовательно эти значения в уравнения (4) и пользуясь зависимостью  $\cos^2(nx) + \cos^2(ny) + \cos^2(nz) = 1$ , получают три группы направляющих косинусов, определяющих положение трёх главных осей.

Если два корня уравнения (5) друг другу равны, то за направления соответствующих главных осей могут быть приняты два любых взаимно перпендикулярных направления, лежащих в плоскости, перпендикулярной третьей главной оси. При равенстве друг другу всех трёх корней уравнения (5) три любых взаимно перпендикулярных направления будут главными.

Так как величины и направления главных напряжений не зависят от выбора координатной системы, коэффициенты уравнения (5) должны быть инвариантны по отношению к преобразованию координат.

**Наибольшие касательные напряжения.** Через каждую точку тела можно провести три взаимно перпендикулярных площадки, по которым касательные напряжения достигают наибольших значений.

Каждая из этих площадок проходит через главную ось и наклонена под углом  $45^\circ$  к двум другим главным осям.

Значения наибольших касательных напряжений:

$$\tau_1 = \pm \frac{1}{2} (\sigma_2 - \sigma_3), \quad \tau_2 = \pm \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_3),$$

$$\tau_3 = \pm \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_2).$$

Если  $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ , то  $\tau_{\max} = \pm \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_3)$ .

## ТЕОРИЯ ДЕФОРМАЦИЙ

Предполагается, что тело обладает достаточным числом связей, препятствующих движению его как жёсткого целого. Поэтому из всех возможных перемещений отдельных точек тела, которые получают под влиянием внешних сил, рассматриваются только такие, при которых изменяются взаимно расстояния между отдельными точками. Такие перемещения отдельных точек обуславливают деформацию тела.

Излагаемая теория деформаций основывается на допущении о малости деформации, по которому перемещения отдельных точек тела и их производные по координатам так малы, что их квадратами и произведениями по сравнению с первыми степенями можно пренебречь. Перемещения точек деформированного тела обычно раскладываются на составляющие:  $u$ ,  $v$  и  $w$ , параллельные соответственно координатным осям  $x$ ,  $y$  и  $z$ .

**Составляющие деформации.** Деформация в какой-либо точке тела определяется изменением линейных размеров и искажением углов бесконечно малого параллелепипеда, выделенного вокруг этой точки. Эти шесть величин:  $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}$  и  $\gamma_{zx}$ , называются составляющими деформации в данной точке.

Для получения уравнений, связывающих составляющие деформации с составляющими перемещения, рассматривают бесконечно малый параллелепипед с рёбрами  $dx, dy$  и  $dz$  (фиг. 4). Если обозначить составляющие перемещения точки  $A$  через  $u, v$  и  $w$ , то составляющая перемещения точки  $B$  вдоль оси  $x$  будет  $u + \frac{\partial u}{\partial x} dx$  и, следовательно, удлинение ребра  $AB$  в направлении оси  $x$  определится выражением  $\frac{\partial u}{\partial x} dx$ . Определив таким же образом удлинение рёбер  $AC$  и  $AD$  и переходя к относительным деформациям, получают:

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}. \quad (7)$$

Для определения искажения угла  $BAC$  проектируют этот угол на координатную плоскость  $xy$  (фиг. 5). Принимая по малости углов их тангенсы за углы, находят:

$$\gamma_{xy} = \angle BAC - \angle B'A'C' = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Определив аналогичным образом искажения углов  $CAD$  и  $DAB$ , получают:

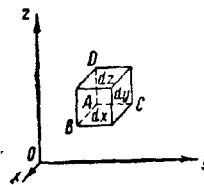
$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}; \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y};$$

$$\gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}. \quad (8)$$

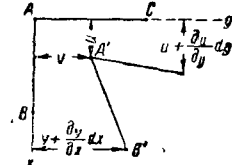
Уравнения (7) и (8) устанавливают связь между перемещениями и деформациями.

**Главные деформации.** Через каждую точку деформированного тела можно провести три взаимно перпендикулярных направления, для которых деформации сдвига равны нулю.

Эти направления называются главными осями деформаций, а соответствующие удли-



Фиг. 4



Фиг. 5

нения — главными деформациями. Значения главных деформаций определяются из уравнения:

$$\begin{vmatrix} 2(\epsilon_x - \epsilon) \cdot \gamma_{yx} \cdot \gamma_{zx} \\ \gamma_{xy} \cdot 2(\epsilon_y - \epsilon) \cdot \gamma_{zy} \\ \gamma_{xz} \cdot \gamma_{yz} \cdot 2(\epsilon_z - \epsilon) \end{vmatrix} = 0,$$

или

$$\epsilon^3 - (\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z) \epsilon^2 + \left[ \epsilon_y \epsilon_z + \epsilon_z \epsilon_x + \epsilon_x \epsilon_y - \frac{1}{4} (\gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2 + \gamma_{xy}^2) \right] \epsilon - \left[ \epsilon_x \epsilon_y \epsilon_z + \frac{1}{4} (\gamma_{yz} \gamma_{zx} \gamma_{xy} - \epsilon_x \gamma_{yz}^2 - \epsilon_y \gamma_{zx}^2 - \epsilon_z \gamma_{xy}^2) \right] = 0. \quad (9)$$

Три корня этого кубического уравнения дают значения главных деформаций  $\epsilon_1, \epsilon_2$  и  $\epsilon_3$ . Так как главные деформации не зависят от выбора координатной системы, коэффициенты уравнения (9) должны быть инвариантны по отношению к преобразованию координат. Первая инварианта

$$\Delta = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3$$

имеет простой физический смысл: она является относительным объёмным расширением вследствие деформации в данной точке.

**Условия совместности деформации.** Шесть составляющих деформаций не могут быть произвольными функциями от  $x, y$  и  $z$ , так как в каждой точке они определяются тремя составляющими перемещения данной точки.

Зависимости, которым подчинены составляющие деформации, вытекают из уравнений (7) и (8) и имеют следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial z \partial x} \\ 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( -\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) \\ 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x \partial z} &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) \\ 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Эти зависимости называются дифференциальными зависимостями Сен-Венана.

### ОБОБЩЁННЫЙ ЗАКОН ГУКА

Наиболее общую зависимость между составляющими напряжения и составляющими деформации в упругом теле даёт обобщённый закон Гука, согласно которому составляющие напряжения в данной точке тела суть линейные и однородные функции составляющих деформаций в той же точке. В самом общем случае упругого тела шесть уравнений этого закона содержат 21 упругую постоянную. Эта зависимость сильно упрощается для изотропных тел, у которых упругие свойства во всех направлениях одинаковы. Для таких тел число независимых упругих постоянных уменьшается до двух  $\lambda, \mu$ . Закон Гука для изотропного тела имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \lambda \Delta + 2\mu \varepsilon_x & \tau_{yz} &= \mu \gamma_{yz} \\ \sigma_y &= \lambda \Delta + 2\mu \varepsilon_y & \tau_{zx} &= \mu \gamma_{zx} \\ \sigma_z &= \lambda \Delta + 2\mu \varepsilon_z & \tau_{xy} &= \mu \gamma_{xy} \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

или

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu (\sigma_y + \sigma_z)] \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu (\sigma_z + \sigma_x)] \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu (\sigma_x + \sigma_y)] \\ \gamma_{yz} &= \frac{1}{G} \tau_{yz} \\ \gamma_{zx} &= \frac{1}{G} \tau_{zx} \\ \gamma_{xy} &= \frac{1}{G} \tau_{xy} \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

где  $E$  — модуль упругости;  
 $\nu$  — коэффициент Пуассона:

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}, \quad \mu = G = \frac{E}{2(1 + \nu)}, \quad \Delta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z.$$

Из уравнений (11) и (12) вытекает зависимость между объёмной деформацией и суммой нормальных напряжений  $\Sigma = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$ :

$$\Delta = \frac{1 - 2\nu}{E} \Sigma. \quad (13)$$

### ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Напряжения, деформации и перемещения во всех точках тела при заданных внешних силах, приложенных к телу, и известных объёмных силах определяются при помощи системы уравнений (1), (3), (7), (8), (10) и (11) или (12).

**Уравнения теории упругости в перемещениях.** В некоторых случаях бывает удобно за основные неизвестные принимать составляющие перемещения точек упругого тела. Тогда в каждой точке тела неизвестны три функции  $u, v$  и  $w$ , и задача приводится к разысканию этих трёх функций, при условии, что внутри тела они должны удовлетворять дифференциальным уравнениям равновесия (1), а на поверхности тела — уравнениям (3). Составляющие напряжения, входящие в эти уравнения, выражаются при помощи уравнений (7), (8) и (11) через составляющие перемещения.

После преобразования уравнения равновесия примут вид:

$$\left. \begin{aligned} (\lambda + \mu) \frac{\partial \Delta}{\partial x} + \mu \nabla u + X &= 0 \\ (\lambda + \mu) \frac{\partial \Delta}{\partial y} + \mu \nabla v + Y &= 0 \\ (\lambda + \mu) \frac{\partial \Delta}{\partial z} + \mu \nabla w + Z &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Здесь символ  $\nabla$  обозначает операцию Лапласа

$$\nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

а

$$\Delta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}.$$

Уравнения (14) носят название уравнений Лямэ, им должны удовлетворять искомые функции во всех точках внутри тела. Эти уравнения весьма удобны, так как содержат только три неизвестных функции.

Одновременно на поверхности должны удовлетворяться уравнения (3).

**Уравнения теории упругости в напряжениях.** Часто, однако, бывает удобно иметь дело с уравнениями, содержащими только составляющие напряжения. В этом случае неизвестными будут шесть функций:

$$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{yz}, \tau_{zx}, \tau_{xy}.$$

Трёх уравнений равновесия (1) и условий на поверхности (3) недостаточно для определения шести неизвестных функций. Статическая неопределимость упругого тела разрешается добавлением шести дифференциальных зависимостей Сен-Венана (10), которые при помощи уравнений (12) выражаются через составляющие напряжений.

Эта система уравнений имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad (1)$$

$$\left. \begin{aligned} \nabla \sigma_x + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial x^2} &= \\ = -\frac{\nu}{1-\nu} \left( \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right) - 2 \frac{\partial X}{\partial x} \\ \nabla \sigma_y + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial y^2} &= \\ = -\frac{\nu}{1-\nu} \left( \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right) - 2 \frac{\partial Y}{\partial y} \\ \nabla \sigma_z + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial z^2} &= \\ = -\frac{\nu}{1-\nu} \left( \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right) - 2 \frac{\partial Z}{\partial z} \\ \nabla \tau_{yz} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial y \partial z} &= - \left( \frac{\partial Y}{\partial z} + \frac{\partial Z}{\partial y} \right) \\ \nabla \tau_{zx} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial z \partial x} &= - \left( \frac{\partial Z}{\partial x} + \frac{\partial X}{\partial z} \right) \\ \nabla \tau_{xy} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial x \partial y} &= - \left( \frac{\partial X}{\partial y} + \frac{\partial Y}{\partial x} \right) \end{aligned} \right\}. \quad (15)$$

Шесть искомых функций должны удовлетворять уравнениям (1) и (15) во всех точках внутри упругого тела, а на поверхности — условиям (3).

В случае постоянных объемных сил правые части уравнений (15) обращаются в нуль.

Указанная выше задача об определении упругого равновесия тела по заданным внешним нагрузкам, приложенным к поверхности, называется первой контурной задачей теории упругости. Теория упругости рассматривает также и вторую контурную задачу в такой постановке: найти упругое равновесие тела, если заданы перемещения точек его поверхности. И, наконец, в ряде случаев ставится смешанная контурная задача, когда заданы смещения на одной части поверхности, а на остальной — внешние нагрузки.

Большое значение имеет в решении ряда задач так называемый принцип Сен-Венана, который можно формулировать следующим образом: если усилия, действующие на небольшую часть поверхности упругого тела, заменить другой, статически эквивалентной системой усилий, действующей на ту же часть поверхности, то это перераспределение нагрузки вызовет существенные изменения местных напряжений, но окажет ничтожное влияние на упругое равновесие в частях тела, достаточно удаленных от упомянутой части поверхности.

Принцип Сен-Венана позволяет, таким образом, изменять заданные на поверхности нагрузки и этим упрощать задачу.

### ЧАСТНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ В ПЕРЕМЕЩЕНИЯХ

Действие сосредоточенной силы на упругое полупространство. Пусть упругое тело занимает всё полупространство  $x \leq 0$ , так что координатная плоскость  $x = 0$  есть граница этого упругого тела. Перемещение точек упругого тела  $u$ ,  $v$  и  $w$ , при действии на него сосредоточенной силы  $P$ , приложенной в начале координат и направленной в сторону координатной оси  $x$ , в случае отсутствия объемных сил определяется выражениями:

$$\begin{aligned} u &= \frac{A}{2} \left[ -2(1-\nu) \frac{1}{r} - \frac{x^2}{r^3} \right], \\ v &= \frac{A}{2} \left[ -(1-2\nu) \frac{y}{(r-x)r} - \frac{xy}{r^3} \right], \\ w &= \frac{A}{2} \left[ -(1-2\nu) \frac{z}{(r-x)r} - \frac{xz}{r^3} \right], \end{aligned}$$

где  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ .

Составляющие напряжения на основании (7), (8) и (11) будут:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= 3GA \frac{x^3}{r^5}; \\ \sigma_y &= 3GA \left\{ \frac{xy^2}{r^5} - \frac{1-2\nu}{3} \left[ \frac{r^2 + rx - x^2}{r^3(r-x)} - \frac{y^2(2r-x)}{r^3(r-x)^2} \right] \right\}; \\ \sigma_z &= 3GA \left\{ \frac{xz^2}{r^5} - \frac{1-2\nu}{3} \left[ \frac{r^2 + rx - x^2}{r^3(r-x)} - \frac{z^2(2r-x)}{r^3(r-x)^2} \right] \right\}; \quad \tau_{xy} = 3GA \frac{x^2y}{r^5}; \\ \tau_{yz} &= 3GA \left[ \frac{xyz}{r^5} + \frac{1+2\nu}{3} \frac{zy(2r-x)}{r^3(r-x)^2} \right]; \\ \tau_{xz} &= 3GA \frac{x^2z}{r^5}. \end{aligned}$$

Это решение удовлетворяет уравнениям равновесия (14) и условиям на поверхности (3) во всех точках тела, кроме точки приложения силы, в которой напряжения и перемещения становятся бесконечно большими. Затруднения, возникающие в этом решении, обладающем особой точкой, преодолеваются при помощи принципа Сен-Венана. Предполагается, что у начала координат материал вырезан полусферической поверхностью малого радиуса и что сосредоточенная сила  $P$  заменена статически эквивалентными усилиями, распределенными по этой поверхности. Это условие приводит к уравнению:

$$P = -2\pi GA,$$

откуда

$$A = -\frac{P}{2\pi G}.$$

В точке на расстоянии  $r$  от начала координат полное напряжение по площадке, перпендикулярной оси  $x$ , равно:

$$S = \sqrt{\sigma_x^2 + \tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2} = \frac{3Px^2}{2\pi r^4}$$

и имеет направление, проходящее через начало координат.

Если представить себе сферическую поверхность диаметра  $d$ , касающуюся плоскости  $x = 0$  в начале координат, то во всех точках этой поверхности полное напряжение на горизонтальной площадке имеет постоянную величину, равную  $\frac{3P}{2\pi d^2}$ .

**Действие распределённой нагрузки на упругое полупространство.** Решение этой задачи может быть получено из предыдущего решения на основании принципа сложения действия сил.

1. Равномерное давление  $p$  распределено по площади круга радиуса  $a$  с центром в начале координат. Наибольшее перемещение получает точка в центре круга

$$u_{\max} = \frac{2(1-\nu^2)pa}{E}$$

Перемещения точек окружности нагруженного круга равны:

$$u = \frac{4(1-\nu^2)pa}{\pi E}$$

Среднее перемещение

$$u_{cp} = \frac{16(1-\nu^2)pa}{3\pi E}$$

2. Равномерное давление  $p$  распределено по площади квадрата со сторонами  $2a$ . Наибольшее перемещение имеет место в центре квадрата

$$u_{\max} = 2,24 \frac{(1-\nu^2)pa}{E}$$

Перемещение в углах квадрата равно половине перемещения в центре, а средняя величина перемещения

$$u_{cp} = 1,90 \frac{(1-\nu^2)pa}{E}$$

3. Равномерное давление  $p$  распределено по площади прямоугольника с отношением сторон

$$\alpha = \frac{a}{b},$$

$$u_{cp} = m \frac{(1-\nu^2)p\sqrt{F}}{E},$$

где  $F$  — площадь прямоугольника, а  $m$  — числовой коэффициент, зависящий от отношения  $\alpha$ . Некоторые значения коэффициента  $m$  приведены в табл. 1.

Таблица 1  
Значения коэффициента  $m$

$\alpha$	1,5	2	3	5	10	100
$m$	0,94	0,92	0,88	0,82	0,71	0,37

## ЧАСТНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ В НАПРЯЖЕНИЯХ

**Кручение призматических стержней.** В поперечных сечениях призматического стержня, который находится под действием скручивающих пар  $M$ , приложенных по концам, при отсутствии объёмных сил возникают только касательные напряжения.

Если совместить координатную ось  $z$  с осью стержня, то для любой точки

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0.$$

Подлежат определению только  $\tau_{xz}$  и  $\tau_{yz}$ . Уравнения равновесия (1) будут удовлетворены, если выразить искомые составляющие через неизвестную функцию  $\varphi$  от координат  $x$  и  $y$ , называемую функцией напряжения, следующим образом:

$$\tau_{xz} = \frac{\partial \varphi}{\partial y}; \quad \tau_{yz} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}. \quad (16)$$

Условия совместности (15) приводятся к уравнению:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = A, \quad (17)$$

где  $A$  — постоянная величина. Условия (3) на боковой поверхности стержня дают:

$$\varphi = 0. \quad (18)$$

Условия (3) на торцах приводятся к виду:

$$p_x = \pm \tau_{xz}; \quad p_y = \pm \tau_{yz}$$

и показывают, что касательные усилия, образующие на концах скручивающие моменты, должны распределяться так же, как касательные напряжения в поперечных сечениях стержня.

Касательные усилия, приложенные к торцу, приводятся к паре сил с моментом  $M_t$ . Это условие даёт уравнение

$$M_t = 2 \iint \varphi \, dx \, dy, \quad (19)$$

из которого определяется величина постоянной  $A$ .

Таким образом, решение сводится к определению функции напряжений  $\varphi$ , удовлетворяющей уравнению (17), и условию на боковой поверхности (18). Это решение будет точным только при соблюдении условий на торцах. При произвольном распределении касательных усилий на торцах это решение на основании принципа Сен-Венана может применяться в тех случаях, когда длина стержня велика по сравнению с линейными размерами его поперечного сечения.

При кручении поперечные сечения стержня поворачиваются около оси  $z$ . Это выражается формулами

$$u = -\theta yz, \quad v = \theta xz, \quad (a)$$

если считать закреплённым концом стержня  $z = 0$ . Постоянная  $\theta$  представляет собой угол скручивания на единицу длины стержня.

На основании выражений (8) и (12):

$$\begin{aligned} \gamma_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{G} \tau_{xz}; \\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{G} \tau_{yz}. \end{aligned} \quad (6)$$

Если подставить значения перемещений по формулам (а) в выражения (б), то получаются уравнения:

$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial x} &= \frac{1}{G} \tau_{xz} + \theta y; \\ \frac{\partial w}{\partial y} &= \frac{1}{G} \tau_{yz} - \theta x,\end{aligned}\quad (в)$$

из которых можно получить перемещения  $w$ , определяющие искривление поперечных сечений при кручении.

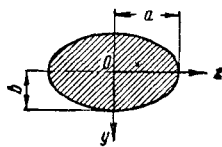
Соотношения (а), (б) и (16) приводят к уравнению

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = -2G\theta. \quad (г)$$

Из сравнения уравнения (г) с уравнением (17) видно, что

$$A = -2G\theta. \quad (д)$$

**Стержень эллиптического сечения** (фиг. 6). Контур сечения задан уравнением:



Фиг. 6

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$$

Функция напряжений, удовлетворяющая уравнению (17) и условию на контуре (18):

$$\varphi = \frac{a^2 b^2 A}{2(a^2 + b^2)} \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right).$$

Постоянную  $A$  определяют из уравнения (19):

$$A = -\frac{2M_t(a^2 + b^2)}{\pi a^3 b^2}.$$

Поэтому

$$\varphi = -\frac{M_t}{\pi a b} \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right).$$

На основании выражений (16):

$$\tau_{xz} = -\frac{2M_t y}{\pi a b^3}; \quad \tau_{yz} = \frac{2M_t x}{\pi a^3 b}.$$

Наибольшего значения напряжение достигает в точках на концах малой оси

$$\tau_{\max} = \frac{2M_t}{\pi a b^2}.$$

Относительный угол скручивания

$$\theta = M_t \cdot \frac{a^2 + b^2}{\pi a^3 b^3 G}.$$

Жёсткость при кручении:

$$C = \frac{M_t}{\theta} = \frac{\pi a^3 b^3 G}{a^2 + b^2}.$$

Составляющие перемещения равны:

$$u = -M_t \frac{(a^2 + b^2) yz}{\pi a^3 b^3 G};$$

$$v = M_t \frac{(a^2 + b^2) xz}{\pi a^3 b^3 G};$$

$$w = M_t \frac{(b^2 - a^2) xy}{\pi a^3 b^3 G}.$$

Последнее из полученных выражений показывает, что плоское до деформации поперечное сечение эллиптического стержня становится частью гиперболического параболоида. Горизонтالي этой поверхности представляют собой гиперболы, асимптотами которых являются главные оси эллипса.

**Стержень треугольного сечения.** 1) Равносторонний треугольник (фиг. 7):

$$\begin{aligned}\varphi &= -G\theta \left[ \frac{1}{2}(x^2 + y^2) - \frac{1}{2a}(x^3 - 3xy^2) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{2}{27}a^2 \right]; \\ \theta &= 26 \frac{M_t}{Ga^4}.\end{aligned}$$

Напряжение определяется по формулам (16). В точках по оси  $x$

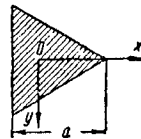
$$\begin{aligned}\tau_{xz} &= 0; \\ \tau_{yz} &= \frac{39M_t}{a^5} \left( \frac{2ax}{3} - x^2 \right).\end{aligned}$$

Наибольшее напряжение получится по середине сторон треугольника

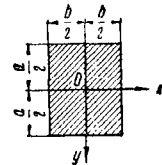
$$\tau_{\max} = 13 \frac{M_t}{a^3}.$$

Жёсткость при кручении:

$$C = 0,0384 Ga^4.$$



Фиг. 7



Фиг. 8

2) Равнобедренный прямоугольный треугольник с катетом  $a$ . Наибольшее напряжение возникает в точке по середине гипотенузы:

$$\tau_{\max} = 18,02 \frac{M_t}{a^3}.$$

Жёсткость при кручении:

$$C = 0,026 Ga^4.$$

**Стержень прямоугольного сечения** (фиг. 8):

$$\varphi = \frac{8Gb^2\theta}{\pi^3} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^3} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \left( 1 - \frac{\operatorname{ch} \frac{n\pi y}{b}}{\operatorname{ch} \frac{n\pi a}{2b}} \right) \cos \frac{n\pi x}{b}.$$

При  $a > b$  наибольшее касательное напряжение возникает в средних точках длинных сторон прямоугольника и равно:

$$\tau_{\max} = \frac{8Gb\theta}{\pi^2} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left( 1 - \frac{1}{\operatorname{ch} \frac{n\pi a}{2b}} \right).$$

Угол скручивания  $\theta$  определяется из уравнения:

$$M_t = \frac{32 Gab^3 \theta}{\pi^4} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^4} \left( 1 - \frac{2b}{\pi a} \operatorname{th} \frac{\pi a}{2b} \right).$$

Бесконечные ряды в правых частях этих выражений сходятся очень быстро, и потому значение  $\tau_{\max}$  и  $M_t$  могут быть вычислены без затруднений для любой величины отношения  $\frac{a}{b}$ :

$$\tau_{\max} = kG\theta b; \quad M_t = k_1 G\theta ab^3,$$

где  $k$  и  $k_1$  — коэффициенты, зависящие от отношения  $\frac{a}{b}$ .

Значения этих коэффициентов приведены в табл. 2.

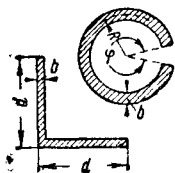
Таблица 2  
Значения коэффициентов  $k$  и  $k_1$

$\frac{a}{b}$	$k$	$k_1$	$\frac{a}{b}$	$k$	$k_1$
1,0	0,675	0,141	3	0,985	0,263
1,2	0,759	0,166	4	0,997	0,281
1,5	0,848	0,196	5	0,999	0,291
2,0	0,930	0,229	10	1,000	0,312
2,5	0,968	0,249	$\infty$	1,000	0,333

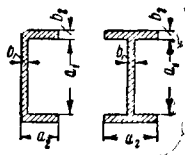
В случае очень узкого прямоугольника, когда  $\frac{a}{b}$  является большим числом, пользуются формулами:

$$\tau_{\max} = \frac{3M_t}{ab^2}; \quad C = \frac{1}{3} Gab^3.$$

Кручение тонкостенных и прокатных профилей (фиг. 9 и 10). При расчётах на кручение тонкостенных односвязных профи-



Фиг. 9



Фиг. 10

лей можно пользоваться формулами для очень узкого прямоугольника. Под  $a$  (фиг. 9) в этом случае надо подразумевать развёрнутую длину поперечного сечения стержня. Например: для части круга  $a = R\varphi$ ; для уголка  $a = 2d - b$ ;

Для швеллера и двутаврового сечения получают приближённые формулы, если предположить, что жёсткость при кручении равна сумме жёсткостей трёх прямоугольников, т. е. стенки и двух полок (фиг. 10):

$$C = \frac{1}{3} G (a_1 b_1^3 + 2a_2 b_2^3).$$

Наибольшее касательное напряжение будет в середине длинной стороны наиболее широкого из прямоугольников

$$\tau_{\max} = \frac{3M_t b}{a_1 b_1^3 + 2a_2 b_2^3},$$

где  $b$  без значка обозначает толщину стенки или полки, смотря по тому, где вычисляется напряжение.

Во входящих углах таких профилей имеется значительная концентрация напряжений. Так, для уголка постоянной толщины  $b$  при радиусе закругления  $r$  во входящем угле коэффициент концентрации напряжений

$$k = 1,74 \sqrt[3]{\frac{b}{r}}.$$

## ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Плоская задача теории упругости охватывает два частных случая равновесия упругого тела: случай плоского напряжённого состояния и случай плоской деформации. В математическом отношении оба указанных случая тождественны, так как приводятся к решению одного и того же дифференциального уравнения.

### Плоское напряжённое состояние

В этом случае напряжения во всех точках тела параллельны одной плоскости, например, координатной плоскости  $xу$ . Во всех точках тела составляющие напряжения:

$$\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0,$$

а  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  и  $\tau_{xy}$  не зависят от  $z$ .

К этому случаю приводится напряжённое состояние тонкой пластинки под действием сил, приложенных к её контуру параллельно плоскости пластинки и равномерно распределённых по её толщине.

Если координатную плоскость  $xу$  совместить со срединной плоскостью пластинки, а толщину пластинки обозначить через  $h$ , то условия на свободных от нагрузок поверхностях пластинки при  $z = \pm \frac{h}{2}$  будут

иметь вид:  $\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$ .

Так как толщина пластинки весьма мала по сравнению с прочими размерами, то предполагают, что составляющие напряжения  $\sigma_z$ ,  $\tau_{xz}$  и  $\tau_{yz}$  не только на поверхностях, но и во всех точках пластинки равны нулю, а составляющие напряжения  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  и  $\tau_{xy}$  остаются постоянными по всей толщине пластинки.

### Плоская деформация

Под плоской деформацией понимают случай, когда перемещения во всех точках деформированного тела происходят во взаимно параллельных плоскостях, например, параллельных координатной плоскости  $xу$ . В этом случае  $w = 0$ , а  $v$  и  $u$  не зависят от  $z$ .

Следовательно, на основании уравнений (7) и (8):

$$\varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0,$$



а на основании уравнений (12)

$$\tau_{xy} = \tau_{yz} = 0, \text{ а } \sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y).$$

Такой случай деформации получается при действии на длинное призматическое или цилиндрическое тело сил, не изменяющихся по длине тела. Перемещение точек такого тела, значительно удалённых от его концов, происходит в плоскостях, перпендикулярных длине тела.

#### Основные уравнения плоской задачи

Уравнения равновесия

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \tau_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_y}{\partial y} + Y &= 0 \end{aligned} \right\}; \quad (20)$$

Условия на поверхности

$$\left. \begin{aligned} p_x &= \sigma_x \cos(nx) + \tau_{xy} \cos(ny) \\ p_y &= \tau_{yx} \cos(nx) + \sigma_y \cos(ny) \end{aligned} \right\}. \quad (21)$$

Уравнения деформаций

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (22)$$

Условие совместности деформаций

$$\frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}. \quad (23)$$

Закон Гука:

для плоского напряжённого состояния

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu \sigma_y) \\ \epsilon_y &= \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu \sigma_x) \\ \gamma_{xy} &= \frac{1}{G} \tau_{xy} \end{aligned} \right\}; \quad (24)$$

для плоской деформации

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{1+\nu}{E} [(1-\nu)\sigma_x - \nu\sigma_y] \\ \epsilon_y &= \frac{1+\nu}{E} [(1-\nu)\sigma_y - \nu\sigma_x] \\ \gamma_{xy} &= \frac{1}{G} \tau_{xy} \end{aligned} \right\}. \quad (25)$$

#### Функция напряжений

При решении плоской задачи как в случае плоского напряжённого состояния, так и в случае плоской деформации подлежат определению только три составляющих напряжения:

$$\sigma_x, \sigma_y \text{ и } \tau_{xy}.$$

Для этого используют уравнения (20), (23) и (21).

В случае, когда единственной объёмной силой является вес тела, уравнения равновесия имеют вид:

$$\frac{\partial \tau_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_y}{\partial y} + \rho g = 0,$$

где  $\rho$  — масса тела, заключённая в единице объёма,

$g$  — ускорение силы тяжести.

Уравнение совместности, выраженное через составляющие напряжения, будет:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (\sigma_x + \sigma_y) = 0.$$

Уравнения равновесия удовлетворяются, если положить, что

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial \varphi^2}{\partial y^2}; \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}; \quad \tau_{xy} = - \\ &= - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} - \rho g x, \end{aligned} \quad (26)$$

где  $\varphi$  — неизвестная функция от  $x$  и  $y$ , носящая название функции напряжений.

Уравнение совместности после подстановки в него выражений (26) преобразуется к виду:

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = 0. \quad (27)$$

Таким образом решение плоской задачи сводится к интегрированию бигармонического уравнения (27) с соблюдением условий на поверхности (21).

#### Решение плоской задачи в полиномах

Если функцию напряжений принимать в виде целых полиномов, то путём соответствующего подбора коэффициентов можно получить решения для некоторых частных случаев плоской задачи, имеющих практический интерес.

**Однородное напряжённое состояние.** Функция напряжений принимается в виде полинома второй степени:

$$\varphi_2 = \frac{a_2}{2} x^2 + b_2 xy + \frac{c_2}{2} y^2,$$

который очевидно удовлетворяет уравнению (27).

Напряжения определяются по формулам (26). В случае отсутствия объёмных сил:

$$\sigma_x = c_2; \quad \sigma_y = a_2; \quad \tau_{xy} = -b_2.$$

Для прямоугольной пластинки со сторонами, параллельными координатным осям, это решение приводит к простому растяжению вдоль оси  $x$ , простому растяжению вдоль оси  $y$  и чистому сдвигу.

**Чистый изгиб прямоугольной пластинки.** Дифференциальное уравнение (27) удовлетворяет также полином третьей степени:

$$\varphi_3 = \frac{a_3}{3 \cdot 2} x^3 + \frac{b_3}{2} x^2 y + \frac{c_3}{2} xy^2 + \frac{d_3}{3 \cdot 2} y^3.$$

При отсутствии объёмных сил напряжения согласно (26) равны:

$$\sigma_x = c_3 x + d_3 y; \quad \sigma_y = a_3 x + b_3 y; \\ \tau_{xy} = -b_3 x - c_3 y.$$

Если положить

$$a_3 = b_3 = c_3 = 0,$$

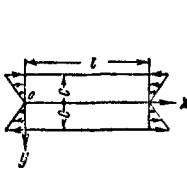
то решение будет удовлетворять следующим граничным условиям прямоугольной пластинки (фиг. 11):

$$\begin{aligned} \text{при } y = \pm c \quad \sigma_y = \tau_{xy} = 0; \\ \text{при } x = 0 \text{ и } x = l \quad \sigma_x = d_3 y, \end{aligned}$$

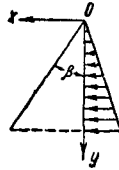
что соответствует чистому изгибу пластинки.

Это решение является точным только при условии, когда изгибающие пары образуются нормальными усилиями, приложенными по коротким сторонам пластинки, так, как это показано на фиг. 11.

Но на основании принципа Сен-Венана для прямоугольной полосы, поперечные размеры которой малы по сравнению с её длиной, решение это может с достаточной точностью применяться при любом способе приложения внешних изгибающих пар.



Фиг. 11



Фиг. 12

Треугольная подпорная стенка (фиг. 12). При помощи полинома третьей степени можно получить решение для треугольной подпорной стенки или плотины, подверженной давлению сыпучего тела или воды по гидростатическому закону:

$$\begin{aligned} \sigma_x = -\gamma y; \quad \sigma_y = \left( \frac{p}{\operatorname{tg} \beta} - \frac{2\gamma}{\operatorname{tg}^3 \beta} \right) x + \\ + \left( \frac{\gamma}{\operatorname{tg}^3 \beta} - p \right) y; \\ \tau_{xy} = -\frac{\gamma}{\operatorname{tg}^2 \beta} x, \end{aligned}$$

где  $p$  — объёмный вес материала стенки,  $\gamma y$  — давление сыпучего тела или жидкости на глубине  $y$ .

Изгиб консольной полосы силой, приложенной к свободному концу. Комбинируя полином четвёртой степени:

$$\begin{aligned} \varphi = \frac{a_4}{4 \cdot 3} x^4 + \frac{b_4}{3 \cdot 2} x^3 y + \frac{c_4}{2} x^2 y^2 + \\ + \frac{d_4}{3 \cdot 2} x y^3 + \frac{e_4}{4 \cdot 3} y^4, \end{aligned}$$

который удовлетворяет бигармоническому уравнению (27), при

$$e_4 = -(2c_4 + a_4)$$

с полиномом второй степени, можно получить решение для случая по фиг. 13. Для этого нужно принять

$$\varphi = b_2 xy + \frac{d_4}{3 \cdot 2} xy^3$$

и, следовательно, на основании (26)

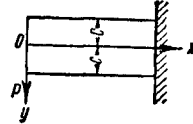
$$\sigma_x = d_4 xy; \quad \sigma_y = 0; \quad \tau_{xy} = -b_2 - \frac{d_4}{2} y^2.$$

Для того чтобы удовлетворить граничным условиям на продольных кромках,

$$-b_2 - \frac{d_4}{2} c^2 = 0,$$

необходимо положить:

$$d_4 = -\frac{2b_2}{c^2},$$



Фиг. 13

а из условия на свободном конце:

$$\int_{-c}^c \left( b_2 - \frac{b_2}{c^2} y^2 \right) dy = P$$

вытекает, что

$$b_2 = \frac{3}{4} \frac{P}{c}.$$

После подстановки значений  $b_2$  и  $d_4$  в формулы напряжений будем иметь:

$$\sigma_x = -\frac{3}{2} \frac{P}{c^3} xy; \quad \sigma_y = 0; \quad \tau_{xy} = -\frac{3P}{4c} \left( 1 - \frac{y^2}{c^2} \right),$$

что совпадает с элементарным решением.

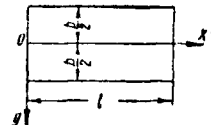
Полученное решение является точным только при условии, когда касательные усилия по концам распределяются по тому же параболическому закону, как и  $\tau_{xy}$ , а интенсивность нормальных усилий в заделке пропорциональна ординате  $y$ . Распространить его на другие случаи распределения нагрузок можно только за счёт пренебрежения местными напряжениями в соответствии с принципом Сен-Венана.

#### Решение плоской задачи при помощи тригонометрических рядов

Решение 1. Если граничные условия на поперечных кромках полосы  $x=0$ ,  $x=l$  (фиг. 14) таковы, что

$$\sigma_x \neq 0, \quad \tau_{xy} = 0, \quad u = 0, \quad v \neq 0,$$

Фиг. 14



то функция напряжений, удовлетворяющая уравнению (27) и граничным условиям на поперечных кромках полосы, представляется в следующей форме:

$$\varphi = \frac{1}{2} Ax^2 + \frac{1}{2} Cy^2 + \sum_{n=1}^{n=\infty} f_n(y) \cos \frac{n\pi x}{l},$$

где

$$f_n(y) = A_n \operatorname{ch} \frac{n\pi y}{l} + B_n \operatorname{sh} \frac{n\pi y}{l} + \\ + C_n \frac{n\pi y}{l} \operatorname{ch} \frac{n\pi y}{l} + D_n \frac{n\pi y}{l} \operatorname{sh} \frac{n\pi y}{l}.$$

На основании выражений (26)

$$\sigma_x = C + \sum_{n=1}^{\infty} f_n''(y) \cos \frac{n\pi x}{l}; \\ \sigma_y = A - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 f_n(y) \cos \frac{n\pi x}{l}; \\ \tau_{xy} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi}{l} f_n'(y) \sin \frac{n\pi x}{l}.$$

Постоянные, содержащиеся в этом решении, подбираются так, чтобы удовлетворить граничным условиям на продольных кромках  $y = \pm 0,5b$ .

Решение 2. Для полосы, поперечные кромки которой  $x = 0$  и  $x = l$  подчинены граничным условиям:

$$\sigma_x = 0, \tau_{xy} \neq 0, u \neq 0, v = 0,$$

функция напряжений, удовлетворяющая этим условиям и уравнению (27), имеет вид:

$$\varphi = Bxy + \sum_{n=1}^{\infty} f_n(y) \sin \frac{n\pi x}{l}.$$

Напряжения определяются так:

$$\sigma_x = \sum_{n=1}^{\infty} f_n''(y) \sin \frac{n\pi x}{l}; \\ \sigma_y = -\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 f_n(y) \sin \frac{n\pi x}{l}; \\ \tau_{xy} = B - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi}{l} f_n'(y) \cos \frac{n\pi x}{l}.$$

Граничные условия на продольных кромках здесь, так же как и в предыдущем решении, удовлетворяются путём соответствующего подбора постоянных.

**Решения для основных случаев загрузки прямоугольной полосы [6]**

**Случай 1.** Продольные кромки полосы загружены скалывающими напряжениями симметрично (фиг. 15)

$$\sigma_y = 0, \tau_{xy} = q(x), \quad \text{при } y = \pm 0,5b, \\ \sigma_x = 0, \tau_{xy} = -q(x), \quad \text{при } y = -0,5b.$$

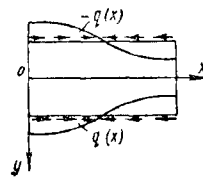
**Решение 1**

$$\sigma_x = \sum \gamma_n \theta_1 \cos(\alpha_n x) \\ \sigma_y = \sum \gamma_n \varphi_1 \cos(\alpha_n x) \\ \tau_{xy} = \sum \gamma_n \lambda_1 \sin(\alpha_n x) \\ \text{где } \gamma_n - \text{коэффициенты разложения} \\ q(x) \text{ в ряд вида } q(x) = \sum \gamma_n \sin(\alpha_n x)$$

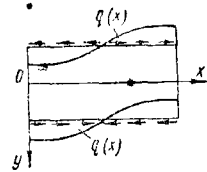
**Решение 2**

$$\sigma_x = \sum \gamma_n \theta_1 \sin(\alpha_n x) \\ \sigma_y = \sum \gamma_n \varphi_1 \sin(\alpha_n x) \\ \tau_{xy} = -\sum \gamma_n \lambda_1 \cos(\alpha_n x) \\ \text{где } \gamma_n - \text{коэффициенты разложения} \\ q(x) \text{ в ряд вида } q(x) = \sum \gamma_n \cos(\alpha_n x)$$

$$\theta_1 = \frac{(4 \operatorname{ch} u_n - 2u_n \operatorname{sh} u_n) \operatorname{ch}(\alpha_n y) + \\ + 2\alpha_n y \operatorname{sh}(\alpha_n y) \operatorname{ch} u_n}{\operatorname{sh} 2u_n + 2u_n}, \\ \varphi_1 = \frac{2u_n \operatorname{ch}(\alpha_n y) \operatorname{sh} u_n - 2\alpha_n y \operatorname{sh}(\alpha_n y) \operatorname{ch} u_n}{\operatorname{sh} 2u_n + 2u_n}, \\ \lambda_1 = \frac{2\alpha_n y \operatorname{sh}(\alpha_n y) \operatorname{ch} u_n + \\ + (2 \operatorname{ch} u_n - 2u_n \operatorname{sh} u_n) \operatorname{sh}(\alpha_n y)}{\operatorname{sh} 2u_n + 2u_n}, \\ \alpha_n = \frac{n\pi}{l}, \quad u_n = \alpha_n \frac{b}{2}.$$



Фиг. 15



Фиг. 16

**Случай 2.** Продольные кромки полосы загружены скалывающими напряжениями кососимметрично (фиг. 16)

$$\sigma_y = 0, \tau_{xy} = q(x), \quad \text{при } y = \pm 0,5b.$$

**Решение 1**

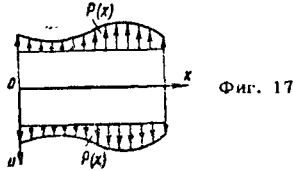
$$\sigma_x = \sum \gamma_n \theta_2 \cos(\alpha_n x) \\ \sigma_y = \sum \gamma_n \varphi_2 \cos(\alpha_n x) \\ \tau_{xy} = \sum \gamma_n \lambda_2 \sin(\alpha_n x) \\ \text{где } \gamma_n - \text{коэффициенты ряда} \\ q(x) = \sum \gamma_n \sin(\alpha_n x)$$

**Решение 2**

$$\sigma_x = \sum \gamma_n \theta_2 \sin(\alpha_n x) \\ \sigma_y = \sum \gamma_n \varphi_2 \sin(\alpha_n x) \\ \tau_{xy} = B - \sum \gamma_n \lambda_2 \cos(\alpha_n x) \\ \text{где } \gamma_n - \text{коэффициенты ряда} \\ q(x) = B - \sum \gamma_n \cos(\alpha_n x)$$

$$\theta_2 = \frac{(4 \operatorname{sh} u_n - 2u_n \operatorname{ch} u_n) \operatorname{sh}(\alpha_n y) + \\ + 2\alpha_n y \operatorname{ch}(\alpha_n y) \operatorname{sh} u_n}{\operatorname{sh} 2u_n - 2u_n}, \\ \varphi_2 = \frac{2u_n \operatorname{ch} u_n \operatorname{sh}(\alpha_n y) - 2\alpha_n y \operatorname{ch}(\alpha_n y) \operatorname{sh} u_n}{\operatorname{sh} 2u_n - 2u_n}, \\ \lambda_2 = \frac{(2 \operatorname{sh} u_n - 2u_n \operatorname{ch} u_n) \operatorname{ch}(\alpha_n y) + \\ + 2\alpha_n y \operatorname{sh}(\alpha_n y) \operatorname{sh} u_n}{\operatorname{sh} 2u_n - 2u_n}.$$

Случай 3. Продольные кромки полосы (фиг. 17) загружены нормальными напряже-



Фиг. 17

ниями симметрично по отношению к продольной оси полосы

$$\sigma_y = p(x), \tau_{xy} = 0, \text{ при } y = \pm 0,5b,$$

Решение 1

$$\sigma_x = C + \sum \delta_n \theta_3 \cos(\alpha_n x)$$

$$\sigma_y = A + \sum \delta_n \varphi_3 \cos(\alpha_n x)$$

$$\tau_{xy} = \sum \delta_n \lambda_3 \sin(\alpha_n x)$$

где  $\delta_n$  — коэффициент ряда

$$p(x) = A + \sum \delta_n \cos(\alpha_n x)$$

Решение 2

$$\sigma_x = \sum \delta_n \theta_3 \sin(\alpha_n x)$$

$$\sigma_y = \sum \delta_n \varphi_3 \sin(\alpha_n x)$$

$$\tau_{xy} = -\sum \delta_n \lambda_3 \cos(\alpha_n x)$$

где  $\delta_n$  — коэффициент ряда

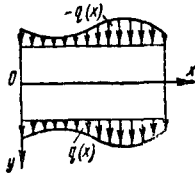
$$p(x) = \sum \delta_n \sin(\alpha_n x)$$

$$\theta_3 = \frac{(2 \operatorname{sh} u_n - 2u_n \operatorname{ch} u_n) \operatorname{ch}(\alpha_n y) + 2\alpha_n y \operatorname{sh}(\alpha_n y) \operatorname{sh} u_n}{\operatorname{sh} 2u_n + 2u_n};$$

$$\varphi_3 = \frac{(2 \operatorname{sh} u_n + 2u_n \operatorname{ch} u_n) \operatorname{ch}(\alpha_n y) - 2\alpha_n y \operatorname{sh}(\alpha_n y) \operatorname{sh} u_n}{\operatorname{sh} 2u_n + 2u_n};$$

$$\lambda_3 = \frac{2\alpha_n y \operatorname{ch}(\alpha_n y) \operatorname{sh} u_n - 2u_n \operatorname{ch} u_n \operatorname{sh}(\alpha_n y)}{\operatorname{sh} 2u_n + 2u_n}.$$

Случай 4. Продольные кромки полосы загружены нормальными напряжениями кососимметрично (фиг. 18)



Фиг. 18

$$\sigma_y = p(x), \tau_{xy} = 0, \text{ при } y = +0,5b,$$

$$\sigma_y = -p(x), \tau_{xy} = 0, \text{ при } y = -0,5b.$$

Решение 1

$$\sigma_x = \sum \delta_n \theta_4 \cos(\alpha_n x)$$

$$\sigma_y = \sum \delta_n \varphi_4 \cos(\alpha_n x)$$

$$\tau_{xy} = \sum \delta_n \lambda_4 \sin(\alpha_n x)$$

где  $\delta_n$  — коэффициент ряда

$$p(x) = \sum \delta_n \cos(\alpha_n x)$$

Решение 2

$$\sigma_x = \sum \delta_n \theta_4 \sin(\alpha_n x)$$

$$\sigma_y = \sum \delta_n \varphi_4 \sin(\alpha_n x)$$

$$\tau_{xy} = -\sum \delta_n \lambda_4 \cos(\alpha_n x)$$

где  $\delta_n$  — коэффициент ряда

$$p(x) = \sum \delta_n \sin(\alpha_n x)$$

$$\theta_4 = \frac{(2 \operatorname{ch} u_n - 2u_n \operatorname{sh} u_n) \operatorname{sh}(\alpha_n y) + 2\alpha_n y \operatorname{ch}(\alpha_n y) \operatorname{ch} u_n}{\operatorname{sh} 2u_n - 2u_n};$$

$$\varphi_4 = \frac{(2 \operatorname{ch} u_n + 2u_n \operatorname{sh} u_n) \operatorname{sh}(\alpha_n y) - 2\alpha_n y \operatorname{ch}(\alpha_n y) \operatorname{ch} u_n}{\operatorname{sh} 2u_n - 2u_n};$$

$$\lambda_4 = \frac{2\alpha_n y \operatorname{sh}(\alpha_n y) \operatorname{ch} u_n - 2u_n \operatorname{sh} u_n \operatorname{ch}(\alpha_n y)}{\operatorname{sh} 2u_n - 2u_n}.$$

В этом решении

$$\int_{-0,5b}^{+0,5b} \sigma_4 dy = 0,$$

а следовательно,

$$|\sigma_x|_{ep} = 0.$$

Случай 5. Односторонняя загрузка полосы скалывающими напряжениями

$$\sigma_y = 0, \tau_{xy} = q(x), \text{ при } y = +0,5b,$$

$$\sigma_y = \tau_{xy} = 0, \text{ при } y = -0,5b.$$

Можно получить решение, складывая результаты, относящиеся к случаям 1 и 2.

Решение 1

$$\sigma_x = \sum \gamma_n \theta_5 \cos(\alpha_n x)$$

$$\sigma_z = \sum \gamma_n \varphi_5 \cos(\alpha_n x)$$

$$\tau_{xy} = \sum \gamma_n \lambda_5 \sin(\alpha_n x)$$

где  $\gamma_n$  — коэффициент ряда

$$q(x) = \sum \gamma_n \sin(\alpha_n x)$$

Решение 2

$$\sigma_x = \sum \gamma_n \theta_5 \sin(\alpha_n x)$$

$$\sigma_y = \sum \gamma_n \varphi_5 \sin(\alpha_n x)$$

$$\tau_{xy} = -\sum \gamma_n \lambda_5 \cos(\alpha_n x)$$

где  $\gamma_n$  — коэффициент ряда

$$q(x) = -\sum \gamma_n \cos(\alpha_n x)$$

$$\theta_5 = \frac{1}{2}(\theta_1 + \theta_3),$$

$$\varphi_5 = \frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_3),$$

$$\lambda_5 = \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_3).$$

Случай 6. Односторонняя нагрузка нормальными напряжениями

$$\sigma_y = p(x), \tau_{xy} = 0, \text{ при } y = +0,5b,$$

$$\sigma_y = \tau_{xy} = 0, \text{ при } y = -0,5b.$$

Решение может быть получено путём складывания результатов, относящихся к случаям 3 и 4.

Решение 1

$$\sigma_x = \sum \delta_n \theta_6 \cos(\alpha_n x)$$

$$\sigma_y = \sum \delta_n \varphi_6 \cos(\alpha_n x)$$

$$\tau_{xy} = \sum \delta_n \lambda_6 \sin(\alpha_n x)$$

где  $\delta_n$  — коэффициент ряда

$$p(x) = \sum \delta_n \cos(\alpha_n x)$$

Решение 2

$$\sigma_x = \sum \delta_n \theta_6 \sin(\alpha_n x)$$

$$\sigma_y = \sum \delta_n \varphi_6 \sin(\alpha_n x)$$

$$\tau_{xy} = \sum \delta_n \lambda_6 \cos(\alpha_n x)$$

где  $\delta_n$  — коэффициент ряда

$$p(x) = \sum \delta_n \sin(\alpha_n x)$$

$$\theta_6 = \frac{1}{2}(\theta_3 + \theta_4),$$

$$\varphi_6 = \frac{1}{2}(\varphi_3 + \varphi_4),$$

$$\lambda_6 = \frac{1}{2}(\lambda_3 + \lambda_4).$$

## Применение полярных координат

В случае отсутствия объёмных сил уравнение (27) после преобразования к полярным координатам принимает форму:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} \right) = 0. \quad (28)$$

Здесь  $\varphi$  — функция от полярных координат  $r, \theta$ , которая связана с составляющими напряжений следующими зависимостями:

$$\sigma_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2}; \quad \sigma_\theta = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2};$$

$$\tau_{r\theta} = -\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right). \quad (29)$$

Общее решение уравнения (28):

$$\begin{aligned} \varphi = & a_0 \ln r + b_0 r^2 + c_0 r^2 \ln r + d_0 r^2 \theta + a'_{0\theta} + \\ & + \frac{a_1}{2} r \theta \sin \theta + (b_1 r^3 + a'_1 r^{-1} + b'_1 r \ln r) \cos \theta - \\ & - \frac{c_1}{2} r \theta \cos \theta + (d_1 r^3 + c'_1 r^{-1} + d'_1 r \ln r) \sin \theta + \\ & + \sum_{n=2}^{\infty} (a_n r^n + b_n r^{n+2} + \\ & + a'_n r^{-n} + b'_n r^{-n+2}) \cos n\theta + \\ & + \sum_{n=2}^{\infty} (c_n r^n + d_n r^{n+2} + \\ & + c'_n r^{-n} + d'_n r^{-n+2}) \sin n\theta. \end{aligned}$$

При симметричном относительно оси распределении напряжений уравнение (28) упрощается

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) = 0. \quad (30)$$

Общее решение этого уравнения:

$$\varphi = A \ln r + B r^2 \ln r + C r^2 + D.$$

Составляющие напряжения на основании (26) будут:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{A}{r^2} + B(1 + 2 \ln r) + 2C \\ \sigma_\theta &= -\frac{A}{r^2} + B(3 + 2 \ln r) + 2C \\ \tau_{r\theta} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

Толстостенная труба под действием равномерного внутреннего и внешнего давления (фиг. 19). Положив в выражениях (31)  $B = 0$ , что является условием получения однозначного решения, определяют постоянные  $A$  и  $C$  из условий на поверхности:

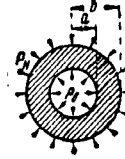
$$\frac{A}{a^2} + 2C = -p_a; \quad \frac{A}{b^2} + 2C = -p_k.$$

Подставив значения  $A$  и  $C$  в выражениях (31), получают:

$$\sigma_r = \frac{a^2 b^2 (p_k - p_a)}{b^2 - a^2} \cdot \frac{1}{r^2} + \frac{p_a a^2 - p_k b^2}{b^2 - a^2};$$

$$\sigma_\theta = -\frac{a^2 b^2 (p_k - p_a)}{b^2 - a^2} \cdot \frac{1}{r^2} + \frac{p_a a^2 - p_k b^2}{b^2 - a^2}. \quad (32)$$

Чистый изгиб кривых брусьев с круговой осью (фиг. 20). Постоянные  $A, B$  и  $C$



Фиг. 19



Фиг. 20

в формулах (31) определяются из следующих условий на поверхности:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= 0 \text{ при } r = a \text{ и } r = b; \\ \int_a^b \sigma_\theta dr &= 0, \quad \int_a^b \sigma_\theta r \cdot dr = -M. \end{aligned}$$

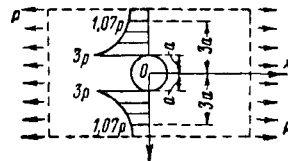
После подстановки значений  $A, B$  и  $C$  в формулы (31) получают

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= -\frac{4M}{N} \left( \frac{a^2 b^2}{r^2} \ln \frac{b}{a} + \right. \\ & \left. + b^2 \ln \frac{r}{b} + a^2 \ln \frac{a}{r} \right) \\ \sigma_\theta &= -\frac{4M}{N} \left( -\frac{a^2 b^2}{r^2} \ln \frac{b}{a} + \right. \\ & \left. + b^2 \ln \frac{r}{b} + a^2 \ln \frac{a}{r} + b^2 - a^2 \right) \end{aligned} \right\}, \quad (33)$$

где

$$N = (b^2 - a^2) - 4a^2 b^2 \left( \ln \frac{b}{a} \right)^2.$$

Влияние круглых отверстий на распределение напряжений в пластинках. В случае пластинки бесконечных размеров с круглым отверстием радиуса  $a$ , подверженной



Фиг. 21

осевому растяжению нагрузкой интенсивностью  $p$  (фиг. 21) функция напряжений в полярных координатах  $r\theta$  имеет вид:

$$\varphi = \frac{p}{4} \left[ r^2 - 2a^2 \ln r - \frac{r^2 - a^2}{r^2} \cos 2\theta \right].$$

Напряжения определяются по формулам (29):

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \frac{p}{2} \left[ 1 - \frac{a^2}{r^2} + \left( 1 - \frac{4a^2}{r^2} + \frac{3a^4}{r^4} \right) \cos 2\theta \right]; \\ \sigma_\theta &= \frac{p}{2} \left[ 1 + \frac{a^2}{r^2} - \left( 1 + \frac{3a^4}{r^4} \right) \cos 2\theta \right]; \\ \tau_{r\theta} &= \frac{p}{2} \left[ -1 - \frac{2a^2}{r^2} + \frac{3a^4}{r^4} \right] \sin 2\theta.\end{aligned}$$

Это решение удовлетворяет граничным условиям:

- 1) при  $r = \infty$   $\sigma_r = p \cos^2 \theta$ ;  
 $\sigma_\theta = p \sin^2 \theta$ ;  $\tau_{r\theta} = -p \sin \theta \cos \theta$ ;
- 2) при  $r = a$   $\sigma_r = \tau_{r\theta} = 0$ .

Нормальное напряжение  $\sigma_\theta$  достигает наибольших значений на поверхности отверстия в точках по концам диаметра, перпендикулярного к направлению растяжения:

$$\sigma_{\theta \max} = 3p.$$

Оно быстро убывает с возрастанием  $r$  и уже на расстоянии  $r = 3a$  от центра отверстия почти равно среднему значению:

$$\sigma_{\theta \text{ ср}} = 1,07 p.$$

Путём наложения друг на друга двух напряжённых состояний рассмотренного типа можно получить решение для бесконечной пластинки, ослабленной круглым отверстием, при равномерном растяжении в двух направлениях.

В этом случае:

$$\begin{aligned}\sigma_r &= p \left( 1 - \frac{a^2}{r^2} \right); \\ \sigma_\theta &= p \left( 1 + \frac{a^2}{r^2} \right); \\ \tau_{r\theta} &= 0.\end{aligned}$$

Опасным является нормальное напряжение  $\sigma_\theta$ , которое на краю отверстия при  $r = a$  достигает наибольшего значения:

$$\sigma_{\theta \max} = 2p.$$

## ОБЩИЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Решение П. Ф. Папковича. Общий интеграл уравнений (14) представляется в следующей форме:

$$\left. \begin{aligned}u &= u_0 + u_1 \\ v &= v_0 + v_1 \\ w &= w_0 + w_1\end{aligned} \right\}. \quad (a)$$

Здесь  $u_0$ ,  $v_0$  и  $w_0$  являются частными решениями полных уравнений (14) и определяются следующими зависимостями

$$\left. \begin{aligned}u_0 &= \nabla \psi_1 - \frac{1}{2(1-\nu)} \frac{\partial \psi_0}{\partial x} \\ v_0 &= \nabla \psi_2 - \frac{1}{2(1-\nu)} \frac{\partial \psi_0}{\partial y} \\ w_0 &= \nabla \psi_3 - \frac{1}{2(1-\nu)} \frac{\partial \psi_0}{\partial z}\end{aligned} \right\}, \quad (б)$$

где  $\psi_1, \psi_2$  и  $\psi_3$  представляют собой любые решения уравнений.

$$\left. \begin{aligned}\nabla \nabla \psi_1 &= -\frac{X}{G} \\ \nabla \nabla \psi_2 &= -\frac{Y}{G} \\ \nabla \nabla \psi_3 &= -\frac{Z}{G}\end{aligned} \right\}, \quad (в)$$

$$\psi_0 = \frac{\partial \psi_1}{\partial x} + \frac{\partial \psi_2}{\partial y} + \frac{\partial \psi_3}{\partial z}.$$

Через  $u_1$ ,  $v_1$  и  $w_1$  обозначены общие решения однородных уравнений, соответствующих уравнениям (14). Величины  $u_1$ ,  $v_1$  и  $w_1$  определяются следующими соотношениями:

$$\left. \begin{aligned}u_1 &= \Phi_1 - \\ &- \frac{1}{4(1-\nu)} \frac{\partial}{\partial x} (x \Phi_1 + y \Phi_2 + z \Phi_3 + \Phi_0) \\ v_1 &= \Phi_2 - \\ &- \frac{1}{4(1-\nu)} \frac{\partial}{\partial y} (x \Phi_1 + y \Phi_2 + z \Phi_3 + \Phi_0) \\ w_1 &= \Phi_3 - \\ &- \frac{1}{4(1-\nu)} \frac{\partial}{\partial z} (x \Phi_1 + y \Phi_2 + z \Phi_3 + \Phi_0)\end{aligned} \right\}, \quad (г)$$

где  $\Phi_i$  суть общие интегралы уравнений

$$\nabla \Phi_i = 0. \quad (д)$$

Если объёмные силы имеют потенциал, т. е. если

$$\begin{aligned}X &= \frac{\partial \phi}{\partial x}; \\ Y &= \frac{\partial \phi}{\partial y}; \\ Z &= \frac{\partial \phi}{\partial z},\end{aligned}$$

то на основании (в) можно написать:

$$\left. \begin{aligned}\psi_1 &= \frac{\partial \lambda}{\partial x} \\ \psi_2 &= \frac{\partial \lambda}{\partial y} \\ \psi_3 &= \frac{\partial \lambda}{\partial z}\end{aligned} \right\}. \quad (е)$$

Причём функция  $\lambda$  должна удовлетворять уравнению

$$\nabla \nabla \lambda = -\frac{\phi}{G}. \quad (ж)$$

Из сравнения (в) и (е) можно заключить, что

$$\psi_0 = \nabla \lambda. \quad (з)$$

Тогда частные решения уравнений (14) примут вид:

$$\left. \begin{aligned}u_0 &= \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \frac{\partial \psi_0}{\partial x} \\ v_0 &= \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \frac{\partial \psi_0}{\partial y} \\ w_0 &= \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \frac{\partial \psi_0}{\partial z}\end{aligned} \right\}, \quad (и)$$

где на основании (ж) и (з) функции  $\psi_0$  есть любое частное решение уравнения

$$\nabla \psi_0 = -\frac{\phi}{G},$$

непрерывное до своих вторых производных.

В случае, когда объёмные силы отсутствуют в выражениях (а), можно положить

$$u_0 = v_0 = w_0 = 0.$$

**Решение Б. Г. Галёркина.** Академик Б. Г. Галёркин показал, что система уравнений (1) и (15) имеет следующее решение:

$$\sigma_x = 2\mu \left[ \frac{\partial}{\partial x} \nabla \varphi_1 - \frac{1}{2(1-\nu)} \left( \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} - \nu \nabla \omega \right) \right];$$

$$\sigma_y = 2\mu \left[ \frac{\partial}{\partial y} \nabla \varphi_2 - \frac{1}{2(1-\nu)} \left( \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} - \nu \nabla \omega \right) \right];$$

$$\sigma_z = 2\mu \left[ \frac{\partial}{\partial z} \nabla \varphi_3 - \frac{1}{2(1-\nu)} \left( \frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2} - \nu \nabla \omega \right) \right];$$

$$\tau_{yz} = \mu \left[ \nabla \left( \frac{\partial \varphi_3}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} \right) - \frac{1}{1-\nu} \frac{\partial^2 \omega}{\partial y \partial z} \right];$$

$$\tau_{xz} = \mu \left[ \nabla \left( \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} + \frac{\partial \varphi_3}{\partial x} \right) - \frac{1}{1-\nu} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial z} \right];$$

$$\tau_{xy} = \mu \left[ \nabla \left( \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \right) - \frac{1}{1-\nu} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} \right],$$

где

$$\omega = \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_3}{\partial z},$$

причём  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  и  $\varphi_3$  удовлетворяют уравнениям:

$$\mu \nabla \nabla \varphi_1 + X = 0,$$

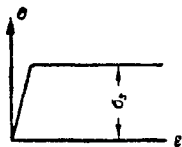
$$\mu \nabla \nabla \varphi_2 + Y = 0,$$

$$\mu \nabla \nabla \varphi_3 + Z = 0.$$

В случае отсутствия массовых сил  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  и  $\varphi_3$  суть три независимых решения бигармонического уравнения. То же имеет место в случае силы тяжести.

## ДЕФОРМАЦИЯ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОГО ТЕЛА

В изложенных ниже основных положениях теории пластичности, которая в настоящее время получила широкое распространение, рассматривается так называемый упруго-пластический материал. Предполагается, что до напряжения, равного пределу текучести, материал подчиняется закону Гука; за этим пределом при простом растя-



Фиг. 22

жении деформации растут без увеличения напряжений (фиг. 22).

Все выводы основаны на допущении о малости деформаций, по которому перемещения отдельных точек тела и их производные по координатам настолько малы, что их квадратами и произведениями по сравнению с первыми степенями можно пренебречь.

Кроме того, предполагается, что деформация происходит медленно, так, что скорость деформации влияет на напряжения очень незначительно.

Теория пластичности базируется на основных уравнениях механики сплошной среды. Поэтому в теории пластичности используются условия равновесия для напряжений и уравнения, связывающие перемещения с деформациями. Кроме этого, для построения теории пластичности ещё необходимы две зависимости: условие, связывающее между собой напряжения при наступлении пластического состояния, — так называемое условие пластичности, и зависимость между деформациями и напряжениями, аналогичная закону Гука в теории упругости.

## УСЛОВИЕ ПЛАСТИЧНОСТИ

Зависимость, связывающая между собой составляющие напряжения при наступлении пластического состояния в рассматриваемой точке, называется условием пластичности. Имеется ряд предположений относительно этой зависимости. Наиболее оправданным с точки зрения экспериментальной проверки и наиболее распространённым является условие энергии изменения формы, согласно которой предлагается принимать за основу для определения пластического состояния материала ту часть количества потенциальной энергии деформации, накопленной в единице объёма материала, которая соответствует изменению формы.

Это условие пластичности может быть сформулировано так: удельная работа изменения формы элемента, находящегося в пластическом состоянии, есть величина постоянная, характерная для данного материала.

В главных напряжениях  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  и  $\sigma_3$  это условие выражается следующим образом:

$$(\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 + (\sigma_1 - \sigma_2)^2 = 2\sigma_s^2, \quad (34)$$

где  $\sigma_s$  — предел текучести при простом растяжении. В составляющих напряжениях, отнесённых к любой системе декартовых координат, это условие принимает вид:

$$(\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + (\sigma_x - \sigma_y)^2 + 6(\tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2 + \tau_{xy}^2) = 2\sigma_s^2. \quad (35)$$

## ЗАВИСИМОСТЬ МЕЖДУ СОСТАВЛЯЮЩИМИ НАПРЯЖЕНИЯ И ДЕФОРМАЦИИ

При пластическом состоянии материала предложена зависимость между шестью составляющими напряжения и шестью составляющими деформации, аналогичная закону Гука для упругих тел. Эта зависимость имеет вид:

$$\begin{aligned}\epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\psi}{2G} \left[ \sigma_x - \frac{\psi - 1 + \frac{3\nu}{1+\nu}}{\psi} \sigma \right] \\ \epsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\psi}{2G} \left[ \sigma_y - \frac{\psi - 1 + \frac{3\nu}{1+\nu}}{\psi} \sigma \right] \\ \epsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\psi}{2G} \left[ \sigma_z - \frac{\psi - 1 + \frac{3\nu}{1+\nu}}{\psi} \sigma \right] \\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\psi}{G} \tau_{yz}, \\ \gamma_{zx} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\psi}{G} \tau_{zx}; \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\psi}{G} \tau_{xy},\end{aligned}\quad (36)$$

где  $\sigma = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$ , а  $\psi$  есть функция

координат  $x$ ,  $y$  и  $z$  и называется модулем пластичности.

При  $\psi = 1$ , как это видно из сравнения с уравнениями (12), уравнения (36) превращаются в уравнения Гука.

Для материала, который в пластическом состоянии несжимаем, что выражается уравнением:

$$\Delta = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z = 0,$$

уравнения (36) принимают вид:

$$\left. \begin{aligned}\epsilon_x &= \frac{\psi}{2G} (\sigma_x - \sigma) & \gamma_{yz} &= \frac{\psi}{G} \tau_{yz} \\ \epsilon_y &= \frac{\psi}{2G} (\sigma_y - \sigma) & \gamma_{zx} &= \frac{\psi}{G} \tau_{zx} \\ \epsilon_z &= \frac{\psi}{2G} (\sigma_z - \sigma) & \gamma_{xy} &= \frac{\psi}{G} \tau_{xy}\end{aligned} \right\}. \quad (37)$$

### ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ

Для определения напряжённого состояния тела, находящегося в стадии пластических деформаций, применяются уравнения равновесия (1) без учёта объёмных сил и условие пластичности (35):

$$\left. \begin{aligned}\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} &= 0\end{aligned} \right\}.$$

$$(\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + (\sigma_x - \sigma_y)^2 + 6(\tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2 + \tau_{xy}^2) = 2\sigma_s^2.$$

Если при помощи уравнений (36) или (37) выразить шесть составляющих напряжений  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\sigma_z$ ,  $\tau_{yz}$ ,  $\tau_{zx}$  и  $\tau_{xy}$  через составляющие перемещения  $u$ ,  $v$  и  $w$ , то система четырёх уравнений (1) и (35) будет содержать четыре неизвестные функции.

Кроме уравнений (1) и (35), неизвестные функции должны удовлетворять соответствующим условиям на поверхности.

### ЧАСТНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ

#### Кручение призматических стержней [9]

По мере возрастания крутящих моментов в наиболее напряжённых местах скручиваемого стержня материал переходит из упругого состояния в пластическое. В поперечных сечениях возникают две зоны: упругая и пластическая. Такой случай носит название упруго-пластического кручения. При дальнейшем возрастании крутящих моментов пластическая зона расширяется и при некотором предельном значении крутящего момента распространяется по всему поперечному сечению. Возникает случай чисто пластического кручения.

#### Чисто пластическое кручение призматических стержней

В пластической стадии, так же как и в упругой, в поперечных сечениях скручиваемых стержней действуют только касательные напряжения.

Если координатную ось  $z$  совместить с осью стержня, то во всех точках

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0.$$

Напряжённое состояние определяется составляющими напряжения  $\tau_{xz}$  и  $\tau_{yz}$ .

Составляющие напряжения  $\tau_{xz}$  и  $\tau_{yz}$  должны удовлетворять системе уравнений (1) и (35), а также условиям на поверхности. Уравнения (1) примут вид:

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0. \quad (38)$$

Первые два из них показывают, что распределение напряжений одинаково во всех поперечных сечениях.

Условие пластичности 35:

$$\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2 = k^2, \quad (39)$$

где  $k^2 = \frac{\sigma_s^2}{3}$ .

Уравнение (39) будет удовлетворено, если

$$\tau_{xz} = k \cos \varphi, \quad \tau_{yz} = k \sin \varphi, \quad (40)$$

где  $\varphi$  — угол наклона вектора касательного напряжения к оси  $x$  (фиг. 23).

Подстановка (40) в (38) даёт:

$$\sin \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \cos \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0. \quad (41)$$

Интеграл этого уравнения имеет вид:

$$y = -x \operatorname{ctg} \varphi + \Phi(\varphi), \quad (42)$$

где  $\Phi(\varphi)$  — произвольная функция.

Условие на боковой поверхности стержня приводит к уравнению

$$\frac{\tau_{yz}}{\tau_{xz}} = \frac{dy}{dx},$$



утверждающему, что вектор касательного напряжения в каждой точке контура поперечного сечения должен быть направлен по касательной.

На основании (40)

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \varphi. \quad (43)$$

На торцах касательные напряжения должны приводиться к скручивающему моменту:

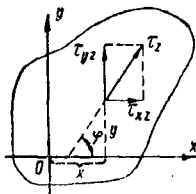
$$M_t = \iint (x\tau_{yz} - y\tau_{xz}) dx dy, \quad (44)$$

или

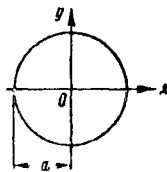
$$M_t = k \iint (x \sin \varphi - y \cos \varphi) dx dy,$$

где интегрирование распространено на всю площадь поперечного сечения.

Контурное условие (43) служит для определения произвольной функции  $\Phi(\varphi)$ . Из уравнения (44) определяется предельный крутящий момент.



Фиг. 23



Фиг. 24

**Стержень круглого сечения (фиг. 24).** Контур поперечного сечения задан уравнением

$$x^2 + y^2 = a^2.$$

По уравнению (43) имеют:

$$\Phi(\varphi) = 0,$$

а на основании выражений (42) и (40)

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xz} &= -k \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ \tau_{yz} &= k \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{aligned} \right\}. \quad (45)$$

Величина предельного крутящего момента, при котором наступает чисто пластическое кручение, равна

$$M_{\max} = \frac{2\pi}{3} ka^3. \quad (46)$$

**Стержень овального сечения (фиг. 25).** Контур поперечного сечения очерчен кривой  $\left(\frac{a}{b} \geq 3\right)$

$$\begin{aligned} x &= +[a + b(\cos 2\alpha - 2)] \sin \alpha, \\ y &= -[a + b(\cos 2\alpha - 2)] \cos \alpha, \end{aligned}$$

где  $\alpha$  — угол между положительными направлениями оси  $x$  и касательной к кривой. Эта кривая очень похожа на эллипс с полуосями

$$(a + b) \text{ и } (a - b).$$

Уравнение (43) в этом случае даёт

$$\Phi(\varphi) = 4b \cos \varphi.$$

Угол  $\varphi$  определяется уравнением (42)

$$y = -x \operatorname{ctg} \varphi + 4b \cos \varphi.$$

Составляющие напряжения могут быть вычислены по формулам (40).

Предельный крутящий момент:

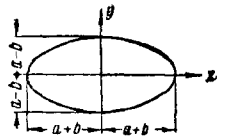
$$M_{\max} = \frac{2\pi}{3} ka^3 \left(1 - \frac{9}{2} \beta^2 + 4\beta^3\right),$$

$$\text{где } \beta = \frac{b}{a}.$$

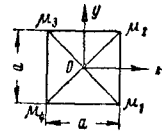
**Стержень квадратного сечения (фиг. 26)**

$$\tau_{xz} = \begin{cases} 0 & \text{в треугольнике } M_1OM_2 \\ -k & \text{в трапеции } M_2O_1O_2M_3 \\ 0 & \text{в треугольнике } M_3O_2M_4 \\ +k & \text{в трапеции } M_4O_2O_1M_1 \end{cases} \quad \tau_{yz} = \begin{cases} +k & \text{в треугольнике } M_1OM_2 \\ 0 & \text{в трапеции } M_2O_1O_2M_3 \\ -k & \text{в треугольнике } M_3O_2M_4 \\ 0 & \text{в трапеции } M_4O_2O_1M_1 \end{cases}$$

$$M_{\max} = \frac{1}{6} ka^3.$$



Фиг. 25



Фиг. 26

**Стержень прямоугольного сечения (фиг. 27)**

$$\tau_{xz} = \begin{cases} 0 & \text{в треугольнике } M_1O_1M_2 \\ -k & \text{в трапеции } M_2O_1O_2M_3 \\ 0 & \text{в треугольнике } M_3O_2M_4 \\ +k & \text{в трапеции } M_4O_2O_1M_1 \end{cases} \quad \tau_{yz} = \begin{cases} +k & \text{в треугольнике } M_1O_1M_2 \\ 0 & \text{в трапеции } M_2O_1O_2M_3 \\ -k & \text{в треугольнике } M_3O_2M_4 \\ 0 & \text{в трапеции } M_4O_2O_1M_1 \end{cases}$$

$$M_{\max} = ka^3 \left(\frac{1}{6} + \frac{\beta - 1}{4}\right),$$

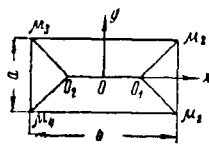
$$\text{где } \beta = \frac{b}{a}.$$

**Упруго-пластическое кручение**

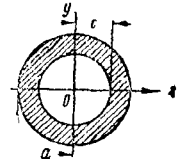
В упругой зоне составляющие напряжения должны удовлетворять уравнению равновесия (38) и условию совместности:

$$\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} = 2G\theta, \quad (47)$$

где  $\theta$  — угол скручивания на единицу длины стержня. В пластической зоне должны быть удовлетворены уравнения (38) и (39). При



Фиг. 27



Фиг. 28

переходе через границу между упругой и пластической зонами составляющие напряжения изменяются непрерывно. Поэтому, если упругую зону обозначить значком  $\epsilon$ ,

а пластическую — значком  $p$ , то вдоль границы

$$\tau_{xz}^e = \tau_{xz}^p, \quad \tau_{yz}^e = \tau_{yz}^p. \quad (48)$$

Условия (48) дают возможность определить границу между зонами.

Крутящий момент определяется из уравнения (44) как сумма моментов в упругой и пластической зонах.

В стержне кругового поперечного сечения (фиг. 28), контур которого задан уравнением

$$x^2 + y^2 = a^2,$$

составляющие напряжения в упругой зоне, удовлетворяющие уравнениям (38) и (47), равны

$$\tau_{xz} = -G\theta y, \quad \tau_{yz} = G\theta x.$$

В пластической зоне на основании (45)

$$\tau_{xz} = -k \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \quad \tau_{yz} = k \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Условия (48) приводят к уравнению

$$x^2 + y^2 = \frac{k^2}{G^2 \theta^2}.$$

Следовательно, границей между упругой и пластической зонами является окружность радиуса:

$$c = \frac{k}{G \theta}.$$

Крутящий момент по формуле (44):

$$M_t = \frac{1}{2} \pi c^4 G \theta + \frac{2}{3} \pi k (a^3 - c^3)$$

или, исключая  $c$ ,

$$M_t = \frac{2\pi}{3} k a^3 \left[ 1 - \frac{1}{4} \left( \frac{k}{G \theta a} \right)^2 \right].$$

#### Плоская задача теории пластичности

**Плоское напряжённое состояние.** Когда составляющие напряжения во всех точках тела параллельны одной плоскости, например, координатной плоскости  $oxy$ , то для любой точки  $\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$ , а  $\sigma_x, \sigma_y$  и  $\tau_{xy}$  — не зависят от  $z$ .

В этом случае условие пластичности (35):

$$\sigma_x^2 - \sigma_x \sigma_y + \sigma_y^2 + 3 \tau_{xy}^2 = \sigma_s^2. \quad (49)$$

Условие равновесия (1):

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (50)$$

Система уравнений (49) и (50) даёт возможность определить три неизвестные функции  $\sigma_x, \sigma_y$  и  $\tau_{xy}$ .

**Плоская деформация.** Если перемещения всех точек деформированного тела происходят в плоскостях, параллельных координатной плоскости  $oxy$ , то в любой точке  $w = 0$ ,

а  $u$  и  $v$  не зависят от  $z$ . Следовательно, на основании уравнений (7) и (8)

$$\varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0,$$

а на основании уравнений (37)

$$\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0, \quad \sigma_z = \frac{1}{2} (\sigma_x + \sigma_y). \quad (51)$$

Условие пластичности (35):

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4 \tau_{xy}^2 = \frac{4}{3} \sigma_s^2. \quad (52)$$

Условия равновесия приведутся к виду (50).

Системы уравнений (52) и (50) достаточно для определения неизвестных функций  $\sigma_x, \sigma_y$  и  $\tau_{xy}$ .

#### Толстостенная труба под действием равномерного давления

Примером плоской деформации может служить бесконечно длинная толстостенная труба под давлением, распределённым равномерно по длине и симметричным относительно оси. При достаточно большой величине давления в поперечном сечении трубы образуется пластическая зона. Границей между пластической и упругой зонами вследствие осевой симметрии будет окружность. По мере дальнейшего увеличения давления пластическая зона будет расширяться и при некотором предельном значении давления распространится на всё поперечное сечение. Труба из упругопластического состояния перейдёт в чисто пластическое.

При решении этой задачи целесообразно применение системы полярных координат  $r, \theta$  с началом на оси трубы. В силу осевой симметрии касательное напряжение  $\tau_{r\theta} = 0$ , а  $\sigma_r$  и  $\sigma_\theta$  не зависят от  $\theta$ .

**Чисто пластическое состояние трубы.** Условие пластичности (52):

$$\sigma_r - \sigma_\theta = \pm 2k, \quad (53)$$

где  $k = \frac{\sigma_s}{\sqrt{3}}$ .

Уравнения (50) сведутся к одному уравнению

$$r \frac{d\sigma_r}{dr} + \sigma_r - \sigma_\theta = 0. \quad (54)$$

После подстановки разности  $\sigma_r - \sigma_\theta$  из (53) и (54) и интегрирования будет:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= A \pm 2k \ln r \\ \sigma_\theta &= A \pm 2k \ln(r-1) \end{aligned} \right\}. \quad (55)$$

В случае, когда труба подвержена только внутреннему давлению интенсивностью  $p$  (фиг. 29), условия на поверхности дадут:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= -p \quad \text{при } r = a; \\ \sigma_r &= 0 \quad \text{при } r = b. \end{aligned}$$

Первое показывает, что в правой части уравнения (53) нужно брать верхний знак. Из второго получают

$$A = -2k \ln b.$$

Следовательно

$$\sigma_r = -2k \ln \frac{b}{r};$$

$$\sigma_\theta = 2k \left( 1 - \ln \frac{b}{r} \right).$$

Величина предельного давления, при котором возникает чисто пластическое состояние трубы:

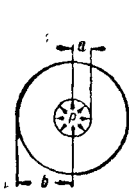
$$p_{\max} = 2k \ln \frac{b}{a}.$$

**Упругопластическое состояние трубы.** В упругой зоне составляющие напряжения определяют по известным из теории упругости формулам:

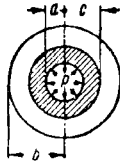
$$\sigma_r = B + \frac{C}{r^2},$$

$$\sigma_\theta = B - \frac{C}{r^2}.$$

В пластической зоне составляющие напряжения определяют выражениями (55).



Фиг. 29



Фиг. 30

При наличии только внутреннего давления (фиг. 30) условия на поверхности дадут:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= -p \quad \text{при } r = a \\ \sigma_r &= 0 \quad \text{при } r = b \end{aligned} \right\}. \quad (56)$$

Вдоль границы между упругой и пластической зонами имеет место непрерывность напряжений. Если значком  $e$  обозначить упругую область, а значком  $p$  — пластическую, то это условие будет

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r^e &= \sigma_r^p \\ \sigma_\theta^e &= \sigma_\theta^p \end{aligned} \right\} \text{ при } r = c. \quad (57)$$

Из уравнений (56) и (57) определяют постоянные, а также знак в выражениях (55).

Вводя обозначения

$$u = \frac{r}{a}, \quad \alpha = \frac{a}{b} \quad \text{и} \quad \gamma = \frac{c}{b},$$

получают после вычислений: в упругой зоне

$$\sigma_r = -k \gamma^2 \left( \frac{1}{u^2} - 1 \right);$$

$$\sigma_\theta = k \gamma^2 \left( \frac{1}{u^2} + 1 \right);$$

в пластической зоне

$$\sigma_r = -p + 2k \ln \frac{u}{\alpha},$$

$$\sigma_\theta = -p + 2k \left( \ln \frac{u}{\alpha} + 1 \right).$$

Пластическая деформация начнется при давлении

$$p_0 = k (1 - \alpha^2).$$

Давление, при котором радиус границы между зонами равен  $c$ :

$$p = k \left( 2 \ln \frac{\gamma}{\alpha} + 1 - \gamma^2 \right);$$

эта формула позволяет также по известным  $k$ ,  $a$ ,  $b$  и  $p$  вычислить  $c$ .

## ДЕФОРМАЦИЯ ВЯЗКО-ПЛАСТИЧЕСКОГО ТЕЛА [3]

### Свойства вязко-пластического тела

Однородное сплошное тело называется вязко-пластическим, если оно обладает следующими свойствами.

1. Направление максимальных скоростей скольжения в каждой точке тела совпадает с направлениями максимальных касательных напряжений.

2. Максимальное касательное напряжение при течении тела всегда больше некоторой постоянной  $K$ , называемой пластической постоянной, и является линейной функцией максимальной скорости скольжения.

При этом имеются в виду только несжимаемые тела. В определенных пределах скоростей деформаций указанными свойствами обладают железо, медь, свинец, смола, парафин, жидкость.

### Дифференциальные уравнения течения вязко-пластического тела \*

Проекции скорости движения какой-либо точки вязко-пластического тела, отнесенные к произвольной системе прямоугольных и прямолинейных координат, обозначают через  $u(x, y)$  и  $v(x, y)$ .

Составляющие скорости самой деформации, отнесенные к той же системе координат, обозначают через  $\dot{\epsilon}_x$ ,  $\dot{\epsilon}_y$  и  $\dot{\gamma}_{xy}$ .

Составляющие скоростей движения связаны с составляющими скоростей деформаций зависимостями, аналогичными (7) и (8):

$$\left. \begin{aligned} \dot{\epsilon}_x &= \frac{\partial u}{\partial x} \\ \dot{\epsilon}_y &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ \dot{\gamma}_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned} \right\}. \quad (58)$$

Наибольшая скорость скольжения  $U$ , наибольшее касательное напряжение  $T$ , среднее гидростатическое давление  $p$  и удвоенный угол наклона нормали к направле-

\* Эти уравнения были выведены А. А. Ильиным. Им же дано решение задач вязко-пластического сечения.

ниям максимального касательного напряжения  $\varphi$  выражаются следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} U &= \sqrt{(\dot{\epsilon}_y - \dot{\epsilon}_x)^2 - \dot{\gamma}_{xy}^2} \\ T &= \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} \end{aligned} \right\}. \quad (59)$$

$$\left. \begin{aligned} p &= -\frac{\sigma_y + \sigma_x}{2} \\ \operatorname{tg} \varphi &= \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2\tau_{xy}} \end{aligned} \right\}. \quad (60)$$

На основании первого свойства вязко-пластического тела о совпадении направления наибольшего касательного напряжения  $T$  с направлением наибольшей скорости скольжения  $U$  можно получить соотношение:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\dot{\epsilon}_y - \dot{\epsilon}_x}{\dot{\gamma}_{xy}}. \quad (61)$$

На основании второго свойства вязко-пластического тела

$$T = K + \mu U, \quad (62)$$

где  $K$  — пластическая постоянная;  
 $\mu$  — коэффициент вязкости.

Если воспользоваться формулами (59), то уравнение (62) может быть выражено в развёрнутом виде:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_y - \sigma_x)^2 + 4\tau_{xy}^2} = \\ &= K + \mu \sqrt{(\dot{\epsilon}_y - \dot{\epsilon}_x)^2 - \dot{\gamma}_{xy}^2}. \end{aligned} \quad (63)$$

Условие несжимаемости даёт

$$\epsilon_x + \epsilon_y = 0. \quad (64)$$

На основании (60) и (62) напряжения:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -p - \mu (U + \kappa) \sin \varphi \\ \sigma_y &= -p + \mu (U + \kappa) \sin \varphi \\ \tau_{xy} &= \mu (U + \kappa) \cos \varphi \end{aligned} \right\}, \quad (65)$$

где  $\kappa = \frac{K}{\mu}. \quad (66)$

Из системы уравнений (59), (61) и (64) можно определить выражение скоростей деформаций:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\epsilon}_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{2} U \sin \varphi \\ \dot{\epsilon}_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = +\frac{1}{2} U \sin \varphi \\ \dot{\gamma}_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = U \cos \varphi \end{aligned} \right\}. \quad (67)$$

Таким образом составляющие напряжений и скоростей деформации выражаются через три неизвестные функции  $U$ ,  $\varphi$  и  $p$ . Эти функции определяют по уравнениям движения сплошной среды, которые, если пренебречь инерционными и массовыми силами, могут быть представлены в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (68)$$

Путём дифференцирования и вычитания одного из другого можно два уравнения (68) привести к одному:

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (\sigma_y - \sigma_x) + \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \tau_{xy} = 0, \quad (69)$$

которое на основании выражения (65) может быть представлено в виде:

$$\begin{aligned} &\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) [\mu (U + \kappa) \cos \varphi] + \\ &+ 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} [\mu (U + \kappa) \sin \varphi]. \end{aligned} \quad (70)$$

Второе дифференциальное уравнение получают из группы уравнений (67) путём исключения скоростей  $u$  и  $v$ :

$$\begin{aligned} &\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (U \sin \varphi) - \\ &- 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (U \cos \varphi) = 0. \end{aligned} \quad (71)$$

Два дифференциальных уравнения (70) и (71) содержат две неизвестные функции  $U$  и  $\varphi$ .

Таким образом задача о течении вязко-пластического тела сводится к интегрированию системы уравнений (70) и (71).

#### ЛИТЕРАТУРА И ИСТОЧНИКИ

1. Жемочкин Б. Н. Теория упругости. Стройвоенмориздат, 1948.
2. Ильюшин А. А. Пластичность, ч. I. М.—Л., Гостехиздат, 1948, 376 с.
3. Ильюшин А. А. Деформация вязко-пластического тела. Учёные записки МГУ, выпуск 39, 1940.
4. Лейбензон Л. С. Курс теории упругости. Гостехиздат, 1947.
5. Мухелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.—Л., Акад. наук СССР, 1949, 636 с.
6. Папкович П. Ф. Теория упругости. Л.—М., Оборонгиз, 1939, 640 с.
7. Соколовский С. С. Теория пластичности. М.—Л., Акад. наук СССР, 1946, 306 с.
8. Тимошенко С. П. Теория упругости. Л.—М., ОНТИ, 1937, 451 с.
9. Филоненко-Бордич М. М. Теория упругости. М.—Л., Гостехиздат, 1947, 300 с.

# ТЕОРИЯ СООРУЖЕНИЙ



## СТАТИКА СООРУЖЕНИЙ

Статика сооружений даёт методы расчёта внутренних усилий и деформаций, возникающих в строительных конструкциях при стационарном<sup>1</sup> действии нагрузок.

Сооружение при расчёте заменяется расчётной схемой, которая является статическим и кинематическим изображением данного сооружения; эта схема позволяет применять в процессе расчёта принципы механики и математики.

Ниже рассмотрены расчётные схемы сооружений, наиболее употребительных в практике железнодорожного транспорта.

### СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫЕ СИСТЕМЫ

#### Фермы

Расчётной схемой фермы служит система, образованная совокупностью стержней, шарнирно соединённых между собой. Наличие шарниров, заменяющих жёсткие узлы, является рабочей гипотезой, позволяющей сравнительно просто и вместе с тем достаточно точно рассчитывать эти конструкции.

Теоретический расчёт шарнирной схемы даёт величины усилий на 15—20% больше фактических, что составляет так называемую конструктивную поправку.

Для проверки неизменяемости шарнирной схемы фермы пользуются формулой

$$S = 3D - 2N - 3,$$

где  $D$  — количество жёстких дисков или стержней, ограниченных шарнирами;

$N$  — количество простых шарниров; шарнир, соединяющий  $n$  стержней, принимается за  $(n - 1)$  простых шарниров.

При  $S < 0$  система неизменяема, статически неопределима;

при  $S = 0$  система неизменяема, статически определима;

при  $S > 0$  система изменяема.

Расчёт рекомендуется вести, принимая землю за диск.

Приведённая формула даёт необходимое, но недостаточное условие. Окончательное суждение о неизменяемости даёт анализ обра-

зования схемы фермы, причём в процессе этого образования должны быть соблюдены следующие основные условия:

1) три диска не должны соединяться тремя шарнирами, лежащими на одной прямой;

2) оси трёх стержней, прикрепляющих диск, не должны пересекаться в одной точке.

Несоблюдение одного из указанных условий определяет так называемую мгновенную изменяемость схемы.

Фермы, усилия в которых могут быть определены только из условий равновесия, называются статически определимыми.

Фермы, образованные из основного треугольника путём присоединения каждого последующего узла двумя стержнями, называются простейшими, в иных случаях — сложными.

Простейшие фермы всегда статически определимы.

#### Классификация балочных ферм по очертанию.

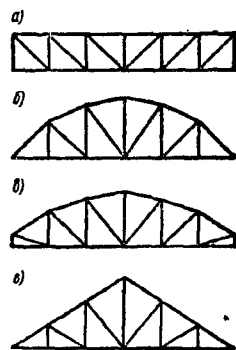
Различают фермы с параллельными поясами, параболическими, полигональными и треугольного очертания (фиг. 1, а, б, в, г). Наиболее выгодно полигональное очертание, когда высоты стоек подбираются из экономических соображений.

По заполнению различают решётку треугольную и раскосную (фиг. 2, а, б). Наиболее выгодной и распространённой является треугольная.

Наложением треугольной и раскосной решёток получают многорешётчатую и многораскосную (фиг. 2, г, в).

Задача подразделения панели на части решается посредством введения в решётку дополнительных шпренгелей; таким путём образуется сложная, статически определимая шпренгельная решётка (фиг. 2, д).

Метод расчёта балочных статически определимых ферм при постоянной нагрузке состоит в вырезании интересующей части кон-

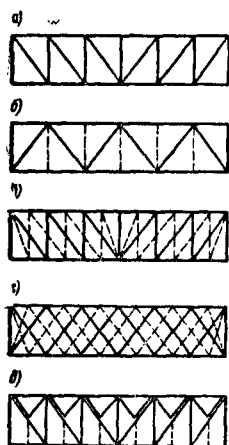


Фиг. 1. Очертания ферм: а — с параллельными поясами; б — параболическое; в — полигональное; г — треугольное

<sup>1</sup> Имется в виду изменение величины нагрузок.

струкции и написании для неё трёх условий равновесия. Разрез желательно выбрать так, чтобы в уравнение входило не более одного неизвестного. В зависимости от этого различают следующие способы.

1. Способ моментных точек (фиг. 3). Пусть требуется определить усилие



Фиг. 2. Решётки ферм: а — раскосная; б — треугольная; в — многораскосная; г — многорешётчатая; д — шпренгельная

в элементе  $D_2$ . Для этого сечением 1—1, перерезающим не более трёх элементов, отсекают левую часть фермы; затем, направляя неизвестные усилия от узлов отсечённой части, пишут условие её равновесия относительно точки пересечения направлений двух других, не интересующих нас, элементов  $U_2$  и  $O_2$ , находящихся в сечении 1—1. Условие равновесия имеет вид:

$$-A \cdot a + D_2 \cdot h + P(a + d) = 0,$$

откуда можно определить  $D_2$ .

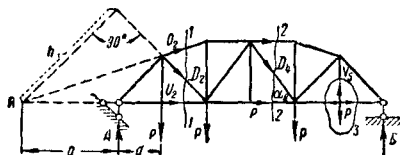
2. Способ проекций. Применяется в том случае, когда моментная точка находится в бесконечности. Пусть требуется определить усилие в элементе  $D_4$  (фиг. 3). Для этого проводят сечение 2—2 и проектируют все усилия, приложенные к левой части, на ось, перпендикулярную поясам; отсюда определяют  $D_4$ .

3. Способ вырезания узла применяется в том случае, когда в узле сходятся не более двух неизвестных элементов. Пусть требуется определить усилие в элементе  $V_5$  (фиг. 3). Вырезанием узла и проектированием на вертикаль находят

$$V_5 - P = 0,$$

откуда

$$V_5 = P.$$



Фиг. 3. Определение усилий в элементах фермы

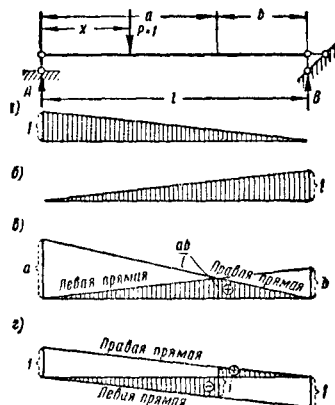
Графическое определение усилий — см. ТСЖ, т. I, раздел «Механика».

Метод расчёта балочных ферм при подвижной нагрузке состоит в построении так называемых линий влияния усилий.

Линией влияния какого-либо усилия называется график, каждой своей ординатой показывающий величину этого усилия, когда груз  $P = 1$  расположен над указанной ординатой.

Общий способ построения линий влияния складывается из двух операций:

1. Ставят груз  $P = 1$  на изучаемой конструкции на расстоянии  $x$  от какой-либо опоры, затем по правилам расчёта на постоянную нагрузку находят величину искомого усилия, т. е. получают уравнение линии влияния.



Фиг. 4. Линии влияния в двухопорной балке: а — опорной реакции А; б — опорной реакции В; в — изгибающего момента М на расстоянии а от опоры А; г — поперечной силы на расстоянии а от опоры А

2. По уравнению строят график, откладывая ординаты под грузом.

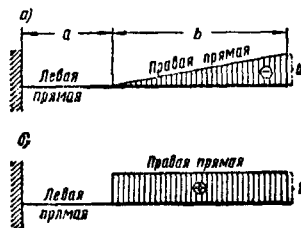
Например, для построения линии влияния опорной реакции А имеем (фиг. 4) по условиям равновесия

$$A = \frac{l - x}{l};$$

при  $x = 0$ ,  $A = 1$ ; при  $x = l$ ,  $A = 0$ .

Аналогично может быть построена и линия влияния В.

При построении линии влияния изгибающего момента и поперечной силы в сечении  $a-b$  приходится рассмотренные операции



Фиг. 5. Линии влияния в консольной балке на расстоянии а от заделки: а — изгибающего момента М; б — поперечной силы Q

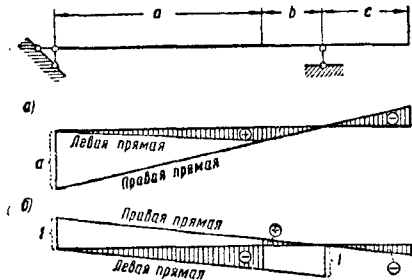
повторять дважды: при расположении груза правее и левее сечения соответственно получают правую и левую прямые. Эти прямые для линии влияния изгибающего момента всегда пересекаются под сечением (фиг. 4, в, г). Линии влияния для консольной балки приведены на фиг. 5.

Для построения линии влияния двухопорной балки с консолью следует соответствующую прямую межопорной части продол-

жить в пределы той консоли, где расположен груз (фиг. 6).

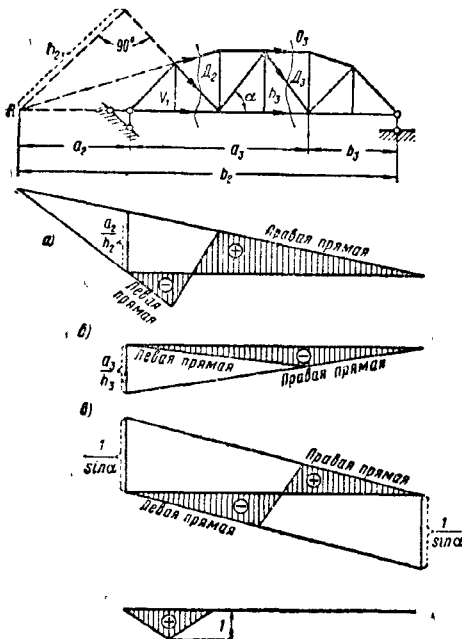
Линии влияния в двухопорных фермах получаются в результате тех же операций.

1. Элемент имеет моментную точку. В этом случае проводят трёхстержневое сечение и из условия равновесия относительно моментной



Фиг. 6. Линии влияния в двухопорной балке с консолью на расстоянии  $a$  и  $b$  от опор:  $a$  — изгибающего момента  $M$ ;  $b$  — поперечной силы  $Q$

точки составляют уравнение; в это уравнение входит искомое усилие при расположении груза правее и левее пересечённой панели, что соответствует правой и левой прямым линии влияния. В самой панели проводится так называемая передаточная прямая. В ре-



Фиг. 7. Линии влияния в ферме:  $a$  — раскоса  $D_2$ ;  $b$  — пояса  $O_2$ ;  $c$  — раскоса  $D_3$ ;  $e$  — стойки  $V_1$

зультате получают следующую последовательность действий:

а) определяют величины  $a$  и  $b$  — расстояния от моментной точки до правой и левой опор и  $h$  — плечо искомого усилия относительно той же точки;

б) на левой опоре откладывают отрезок  $\frac{a}{h}$  и соединяют с нулевой ординатой на пра-

вой; таким путём получают правую прямую; в) исходя из пересечения правой и левой прямой под моментной точкой, выполняют построение левой прямой;

г) на левую прямую сносят левый узел пересечённой панели, а на правую — правый; соединение полученных точек даёт передаточную прямую. Знаки определяются по условиям работы элемента.

На фиг. 7,  $a$ ,  $b$  приведено построение линий влияния усилия в раскосе  $D_2$  и поясе  $O_3$ .

2. Элемент не имеет моментной точки (способ проекций). В этом случае уравнение равновесия составляется проектированием сил, приложенных к левой отсечённой части на ось, перпендикулярную поясам. Согласно фиг. 7,  $c$  для элемента  $D_3$  при положении груза справа от сечения

$$D_3 = + \frac{A}{\sin \alpha}.$$

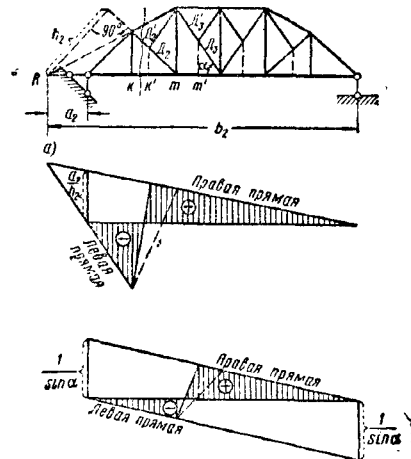
Отложив на левой опоре ординату  $+\frac{1}{\sin \alpha}$ , получают правую прямую. Левая прямая ей параллельна, так как моментная точка находится в бесконечности.

3. Вырезание узла (фиг. 7,  $z$ ):

а) груз в узле  $V_1 = 1$ ;

б) груз вне узла  $V_1 = 0$ .

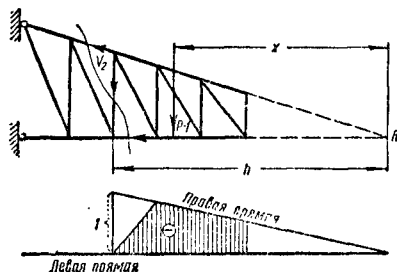
Линия влияния — треугольник.



Фиг. 8. Линии влияния в шпренгельной ферме:  $a$  — полураскоса  $D_2$ ;  $b$  — полураскоса  $D_3$

Линии влияния в фермах со шпренгелями строят обычным путём, за исключением передаточной прямой. Для построения передаточной прямой следует снести на правую и левую прямые крайние узлы рассечённой укороченной панели. По фиг. 8 для элемента  $D_2$  необходимо снести узлы  $k$  и  $k'$ , а для элемента  $D_3$  — узлы  $m$  и  $m'$ . Для нижних частей тех же раскосов  $D_2$  и  $D_3$  — линии влияния показаны пунктиром.

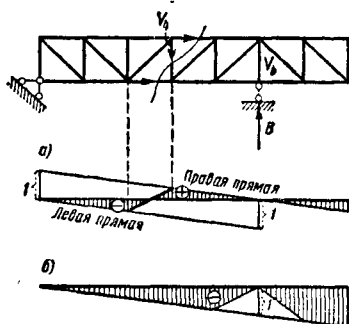
Линии влияния в консольных фермах строят так. Левая прямая всегда нулевая, так как элемент не работает. Для построения правой прямой располагают груз  $P = 1$  правее пересечённой панели на расстоянии  $x$  от моментной точки и из условия равновесия правой отсечённой части находят уравнение правой прямой. Построение передаточной прямой производится обычным путём. При отсутствии моментной точки условие равно-



Фиг. 9. Линия влияния стойки  $V_2$  в консольной ферме

веса составляется по уравнению проекций. Как и ранее, правая и левая прямые пересекаются под моментной точкой. На фиг. 9 изображено построение линии влияния усилия в стойке  $V_2$ .

Линии влияния в двухпорных фермах с консолью имеют обычную межопорную часть. Линия влияния в пределах консоли получается путём продолжения соответствующей прямой межопорной части. На фиг. 10 изображено построение линии влияния  $V_4$  и, кроме того, посредством вырезания узла построена линия влияния опорной стойки  $V_b$  при езде по нижним узлам фермы.



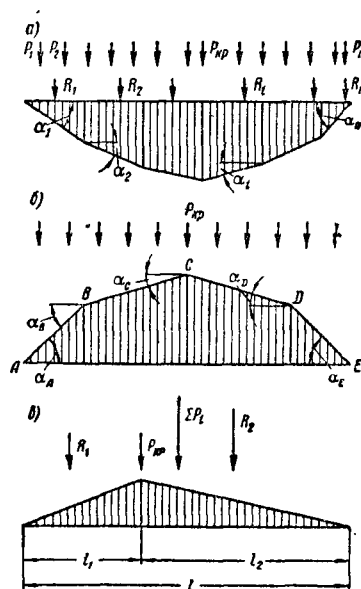
Фиг. 10. Линии влияния в двухпорной ферме с консолью: а — стойки  $V_4$ ; б — опорной стойки  $V_b$

Подсчёт усилия, возникающего в элементе под влиянием нагрузки с помощью линии влияния, производится по формуле

$$S = \sum P_i y_i + q \cdot \omega,$$

где  $P_i$  — сосредоточенные грузы;  
 $y_i$  — ординаты линии влияния под ними;  
 $q$  — интенсивность равномерного нагружения;  
 $\omega$  — площадь части линии влияния под нагрузкой.

Линии влияния используются для определения максимального усилия от системы неразрывно связанных сосредоточенных грузов (поезд). Для этого необходимо установить такое расположение этих грузов на линии влияния, которому соответствует указанный максимум. Это расположение (установка) называется критическим. В случае многоугольной линии влияния (фиг. 11, а) необходимо один из наибольших грузов совместить с



Фиг. 11. Критическая установка грузов на линиях влияния

максимальной (вершиной) ординатой линии влияния и подсчитать значение величины

$$S = \sum R_i \operatorname{tg} \alpha_i,$$

дважды относя груз, совмещённый с вершиной линии влияния поочерёдно к левому и правому участкам.

Здесь  $R_i$  — равнодействующие давления, передаваемые нагрузкой на каждый прямолинейный участок линии влияния;

$\alpha_i$  — углы наклона прямолинейных отрезков линии влияния; они положительны для левой части линии влияния и отрицательны для правой.

Если для обоих случаев подсчёта величины  $S$  окажется разнозначной, то принятая установка и есть критическая. В этом случае груз, совмещённый с вершиной, также называется критическим. Следовательно, алгебраически критическая установка обусловлена соблюдением двух неравенств:

$\sum R_i \operatorname{tg} \alpha_i < 0 \rightarrow$  при сдвиге системы грузов вправо;

$\sum R_i \operatorname{tg} \alpha_i > 0 \leftarrow$  при сдвиге влево.

В случае несоблюдения этих неравенств необходимо испытать на критическую установку следующий сосредоточенный груз, передвигая систему грузов влево, если дважды получилось отрицательное значение  $S$ , и вправо — в обратном случае. При заданной кри-



рой, серединой и четвертью длины загрузки, берутся по линейной интерполяции.

$$S = \sum_i P_i \cdot y_i.$$

### Таблица 1

### Эквивалентные нагрузки для схемы $H_K$

№ груза	Расстояние между осями	Расстояние от первого груза	Нагрузка на ось	Сумма грузов, расположенных левее	Сумма моментов тех же грузов

$$S = M_E \operatorname{tg} \alpha_E - M_D (\operatorname{tg} \alpha_E - \operatorname{tg} \alpha_D) - \\ - M_C (\operatorname{tg} \alpha_D - \operatorname{tg} \alpha_C) - M_B (\operatorname{tg} \alpha_C - \operatorname{tg} \alpha_B),$$

Значения углов  $\alpha$  должны иметь знак.

$$R_1 < \frac{l_1}{l} \sum P_i \rightarrow \text{при сдвиге системы гру-}$$

зов вправо;

$$R_1 + P_{kp} > \frac{l_1}{l} \sum P_i \leftarrow \text{при сдвиге влево.}$$

$\Sigma P$  — сумма грузов, помещающихся на пролёте.



Фиг. 12. Поездная нагрузка по схеме  $H_k$

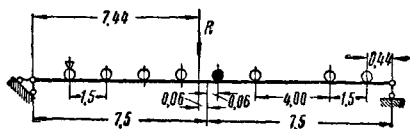
Максимальное усилие от поездной нагрузки можно также определить посредством эквивалентной нагрузки. Эквивалентная нагрузка — сплошная равномерная нагрузка, дающая то же усилие, что и подвижная сосредоточенная, установленная в невыгоднейшее положение. Для поездной нагрузки по схеме  $N_k$  (фиг. 12) в табл. 1 приводится эквивалентная нагрузка при  $K = 1$ .

Длина загрузочной части в м	Положение наибольшей ординаты линии влияния		
	на конце	в четверти	в середине
	$K_0$	$K_{0,25}$	$K_{0,5}$
1	7,00	7,00	7,00
2	4,20	3,50	3,50
3	3,42	3,01	2,51
4	3,15	2,57	2,45
5	2,91	2,41	2,41
6	2,80	2,26	2,26
7	2,71	2,26	2,26
8	2,63	2,28	2,28
9	2,51	2,23	2,23
10	2,42	2,16	2,16
12	2,29	2,05	1,98
14	2,16	1,97	1,88
16	2,03	1,88	1,82
18	1,95	1,77	1,79
20	1,88	1,69	1,74
25	1,77	1,60	1,59
30	1,73	1,54	1,52
35	1,70	1,52	1,46
40	1,65	1,49	1,44
45	1,61	1,46	1,44
50	1,58	1,43	1,43
60	1,51	1,37	1,37
70	1,46	1,33	1,32
80	1,41	1,29	1,27
90	1,37	1,26	1,22
100	1,34	1,24	1,18
110	1,32	1,22	1,15
120	1,29	1,20	1,13
130	1,27	1,18	1,11
140	1,26	1,16	1,10
150	1,24	1,15	1,03
160	1,23	1,14	1,07
170	1,21	1,12	1,06
180	1,20	1,11	1,06
190	1,19	1,10	1,05
200	1,18	1,09	1,05
—	При $l \geq 40$ м	—	При $l \geq 120$ м
—	$K_0 = 1 + \frac{39,6}{l} - \frac{539}{l^2}$	—	$K_{0,5} = 1 + \frac{1,86}{l}$

Усилие от собственного веса сооружения, если оно достаточно равномерно распределено по пролёту, получается умножением величины веса в  $m/m$  на всю площадь линии влияния.

**Расчёт балок на подвижную нагрузку,** помимо метода линий влияния, может быть выполнен посредством применения теоремы об опасной установке системы неразрывно связанных грузов на балке: середина пролёта должна делить пополам расстояние между равнодействующей системы грузов и критическим колесом (грузом). За критическое колесо принимают ближайшее к равнодействующей. Максимальный момент при этом получается под критическим колесом. Пример

критической установки изображён на фиг. 13. Этот приём применяется при расчёте проезжей части металлических мостов.

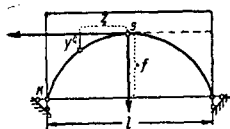


Фиг. 13. Пример критической установки поезда

### Трёхшарнирные сплошные арки

Аркой называется криволинейный брус, имеющий наклонные опорные реакции, направленные внутрь пролёта при наличии вертикальной нагрузки. Горизонтальная составляющая опорных реакций называется распором. Статически определимой аркой является трёхшарнирная (фиг. 14) арка.

Распор вызывает в сечениях арки отрицательный изгибающий момент, вследствие чего полный изгибающий момент меньше, чем в балке (при прочих одинаковых условиях). Это позволяет применять трёхшарнирную арку в тех случаях, когда балочное перекрытие становится чрезмерно тяжёлым.



Фиг. 14. Схема трёхшарнирной арки

**Подбор оси арки.** Ось арки целесообразно подобрать так, чтобы в сечениях арки отсутствовали изгибающие моменты. В этом случае ось носит наименование рациональной. Указанное требование обычно относится к действию собственного веса. Собственный вес складывается из веса свода, забутки и надсводного строения. Если принять, что собственный вес пропорционален ординате оси свода, отсчитанной от касательной в замке, то для построения оси арки может служить уравнение катеноида (фиг. 14):

$$y' = \frac{f}{m-1} (\operatorname{ch} \xi k - 1),$$

где

$$k = \ln(m + \sqrt{m^2 - 1});$$

$$m = \frac{g_k}{g_s}, \quad \xi = \frac{z}{l/2},$$

где  $g_k$  — ордината эпюры нагрузки в пяте;  $g_s$  — ордината эпюры нагрузки в замке.

Подбор оси свода сводится к следующим операциям:

1) зная постоянную нагрузку в ключе  $g_s$  и пяте  $g_k$ , определяют

$$m = \frac{g_k}{g_s};$$

2) находят  $k$  по предыдущей формуле;

3) определяют ординаты оси по уравнению катеноида (табл. 2).

В частном случае сплошного равномерного нагружения по пролёту рациональная ось — парабола; сплошного равномерного нагружения по дуге свода — круг.

Таблица 2

Ординаты оси при  $f = 1$  по уравнению катеноида

Сечение $m$	0	1	2	3	4	5	6
1,000	1,000	0,6944	0,4444	0,2500	0,1111	0,0278	0
1,347	1,000	0,6831	0,4312	0,2400	0,1059	0,0264	0
1,756	1,000	0,6714	0,4179	0,2300	0,1007	0,0249	0
2,240	1,000	0,6595	0,4044	0,2200	0,0995	0,0235	0
2,814	1,000	0,6473	0,3908	0,2100	0,0903	0,0221	0
3,500	1,000	0,6348	0,3771	0,2000	0,0852	0,0208	0
4,324	1,000	0,6221	0,3632	0,1900	0,0802	0,0194	0
5,321	1,000	0,6090	0,3491	0,1800	0,0751	0,0181	0
6,536	1,000	0,5955	0,3349	0,1700	0,0701	0,0168	0
8,031	1,000	0,5816	0,3205	0,1600	0,0603	0,0155	0

**Расчёт трёхшарнирных арок на постоянную нагрузку.** Вертикальные составляющие опорных реакций определяются так же, как опорные реакции балки пролётом  $l$  (фиг. 15)

$$V_a = \frac{M_b}{l},$$

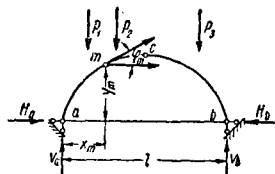
$$V_b = \frac{M_a}{l},$$

где  $M_a$ ,  $M_b$  — моменты нагрузки относительно опорных шарниров.

Распор находят из условия отсутствия момента в среднем шарнире:

$$H_a = \frac{M_c}{f},$$

где  $M_c$  — момент левых сил относительно среднего шарнира.



Фиг. 15. Определение опорных реакций, распора и внутренних усилий для трёхшарнирной арки

Внутренние усилия для сечения с координатами  $x_m$ ,  $y_m$ :  
изгибающий момент

$$M_m = M_m^0 - H_a y_m;$$

поперечная сила

$$Q_m = Q_m^0 \cos \varphi_m - H_a \sin \varphi_m;$$

нормальная сила

$$N_m = Q_m^0 \sin \varphi_m + H_a \cos \varphi_m.$$

Здесь  $M_m^0$ ,  $Q_m^0$  — момент и поперечная сила балки пролётом  $l$  для того же сечения.

$\sin \varphi_m$  и  $\cos \varphi_m$  определяют из следующего выражения:

$$\operatorname{tg} \varphi_m = \left[ \frac{dy}{dx} \right]_{x=x_m},$$

где  $y = f(x)$  — уравнение оси свода.

Нормальное напряжение в сечении

$$\sigma_m = \frac{N_m}{F_m} \pm \frac{M_m}{I_m} \cdot y_{m\alpha},$$

где  $y_{m\alpha}$  — расстояние от центра тяжести поперечного сечения до рассматриваемой точки.

Можно также воспользоваться формулой ядрового момента. В этом случае напряжение в верхнем волокне

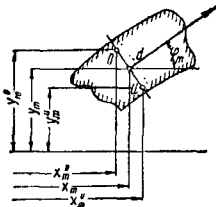
$$\sigma_o = \pm \frac{M_{ядp}^u}{W},$$

а напряжение в нижнем волокне

$$\sigma_u = \pm \frac{M_{ядp}^o}{W},$$

где  $W$  — момент сопротивления сечения;

$M_{ядp}^u, M_{ядp}^o$  — моменты левых сил относительно нижней и верхней точек ядра сечения. Они определяются по формуле изгибающего момента с тем лишь отличием, что в неё подставляются координаты соответственных точек ядра сечения.



Фиг. 16. Координаты точек ядра сечения

Для прямоугольной формы поперечного сечения арки эти координаты вычисляются по следующим формулам (фиг. 16):

верхняя точка

$$y_m^o = y_m + \frac{d \cos \varphi_m}{6};$$

нижняя точка

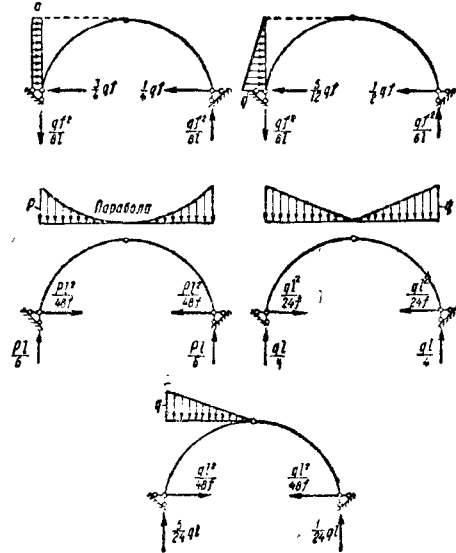
$$y_m^u = y_m - \frac{d \cos \varphi_m}{6}.$$

В табл. 3 для некоторых видов загрузки приведены выражения опорных реакций, распора и внутренние усилия параболической трёхшарнирной арки (см. также фиг. 17).

Построение кривой давления проще всего может быть выполнено аналитически. Для этого в каждом сечении арки необходимо определить эксцентриситет нормальной силы

$$e_m = \frac{M_m}{N_m},$$

где  $M_m$  и  $N_m$  определяются по обычным формулам.



Фиг. 17. Выражения опорных реакций и распора трёхшарнирной параболической арки для различных случаев сплошной нагрузки

Линия, соединяющая эксцентриситеты, даёт кривую давления.

Графический расчёт трёхшарнирной арки — см. проф. Прокофьев И. П. «Теория сооружений», том I, Трансжелдориздат, 1947 г.

Расчёт трёхшарнирных арок на подвижную нагрузку ведётся с помощью линии влияния опорных реакций и внутренних усилий. Линии влияния вертикальных реак-

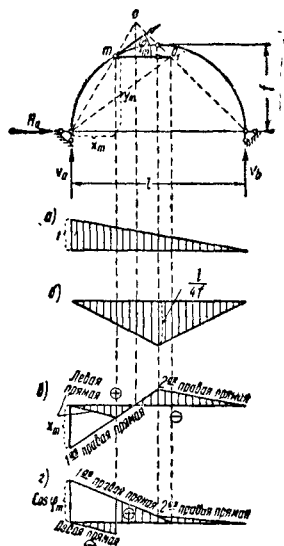
Таблица 3

Опорные реакции и внутренние усилия параболической трёхшарнирной арки

Загрузка	$V_a$	$V_b$	$H$	$M_m$ в $1/4 l$	$M_{m'}$ в $3/4 l$	$N_m$ в $1/4 l$	$N_{m'}$ в $3/4 l$
Груз в среднем шарнире	$\frac{P}{2}$	$\frac{P}{2}$	$\frac{Pl}{4f}$	$-\frac{Pl}{16}$	$-\frac{Pl}{16}$	$P \left( \frac{l}{4f} + \frac{f}{l} \right) \cos \varphi_m$	$P \left( \frac{l}{4f} + \frac{f}{l} \right) \cos \varphi_m$
Груз в четверти пролёта	$\frac{3}{4} P$	$\frac{1}{4} P$	$\frac{Pl}{8f}$	$\frac{3}{32} Pl$	$-\frac{1}{32} Pl$	$\frac{P}{2} \left( \frac{l}{4f} + \frac{3f}{l} \right) \cos \varphi_m$	$\frac{P}{2} \left( \frac{l}{4f} + \frac{f}{l} \right) \cos \varphi_m$
Равномерная нагрузка по всему пролёту	$\frac{ql}{2}$	$\frac{ql}{2}$	$\frac{ql^2}{8f}$	0	0	$\frac{q}{2} \left( \frac{l^2}{4f} + f \right) \cos \varphi_m$	$\frac{q}{2} \left( \frac{l^2}{4f} + f \right) \cos \varphi_m$
Равномерная нагрузка до середины пролёта	$\frac{3}{8} ql$	$\frac{1}{8} ql$	$\frac{ql^2}{16f}$	$\frac{ql}{64}$	$-\frac{ql^2}{64}$	$\frac{q}{2} \left( \frac{l^2}{4f} + f \right) \cos \varphi_m$	$\frac{q}{4} \left( \frac{l^2}{4f} + f \right) \cos \varphi_m$

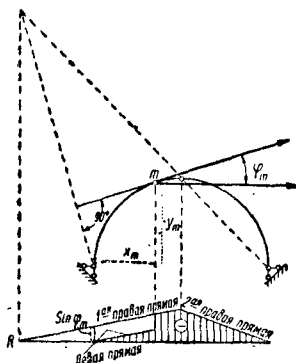
ций  $v_a, v_b$  имеют такой же вид, как и в простой балке. Линия влияния распора — треугольник с ординатой по середине  $\frac{l}{4f}$  (фиг. 18 а, б).

Для построения линий влияния  $M_m, Q_m, N_m$  проще всего воспользоваться свойством



Фиг. 18. Построение линий влияния в трёхшарнирной арке: а — вертикальной опорной реакции  $V_a$ ; б — распора  $H_a$ ; в — изгибающего момента  $M_m$ ; г — поперечной силы  $Q_m$

нулевой точки соответствующей линии влияния. Нулевая точка находится путём проектирования на ось линии влияния точки встречи двух линий опорных сопротивлений. Для всех трёх факторов линия правых со-



Фиг. 19. Построение линии влияния нормальной силы  $N_m$  в трёхшарнирной арке

противлений проводится через правый и средний шарнир. Линия левых сопротивлений проводится через левый шарнир, причём: для  $M_m$  — через центр тяжести сечения; для  $Q_m$  — параллельно касательной к оси арки в том же сечении; для  $N_m$  — параллельно нормали.

Соответствующие построения изображены на фиг. 18, в, г и 19.

Порядок построения линий влияния внутренних усилий посредством нулевой точки следующий.

Изгибающий момент  $M_m$ . На левой опоре откладывается абсцисса сечения  $x_m$  и соединяется с нулевой точкой (1-я правая прямая). На неё сносится сечение и полученная точка соединяется с нулём на левой опоре (левая прямая). На неё же сносится шарнир и полученная точка соединяется с нулём на правой опоре (2-я правая прямая).

Линия влияния усилий изображена на фиг. 18, в.

Поперечная сила  $Q_m$ . На левой опоре откладывается  $\cos \varphi_m$  и соединяется с нулевой точкой (1-я правая прямая). Левая прямая проводится через нуль на левой опоре параллельно правой. Сносится шарнир на 1-ю правую прямую и полученная точка соединяется с нулём на правой опоре.

Линия влияния усилий приведена на фиг. 18, г.

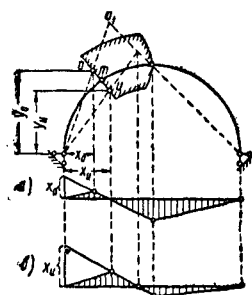
Нормальная сила  $N_m$  (фиг. 19). На левой опоре откладывается  $\sin \varphi_m$ ; дальнейшее построение такое же, как и для поперечной силы.

Загружение линий влияния производится с помощью табл. 1 (стр. 141).

Для подсчёта напряжений от подвижной нагрузки, установленной наименьшим способом, следует пользоваться формулой внецентренного сжатия:

$$\sigma = \frac{N_m}{F} \pm \frac{M_m}{I} \cdot y.$$

При этом возникает вопрос о длине загрузки, обеспечивающей  $\max \sigma$ . Различный характер линий влияний  $N_m$  и  $M_m$  требует различных загружений подвижной нагрузкой. Определённость в этот вопрос вносится фор-



Фиг. 20. Линии влияния ядровых моментов: а — верхняя точка ядра сечения  $M_{\text{ядр}}^0$ ; б — нижняя точка ядра сечения  $M_{\text{ядр}}^H$

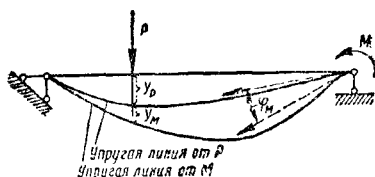
мулой напряжений, выраженной через ядровые моменты. Построение линий влияния ядровых моментов производится посредством нулевой точки с тем отличием от центральных моментов, что линию левых сопротивлений следует проводить не через центр рассматриваемого сечения, а через соответствующую крайнюю точку ядра сечения (фиг. 20).

## СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫЕ СИСТЕМЫ

### Основы теории статик неопределимых систем

Статически неопределимой системой называется такая, определение опорных реакций и внутренних усилий в которой невозможно применением только уравнений равновесия. Расчёт выполняется с помощью двух основных методов — сил и перемещений. В первом методе за неизвестные величины принимаются усилия рассчитываемого сооружения, во втором — его перемещения.

Другие методы разрешения статической неопределимости являются той или иной разновидностью указанных методов.



Фиг. 21. Действительная и виртуальная работы

Применение метода сил основано на теореме, определяющих упругие перемещения конструкций, точно так же, как метод перемещений основан на изучении её упругих реакций.

**Теория перемещений.** Теория перемещений основывается на свойствах той работы, которую совершают внешние и внутренние усилия, возникающие в сооружении. Различают два вида работ: действительную, когда силы работают на перемещениях, соответствующих действию этих же сил, и виртуальную, когда источником перемещения являются другие силы. В первом случае работа вычисляется как половина произведения силы на соответствующий ей путь, во втором — как полное произведение тех же величин.

В связи с этим (фиг. 21):  
действительная работа силы

$$T_{pp} = \frac{P \cdot y_p}{2};$$

действительная работа момента

$$T_{mm} = \frac{M \varphi_m}{2},$$

виртуальная работа силы

$$T_{PM} = P \cdot y_m.$$

Действительная работа внутренних сил сооружения определяет запас накопленной в нём потенциальной энергии. В общем случае плоского стержневого сооружения, когда в его поперечных сечениях возникают внутренние усилия  $M$ ,  $N$  и  $Q$  (изгибающий момент, нормальная и поперечная силы), формула потенциальной энергии имеет вид:

$$v = \frac{1}{2} \int \frac{M^2 ds}{EI} + \frac{1}{2} \int \frac{N^2 ds}{EF} + \frac{k}{2} \int \frac{Q^2 ds}{GF}.$$

Интегрирование распространено на все линейные элементы сооружения.

Коэффициент  $k$  учитывает неравномерность распределения касательных напряжений по сечению при изгибе. Для прямоугольника  $k = 1,2$ ; для круга  $k = 1,185$ ; для двутавра  $k \approx 2,4$ .

При расчёте рам и балок учитывают влияние только  $M$  (первое слагаемое); при расчёте арок иногда дополнительно учитывают влияние  $Q$  (второе слагаемое); при расчёте ферм учитывают влияние только  $N$  (третье слагаемое). При этом формула приобретает вид:

$$v = \sum \frac{N_i^2 s_i}{2EF_i},$$

где  $s_i$  — длина  $i$ -го элемента.

Суммирование ведётся по всем элементам. Приводим ряд теорем, основанных на свойствах действительной и виртуальной работ.

**Теорема I** — о взаимности виртуальных работ:

$$v_{12} = v_{21}.$$

Виртуальная работа первой (любой) группы сил, приложенной к сооружению, возникающая под влиянием второй (любой и независимой от первой) группы сил, в случае равновесия всегда равна виртуальной работе второй группы, совершаемой на перемещениях, вызванных действием первой группы.

**Теорема II** — о взаимности перемещений (частный случай теоремы I при численно равных воздействиях).

Для одного и того же сооружения при двух численно равных воздействиях перемещение, возникающее по направлению первого, но вызванное вторым, равно перемещению, возникающему по направлению второго, но вызванному первым, т. е.

$$\Delta_{12} = \Delta_{21}.$$

При обозначении перемещений первый индекс указывает направление перемещения, второй — причину, вследствие которой возникло перемещение. Кроме того, если перемещение вызвано действием единичного фактора,  $\Delta$  заменяется  $\delta$ .

**Теорема III** (аналитическое следствие теоремы I):

$$\frac{\partial v}{\partial p} = \Delta.$$

Частная производная от потенциальной энергии по силе есть вызванное действием всей нагрузки перемещение этой силы по её направлению.

Если выражение энергии  $v$  получить как функцию перемещений системы, то справедлива и обратная теорема:

$$\frac{\partial v}{\partial \Delta} = P.$$

**Теорема IV** (аналитическое следствие теоремы I):

$$\Delta_{mn} = \int \frac{\bar{M}_m M_n ds}{EI} + \int \frac{\bar{N}_m N_n}{EF} ds + k \int \frac{\bar{Q}_m Q_n}{GF} ds.$$

Теорема IV даёт общий способ определения перемещений в любых конструкциях и при любой их загрузке. Пользование отдельными слагаемыми имеет те же ограничения, что и для  $v$ . Для шарнирно-стержневых систем формула перемещений имеет вид:

$$\Delta_{mn} = \sum \frac{\bar{N}_m \bar{N}_n}{EF_l} s_i.$$

Методика применения теоремы IV для определения  $\Delta_{mn}$ , т. е. перемещений, возникающих по направлению  $m$  от факторов  $n$ , складывается из следующих операций:

1) для заданной конструкции необходимо построить эпюры внутренних усилий  $M_n$ ,  $N_n$ ,  $Q_n$  от заданного воздействия;

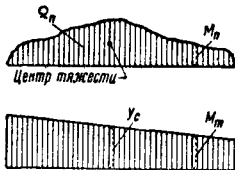
2) удалив воздействие, следует приложить к той же конструкции единичную силу, соответствующую характеру и направлению искомого деформации, и построить эпюры  $\bar{M}_m$ ,  $\bar{N}_m$ ,  $\bar{Q}_m$ ;

3) интегрированием указанных величин по схеме формулы перемещений определится искомое перемещение.

Если перемещения вызваны изменением температурного режима, то формула перемещений приобретает вид:

$$\Delta_{mt} = \frac{\alpha(t_0 - t_u)}{d} \int \bar{M}_m ds + \frac{\alpha(t_0 + t_u)}{2} \int \bar{N}_m ds,$$

где  $\alpha$  — коэффициент линейного расширения;  
 $d$  — толщина элемента;  
 $t_0$  и  $t_u$  — температура нагрева верхнего и нижнего волокон стержня.



Фиг. 22. Схема правила Верещагина, когда одна из эпюр криволинейна

В конструкциях с элементами постоянного поперечного сечения целесообразно для вычисления интегралов применять правило Верещагина (фиг. 22):

$$\Delta_{mn} = \int \frac{\bar{M}_m M_n}{EI} ds = \frac{\Omega_n y_c}{EI},$$

где  $\Omega_n$  — площадь грузовой эпюры моментов  $M_n$ ;

$y_c$  — ордината единичной эпюры  $\bar{M}_m$  под центром тяжести грузовой.

Если обе эпюры прямолинейны, то (фиг. 23)

$$\begin{aligned} \Delta_{mn} &= \int \frac{\bar{M}_m M_n}{EI} ds = \\ &= \frac{l}{6EI} (2ac + 2bd + ad + bc). \end{aligned}$$

В иных случаях сопряжения эпюр рекомендуется пользоваться табл. 4, в которой даны величины интегралов, входящих в формулу перемещений.

Таблица 4

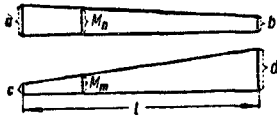
Интегралы формулы перемещений

$M_n$		$\int M_n dx$
1		$\frac{1}{6} M_n (2 \bar{M}_a + \bar{M}_b) l$
2		$\frac{1}{6} M_n M_c (1 + \frac{x'}{l}) l$
3		$\frac{1}{6} M_n \bar{M}_a x (3 - \frac{x}{l})$
4		$\frac{1}{2} M_n \bar{M}_c (l - x')$
5		$\frac{1}{6} M_n \bar{M}_c (l - x')$
6		$\frac{1}{3} M_n \bar{M}_c l$
7		$\frac{1}{4} M_n \bar{M}_a l$
8		$\frac{1}{12} M_n \bar{M}_b l$
9		$\frac{1}{20} M_n \bar{M}_b l$
10		$\frac{5}{12} M_n \bar{M}_a l$
11		$\frac{1}{4} M_n \bar{M}_b l$

Для кривого бруса в том случае, когда учитывается кривизна, формула перемещений имеет вид:

$$\Delta_{mn} = \int \frac{\bar{M}_m M_n}{EI} ds + \int \frac{\bar{N}_m N_n}{EF} ds + \int \frac{\bar{M}_m M_n}{EFr} ds + \int \frac{\bar{M}_m N_n}{EFr} ds,$$

где  $r$  — радиус кривизны осевой линии бруса.



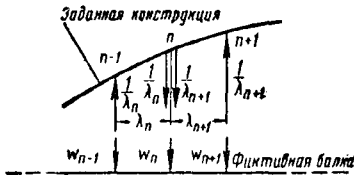
Фиг. 23. Схема правила Верещагина, когда обе эпюры прямолинейны

Построение линии прогибов сооружения (например пояса фермы) в ряде случаев целесообразно выполнить, применяя метод так называемых упругих грузов. При этом линия прогибов получается как эпюра изгибающих моментов простой балки, соответствующая нагружению фиктивной балки фиктивными грузами. Общее выражение упругого груза (фиг. 24):

$$w_n = \int \frac{\bar{M}_m M_n}{EI} ds + \int \frac{\bar{N}_m N_n}{EF} ds + k \int \frac{\bar{Q}_m Q_n}{GF} ds,$$

где  $M_n, N_n, Q_n$  — эпюры внутренних усилий, вызываемые заданным воздействием (обуславливающим эпюру прогибов);

$\bar{M}_m, \bar{N}_m, \bar{Q}_m$  — эпюры усилий от двух единичных пар.



Фиг. 24. Схема упругих грузов

Выражение упругого груза для сплошной системы (частный случай общей формулы) имеет вид (фиг. 25):

$$w_n = \frac{\lambda_n}{6EI_n \cos \beta_n} (2M_n + M_{n-1}) + \frac{\lambda_{n+1}}{6EI_{n+1} \cos \beta_{n+1}} (2M_n + M_{n+1}) - \epsilon_n \tan \beta_n + \epsilon_{n+1} \tan \beta_{n+1}.$$

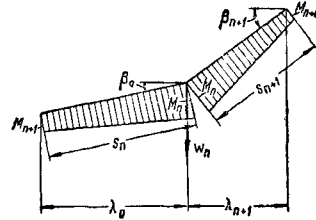
Здесь  $\epsilon_n, \epsilon_{n+1}$  — относительные удлинения отрезков  $s_n, s_{n+1}$ .

Выражение упругого груза для фермы:

$$w_n = \sum_i \frac{\bar{N}_m N_n}{EF_i} s_i.$$

Развёрнутые формулы для последнего случая — см. проф. Прокофьев И. П. «Теория сооружений», т. I.

Приведённая схема определения перемещений одинаково относится как к статически определимым, так и к неопределимым системам. Однако в случае статически неопределимой системы возможно значительное упрощение задачи, состоящее в том, что эпюры единичных внутренних усилий  $\bar{M}_m, \bar{N}_m, \bar{Q}_m$  можно строить для любой конструкции, получаемой из заданной путём отбрасывания любого числа связей.



Фиг. 25. Упругие грузы для сплошной системы

**Теория реакций.** Современная теория реакций, возникающих в статически неопределимых конструкциях, разработана проф. И. М. Рабиновичем. Различают реакции, возникающие под действием вынужденного смещения связей, и реакции, вызванные нагрузкой.

Аналогично теории перемещений реакция, возникающая в связи  $m$  от смещения связи  $n$ , может быть вычислена по формуле

$$R_{mn} = \int \frac{\bar{M}_m M_n}{EI} ds + \int \frac{\bar{N}_m N_n}{EF} ds + k \int \frac{\bar{Q}_m Q_n}{GF} ds,$$

где  $\bar{M}_m, \bar{N}_m, \bar{Q}_m$  — единичные внутренние усилия, соответствующие вынужденному единичному смещению связи  $m$ ;

$M_n, N_n, Q_n$  — то же для заданного смещения связи  $n$ .

Если это смещение также единичное, его обозначают  $r_{mn}$ . В целях упрощения расчётов в состоянии  $m$  можно ввести любое число произвольных закреплений.

В табл. 5 даны выражения реакций и приведены эпюры моментов однопролётной балки; эта таблица является основой расчёта простых рам по методу перемещений.

Реакции от нагрузки в самом общем случае статически неопределимой системы

$$R_{mp} = - \int \frac{\bar{M}_m M_p}{EI} ds - \int \frac{\bar{N}_m N_p}{EF} ds - k \int \frac{\bar{Q}_m Q_p}{GF} ds,$$

где  $M_p, N_p, Q_p$  — эпюры внутренних усилий от нагрузки в любой статически определимой системе, получаемой из заданной путём отбрасывания лишних связей, в том числе и обязательно связи  $m$ ;

$\bar{M}_m, \bar{N}_m, \bar{Q}_m$  — эпюры внутренних усилий заданной системы вследствие единичного сдвига связи  $m$ .

Таблица 5

Реакции и эпюры моментов

Схема сооружения и расчётное воздействие	Эпюры моментов и реакции

Это — общий путь. В подавляющем большинстве случаев реакции от нагрузок удаётся определить по закону равновесия.

Реакции от температуры

$$R_{mt} = \int \frac{\bar{M}_m M_t}{EI} ds + \int \frac{\bar{N}_m N_t}{EF} ds + k \int \frac{\bar{Q}_m Q_t}{GF} ds,$$

где  $M_t, N_t, Q_t$  — эпюры внутренних усилий, возникающих в заданной конструкции при изменении температурного режима.

Всегда  $R_{mn} = R_{nm}$  и, кроме того,  $r_{mp} = -r_{pm}$ .

Расчёт статически неопределимых систем по методу сил. При расчёте по методу сил за неизвестные величины принимают усилия рассчитываемой конструкции, которые не могут быть найдены из условий равновесия, — они называются лишними неизвестными. Для их выявления из заданной конструкции последовательно устраняют связи (внешние и внутренние) до получения статически определимой, но геометрически неизменяемой, так называемой основной, системы. Неизвестные усилия, развивающиеся в заданной системе по направлению отброшенных связей, и будут лишними неизвестными. Чи-

сло их определяет степень статической неопределимости системы.

Степень неопределимости можно также определить по формуле

$$S = 3D - 3Z - 2N - 3,$$

где  $D$  — число жёстких дисков или стержней;  $Z$  — число простых жёстких взаимных креплений стержней или дисков;

$N$  — число простых шарнирных креплений.

Узел, жёстко соединяющий  $n$  стержней, имеет  $n-1$  простых жёстких креплений, а при шарнире  $n-1$  простых шарниров.

Расчёт рекомендуется вести, принимая землю за диск. Согласно фиг. 26:

$$D = 5; Z = 2; N = 4;$$

$$S = 3 \cdot 5 - 2 \cdot 2 - 2 \cdot 4 - 3 = -2,$$

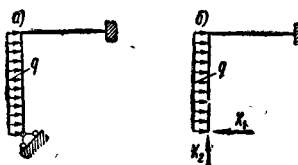
т. е. система дважды статически неопределима.

Расчёт конструкции по методу сил ведётся посредством изучения работы её основной системы. Для этого, устраняя лишние связи, вводят по их направлению неизвестные усилия, соответствующие характеру устранённой связи.

По фиг. 27 для перехода к основной системе проще всего удалить крепления конструкции на левой опоре. Удалив их, возмещаем их действие приложением неизвестных усилий  $X_1$  и  $X_2$  и затем подбираем их величину из того условия, чтобы перемещения основной системы и заданной совпали. Уравнения, определяющие неподвижность левого конца системы, имеют вид (так называемые канонические уравнения метода сил):

$$X_1 \delta_{11} + X_2 \delta_{12} + \Delta_{1p} = 0,$$

$$X_1 \delta_{21} + X_2 \delta_{22} + \Delta_{2p} = 0.$$



Фиг. 27. Пример образования основной системы при расчёте по методу сил: а — заданная система; б — основная система

Первое уравнение — условие, соблюдение которого препятствует перемещению по горизонтали, а второе — по вертикали. Коэффициенты  $\delta_{12}$  и  $\Delta_{1p}$  находятся способом, который разъяснён выше.

Определив коэффициенты, вычисляют путём решения системы канонических уравнений  $X_1$  и  $X_2$  и, приложив их затем к основной конструкции, а также добавив влияние нагрузки, заканчивают расчёт обычным способом.



Канонические уравнения можно также написать, составив выражение энергии  $v$  для основной системы и записав условие неподвижности левой опоры по теореме III в форме

$$\frac{\partial v}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x_2} = 0.$$

Отсюда следует, что в статически неопределимой конструкции лишние неизвестные приобретают значение, соответствующее минимуму энергии системы (принцип наименьшей работы).

При расчёте на температуру канонические уравнения имеют вид:

$$X_1 \delta_{11} + X_2 \delta_{12} + \Delta_{1t} = 0,$$

$$X_1 \delta_{21} + X_2 \delta_{22} + \Delta_{2t} = 0,$$

где  $\Delta_{1t}$ ,  $\Delta_{2t}$  — перемещения, вызванные изменением температурного режима, определяемые по формулам, приведённым на стр. 146. Эти перемещения положительны при совпадении характера температурной и единичной деформаций.

Если задано вынужденное смещение опорных точек, то каноническая система уравнений имеет вид:

$$X_1 \delta_{11} + X_2 \delta_{12} + \Delta_1 = 0,$$

$$X_1 \delta_{21} + X_2 \delta_{22} + \Delta_2 = 0,$$

где  $\Delta_1$ ,  $\Delta_2$  — заданные перемещения точки приложения лишних неизвестных (они отрицательны при совпадении с направлением неизвестных).

**Расчёт статически неопределимых систем по методу перемещений.** Метод перемещений принципиально противоположен методу сил, так как за неизвестные принимаются не усилия, а упругие перемещения. Однако они не являются самоцелью расчёта. Найдя упругие перемещения, по ним определяют внутренние усилия. В общем случае переход к основной системе достигается введением в заданную систему такого количества дополнительных линейных и угловых связей, которое превратило бы эту систему в совокупность более элементарных, предварительно изученных систем. Обычно за такую элементарную систему принимают двухопорную балку с одной или двумя заделками (см. табл. 5).

Для образования основной системы (фиг. 28) необходимо ввести две заделки, препятствующие вращению узлов 1 и 2, и одну линейную связь, препятствующую горизонтальному сдвигу рамы.

По направлению указанных связей вводим их неизвестные перемещения  $Z_1$ ,  $Z_2$ ,  $Z_3$ , равные тем, которые возникают в заданной системе.

Под влиянием указанных перемещений, а также под влиянием нагрузки по направлению введённых связей возникнут реактивные усилия; их следует приравнять нулю, так как в действительности этих связей нет.

Канонические уравнения метода перемещений имеют вид:

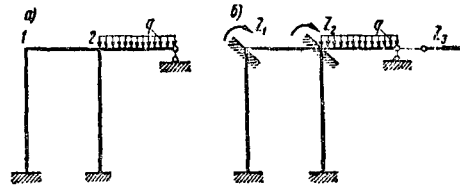
$$Z_1 r_{11} + Z_2 r_{12} + Z_3 r_{13} + R_{1p} = 0;$$

$$Z_1 r_{21} + Z_2 r_{22} + Z_3 r_{23} + R_{2p} = 0;$$

$$Z_1 r_{31} + Z_2 r_{32} + Z_3 r_{33} + R_{3p} = 0.$$

Все коэффициенты уравнений определяются по таблице реакций. Найдя величины  $Z$  путём решения системы, с помощью той же таблицы реакций следует построить эпюру моментов, а по ней эпюры поперечных и нормальных сил.

Расчёт статически неопределимых систем на температуру и влияние перемещения опорных точек по методу перемещений выпол-



Фиг. 28. Пример образования основной системы при расчёте по методу перемещений: а — заданная система; б — основная система

няется путём решения соответствующей канонической системы уравнений. Например, для нашего случая эта система имеет вид:

$$Z_1 r_{11} + Z_2 r_{12} + Z_3 r_{13} + R_{1t} + R_{1\Delta} = 0;$$

$$Z_1 r_{21} + Z_2 r_{22} + Z_3 r_{23} + R_{2t} + R_{2\Delta} = 0;$$

$$Z_1 r_{31} + Z_2 r_{32} + Z_3 r_{33} + R_{3t} + R_{3\Delta} = 0.$$

Здесь  $R_{1t}$ ,  $R_{2t}$ ,  $R_{3t}$  — находятся по формуле, учитывающей изменение температурного режима (см. теорию реакций);  $R_{1\Delta}$ ,  $R_{2\Delta}$ ,  $R_{3\Delta}$  — по таблице реакций.

Из сущности составления канонических систем уравнений метода сил и метода перемещений вытекает, что применение первого метода целесообразно в конструкциях с малым числом связей; применение второго, наоборот, даст лучшие результаты при большом числе связей. Если же данная конструкция может быть разбита на две части, обладающие двумя указанными противоположными качествами, то возможно одновременное применение обоих методов (смешанное решение). Например, основная система (фиг. 29)

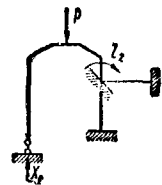
может быть получена путём отбрасывания одного опорного стержня (метод сил) и введения закрепления одного узла (метод перемещений). Система канонических уравнений будет иметь вид:

$$X_1 \delta_{11} + Z_2 \delta_{12} + \Delta_{1p} = 0$$

(отрицание перемещения);

$$X_1 r_{21} + Z_2 r_{22} + R_{2p} = 0$$

(отрицание усилия).



Фиг. 29. Пример образования основной системы при смешанном решении

**Решение канонических систем уравнений.** Целесообразным методом точного решения канонических систем уравнений метода сил и метода перемещений является построение сопряжённой матрицы.

Если, например, для случая трёх неизвестных представить каноническую систему в виде основной матрицы:

$$X_1 \delta_{11} + X_2 \delta_{12} + X_3 \delta_{13} = k_1,$$

$$X_1 \delta_{21} + X_2 \delta_{22} + X_3 \delta_{23} = k_2,$$

$$X_1 \delta_{31} + X_2 \delta_{32} + X_3 \delta_{33} = k_3,$$

то наиболее общим решением будет сопряжённая матрица:

$$X_1 = \beta_{11} k_1 + \beta_{12} k_2 + \beta_{13} k_3,$$

$$X_2 = \beta_{21} k_1 + \beta_{22} k_2 + \beta_{23} k_3,$$

$$X_3 = \beta_{31} k_1 + \beta_{32} k_2 + \beta_{33} k_3,$$

где  $\beta$  — число влияния.

Задача состоит в том, чтобы по известным значениям  $\delta$  определить все значения  $\beta$ ; значения  $k$  могут при этом остаться в неявном

Заполнение графы « $k$ » производится только в том случае, когда заданы численные значения этой величины, и тогда решение заканчивается обратным ходом в числовом виде. Пишут последнее уравнение:

$$X_3 \delta'_{33} = k'_3;$$

отсюда находят  $X_3$ , подставляют его в предыдущее уравнение, находят  $X_2$  и т. д.

В общем случае при неявных (буквенных) значениях  $k$  необходимо заполнить таблицу (табл. 7) обратного хода.

Контроль обратного хода производится по формуле

$$\beta_{11} \delta_{11} + \beta_{12} \delta_{12} + \beta_{13} \delta_{13} = 1.$$

Заполнение табл. 7 ведут, начиная с правой нижней клетки, где  $\beta_{33} = \frac{1}{\delta_{33}}$ , и далее

передвигаются вверх. Низ следующего столбца заполняется, используя принцип взаимности  $\beta_{ik} = \beta_{ki}$ , и далее передвигаются вверх и т. д.

Таблица 6

Сокращённый алгоритм (прямой ход)

N	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$\alpha_{k_1}$	$\alpha_{k_2}$	$k$	$s$
I	$\delta_{11}$	$\delta_{12}$	$\delta_{13}$	$\alpha_{11} = -\frac{\delta_{12}}{\delta_{11}}$	$\alpha_{12} = -\frac{\delta_{13}}{\delta_{11}}$	$k_1$	$s_1$
2 I · $\alpha_{12}$	•	$\delta_{22}$ $\delta_{12} \cdot \alpha_{12}$	$\delta_{23}$ $\delta_{13} \cdot \alpha_{12}$			$k_2$ $k_1 \alpha_{12}$	$s_2$ $s_1 \alpha_{12}$
II	•	$\delta'_{22}$	$\delta'_{23}$		$\alpha_{22} = -\frac{\delta'_{23}}{\delta'_{22}}$	$k'_2$	$s'_2$
3 I · $\alpha_{13}$ II · $\alpha_{23}$	• • •	• • •	$\delta_{33}$ $\delta_{13} \alpha_{13}$ $\delta'_{23} \alpha_{23}$			$k_3$ $k_1 \alpha_{13}$ $k'_2 \alpha_{23}$	$s_3$ $s_1 \alpha_{13}$ $s'_2 \alpha_{23}$
III	•	•	$\delta_{33}$			$k'_3$	$s'_3$

(буквенном) виде. Такое решение, следовательно, одновременно явится расчётом на произвольную нагрузку и позволит построить все линии влияния.

Расчёт складывается из двух операций.

Первая—это составление таблицы (табл. 6) сокращённого алгоритма (прямой ход).

Величина  $s$ —сумма коэффициентов соответствующего уравнения. Например,

$$s_1 = \delta_{11} + \delta_{12} + \delta_{13}.$$

Контрольные тождества:

$$s'_2 \equiv \delta_{22} + \delta'_{23},$$

$$s'_3 \equiv \delta_{33}.$$

Приближённое решение системы канонических уравнений по методу итераций возможно тогда, когда главные коэффициенты системы численно превосходят значения побочных, что всегда имеет место при методе перемещения. Например, в системе трёх уравнений:

$$Z_1 r_{11} + Z_2 r_{12} + Z_3 r_{13} = k_1,$$

$$Z_1 r_{21} + Z_2 r_{22} + Z_3 r_{23} = k_2,$$

$$Z_1 r_{31} + Z_2 r_{32} + Z_3 r_{33} = k_3,$$

решают первое уравнение относительно  $Z_1$ , второе—относительно  $Z_2$  и т. д., а результат представляют в следующем виде:

Таблица 7

Обратный ход					
Уси- лие	1	2	$k_1$	$k_2$	$k_3$
$x_1$			$\beta_{11} = \frac{1}{\delta_{11}} + \beta_{21}\alpha_{12} + \beta_{31}\alpha_{13}$	$\beta_{12} = \beta_{22}\alpha_{12} + \beta_{32}\alpha_{13}$	$\beta_{13} = \beta_{23}\alpha_{12} + \beta_{33}\alpha_{13}$
$x_2$	$\alpha_{12}$		$\beta_{21}$	$\beta_{22} = \frac{1}{\delta_{22}} + \beta_{32}\alpha_{23}$	$\beta_{23} = \beta_{32}\alpha_{23}$
$x_3$	$\alpha_{13}$	$\alpha_{23}$	$\beta_{31}$	$\beta_{32}$	$\beta_{33} = -\frac{\beta_{33}}{\delta_{33}}$

$$Z_1 = \delta_1 + \alpha_{12} Z_2 + \alpha_{13} Z_3,$$

$$Z_2 = \delta_2 + \alpha_{21} Z_1 + \alpha_{23} Z_3,$$

$$Z_3 = \delta_3 + \alpha_{31} Z_1 + \alpha_{32} Z_2,$$

$$\delta_i = \frac{k_i}{r_{ii}},$$

$$\delta_{ik} = -\frac{r_{ik}}{r_{ii}}.$$

Полагая в правой части все неизвестные равными нулю, находят первые приближения для неизвестных  $Z$ :

$$Z_1^{(1)} = \delta_1,$$

$$Z_2^{(1)} = \delta_2,$$

$$Z_3^{(1)} = \delta_3.$$

Подставляя эти величины в правую часть уравнений, получают первые поправки:

$$\delta_1^{(1)} = \alpha_{12} \delta_2 + \alpha_{13} \delta_3,$$

$$\delta_2^{(1)} = \alpha_{21} \delta_1 + \alpha_{23} \delta_3,$$

$$\delta_3^{(1)} = \alpha_{31} \delta_1 + \alpha_{32} \delta_2.$$

Повторяя этот процесс, получаем необходимое число поправок для соблюдения желаемой точности.

Значения неизвестных определяются по формулам:

$$Z_1 \approx \delta_1 + \delta_1^{(1)} + \delta_1^{(2)} + \dots + \delta_1^{(n)},$$

$$Z_2 \approx \delta_2 + \delta_2^{(1)} + \delta_2^{(2)} + \dots + \delta_2^{(n)},$$

$$Z_3 \approx \delta_3 + \delta_3^{(1)} + \delta_3^{(2)} + \dots + \delta_3^{(n)}.$$

Процесс этот сходящийся. Сходимость его тем лучше, чем в большей степени главные коэффициенты превышают значения побочных. Проверок этот метод не требует, так как если произошла ошибка, то это лишь замедлит скорость процесса, не влияя на результат, потому что процесс этот саморасправляющийся. Вычисления удобно расположить в виде таблицы (табл. 8).

Табл. 6, 7 и 8 имеют совершенно естественное развитие для случая  $n$  неизвестных.

Таблица 8

Метод итераций				
$N$	$Z_1$	$Z_2$	$Z_3$	$k$
I	$r_{11}$	$r_{12}$	$r_{13}$	$k_1$
II	$r_{21}$	$r_{22}$	$r_{23}$	$k_2$
III	$r_{31}$	$r_{32}$	$r_{33}$	$k_3$
1	—	$\alpha_{12}$	$\alpha_{13}$	$\delta_1$
2	$\alpha_{21}$	—	$\alpha_{23}$	$\delta_2$
3	$\alpha_{31}$	$\alpha_{32}$	—	$\delta_3$
1	—	$\alpha_{12}\delta_2$	$\alpha_{13}\delta_3$	$\delta_1^{(1)}$
2	$\alpha_{21}\delta_1$	—	$\alpha_{23}\delta_3$	$\delta_2^{(1)}$
3	$\alpha_{31}\delta_1$	$\alpha_{32}\delta_2$	—	$\delta_3^{(1)}$

### Рамы

Методы расчёта рам изложены на стр. 148. Однако независимо от принятого метода при расчёте необходимо учесть симметрию конструкции. Этот учёт основывается на следующих теоремах.

**Теорема I.** Побочный коэффициент уравнений упругости, связывающий две эпюры — симметричную и кососимметричную, всегда равен нулю.

**Теорема II.** Для симметричной системы прямосимметричная нагрузка обращает в нуль кососимметричную группу неизвестных и наоборот.

**Теорема III.** Если все лишние неизвестные симметричной системы разделяются на две группы симметричных и кососимметричных неизвестных, то соответствующая им полная система канонических уравнений также разобьётся на две самостоятельные группы.

В симметричной системе любую несимметричную нагрузку всегда можно разложить на симметричную и кососимметричную составляющие. То же относится и к лишним неизвестным, что производится парным группированием неизвестных.

Контроль расчёта коэффициентов канонических уравнений производится

так. Сложив все единичные эпюры, получим суммарную эпюру  $s$ . Тогда любая строка коэффициентов уравнений тождественно удовлетворяет равенству:

$$\begin{aligned} \delta_{11} + \delta_{12} + \dots + \delta_{1n} &= \delta_{1s}; \\ \delta_{21} + \delta_{22} + \dots + \delta_{2n} &= \delta_{2s}; \\ \dots &\dots \\ \delta_{n1} + \delta_{n2} + \dots + \delta_{nn} &= \delta_{ns}. \end{aligned}$$

Здесь  $\delta_{is}$  — результат сопряжения по формуле перемещений (стр. 145) эпюры  $i$  с эпюрой  $s$ . Кроме того:

$$\delta_{11} + \delta_{22} + \dots + \delta_{nn} + 2 \left[ \begin{array}{l} \text{Сумма побочных} \\ \text{расположенных} \\ \text{по одну сторону} \\ \text{от диагонали} \end{array} \right] = \delta_{ss}.$$

Для грузовых коэффициентов

$$\Delta_{1p} + \Delta_{2p} + \dots + \Delta_{np} = \Delta_{sp}.$$

При применении метода перемещений первые две проверки имеют ту же форму. Для грузовых коэффициентов имеется следующая проверка:

$$R_{1p} + R_{2p} + \dots + R_{np} = - \int \frac{M_p M_s}{EI} ds,$$

где  $M_p$  — эпюра моментов от нагрузки, получаемая в любой статически определимой системе из заданной путём отбрасывания лишних связей, в том числе и обязательно введённых ранее по условиям выбора основной системы.

Для контроля расчётной эпюры моментов прежде всего должны быть соблюдены условия равновесия; им должна удовлетворить любым образом вырезанная часть сооружения. Однако эта проверка ненадёжна. Лучший результат дают проверки по деформациям.

а) Интеграл от эпюры моментов для любого замкнутого контура всегда равен нулю, т. е.

$$\int \frac{M_p}{I} ds = 0.$$

б) Сопряжение любой единичной эпюры с расчётной всегда даёт нуль.

**Приближённый расчёт рам на вертикальную нагрузку при неподвижных узлах** состоит из двух этапов. Первый этап расчёта заключается в том, что, предполагая все узлы рамы неподвижными, определяют (по таблице реакций) опорные реактивные моменты в заделках от нагрузки.

Во втором этапе расчёта полученные реактивные пары прикладывают к узлам с обратным знаком и распределяют их действие на примыкающие к узлу элементы пропорционально погонным жёсткостям этих элементов. Погонная жёсткость  $i$ -ого элемента равна

$$\tau_i = \frac{EI}{l_i}.$$

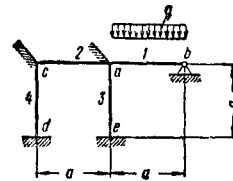
Для стержня, имеющего шарнирное ограждение на противоположном конце, жёсткость принимают равной  $0,75 \tau_i$ . Полученные узловые моменты в стержне передают на противоположные узлы с коэффициентом  $1/2$ .

Суммирование полученных таким способом моментов в узлах также даёт неуравновешенные узловые пары; их подвергают второму распределению и т. д. Например, для системы (фиг. 30) реактивный момент в узле  $a$  равен  $M'_{as} = -\frac{qa^2}{8}$  (против часовой стрелки). Прикладывая его к узлу  $a$  как внешнюю нагрузку в обратном направлении и распределяя пропорционально  $\tau_i$ , находят:

$$\tau_1 = 0,75 \frac{EI}{a};$$

$$\tau_2 = \tau_3 = \frac{EI}{a};$$

$$M'_{ab} = \frac{qa^2}{8} \cdot \frac{\tau_1}{\tau_1 + \tau_2 + \tau_3} = \frac{3}{88} qa^2.$$



Фиг. 30. Схема приближённого расчёта рамы при неподвижных узлах

Полное значение момента в этом стержне:

$$M_{ab} = M'_{ab} + M''_{ab} = -\frac{qa^2}{8} + \frac{3}{88} qa^2 = -\frac{qa^2}{11};$$

$$M_{ac} = \frac{qa^2}{8} \cdot \frac{\tau_2}{\Sigma \tau_i} = \frac{qa^2}{22};$$

$$M_{ae} = \frac{qa^2}{8} \cdot \frac{\tau_3}{\Sigma \tau_i} = \frac{qa^2}{22};$$

$$M'_{ca} = \frac{M_{ac}}{2} = \frac{qa^2}{44}.$$

Полученный момент с переменной знака также распределяется между стержнями 2 и 4:

$$M''_{ca} = -\frac{qa^2}{44} \cdot \frac{1}{2} = -\frac{qa^2}{88}.$$

Полное значение момента:

$$M_{ca} = M'_{ca} + M''_{ca} = \frac{qa^2}{88};$$

$$M_{ce} = -\frac{qa^2}{44} \cdot \frac{1}{2} = -\frac{qa^2}{88};$$

$$M_{ec} = -\frac{qa^2}{176}.$$

Таблица 9  
Точные и приближённые значения моментов

$M_{ik}$	$M_{ab}$	$M_{ae}$	$M_{ac}$	$M_{ca}$	$M_{ce}$	$M_{ec}$
Значение						
Приближённое	$-\frac{qa^2}{11}$	$\frac{qa^2}{22}$	$\frac{qa^2}{22}$	$\frac{qa^2}{88}$	$-\frac{qa^2}{88}$	$-\frac{qa^2}{176}$
Точное	$-\frac{qa^2}{11,2}$	$\frac{qa^2}{21}$	$\frac{qa^2}{24}$	$\frac{qa^2}{84}$	$-\frac{qa^2}{84}$	$-\frac{qa^2}{168}$

Этим можно ограничиться. Сопоставление приближённых значений моментов с точными приведено в табл. 9. Все моменты трактуются как реактивные (воздействующие от узла на стержень) и считаются положительными, если направлены по часовой стрелке.

Приближённый расчёт рам с подвижными узлами на горизонтальную нагрузку. Пусть для рамы (фиг. 31) следует определить

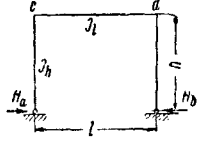
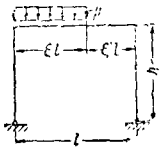
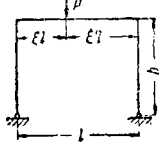
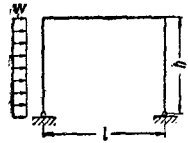
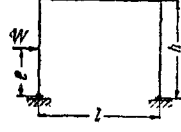
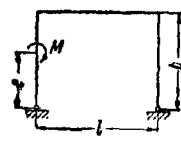
поперечную силу в данном ярусе рамы, т. е. величину  $Q = \sum P_i$  от всех вышележащих ярусов. Предполагают, что нулевые точки эпюры моментов во всех ярусах расположены по середине стоек, а в первом ярусе — на расстоянии  $\frac{2}{3}h$ . В каждом ярусе полная

поперечная сила распределяется между стой-

Формулы для расчёта рам

Таблица 10

Двухшарнирная рама

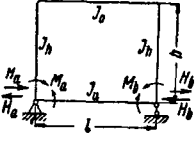
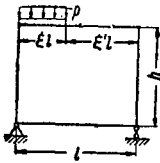
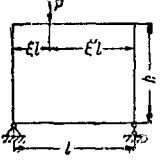
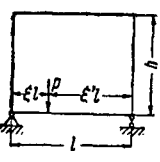
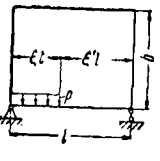
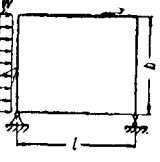
	<p>Обозначения</p> $h' = h \cdot \frac{I_c}{I_h} \quad l' = l \cdot \frac{I_c}{I_h}$ $\chi = \frac{h'}{l'} \quad \mu = 3 + 2\chi$
	$H_{a,b} = \frac{Pl}{4} \cdot \frac{l}{h} \cdot \frac{(1+2\chi^2)\xi^3}{\mu}$ $M_{c,d} = \frac{Pl^3}{4} \cdot \frac{(1+2\chi^2)\xi^3}{\mu}$
	$H_{a,b} = -\frac{3}{2} P \xi^3 \cdot \frac{1}{\mu} \cdot \frac{l}{h}$ $M_{c,d} = \frac{3}{2} Pl \xi^3 \cdot \frac{1}{\mu}$
	$H_a = -\frac{wh}{8} \cdot \frac{18+11\chi}{\mu}$ $H_b = \frac{wh}{8} \cdot \frac{6+5\chi}{\mu}$ $M_c = \frac{wh^3}{8} \cdot \frac{6+3\chi}{\mu}$ $M_d = -\frac{wh^3}{8} \cdot \frac{6+5\chi}{\mu}$
	$H_{a,b} = -\frac{W}{2} \left\{ \pm 1 + 1 - \frac{e}{h} \cdot \frac{\chi \left[ 3 - \left( \frac{e}{h} \right)^2 \right] + 3}{\mu} \right\}$ $M_c = \frac{W}{2} e \cdot \frac{\chi \left[ 1 + \left( \frac{e}{h} \right)^2 \right] + 3}{\mu}$ $M_d = -\frac{W}{2} e \cdot \frac{\chi \left[ 3 - \left( \frac{e}{h} \right)^2 \right] + 3}{\mu}$
	$H_{a,b} = 1,5 \frac{M}{h} \cdot \frac{1 + \left[ 1 - \left( \frac{e}{h} \right)^2 \right] \chi}{\mu}$ $M_c = 1,5 M \cdot \frac{1 + \left[ \frac{1}{3} + \left( \frac{e}{h} \right)^2 \right] \chi}{\mu}$ $M_d = -1,5 M \cdot \frac{1 + \left[ 1 - \left( \frac{e}{h} \right)^2 \right] \chi}{\mu}$

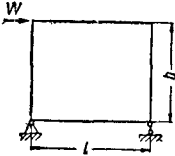
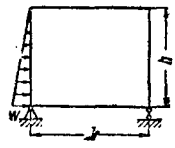
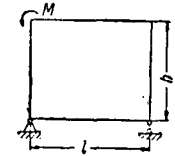
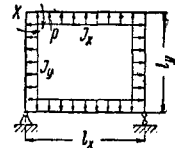
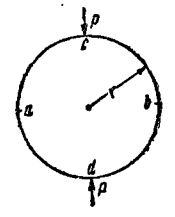
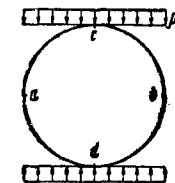
## Бесшарнирная рама

	$H_{a,b} = \frac{pl}{4} \cdot \frac{l}{h} \cdot \frac{(1+2\xi')\xi^3}{2+\chi}$ $M_{a,b} = -\frac{pl^3}{12} \xi^3 \left( \frac{1+2\xi'}{2+\chi} \mp \frac{3\xi'^3}{1+6\chi} \right)$ $M_{c,d} = -\frac{pl^3}{6} \xi^3 \left[ \frac{1+2\xi'}{2+\chi} \pm \frac{3\xi'^3}{2(1+6\chi)} \right]$
	$H_{a,b} = 1,5 P \xi \xi' \cdot \frac{l}{h} \cdot \frac{1}{2+\chi}$ $M_{a,b} = -\frac{Pl}{2} \xi \cdot \xi' \left( \frac{1}{2+\chi} \mp \frac{\xi' - \xi}{1+6\chi} \right)$ $M_{c,d} = -Pl \xi \cdot \xi' \left[ \frac{1}{2+\chi} \pm \frac{\xi' - \xi}{2(1+6\chi)} \right]$
	$H_{a,b} = -\frac{wh}{2} \left[ \pm 1 + \frac{6+2\chi}{4(2+\chi)} \right]$ $M_{a,b} = -\frac{wh^3}{24} \left( \frac{3+\chi}{2+\chi} \pm 6 \frac{1+4\chi}{1+6\chi} \right)$ $M_{c,d} = -\frac{wh^3}{24} \chi \left( \frac{1}{2+\chi} \mp \frac{12}{1+6\chi} \right)$
	$H_{a,b} = -\frac{W}{2} \left\{ \pm 1 + \left( 1 - \frac{e}{h} \right) \left[ 1 + \frac{e}{h} \cdot \frac{2 \left( 1 - \chi \frac{e}{h} \right) - \frac{e}{h}}{2+\chi} \right] \right\}$ $M_{a,b} = -\frac{Wh}{2} \frac{e}{h} \left[ \left( 1 - \frac{e}{h} \right) \left( 1 - \frac{e}{h} \cdot \frac{1+\chi}{2+\chi} \right) \pm \right. \\ \left. \pm \left( 1 - 3 \frac{e}{h} \cdot \frac{\chi}{1+6\chi} \right) \right]$ $M_{c,d} = -\frac{Wh}{2} \chi \left( \frac{e}{h} \right)^2 \left( \frac{1 - \frac{e}{h}}{2+\chi} \mp \frac{3}{1+6\chi} \right)$
	$H_{a,b} = -\frac{wh}{20} \cdot \frac{16+7\chi}{2+\chi}$ $M_{a,b} = -\frac{wh^3}{60} \cdot \frac{8+3\chi}{2+\chi}$ $M_{c,d} = -\frac{wh^3}{30} \cdot \frac{\chi}{2+\chi}$
	$H_{a,b} = 0,75 \frac{M}{h} \cdot \frac{e}{h} \left[ \left( 2 - \frac{e}{h} \right) + \chi \frac{2-3\frac{e}{h}}{2+\chi} \right]$ $M_{a,b} = -\frac{M}{2} \left[ 1,5 \frac{e}{h} \left( 2 - \frac{e}{h} \right) - 1 + \frac{1}{2} \chi \frac{e}{h} \frac{2-3\frac{e}{h}}{2+\chi} \pm \right. \\ \left. \pm \left( \frac{6\chi \frac{e}{h}}{1+6\chi} - 1 \right) \right]$ $M_{c,d} = -M \frac{e}{h} \chi \left[ \frac{2-3\frac{e}{h}}{2(2+\chi)} \mp \frac{3}{1+6\chi} \right]$

Продолжение табл. 10

## Замкнутая рама

	<p>Обозначения</p> $h' = h \frac{I_c}{I_h} \quad l'_o = l \cdot \frac{I_c}{I_o}$ $l'_u = l \cdot \frac{I_c}{I_u} \quad \chi_o = \frac{h'}{l'_o}$ $\chi_u = \frac{h'}{l'_u} \quad \mu = \frac{1}{\chi_u} (2\chi_o + 3) + 2 + \chi_o$ $\mu_1 = \frac{1+\chi_o}{\mu} \quad \nu = 1 + \frac{\chi_o}{\chi_u} + 6\chi_o$
	$H_{a,b} = \frac{pl}{4} \cdot \frac{l}{h} \cdot \frac{(3-2\xi)\xi^3}{3+2\chi_o} \cdot (1+\mu_1)$ $M_{a,b} = \frac{pl^3}{12} \xi^3 \left[ \frac{1+2\xi^3}{\mu} \pm \frac{3\xi'^3}{\nu} \right]$ $M_{c,d} = -\frac{pl^3}{12} \xi^3 \left[ \frac{3(3-2\xi)(1+\mu_1)}{3+2\chi_o} - \frac{1+2\xi^3}{\mu} \pm \frac{3\xi'^3}{\nu} \right]$
	$H_{a,b} = 1,5 P \frac{\xi\xi'}{3+2\chi_o} \cdot \frac{l}{h} (1+\mu_1)$ $M_{a,b} = \frac{Pl}{2} \cdot \xi\xi' \left[ \frac{1}{\mu} \pm \frac{\xi'-\xi}{\nu} \right]$ $M_{c,d} = -\frac{Pl}{2} \xi\xi' \left[ \frac{3(1+\mu_1)}{3+2\chi_o} - \frac{1}{\mu} \pm \frac{\xi'-\xi}{\nu} \right]$
	$H_{a,b} = 1,5 P \cdot \frac{l}{h} \xi\xi' \frac{\mu_1}{\chi_u}$ $M_{a,b} = \frac{Pl}{2} \cdot \frac{\xi\xi'}{\chi_u} \left[ \frac{2\chi_o+3}{\mu} \pm \frac{(\xi'-\xi)\chi_o}{\nu} \right]$ $M_{c,d} = -\frac{Pl}{2} \frac{\xi\xi'}{\chi_u} \left[ 3\mu_1 - \frac{2\chi_o+3}{\mu} \pm \frac{(\xi'-\xi)\chi_o}{\nu} \right]$
	$H_{a,b} = \frac{pl}{4} \cdot \frac{l}{h} \xi^3 (3-2\xi) \frac{\mu_1}{\chi_u}$ $M_{a,b} = \frac{pl^3}{4} \frac{\xi^3}{\chi_u} \left[ \frac{1}{3} (1+2\xi')(2\chi_o+3) \frac{1}{\mu} \pm \frac{\xi'^3\chi_o}{\nu} \right]$ $M_{c,d} = -\frac{pl^3}{4} \frac{\xi^3}{\chi_u} \left[ (3-2\xi)\mu_1 - \frac{1}{3} (1+2\xi')(2\chi_o+3) \frac{1}{\mu} \pm \frac{\xi'^3\chi_o}{\nu} \right]$
	$H_{a,b} = -\frac{wh}{2} \left\{ \pm 1 + \frac{1}{4(3+2\chi_o)} \left[ 3(2+\chi_o) + \mu_1(3+\chi_o) \right] \right\}$ $M_{a,b} = -\frac{wh^3}{4} \left[ \frac{3+\chi_o}{6\mu} \pm \frac{1+4\chi_o}{\nu} \right]$ $M_{c,d} = -\frac{wh^3}{4} \cdot \frac{\chi_o}{\chi_u} \left[ \frac{3+\chi_u}{6\mu} \pm \frac{1+2\chi_u}{\nu} \right]$

	$H_{a,b} = \pm \frac{W}{2}$ $M_{a,b} = \pm \frac{Wh}{2} \left( 1 - \frac{1+3\chi_0}{\nu} \right)$ $M_{c,d} = \pm \frac{Wh}{2} \left( 1 - \frac{1+3\chi_0}{\nu} \right)$
	$H_{a,b} = - \frac{Wh}{20} \cdot \frac{1}{3+2\chi_0} [(20+11\chi_0) + (8+3\chi_0) \mu_1]$ $M_{a,b} = - \frac{wh^3}{60} \cdot \frac{9+3\chi_0}{\mu}$ $M_{c,d} = - \frac{wh^3}{60} \cdot \frac{\chi_0}{\chi_u} \cdot \frac{7+2\chi_0}{\mu}$
	$H_{a,b} = - 1,5 \frac{M}{2} \frac{1+\mu_1}{3+2\chi_0}$ $M_{a,b} = - \frac{M}{2} \left( \frac{1}{\mu} \mp \frac{1}{\nu} \right)$ $M_{c,d} = \frac{M}{2} \left( \frac{1}{\chi_u} \frac{3+2\chi_u}{\mu} \pm \frac{1}{\nu} \right)$
	$X = - \frac{1}{12} p \frac{\frac{l_x^3}{J_x} + \frac{l_y^3}{J_y}}{\frac{l_x}{J_x} + \frac{l_y}{J_y}}$
	<p>Кольцо</p> $M_a = M_b = - 0,182 Pr$ $N_a = N_b = - \frac{P}{2}$ $M_c = M_d = + 0,318 Pr$ $N_c = N_d = 0$
	$M_a = M_b = - \frac{pr^3}{4}$ $N_a = N_b = - pr$ $M_c = M_d = + \frac{pr^3}{4}$ $N_c = N_d = 0$



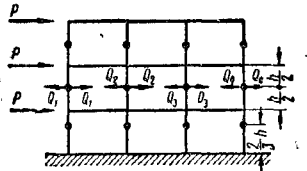
ками пропорционально отношению момента инерции стойки к кубу высоты, что следует из формулы прогиба консоли, т. е.

$$c_i = \frac{I_i}{h_i^3}.$$

Таким образом, например

$$Q_1 = Q \cdot \frac{c_1}{c_1 + c_2 + c_3 + c_4}$$

и т. д. По найденным поперечным силам каждой стойки подсчитывают узловые моменты в основании стоек и распределяют их



Фиг. 31. Схема приближённого расчёта рамы с подвижными узлами

пропорционально жёсткостям примыкающих элементов.

В табл. 10 приведены формулы для расчёта рам, наиболее распространённых в практике.

### Фермы

Общий ход расчёта статически неопределимой фермы освещён на стр. 148. Основные этапы расчёта ферм на постоянную нагрузку следующие.

1. Выбирают основную статически определённую систему путём перерезания лишних стержней или опорных связей.

2. По направлению разрезов вводят лишние неизвестные усилия  $X_1, X_2, \dots, X_n$ .

3. Пишут канонические уравнения, отрывающие разрезы.

4. Определяют коэффициенты уравнений по формулам (см. стр. 146):

$$\delta_{ik} = \sum \frac{\bar{N}_i \cdot \bar{N}_k}{EF} \cdot s,$$

$$\Delta_{ip} = \sum \frac{\bar{N}_i \cdot N_p}{EF} \cdot s,$$

где  $\bar{N}_i, \bar{N}_k$  — усилия в элементах рассматриваемой фермы в состояниях  $x_i = 1$  и  $x_k = 1$ ;

$N_p$  — то же в грузовом состоянии;

$s$  — длина порядкового элемента фермы.

Указанные усилия проще всего получить путём построения ряда диаграмм.

5. Разрешением системы канонических уравнений находят неизвестные усилия.

6. Любое усилие в статически неопределимой ферме подсчитывается по формуле

$$N = N_p + \bar{N}_1 x_1 + \bar{N}_2 x_2 + \dots + \bar{N}_n x_n.$$

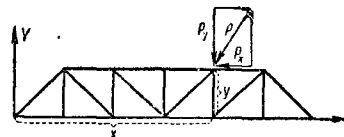
Окончательный результат полезно проверить по контрольному тождеству. Пусть на ферму (фиг. 32) действует одна произвольно

направленная сила  $P$ . Вычисляя координаты точки её приложения, можем написать следующее контрольное тождество:

$$\sum_i N_i s_i = \sum (P_x \cdot x + P_y \cdot y).$$

Если за лишние неизвестные фермы принять опорные реакции, то при проверке необходимо включить их в разряд внешних сил. Указанным контрольным тождеством можно также пользоваться и при расчёте статически определимой фермы.

Построение линий влияния в статически неопределимых фермах выполняется методом упругих грузов<sup>1</sup>.



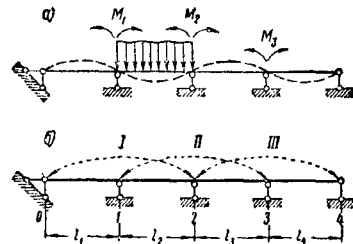
Фиг. 32. Контроль расчёта фермы

Весьма частый случай при проверке старых пролётных строений — расчёт многораскосной или многорешётчатой системы (фиг. 2) — выполняется приближённым способом путём разложения этих решёток на простейшие.

Каждая простая треугольная решётка подвергается нагрузке, равной половине расчётной, а полные усилия в исходной системе получаются в поясах суммированием усилий в простых системах, а в решётке — как непосредственный результат расчёта простых систем. При этом используются линии влияния треугольного очертания и соответствующая им эквивалентная нагрузка.

### Неразрезные балки

Степень статической неопределимости неразрезной балки соответствует количеству промежуточных подвижных опор. За неизвестные усилия в неразрезной балке целе-



Фиг. 33. Схема расчёта неразрезной балки

сообразно принять изгибающие моменты, возникающие в опорных сечениях (фиг. 33, а). Отыскание указанных моментов сводится к написанию системы уравнений трёх моментов, связывающих каждые три последовательно взятых момента (фиг. 33, б).

<sup>1</sup> Подробнее см. проф. Прокофьев И. П. «Теория сооружений», т. II; проф. Урбан И. В. «Теория расчёта статически неопределимых конструкций».

Для балки с различными моментами инерции в пролётах уравнение трёх моментов имеет вид (фиг. 34):

$$M_{n-1} \alpha_n + 2 M_n (\alpha_n + \alpha_{n+1}) + M_{n+1} \alpha_{n+1} =$$

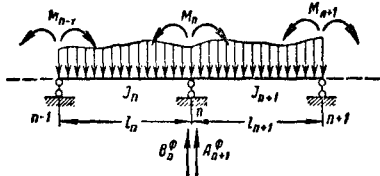
$$= -6 \left( \frac{A_{n+1}^\phi \alpha_{n+1}}{l_{n+1}} + \frac{B_n^\phi \alpha_n}{l_n} \right),$$

где

$$\alpha_n = \frac{I_c}{I_n} \frac{l_n}{l_c}; \quad \alpha_{n+1} = \frac{I_c}{I_{n+1}} \frac{l_{n+1}}{l_c}.$$

Значение  $I_c$ ,  $l_c$  берутся для произвольного пролёта, например:

$$I_c = I_1, \quad l_c = l_1.$$



Фиг. 34. Нерезная балка с различными моментами инерции в пролётах

Здесь  $A_{n+1}^\phi$  — левая фиктивная реакция на  $n$ -й опоре  $n+1$  пролёта от грузовой эпюры моментов простой балки;

$B_n^\phi$  — правая фиктивная реакция на  $n$ -й опоре с  $n$ -го пролёта от эпюры того же рода.

Значения  $A^\phi$  и  $B^\phi$  для наиболее употребительных случаев даны в табл. 11. В частном случае одинаковых моментов инерции уравнение трёх моментов приобретает вид:

$$M_{n-1} l_n + 2 M_n (l_n + l_{n+1}) + M_{n+1} l_{n+1} = -6 (A_{n+1}^\phi + B_n^\phi).$$

После разрешения системы уравнений и определения опорных моментов нерезную балку можно расчленить на ряд статически определимых балок и, приложив к ним найденные моменты, а также и нагрузку, рассчитать их обычным способом. Можно также применить общие формулы, выведенные на основе этого принципа.

Опорная реакция на  $n$ -й опоре

$$A_n = A_n^0 + \frac{M_{n+1} - M_n}{l_{n+1}} - \frac{M_n - M_{n-1}}{l_n},$$

где  $A_n^0$  — реакция средней опоры от нагрузки примакающих статически определимых балок. В качестве проверки может служить тождество

$$\Sigma A_i = \Sigma P,$$

где  $P$  — нагрузка.

Однако соблюдение этого тождества не подтверждает правильности решения задачи в целом.

Таблица 11

Фиктивные реакции  $A^\phi, B^\phi$

Схема нагрузки	$\Omega, A^\phi, B^\phi$
	$\Omega = \frac{Pab}{2}$ $A = \frac{Pab}{6l} (l+b)$ $B = \frac{Pab}{6l} (l+a)$
	$\Omega = \frac{2}{9} Pl^3$ $A = B = \frac{1}{9} Pl^3$
	$\Omega = P(ab - \frac{1}{4} c^2)$ $A = \frac{Pb}{6l} \left[ 2a(l+b) - \frac{1}{2} c^2 \right]$ $B = \frac{Pa}{6l} \left[ 2b(l+a) - \frac{1}{2} c^2 \right]$
	$\Omega = \frac{Q l^3}{12}$ $A = B = \frac{Q l^3}{24}$
	$\Omega = \frac{1}{6} k(3ab - m^2)$ $A = \frac{kb}{6l} (l^2 - b^2 - m^2)$ $B = \frac{ka}{6l} (l^2 - a^2 - m^2)$
	$\Omega = \frac{5}{48} L \cdot l^3$ $A = B = \frac{5}{96} L \cdot l^3$
	$\Omega = \frac{1}{12} L l^3$ $A = \frac{7}{180} L \cdot l^3$ $B = \frac{8}{180} L \cdot l^3$
	$\Omega = \frac{1}{10} Q l^3$ $A = B = \frac{1}{20} Q l^3$
	$\Omega = \frac{1}{2} Pe(a-b)$ $A = \frac{Pe}{6l} (l^2 - 3b^2)$ $B = \frac{Pe}{6l} (3a^2 - l^2)$ $L = \frac{6A^\phi}{l}, \quad R = \frac{6B^\phi}{l}$

определяется в функции нагрузки

Моменты и поперечные силы в пролёте  $l_n$  и на расстоянии  $x$  от опоры  $n-1$  находят по формулам:

$$M_x = M_x^0 + M_n \frac{x}{l_n} + M_{n-1} \cdot \frac{l_n - x}{l_n},$$

$$Q_x = \frac{dM_x}{dx} = Q_x^0 + \frac{M_n - M_{n-1}}{l_n},$$

где  $M_x^0, Q_x^0$  — момент и поперечная сила простой балки.

Положительные моменты растягивают нижнее волокно балки. Положительные поперечные силы, как левые силы, направлены вверх.

**Расчёт на неравномерный нагрев.** Применяются уравнения трёх моментов для случаев разных и одинаковых моментов инерции в пролётах. Правые части этих уравнений имеют вид:

а) для различной жёсткости

$$\frac{3EI_c}{l_c} \cdot \alpha \left[ \frac{\Delta t_n l_n}{h_n} + \frac{\Delta t_{n+1} l_{n+1}}{h_{n+1}} \right];$$

б) для постоянной жёсткости

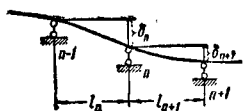
$$\frac{3EI}{h} \alpha [\Delta t_n l_n + \Delta t_{n+1} l_{n+1}],$$

где  $\alpha$  — коэффициент линейного температурного расширения;

$h_n, h_{n+1}$  — высота сечений балок в пролётах;

$\Delta t_n, \Delta t_{n+1}$  — разность температур в верхних и нижних волокнах балки в соответствующих пролётах.

**Расчёт на осадку опор.** Применяются уравнения трёх моментов для случаев разных и одинаковых моментов инерции в пролётах;



Фиг. 35. Схема осадки опор

при этом правые части этих уравнений, в зависимости от вертикальных смещений опор, имеют вид (фиг. 35):

а) при различной жёсткости

$$\frac{6EI_c}{l_c} \left[ \frac{\delta_n}{l_n} - \frac{\delta_{n+1}}{l_{n+1}} \right];$$

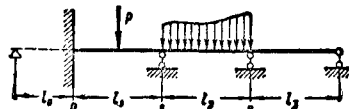
б) при постоянной жёсткости

$$6EI \left[ \frac{\delta_n}{l_n} - \frac{\delta_{n+1}}{l_{n+1}} \right].$$

Учёт заделки неразрезной балки в начальном сечении производится путём введения фиктивного пролёта  $l_0$  (фиг. 36). После составления уравнения трёх моментов нормального вида полагают

$$l_0 = 0.$$

**Расчёт методом фокусов.** Трудность совместного разрешения системы уравнений трёх моментов при большом их количестве заставляет применять метод фокусов. Этот метод

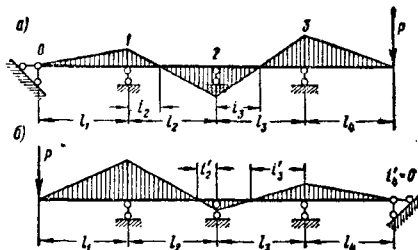


Фиг. 36. Схема учёта заделки

особенно целесообразен при необходимости рассчитать балку на ряд нагрузок.

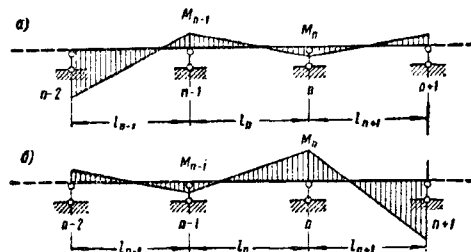
Точки неразрезной балки с нулевым значением изгибающего момента при эпюре моментов, односторонне распространяющейся в незагруженные пролёты, называются фокусами.

Эпюра  $M$ , распространяющаяся влево (фиг. 37, а), определяет положение левых фокусных расстояний  $i_1 = 0, i_2, i_3$ , и наоборот.



Фиг. 37. Распределение фокусных расстояний для эпюры моментов: а — распространение влево; б — распространение вправо

рот, распространение её вправо определяет (фиг. 37, б) положение правых  $i'_4 = 0; i'_3; i'_2$ . Фокусные расстояния  $i$  не зависят от нагрузки и определяются исключительно в функции размеров балки.



Фиг. 38. Фокусные отношения при распространении эпюры моментов: а — вправо, б — влево

В расчётах используют так называемые фокусные отношения, равные отношению большего момента к меньшему.

Левое фокусное отношение (фиг. 38)

$$k_n = - \frac{M_n}{M_{n-1}} = \left[ 2 + \frac{\sigma_{n-1}}{\sigma_n} \left( 2 - \frac{1}{k_{n-1}} \right) \right].$$

Правое фокусное отношение

$$k'_n = -\frac{M'_{n-1}}{M_n} = \left[ 2 + \frac{a_{n+1}}{a_n} \left( 2 - \frac{1}{k_{n+1}^1} \right) \right].$$

При равных жёсткостях значения коэффициентов  $\alpha$  заменяются значениями пролётов  $l$ .

Вычисление фокусных отношений ведут в цепном порядке: левых, начиная с левого пролёта, и правых — с правого. При этом следует принять для левой опоры:

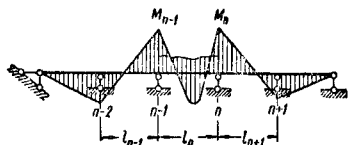
в случае шарнира

$$k_1 = \infty;$$

в случае заделки

$$k_1 = 2.$$

Аналогично и для правой опоры.



Фиг. 39. Схема распределения опорных моментов единственно загруженного пролёта

При расположении нагрузки в пролёте предварительно определяют опорные моменты этого единственно загруженного пролёта (фиг. 39):

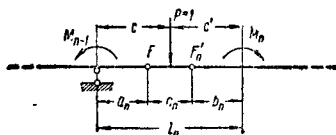
$$M_n = -\frac{6(A_n^\phi - k_n B_n^\phi)}{l_n(1 - k_n \cdot k'_n)};$$

$$M_{n-1} = -\frac{6(B_n^\phi - k'_n A_n^\phi)}{l_n(1 - k_n k'_n)}.$$

Величины  $A_n^\phi$ ,  $B_n^\phi$  берутся из табл. 11.

Найденные моменты распределяют вправо и влево через фокусы; при нескольких нагрузках операция повторяется и результаты суммируются.

Построение линий влияния (табл. 12 и 12') опорных моментов может быть выполнено посредством формул для опорных моментов



Фиг. 40. Построение линий влияния опорных моментов посредством фокусных отношений

единственно загруженного пролёта. Путём преобразования этих формул можно придать вид, удобный для вычислений (фиг. 40):

правый опорный момент

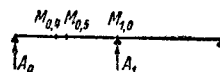
$$M_n = \frac{a_n b_n}{c_n} \omega - \frac{b_n l_n}{c_n} \omega a;$$

левый опорный момент

$$M_{n-1} = \frac{a_n b_n}{c_n} \omega - \frac{a_n l_n}{c_n} \omega b.$$

Таблица 12

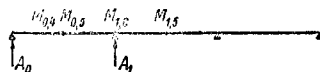
Ординаты линий влияния двухпролётной балки



$\frac{z}{l}$	$A_0$	$A_1$	$M_{1,0}$	$M_{0,1}$	$M_{0,2}$
			Множитель $l$		
0,0	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
0,1	0,875	0,150	-0,025	0,050	0,038
0,2	0,752	0,296	-0,043	0,101	0,076
0,3	0,632	0,437	-0,068	0,153	0,116
0,4	0,516	0,568	-0,084	0,206	0,158
0,5	0,406	0,688	-0,094	0,163	0,203
0,6	0,304	0,792	-0,096	0,122	0,152
0,7	0,211	0,879	-0,089	0,084	0,105
0,8	0,128	0,944	-0,072	0,051	0,064
0,9	0,057	0,986	-0,043	0,023	0,029
1,0	0,000	1,000	0,000	0,000	0,000
1,1	-0,043	0,986	-0,043	-0,017	-0,021
1,2	-0,072	0,944	-0,072	-0,029	-0,036
1,3	-0,089	0,879	-0,089	-0,036	-0,045
1,4	-0,096	0,792	-0,096	-0,038	-0,048
1,5	-0,094	0,688	-0,094	-0,038	-0,047
1,6	-0,084	0,568	-0,084	-0,034	-0,042
1,7	-0,068	0,437	-0,068	-0,027	-0,034
1,8	-0,048	0,296	-0,048	-0,019	-0,024
1,9	-0,025	0,150	-0,025	-0,10	-0,012
2,0	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000

Таблица 12'

Ординаты линий влияния трёхпролётной балки



$\frac{z}{l}$	$A_0$	$A_1$	$M_{1,0}$	$M_{0,1}$	$M_{0,2}$	$M_{1,2}$
			Множитель $l$			
0,0	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
0,1	0,874	0,159	-0,026	0,049	0,037	-0,010
0,2	0,749	0,315	-0,051	0,100	0,074	-0,019
0,3	0,627	0,464	-0,073	0,151	0,114	-0,027
0,4	0,510	0,602	-0,090	0,204	0,155	-0,034
0,5	0,400	0,725	-0,100	0,160	0,200	-0,038
0,6	0,298	0,830	-0,102	0,119	0,149	-0,038
0,7	0,205	0,914	-0,095	0,082	0,102	-0,036
0,8	0,123	0,973	-0,077	0,049	0,062	-0,029
0,9	0,054	0,993	-0,046	0,022	0,027	-0,017
1,0	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
1,1	-0,039	0,963	-0,039	-0,016	-0,020	0,020
1,2	-0,064	0,896	-0,064	-0,026	-0,032	0,052
1,3	-0,077	0,805	-0,077	-0,031	-0,039	0,087
1,4	-0,080	0,696	-0,080	-0,032	-0,040	0,128
1,5	-0,075	0,575	-0,075	-0,030	-0,038	0,175
1,6	-0,064	0,448	-0,064	-0,026	-0,032	0,128
1,7	-0,049	0,321	-0,049	-0,020	-0,025	0,087
1,8	-0,032	0,200	-0,032	-0,013	-0,016	0,052
1,9	-0,015	0,091	-0,015	-0,006	-0,008	0,023
2,0	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
2,1	0,011	-0,068	0,011	0,005	0,006	-0,017
2,2	0,019	-0,115	0,019	0,008	0,010	-0,029
2,3	0,024	-0,143	0,024	0,010	0,012	-0,036
2,4	0,026	-0,154	0,026	0,010	0,013	-0,038
2,5	0,025	-0,150	0,025	0,010	0,013	-0,038
2,6	0,022	-0,134	0,022	0,009	0,011	-0,034
2,7	0,018	-0,109	0,018	0,007	0,009	-0,027
2,8	0,013	-0,077	0,013	0,005	0,006	-0,019
2,9	0,007	-0,040	0,007	0,003	0,003	-0,010

Величины  $a_n$ ,  $b_n$ ,  $c_n$  легко определяются из геометрических соотношений:

$$a_n = \frac{l_n}{1 + k_n};$$

$$b_n = \frac{l_n}{1 + k_n};$$

$$c_n = l_n - a_n - b_n;$$

$$\omega_a = \left( \frac{c}{l_n} - \frac{c^3}{l_n^3} \right);$$

$$\omega_b = \left( \frac{c'}{l_n} - \frac{c'^3}{l_n^3} \right);$$

$$\omega = \left( \frac{c}{l_n} - \frac{c^3}{l_n^3} \right).$$

Коэффициенты  $\omega_a$ ,  $\omega_b$ ,  $\omega$  не зависят от пролёта, определяются исключительно положением единичного груза в пролёте. В табл. 13 даются значения этих коэффициентов для десяти положений груза.

Таблица 13

Значения  $\omega_a$ ,  $\omega_b$  и  $3\omega$ 

$c/l$	$\omega_a$	$\omega_b$	$3\omega$	$c/l$	$\omega_a$	$\omega_b$	$3\omega$
0,1	0,099	0,171	0,270	0,6	0,384	0,336	0,720
0,2	0,192	0,233	0,480	0,7	0,357	0,273	0,630
0,3	0,273	0,357	0,630	0,8	0,288	0,192	0,480
0,4	0,335	0,384	0,720	0,9	0,171	0,099	0,270
0,5	0,375	0,375	0,750				

Ординаты линий влияния моментов при расположении груза  $P = 1$  в других пролётах могут быть дополнительно построены при помощи фокусных отношений.

#### Применение таблиц к расчёту неразрезных балок

При проектировании неразрезных балок, особенно в гражданском строительстве, приходится иметь дело с нагрузкой, равномерно распределённой по пролёту сооружения, а также и сосредоточенной, приложенной в частях пролёта. При этом такая нагрузка состоит из постоянной (собственный вес) и временной, которая может загружать пролёты неразрезной балки в разнообразных комбинациях, вызывая в сечениях её различные значения изгибающих моментов и поперечных сил.

Можно для каждого сечения неразрезной балки установить такое расположение временной нагрузки, при котором момент или поперечная сила достигнут своего наибольшего положительного или наибольшего отрицательного значения.

Лучше всего этот вопрос решается, как известно, при помощи линий влияния.

Необходимые данные для расчёта неразрезной балки представляют собой значения наибольших положительных и наибольших отрицательных моментов и поперечных сил, возникающих в сечениях балки. При этом каждому такому значению момента или поперечной силы соответствует своё опасное (критическое) расположение временной равномерно распределённой нагрузки. Зная величины возникающих моментов и попереч-

ных сил в сечениях балки от временной нагрузки и складывая их затем соответственно с моментами и поперечными силами от постоянной нагрузки, получают расчётные моменты и поперечные силы, с помощью которых можно проверить напряжение в любом сечении балки, а также в необходимых случаях, и подобрать сечение самой балки.

Внутренние силы определяют с помощью табл. 14, 15, 15', 15'':

$$M = (\alpha g + \beta p) l^2,$$

поперечные силы

$$Q = (\gamma g + \delta p) l,$$

где  $g$  — постоянная нагрузка;

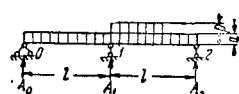
$p$  — временная нагрузка.

Коэффициенты  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  и  $\delta$  берутся из таблиц.

При вычислении наибольшего положительного значения момента в заданном сечении коэффициент  $\beta$  берётся со знаком плюс из графы, которая обозначена  $+\beta$ . При вычислении же наибольшего отрицательного значения момента в заданном сечении коэффициент  $\beta$  берётся со знаком минус из графы, которая обозначена  $-\beta$ . Аналогично при вычислении поперечной силы коэффициент  $\alpha$  берётся со знаком плюс из графы, которая обозначена  $+\delta$ , или же со знаком минус из графы  $-\delta$ . Кроме того, с помощью этих же таблиц определяются наибольшие положительные и наибольшие отрицательные значения опорных реакций от действия временной нагрузки, а также значения этих реакций и от постоянной нагрузки. При этом структу-

Таблица 14

Изгибающие моменты и поперечные силы для двухпролётной балки при равномерно распределённой нагрузке



$\frac{x}{l}$	Изгибающие моменты $M$			Поперечные силы $Q$		
	влияние $g$			влияние $p$		
	$\alpha$	$+\beta$	$-\beta$	$\gamma$	$+\delta$	$-\delta$
0,0	0	0	0	+0,375	0,4375	0,0625
0,1	+0,0325	0,03875	0,00625	+0,275	0,3437	0,0687
0,2	+0,0650	0,06750	0,01250	+0,175	0,2624	0,0874
0,3	+0,0675	0,08625	0,01875	+0,075	0,1932	0,1182
0,375	+0,0703	0,09375	0,02344	0	0,1491	0,1491
0,4	+0,0700	0,09500	0,02500	-0,025	0,1359	0,1609
0,5	+0,0625	0,09375	0,03125	-0,125	0,0898	0,2148
0,6	+0,0450	0,08250	0,03750	-0,225	0,0544	0,2794
0,7	+0,0175	0,06125	0,04375	-0,325	0,0287	0,3537
0,75	0	0,04688	0,04688	-0,375	0,0193	0,3943
0,8	-0,0200	0,03000	0,05000	-0,425	0,0119	0,4359
0,85	-0,0425	0,01523	0,05775	-0,475	0,0064	0,4814
0,9	-0,0675	0,00311	0,07361	-0,525	0,0027	0,5277
0,95	-0,0950	0,00138	0,09038	-0,575	0,0007	0,5757
1,0	-0,1250	0	0,12500	-0,625	0,0000	0,6250

Опорное давление  $A_1 = +1,250$ ;  $1,2500$  0

ра формулы для определения опорной реакции та же, что и при определении поперечной силы  $Q$ .

Таблица 15

Изгибающие моменты и поперечные силы для четырёхпролётной балки при равномерно распределённой нагрузке

$\frac{x}{l}$	Изгибающие моменты M				Поперечные силы Q			
	влияние g		влияние p		влияние g		влияние p	
	$\alpha$	$+\beta$	$-\beta$	$-\beta$	$\gamma$	$+\delta$	$-\delta$	
0,0	0	0	0	0	+0,3229	0,4464	0,0535	
0,1	+0,03439	0,0864	0,00536	0,0529	+0,2929	0,3528	0,0593	
0,2	+0,05857	0,09429	0,01071	0,0788	+0,1929	0,2717	0,0788	
0,3	+0,07286	0,08933	0,01607	0,1101	+0,0829	0,2029	0,1101	
0,4	+0,07714	0,0857	0,02143	0,1498	0	0,1498	0,1498	
0,5	+0,07143	0,0822	0,02679	0,1853	-0,0871	0,1007	0,1533	
0,6	+0,05572	0,0786	0,03214	0,2079	-0,1071	0,0660	0,2079	
0,7	+0,03000	0,06750	0,03750	0,2731	-0,1071	0,0410	0,2731	
0,8	-0,00117	0,04708	0,04209	0,3481	-0,03071	—	—	
0,9	-0,02732	0,02484	0,04309	—	—	—	—	
1,0	-0,07143	0,01340	0,05216	—	—	—	—	
	-0,10714	0,01340	0,09197	—	—	—	—	
	-0,10714	0,01340	0,12054	—	—	—	—	
Опорное сопротивление $A_1 = +1,1428$ 1,2232 0,0804								
1,0	-0,10714	0,01340	0,12054	0,0607	+0,5357	0,6027	0,0670	
1,05	-0,08163	0,01163	0,07212	—	+0,4357	0,5064	0,0707	
1,10	-0,05857	0,01455	0,07212	—	—	—	—	
1,15	-0,03803	0,01980	0,05780	—	+0,3357	0,4187	0,0830	
1,2	-0,02000	0,03000	0,05000	—	—	—	—	
1,2661	0	0,04882	0,04882	—	—	—	—	
1,3	+0,00857	0,05675	0,04882	0,1153	+0,2357	0,3410	0,1153	
1,4	+0,02714	0,07337	0,04643	0,1585	+0,1357	0,2742	0,1585	
1,5	+0,03572	0,08036	0,04464	0,1833	0	0,2190	0,1833	
1,5357	—	—	—	0,2028	+0,00357	0,2028	0,2028	
1,6	+0,03429	0,07715	0,04286	0,2398	—	0,1435	0,2398	
1,7	+0,02286	0,06393	0,04107	0,2865	-0,0643	0,1222	—	
1,7369	+0,00416	0,04363	0,03947	—	—	—	—	
1,8	+0,00143	0,04170	0,04092	0,3365	-0,1643	—	—	
1,8953	0	0,04092	0,04092	—	—	—	—	
1,95	-0,01303	0,03451	0,04754	—	—	—	—	
2,0	-0,03000	0,03105	0,06105	—	-0,0643	0,1106	0,4749	
	-0,04217	0,03173	0,08120	—	—	—	—	
	-0,07143	0,03571	0,10714	—	-0,4643	0,1071	0,5714	
Опорное сопротивление $A_1 = +0,9286$ 1,1428 0,2142								

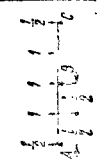

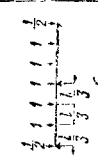
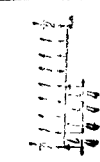

Таблица 15

Изгибающие моменты и поперечные силы для трёхпролётной балки при равномерно распределённой нагрузке


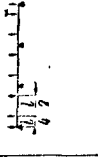
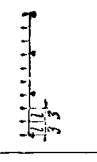




$\frac{x}{l}$	Изгибающие моменты M				Поперечные силы Q			
	влияние g		влияние p		влияние g		влияние p	
	$\alpha$	$+\beta$	$-\beta$	$-\beta$	$\gamma$	$+\delta$	$-\delta$	
0,0	0	0	0	0	+0,4	0,4500	0,0500	
0,1	+0,035	0,040	0,005	0,0563	+0,3	0,3580	0,0563	
0,2	+0,060	0,070	0,010	0,0752	+0,2	0,2752	0,0752	
0,3	+0,075	0,090	0,015	0,1065	+0,1	0,2065	0,1065	
0,4	+0,090	0,100	0,020	0,1496	0	0,1496	0,1496	
0,5	+0,075	0,080	0,025	0,2042	-0,1	0,1042	0,2042	
0,6	+0,060	0,069	0,030	0,2684	-0,2	0,0684	0,2684	
0,7	+0,035	0,070	0,035	0,3443	-0,3	0,0443	0,3443	
0,7805	0	0,04362	0,03348	—	—	—	—	
0,8	-0,02125	0,04022	0,04022	0,4280	0,4	0,0280	0,4280	
0,9	-0,04500	0,02773	0,04835	—	—	—	—	
0,95	-0,07125	0,01795	0,05331	0,5191	-0,5	0,0193	0,5191	
1,0	-0,10000	0,01667	0,11657	0,6167	-0,6	0,0167	0,6167	
Опорное давление $A_1 = +1,1$ 1,200 0,1000								
1,0	-0,10000	0,01667	0,11667	0,0333	+0,5	0,5333	0,0333	
1,05	-0,07325	0,01408	0,08033	—	—	—	—	
1,10	-0,05000	0,01314	0,07014	0,0870	+0,4	0,4870	0,0870	
1,15	-0,03625	0,01567	0,05678	—	—	—	—	
1,20	-0,020	0,03	0,050	0,0991	+0,3	0,3991	0,0991	
1,2704	0	0,051	0,050	—	—	—	—	
1,3	+0,0035	0,053	0,047	0,1210	+0,2	0,3210	0,1210	
1,4	+0,020	0,070	0,050	0,1537	+0,1	0,2537	0,1537	
1,5	+0,035	0,075	0,050	0,1979	—	0,1979	0,1979	

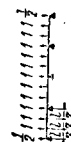
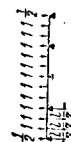
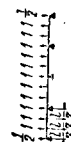
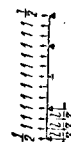
Таблица 15\*  
Изгибающие моменты и поперечные силы при сосредоточенных грузах

Нагрузка	$\frac{x}{l}$	Изгибающий момент M		Поперечная сила Q	
		влияние G	влияние P	влияние G	влияние P
		$\alpha$	$+\beta$	$-\beta$	$+\delta$
	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
	0,5	0,123	0,2631	0,0	0,0
	0,842	-0,0789	0,0	0,0	0,0
	1,0	-0,1875	0,0	0,0	0,0
Опорная реакция $B_{max} =$					
	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
	0,25	-0,1795	0,2148	0,0352	0,1407
	0,75	+0,0330	0,1445	0,1055	0,4492
	0,877	-0,1230	0,0	0,1230	1,2813
Опорная реакция $B_{max} =$					
	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
	0,333	+0,2222	0,2778	0,0556	0,1667
	0,667	+0,1111	0,2222	0,1111	0,5741
	0,8372	-0,1430	0,0	0,1430	1,3333
Опорная реакция $B_{max} =$					
	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
	0,5	+0,2576	0,3164	0,0587	0,2347
	0,75	+0,1553	0,3826	0,1174	0,543
	0,8548	+0,0230	0,1930	0,1760	1,1373
Опорная реакция $B_{max} =$					
	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
	0,5	+0,2576	0,3164	0,0587	0,2347
	0,75	+0,1553	0,3826	0,1174	0,543
	0,8548	+0,0230	0,1930	0,1760	1,1373
Опорная реакция $B_{max} =$					

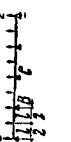
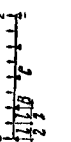
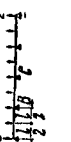
Продолжение табл. 15\*

Нагрузка	$\frac{x}{l}$	Изгибающий момент M		Поперечная сила Q	
		влияние G	влияние P	влияние G	влияние P
		$\alpha$	$+\beta$	$-\beta$	$+\delta$
	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
	0,5	0,1750	0,2125	0,0375	0,0750
	0,833	-0,0116	0,0208	0,0625	0,6750
	1,00	-0,1500	0,0250	0,1750	—
Опорная реакция $B_{max} =$					
	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
	0,25	+0,1938	0,2219	0,0281	0,1125
	0,75	+0,0813	0,1654	0,0844	0,4250
	0,870	-0,0655	0,0325	0,0980	1,2625
Опорная реакция $B_{max} =$					
	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
	0,333	+0,2444	0,2889	0,0444	0,1333
	0,667	+0,1555	0,2444	0,0889	0,5457
	0,8379	-0,0750	0,0377	0,1127	1,3111
Опорная реакция $B_{max} =$					
	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
	0,5	0,1750	0,2125	0,0375	0,0750
	0,833	-0,0116	0,0208	0,0625	0,6750
	1,00	-0,1500	0,0250	0,1750	—
Опорная реакция $B_{max} =$					
	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
	0,25	+0,1938	0,2219	0,0281	0,1125
	0,75	+0,0813	0,1654	0,0844	0,4250
	0,870	-0,0655	0,0325	0,0980	1,2625
Опорная реакция $B_{max} =$					

Продолжение табл. 15"

Нагрузка	$\frac{x}{l}$	Изгибающий момент				Поперечная сила	
		влияние $G$		влияние $P$		влияние $G$	влияние $P$
		$\alpha$	$+\beta$	$-\beta$	$\gamma$	$+\delta$	$-\delta$
	0,0	0,0	0,0	0,0	+0,7143	0,571	0,1428
	0,333	+0,2331	0,2857	0,0476	-0,2857	0,2093	0,5555
	0,667	+0,1429	0,2381	0,0952	-0,2857	0,0357	1,3214
	0,848	-0,0307	0,0303	0,1211	-1,2857		
	1,0	-0,2857	0,0357	0,3214	3,3810	3,5952	-
	Опорная реакция $B_{\max} =$						
	1,0	-0,2857	0,0357	0,3214			
	1,133	-0,1409	0,0127	0,1528			
	1,20	-0,0657	0,0657	0,1333	+1,0953	1,2733	0,1735
	1,133	+0,0794	0,2063	0,1270			
	0,0	0,0	0,0	0,0	+0,0953	0,574	0,4921
	0,333	+0,1111	0,2222	0,1111	-0,2857	0,2858	1,1955
	0,667	0,0	0,1053	0,1053	-0,9047	0,2858	1,1955
	0,848	-0,0653	0,0547	0,1170			
	1,0	-0,1905	0,0953	0,3857	2,8094	3,3810	-
	Опорная реакция $C_{\max} =$						
	1,0	0,0	0,0	0,0			
	0,25	+0,2745	0,3248	0,0503	1,0952	1,2991	0,2009
	0,50	+0,2931	0,3993	0,1004	0,0952	0,6118	0,5137
	0,75	+0,0735	0,2243	0,1505	-0,9018	0,2123	1,1142
	0,8567	-0,1295	0,0431	0,1736	-1,9018	0,0502	1,9520
	1,0	-0,4018	0,0503	0,4520	4,5357	4,8371	-
	Опорная реакция $B_{\max} =$						
	1,0	-0,4018	0,0503	0,4520			
	1,124	-0,1938	0,0192	0,2180			
	1,20	-0,0750	0,1125	0,1875	+1,6339	1,8851	0,2511
	1,25	+0,0037	0,1906	0,1842			
	1,50	+0,1651	0,3325	0,1675	+0,6339	1,1392	0,5053
	1,75	+0,0736	0,2243	0,1907	-0,3661	0,0458	1,0120
	1,79	+0,0195	0,1670	0,1475	-1,3661	0,4017	12,677
	1,8675	-0,0870	0,0805	0,1675			
	2,0	-0,2679	0,1339	0,4018	3,7322	4,5356	-
	Опорная реакция $C_{\max} =$						
	1,0	0,0	0,0	0,0			
	0,25	+0,2745	0,3248	0,0503			
	0,50	+0,2931	0,3993	0,1004			
	0,75	+0,0735	0,2243	0,1505			
	0,8567	-0,1295	0,0431	0,1736			
	1,0	-0,4018	0,0503	0,4520			
	Опорная реакция $B_{\max} =$						

Продолжение табл. 15"

Нагрузка	$\frac{x}{l}$	Изгибающий момент				Поперечная сила	
		влияние $G$		влияние $P$		влияние $G$	влияние $P$
		$\alpha$	$+\beta$	$-\beta$	$\gamma$	$+\delta$	$-\delta$
	0,0	0,0	0,0	0,0	+0,7393	0,4193	0,0804
	0,5	+0,1397	0,2093	0,0402	-0,6607	0,0201	0,7410
	0,833	-0,0503	0,0168	0,0670	-0,6607		
	1,0	-0,1607	0,0201	0,1803	2,2143	2,3343	-
	Опорная реакция $B_{\max} =$						
	1,0	-0,1607	0,0201	0,1803			
	1,147	-0,0781	0,0048	0,0830			
	1,20	-0,0500	0,0250	0,0750	+0,5536	0,6540	0,1004
	1,50	+0,1161	0,1830	0,0670			
	1,79	-0,0134	0,0455	0,0592	-0,4464	0,1607	0,6071
	1,835	-0,0362	0,0282	0,0644			
	2,0	-0,1072	0,0536	0,1607	1,8928	2,2142	-
	Опорная реакция $C_{\max} =$						
	1,0	0,0	0,0	0,0			
	0,25	+0,1897	0,2199	0,0301	+0,7589	0,8795	0,1205
	0,75	+0,0692	0,1595	0,0904	-0,2411	0,1922	0,4333
	0,869	-0,0785	0,0261	0,1045	-1,2411	0,0301	1,2712
	1,0	-0,2411	0,0301	0,2712	2,3215	2,5022	0,1808
	Опорная реакция $B_{\max} =$						
	1,0	-0,2411	0,0301	0,2712			
	1,112	-0,1200	0,0133	0,1333			
	1,2	-0,0250	0,0880	0,1130	+1,0804	1,2310	0,1507
	1,25	+0,0290	0,1385	0,1105			
	1,50	+0,0491	0,1495	0,1035	+0,0804	0,4851	0,4047
	1,75	+0,0502	0,1596	0,0904			
	1,79	+0,0325	0,1213	0,0887	-0,9196	0,2411	1,1607
	1,882	-0,0515	0,0510	0,1025			
	2,0	-0,1607	0,0804	0,2410	1,8392	2,3214	0,4832
	Опорная реакция $C_{\max} =$						
	1,0	0,0	0,0	0,0			



**Формулы опорных моментов равнопролётных неразрезных балок при произвольном загрузении (фиг. 41)**

$A^\phi, B^\phi$  — фиктивные опорные реакции, см. табл. 11.

$L = \frac{6A^\phi}{l}$  и  $R = \frac{6B^\phi}{l}$  — определяются в функции нагрузки.

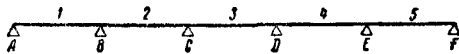
**Двухпролётная балка**

$$M_B = -\frac{1}{4} (R_1 + L_2).$$

**Трёхпролётная балка**

$$M_B = -\frac{1}{15} [4(R_1 + L_2) - R_2 - L_3];$$

$$M_C = -\frac{1}{15} [-R_1 - L_2 + 4(R_2 + L_3)].$$



Фиг. 41. Опорные моменты неразрезных балок при произвольном загрузении равнопролётных балок

**Четырёхпролётная балка**

$$M_B = -\frac{1}{56} [15(R_1 + L_2) - 4(R_2 + L_3) + R_3 + L_4];$$

$$M_C = -\frac{1}{14} [-R_1 + L_2 - 4(R_2 + L_3) - R_3 - L_4];$$

$$M_D = -\frac{1}{56} [R_1 + L_2 - 4(R_2 + L_3) + 15(R_3 + L_4)].$$

**Пятипролётная балка**

$$M_B = -\frac{1}{209} (56 L_1 + 41 L_2 - 11 L_3 + 3 L_4 - L_5);$$

$$M_C = -\frac{1}{209} (-15 L_1 + 45 L_2 + 44 L_3 - 12 L_4 + 4 L_5);$$

$$M_D = -\frac{1}{209} (4 L_1 - 12 L_2 + 44 L_3 - 45 L_4 - 15 L_5);$$

$$M_E = -\frac{1}{209} (-L_1 + 3 L_2 - 11 L_3 + 41 L_4 + 56 L_5).$$

**Арки двухшарнирные и бесшарнирные**

Двухшарнирная арка один раз статически неопределима. За лишнее неизвестное целесообразно принять горизонтальную составляющую опорной реакции — распор  $X_1$  (фиг. 42).

Величина распора определится из канонического уравнения метода сил:

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1p} + \Delta_{1t} + \Delta_1}{\delta_{11}},$$

где  $\Delta_{1p}$  — горизонтальное перемещение пяты в основной системе от нагрузки;

$\Delta_{1t}$  — горизонтальное перемещение пяты в основной системе от температуры;  $\Delta_1$  — заданное расхождение опорных точек.

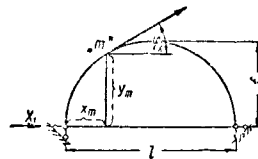
Первые две величины аналитически определяются по формуле перемещений (стр. 145). После подстановки в эти формулы величин, характеризующих размеры арки, получим в окончательном виде общее выражение распора<sup>1</sup>:

$$X_1 = -\frac{\int M_p y \frac{ds}{l} - E \alpha t^0 l + E \Delta_1}{(1 + \mu) \int \frac{\cos^2 \varphi_x}{F} ds},$$

где  $\alpha$  — коэффициент температурного расширения;

$M_p$  — изгибающий момент от нагрузки;

$t^0$  — температура равномерного нагрева оси арки.



Фиг. 42. Определение распора в двухшарнирной арке

$$\mu = \frac{\int \frac{\cos^2 \varphi ds}{F}}{\int y^2 \frac{ds}{l}}.$$

Коэффициент  $\mu$  характеризует обжатие арки нормальными силами. Вычисление интегралов производят следующими тремя способами.

**Аналитический** — возможен при функциональном задании оси арки и при выполнении соответствующих квадратур,

причём обычно при  $\frac{f}{l} < \frac{1}{5}$  полагают  $ds \approx dx$  и интегрирование ведут по пролёту.

**Графический** — подробно см. проф. Филоненко-Бородич М. М. «Основы теории работы упругих сил», Гостехтеоретиздат, 1932 г.

**Приближённый**, заключающийся в интегрировании по формуле

$$I_1 = \int_a^b \Phi(x) dx \approx \Delta \left( \frac{\Phi_1}{2} + \Phi_2 + \dots + \Phi_{n-1} + \frac{\Phi_n}{2} \right).$$

Более точная формула имеет вид:

$$I_2 = \int_a^b \Phi(x) dx = \frac{\Delta}{3} \left[ \Phi_0 + 2(\Phi_2 + \Phi_4 + \dots) + 4(\Phi_1 + \Phi_3 + \dots) + \Phi_n \right].$$

При применении последней формулы пролёт арки разбивают на  $2n$  участков.

<sup>1</sup> Влияние нормальной силы на грузовое перемещение незначительно и в формуле не учтено.

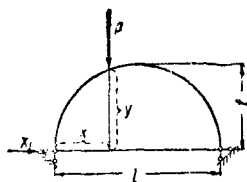
Внутренние усилия арки через распор (фиг. 42) выражаются формулами:

$$M_m = M_m^0 - X_1 y_m,$$

$$Q_m = Q_m^0 \cos \varphi_m - X_1 \sin \varphi_m,$$

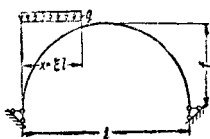
$$N_m = Q_m^0 \sin \varphi_m + X_1 \cos \varphi_m,$$

где  $M_m^0$ ,  $Q_m^0$  — момент и поперечная сила от нагрузки в основной системе.



Фиг. 43. Двухшарнирная параболическая арка

Ниже приведены некоторые данные для расчёта двухшарнирных арок параболического сечения.



Фиг. 44. Двухшарнирная параболическая арка, нагруженная вертикальной сплошной равномерной нагрузкой, расположенной на части пролёта

Уравнение оси (фиг. 43)

$$y = \frac{4f}{l^2} x (l - x).$$

При интегрировании арка принята постоянного поперечного сечения и  $ds \approx dx$ .



Фиг. 45. Двухшарнирная параболическая арка, нагруженная горизонтальной сосредоточенной силой

Уравнение линии влияния распора  $X_1$ :

$$X_1 = \frac{5}{8} \frac{l}{f} \frac{P}{1+\mu} (\xi - 2\xi^3 + \xi^4);$$

$$\mu = \frac{15}{8} \frac{I_s}{f^2 F_s};$$

$$\xi = \frac{x}{l}.$$

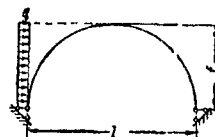
Распор от нагружения равномерной нагрузкой до сечения  $x = \xi l$  (фиг. 44):

$$X_1 = \frac{ql^2}{16f} \cdot \frac{1}{1+\mu} \cdot \xi^2 (5 - 5\xi^2 + 2\xi^3).$$

Горизонтальный груз  $W$  на расстоянии  $c$  от ключа (фиг. 45):

$$X_a = -\frac{W}{2} \left[ \frac{5f-c}{4f(1+\mu)} \left( \frac{c}{f} \right)^{3/2} + 1 \right];$$

$$X_b = -\frac{W}{2} \left[ \frac{5f-c}{4f(1+\mu)} \left( \frac{c}{f} \right)^{3/2} - 1 \right].$$

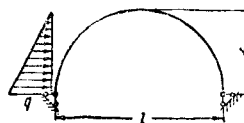


Фиг. 46. Двухшарнирная параболическая арка, нагруженная горизонтальной сплошной равномерной нагрузкой

Равномерная горизонтальная нагрузка (фиг. 46):

$$X_a = -\frac{ql}{2} \left( 1 + \frac{0,4286}{1+\mu} \right);$$

$$X_b = \frac{ql}{2} \left( 1 - \frac{0,4286}{1+\mu} \right).$$



Фиг. 47. Двухшарнирная параболическая арка, нагруженная горизонтальной нагрузкой по треугольнику

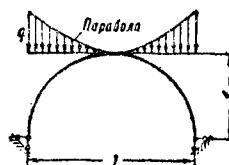
Треугольная горизонтальная нагрузка (фиг. 47):

$$X_a = -0,4008 qlf;$$

$$X_b = 0,6992 qlf;$$

$$A = -B = -\frac{ql^2}{6f};$$

$$M_c = -0,61587 ql^2.$$



Фиг. 48. Двухшарнирная параболическая арка, нагруженная вертикальной параболической нагрузкой

Вертикальная параболическая нагрузка (фиг. 48):

$$X_a = X_b = 0,01061 \frac{ql^2}{1+\mu};$$

$$A = B = \frac{ql^2}{6}.$$

Равномерный нагрев оси на  $t^\circ$

$$X_t = \frac{15 EI_s}{8 f^2 (1+\mu)} \alpha \cdot t^\circ.$$

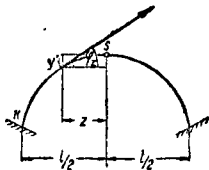
Смещение опор на  $\Delta l$

$$X_{\Delta} = -\frac{15EI_s}{8f^2(1+\mu)}\Delta l.$$

**Двухшарнирная арка с затяжкой в уровне пят.** Каноническое уравнение то же, что и для арки без затяжки; отличие состоит в коэффициенте  $\mu$ , который равен

$$\mu = \frac{\int \frac{\cos^2 \varphi_x}{F_x} ds + \frac{E_a \cdot l}{E_s \cdot F_s}}{\int y^2 \frac{ds}{I_x}},$$

где  $E_a$  — модуль упругости материала арки;  
 $E_s$  — модуль упругости материала затяжки.



Фиг. 49. Бесшарнирная арка

Все приведённые выше формулы остаются справедливыми, необходимо лишь в них коэффициент  $\mu$  вычислить по формуле

$$\mu = \frac{15}{8f^2} \left( \frac{I_a}{F_a} + \frac{E_a l_a}{E_s F_s} \right).$$

**Бесшарнирная арка** является системой трижды статически неопределимой.

Рациональное очертание оси бесшарнирной арки заимствуется из теории трёхшарнирной арки (стр. 143, уравнение катеноида). Изменение поперечных сечений в мостовых арках принимается по закону (фиг. 49):

$$\frac{I_s}{I_z \cos \varphi_z} = 1 - (1 - n) \xi,$$

где

$$\xi = \frac{z}{l},$$

$$n = \frac{I_s}{I_k \cos \varphi_k}.$$

Индекс  $s$  относится к замку, индекс  $k$  — к пяте арки.

Величиной  $n$  можно задаваться; обычно принимают  $n = 0,25$ . При очертании арки по катеноиду значения  $\cos \varphi_z$  можно вычислять по формуле

$$\operatorname{tg} \varphi_z = \frac{2fk}{l(m-1)} \operatorname{sh} \xi k,$$

где

$$m = \frac{g_k}{g_s};$$

$$k = \ln(m + \sqrt{m^2 - 1}).$$

Пользуясь этими данными, можно определить толщину арки в любом сечении.

Расчёт бесшарнирной арки проще всего выполнить, пользуясь основной системой, изображённой на фиг. 50.

После переноса неизвестных в так называемый упругий центр тяжести, определяемый формулой

$$y_s = \frac{\int y' \frac{ds}{I_z}}{\int \frac{ds}{I_z}},$$

канонические уравнения для определения лишних неизвестных  $X_1, X_2, X_3$  приобретут вид:

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1p} + \Delta_{1f} + \Delta_1}{\delta_{11}};$$

$$X_2 = -\frac{\Delta_{2p} + \Delta_{2f} + \Delta_2}{\delta_{22}};$$

$$X_3 = -\frac{\Delta_{3p} + \Delta_{3f} + \Delta_3}{\delta_{33}}.$$

Все перемещения подсчитываются так же, как и в двухшарнирной арке. Общее выражение лишних неизвестных:

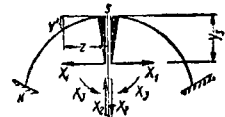
$$X_1 = -\frac{\int M_p y \frac{ds}{I_z}}{(1+\mu) \int y^2 \frac{ds}{I_z}};$$

$$X_2 = -\frac{\int M_p z \cdot \frac{ds}{I_z}}{\int z^2 \frac{ds}{I_z}};$$

$$X_3 = -\frac{\int M_p \frac{ds}{I_z}}{\int \frac{ds}{I_z}}.$$

Техника выполнения квадратур — см. двухшарнирная арка (стр. 165).

Ниже приводятся некоторые окончательные данные для расчёта бесшарнирных арок.



Фиг. 50. Основная система для расчёта бесшарнирной арки

**Параболическая арка**

$$\frac{I_s}{I_z \cos \varphi_z} = 1;$$

$$\mu = 0.$$

Нагрузка, равномерная на всём пролёте (фиг. 51):

$$A = B = \frac{ql}{2};$$

$$H = \frac{ql^2}{8f};$$

$$\mu = 0.$$

Сплошная засыпка до касательной в замке (фиг. 52):

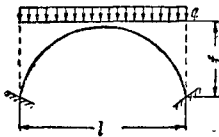
$$A = B = \frac{ql}{6};$$

$$H = \frac{ql^2}{56f};$$

$$M_a = M_b = -\frac{ql^2}{210};$$

$$M_m = -\frac{ql^2}{1680} \left[ 35 \left( \frac{u}{l} \right)^4 - 30 \left( \frac{u}{l} \right)^2 + 3 \right];$$

$$M_c = -\frac{ql^2}{560}.$$



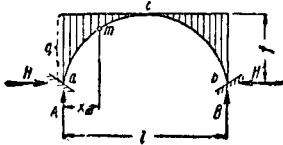
Фиг. 51. Бесшарнирная арка, нагруженная по всему пролёту сплошной равномерной нагрузкой

Здесь:

$$u = l - 2x_m;$$

$$M_{\max} = \frac{ql^2}{490}$$

при  $x_m = 0,286l$  и  $x_m = 0,714l$ .

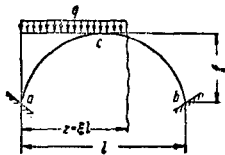


Фиг. 52. Бесшарнирная арка, нагруженная сплошной вертикальной нагрузкой до касательной в замке

где  $q_\xi = q(1 - 2\xi)^2$ ,

где

$$\xi = \frac{x_m}{l}.$$



Фиг. 53. Бесшарнирная арка, нагруженная вертикальной сплошной равномерно распределённой нагрузкой на части пролёта

Равномерная нагрузка до сечения  $z = \xi l$  (фиг. 53):

$$A = \frac{ql}{2} \xi [2 - \xi^2 (1 + \xi')];$$

$$B = \frac{ql}{2} \xi^3 (1 + \xi');$$

$$M_a = -\frac{ql^2}{2} \xi^2 \xi'^3;$$

$$M_b = \frac{ql^2}{2} \xi^3 \xi';$$

при  $\xi < 0,5$

$$M_c = -\frac{ql^2}{8} \xi^3 (\xi' - \xi) (1 + \xi');$$

при  $\xi > 0,5$

$$M_c = \frac{ql^2}{8} \xi'^3 (\xi - \xi') (1 + \xi),$$

где

$$\xi' = 1 - \xi.$$

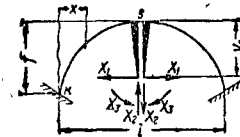
Частичное загрузеие для определения:

$$\max M_c = \frac{ql^2}{186}, \quad X_1 = \frac{ql^2}{16,8f};$$

$$\min M_c = -\frac{ql^2}{186}, \quad X_1 = \frac{ql^2}{15,3f};$$

$$\min M_a = -\frac{ql^2}{58,2}, \quad X_1 = \frac{ql^2}{25,2f}, \quad A = 2,865;$$

$$\max M_a = \frac{ql^2}{58,2}, \quad X_1 = \frac{ql^2}{11,73f}, \quad A = \frac{ql}{6,62}.$$



Фиг. 54. Основная система для случая бесшарнирной арки переменного сечения

Поворот опор на углы  $\varphi_a$  и  $\varphi_b$ :

$$M_a = \frac{3}{l} (3\varphi_a + \varphi_b) EI_s;$$

$$M_c = \frac{3}{2l} (\varphi_a + \varphi_b) EI_s.$$

Равномерный нагрев оси арки и расхождение опор на  $\Delta l$ :

$$X_1 = \frac{175 EI_s}{4 f^2} \cdot \frac{(\alpha t + \Delta l) (n + 2)}{\left[ n(8 + n) + \frac{8}{3} \right] (1 + \mu)};$$

$$X_2 = X_3 = 0.$$

Для арки переменного поперечного сечения можно воспользоваться готовыми уравнениями линии влияния лишних неизвестных; основная система приведена на фиг. 54.

$$X_1 = P \xi^2 \xi' \cdot \frac{3n(n+4) + 8(1-n)(n+2)\xi'}{35 \left[ 3n(n+8) + 8 \right] \frac{f}{l} (1 + \mu)},$$

где

$$\xi = \frac{x}{l},$$

$$\xi' = 1 - \xi.$$

При  $\xi < 0,5$

$$X_2 = P \xi \left\{ -1 + \frac{\xi'(\xi' - \xi)}{2 + 3n} \left[ 6(1 - \xi\xi') - n(1 - 6\xi\xi') \right] \right\};$$

$$X_3 = \frac{Pl}{2} \xi \left\{ 1 - \xi' \left[ \xi^2 + \xi'^2 + \frac{6\xi\xi'}{n+2} \right] \right\};$$

при  $\xi > 0,5$

$$X_2 = P \xi' \left\{ 1 + \frac{\xi'(\xi' - \xi)}{2 + 3n} \left[ 6(1 - \xi\xi') - n(1 - 6\xi\xi') \right] \right\},$$

$$X_3 = \frac{Pl}{2} \xi' \left\{ 1 - \xi \left[ \xi^2 + \xi'^2 + \frac{6\xi\xi'}{n+2} \right] \right\}.$$

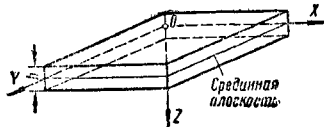
Положение упругого центра тяжести

$$y_s = \frac{2}{5} \cdot \frac{n+4}{n+2} \cdot f,$$

$$n = \frac{I_s}{I_k \cos \varphi_k}.$$

### Пластинки

Практическая приближённая теория расчёта пластинок основана на развитии положений, принимаемых при расчёте плоского прямолинейного бруса (фиг. 55).



Фиг. 55. Пластинка и расположение в ней координатных осей

Расчёт основан на следующих допущениях:  
а) линейные элементы пластинки, перпендикулярные к срединной плоскости, не искривляются;

б) срединная плоскость не испытывает растяжений и представляет собой как бы нейтральный слой (балки).

Расчёт пластинок на произвольное нагружение, параллельное оси  $Z$ , приводится к задаче интегрирования дифференциального уравнения:

$$D \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) = q(x, y),$$

где  $w$  — прогиб срединного слоя;

$D = \frac{Eh^3}{2(1-\mu^2)}$  — цилиндрическая жёсткость;  
 $\mu$  — коэффициент поперечной деформации;

$q(x, y)$  — закон распределения нагрузки.

Приведённое уравнение является обобщением для случая изгиба по двум осям известного (приближённого) уравнения изгиба бруса:

$$EI \frac{d^4 w}{dx^4} = q(x).$$

Если будет найдена функция, удовлетворяющая дифференциальному уравнению и условиям опирания пластинки по контуру, то появляется возможность подсчитать внутренние усилия (фиг. 56):

$$N_1 = -D \left( \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right),$$

$$N_2 = -D \left( \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial x^2} \right),$$

$$M_1 = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right),$$

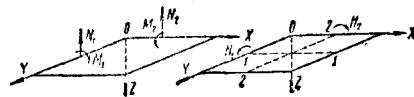
$$M_2 = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right),$$

$$H_1 = -H_2 = -D(1-\mu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y},$$

где  $N_1, N_2$  — поперечные силы, отнесённые к единице длины сечения;

$M_1, M_2$  — изгибающие моменты (изгиб относительно осей  $Ox, Oy$ );

$H_1, H_2$  — крутящие моменты относительно осей 1—1 и 2—2.



Фиг. 56. Внутренние усилия пластинки

По сравнению с теорией бруса фактором принципиально новым является кручение элемента пластинки.

Подробности интегрирования уравнения см. проф. Филоменко-Бородич М. М. «Основы теории упругости», Гостройиздат, 1947 г.

При помощи описанного выше математического аппарата для целей практики составлены расчётные таблицы.

В табл. 16 проф. Галеркина приводятся изгибающие моменты в центре свободно опёртой прямоугольной пластинки, нагруженной сплошной равномерной нагрузкой по прямоугольной площадке размерами  $a$  и  $b$ ;  $M_x$  и  $M_y$  находят умножением полной нагрузки  $P$  на соответствующий табличный коэффициент.

Для расчёта прямоугольных пластинок, нагруженных сплошной равномерной нагрузкой при различных условиях опирания, целесообразно воспользоваться приближёнными формулами. Полную нагрузку  $q$ , действующую на пластинку, следует разбить на части  $q_x$  и  $q_y$  (фиг. 57):

$$q_x = \frac{q \alpha_y l_y^4}{\alpha_x l_x^4 + \alpha_y l_y^4}.$$

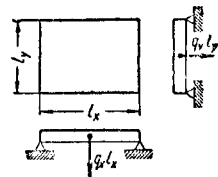
Значения коэффициента  $\alpha$  даны на фиг. 58. После этого в каждом направлении пластинку следует рассчитать, как балку единичной ширины.

Наибольший пролётный момент по оси  $x$ .

$$M_x = \frac{q_x l_x^2}{8}.$$

Наибольший опорный момент

$$M_x^0 = \frac{q_x l_x^2}{\pi}.$$



Фиг. 57. Схема приближённого расчёта прямоугольной пластинки

Таблица 16

$$l_y = l_x$$

Моменты по направлению оси  $Ox$

$$M_x = \alpha P$$

$\frac{a/l_x}{b/l_x}$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
0	—	0,305	0,238	0,198	0,170	0,148	0,133	0,118	0,106	0,096	0,087
0,1	0,367	0,273	0,222	0,187	0,162	0,142	0,127	0,113	0,102	0,092	0,083
0,2	0,299	0,245	0,206	0,176	0,153	0,135	0,121	0,108	0,098	0,088	0,080
0,3	0,255	0,218	0,188	0,161	0,144	0,128	0,115	0,103	0,093	0,084	0,076
0,4	0,226	0,197	0,173	0,151	0,135	0,121	0,108	0,098	0,088	0,080	0,072
0,5	0,200	0,179	0,159	0,141	0,126	0,111	0,102	0,092	0,083	0,075	0,068
0,6	0,183	0,163	0,146	0,131	0,117	0,105	0,095	0,086	0,078	0,071	0,064
0,7	0,166	0,148	0,133	0,120	0,108	0,097	0,088	0,080	0,073	0,066	0,060
0,8	0,151	0,136	0,123	0,111	0,100	0,090	0,082	0,074	0,067	0,061	0,055
0,9	0,137	0,124	0,112	0,101	0,091	0,083	0,075	0,068	0,062	0,056	0,051
1	0,124	0,113	0,102	0,092	0,083	0,075	0,068	0,062	0,056	0,051	0,045

$$l_y = l_x$$

Моменты по направлению оси  $Oy$

$$M_y = \beta P$$

Продолжение табл. 16

$\frac{a/l_x}{b/l_y}$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
0	—	0,367	0,299	0,255	0,216	0,200	0,183	0,166	0,151	0,137	0,124
0,1	0,305	0,273	0,245	0,218	0,197	0,179	0,163	0,148	0,136	0,124	0,113
0,2	0,238	0,222	0,206	0,188	0,173	0,159	0,146	0,133	0,123	0,112	0,102
0,3	0,198	0,187	0,176	0,161	0,151	0,141	0,131	0,120	0,111	0,101	0,092
0,4	0,170	0,162	0,153	0,144	0,135	0,126	0,117	0,109	0,100	0,091	0,083
0,5	0,148	0,142	0,135	0,128	0,121	0,111	0,105	0,097	0,090	0,083	0,075
0,6	0,133	0,127	0,121	0,115	0,108	0,102	0,095	0,088	0,082	0,075	0,068
0,7	0,118	0,113	0,108	0,103	0,098	0,092	0,086	0,080	0,074	0,068	0,062
0,8	0,106	0,102	0,098	0,093	0,088	0,083	0,078	0,073	0,067	0,062	0,056
0,9	0,096	0,092	0,088	0,085	0,080	0,075	0,071	0,066	0,061	0,056	0,051
1	0,087	0,083	0,080	0,076	0,072	0,068	0,064	0,060	0,055	0,051	0,046

$$l_y = 1,2 l_x$$

Моменты по направлению оси  $Ox$

$$M_x = \alpha P$$

Моменты по направлению оси  $Oy$

$$M_y = \beta P$$

Продолжение табл. 16

$\frac{a/l_x}{b/l_y}$	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1
0	—	0,253	0,188	0,146	0,119	0,098	—	0,282	0,225	0,180	0,149	0,123
0,2	0,314	0,222	0,170	0,136	0,111	0,091	0,235	0,202	0,171	0,144	0,121	0,100
0,4	0,245	0,192	0,153	0,125	0,103	0,084	0,168	0,152	0,134	0,116	0,099	0,082
0,6	0,202	0,165	0,135	0,115	0,092	0,076	0,131	0,119	0,097	0,091	0,081	0,067
0,8	0,171	0,142	0,118	0,099	0,082	0,068	0,106	0,097	0,088	0,078	0,07	0,056
1,0	0,143	0,123	0,103	0,088	0,072	0,059	0,087	0,081	0,073	0,065	0,056	0,047
1,2	0,124	0,105	0,084	0,074	0,062	0,051	0,074	0,068	0,062	0,055	0,047	0,040

$$l_y = 1,4 l_x$$

Моменты по направлению оси  $Ox$

$$M_x = \alpha P$$

Моменты по направлению оси  $Oy$

$$M_y = \beta P$$

Продолжение табл. 16

$\frac{a/l_x}{b/l_x}$	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1
0	—	0,264	0,209	0,166	0,127	0,105	—	0,289	0,222	0,177	0,143	0,121
0,2	0,324	0,232	0,180	0,146	0,120	0,099	0,232	0,193	0,161	0,141	0,119	0,098
0,4	0,256	0,202	0,163	0,134	0,111	0,092	0,165	0,149	0,131	0,113	0,096	0,079
0,6	0,215	0,177	0,147	0,122	0,102	0,084	0,128	0,117	0,105	0,092	0,079	0,066
0,8	0,184	0,155	0,132	0,110	0,092	0,076	0,103	0,095	0,085	0,075	0,065	0,054
1,0	0,160	0,136	0,116	0,098	0,082	0,068	0,085	0,079	0,071	0,063	0,055	0,045
1,2	0,139	0,120	0,102	0,087	0,073	0,060	0,072	0,067	0,062	0,054	0,046	0,039
1,4	0,121	0,104	0,089	0,076	0,064	0,053	0,062	0,058	0,052	0,046	0,041	0,034

Продолжение табл. 16

$$l_y = 1,6 l_x$$

Моменты по направлению оси $Ox$ $M_x = \alpha P$							Моменты по направлению оси $Oy$ $M_y = \beta P$					
$\frac{a/l_x}{b/l_x}$	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1
0	—	0,271	0,205	0,162	0,134	0,109	—	0,286	0,220	0,175	0,145	0,119
0,2	0,333	0,239	0,186	0,152	0,125	0,103	0,230	0,196	0,165	0,139	0,117	0,097
0,4	0,263	0,210	0,170	0,140	0,116	0,096	0,163	0,146	0,128	0,111	0,094	0,078
0,6	0,222	0,184	0,154	0,129	0,107	0,089	0,125	0,114	0,102	0,089	0,077	0,064
0,8	0,193	0,164	0,139	0,117	0,098	0,081	0,101	0,093	0,083	0,073	0,063	0,053
1,0	0,163	0,145	0,124	0,106	0,089	0,074	0,083	0,076	0,069	0,061	0,053	0,044
1,2	0,143	0,129	0,111	0,095	0,080	0,067	0,070	0,065	0,059	0,052	0,045	0,037
1,4	0,132	0,115	0,099	0,085	0,072	0,060	0,060	0,056	0,050	0,045	0,039	0,032
1,6	0,117	0,102	0,080	0,076	0,065	0,053	0,053	0,049	0,044	0,030	0,034	0,028

Продолжение табл. 16

$$l_y = 1,8 l_x$$

Моменты по направлению оси $Ox$ $M_x = \alpha P$							Моменты по направлению оси $Oy$ $M_y = \beta P$					
$\frac{a/l_x}{b/l_y}$	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1
0	—	0,275	0,209	0,166	0,137	0,112	—	0,284	0,218	0,174	0,144	0,118
0,2	0,337	0,243	0,191	0,156	0,129	0,106	0,228	0,194	0,163	0,138	0,115	0,095
0,4	0,268	0,214	0,175	0,144	0,120	0,099	0,161	0,144	0,126	0,109	0,093	0,077
0,6	0,227	0,189	0,158	0,133	0,111	0,092	0,123	0,112	0,100	0,088	0,075	0,063
0,8	0,197	0,168	0,143	0,121	0,102	0,084	0,089	0,080	0,081	0,072	0,062	0,051
1,0	0,175	0,151	0,130	0,111	0,093	0,077	0,081	0,075	0,067	0,059	0,051	0,043
1,2	0,155	0,135	0,117	0,101	0,085	0,071	0,068	0,063	0,057	0,050	0,043	0,036
1,4	0,139	0,122	0,106	0,091	0,077	0,064	0,059	0,054	0,049	0,043	0,037	0,031
1,6	0,125	0,109	0,095	0,082	0,072	0,058	0,051	0,047	0,043	0,038	0,033	0,027
1,8	0,112	0,098	0,086	0,074	0,063	0,052	0,045	0,042	0,038	0,033	0,029	0,024

Продолжение табл. 16

$$l_y = 2,0 l_x$$

Моменты по направлению оси $Ox$ $M_x = \alpha P$							Моменты по направлению оси $Oy$ $M_y = \beta P$					
$\frac{a/l_x}{b/l_y}$	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1
0	—	0,278	0,212	0,168	0,138	0,114	—	0,283	0,217	0,172	0,142	0,117
0,2	0,340	0,245	0,193	0,158	0,131	0,108	0,117	0,193	0,162	0,136	0,114	0,095
0,4	0,270	0,217	0,177	0,146	0,122	0,100	0,159	0,143	0,125	0,108	0,092	0,076
0,6	0,230	0,192	0,161	0,136	0,113	0,093	0,122	0,111	0,099	0,087	0,074	0,060
0,8	0,201	0,171	0,146	0,124	0,104	0,086	0,097	0,089	0,080	0,070	0,061	0,051
1,0	0,177	0,153	0,132	0,113	0,095	0,079	0,080	0,077	0,066	0,059	0,051	0,043
1,2	0,159	0,139	0,121	0,104	0,088	0,073	0,067	0,061	0,055	0,049	0,042	0,035
1,4	0,143	0,126	0,110	0,095	0,080	0,067	0,057	0,052	0,047	0,042	0,036	0,030
1,6	0,129	0,114	0,100	0,086	0,073	0,062	0,050	0,045	0,041	0,036	0,031	0,026
1,8	0,117	0,104	0,091	0,079	0,067	0,056	0,044	0,040	0,036	0,032	0,028	0,023
2,0	0,106	0,094	0,082	0,071	0,062	0,050	0,039	0,036	0,033	0,029	0,025	0,021

Коэффициенты  $m$  и  $n$  также даны на фиг. 58.  
Расчёт по оси  $Oy$  аналогичен.

При учёте кручения формулы приобретают вид:

$$\max M_x = v_x \cdot M_x;$$

$$v_x = 1 - \frac{5}{6} \frac{M_x}{M_y};$$

$$\max M_y = v_y M_y;$$

$$v_y = 1 - \frac{5}{6} \frac{M_y}{M_x}.$$

Здесь

$$\overline{M}_x = \frac{q l_x^2}{8}.$$

Расчёт круглой пластинки основан, так же как и прямоугольной, на применении дифференциального уравнения (стр. 169), но преобразованного к полярным координатам:

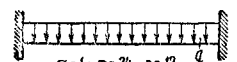
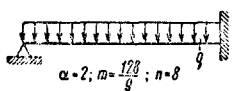
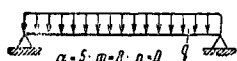
$$\frac{\partial^4 w}{\partial r^4} + \frac{2}{r} \frac{\partial^3 w}{\partial r^3} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial r} = 0$$

Радиальный момент (изгиб по радиусу)

$$M_r = -D \left( \mu \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{\mu}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \right).$$

Тангенциальный момент

$$M_t = -D \left( \mu \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \right).$$



Фиг. 58. Коэффициенты для формул приближённого расчёта прямоугольной пластинки

Поперечная сила

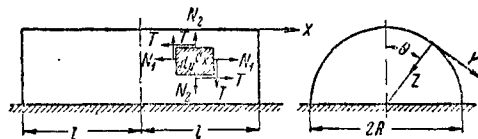
$$N_r = \frac{\partial M}{\partial r}.$$

Задача сводится к отысканию значения  $w$ , удовлетворяющего дифференциальному уравнению, после чего по приведённым выше формулам определяют внутренние усилия.

Ниже приводятся результаты для наиболее употребительных случаев (табл. 16').

### Оболочки

Рассматриваются оболочки двух видов — цилиндрические и купольные. Сущность работы таких оболочек заключается в малом влиянии изгибающих моментов при распре-



Фиг. 59. Внутренние усилия цилиндрической оболочки

делённых нагрузках, что позволяет при больших пролётах ограничиться небольшой толщиной перекрытия.

Выделив на поверхности цилиндрической оболочки бесконечно малый элемент (фиг. 59) с размерами  $dx$  и  $du$  и составив уравнения его равновесия, получают следующие дифференциальные уравнения:

Круглая пластинка

Таблица 16'

Схема	$W$	$M_r$	$M_t$	$N_r$
	$\frac{qR^4}{64 D(1+\mu)} \left[ \left(1+\mu\right) \frac{r}{R} - 2 \left(3+\mu\right) \left(\frac{r}{R}\right)^3 + (5+\mu) \right]$	$\frac{qR^4}{16} \left(3+\mu\right) \left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^3\right]$	$\frac{qR^4}{16} \left[3+\mu - \left(1+3\mu\right) \left(\frac{r}{R}\right)^3\right]$	$\frac{qr}{2}$
	$\frac{PR^3}{16 \pi D(1+\mu)} \left\{ 2 \left(1+\mu\right) \left(\frac{r}{R}\right)^3 \ln \frac{r}{R} + \left(3+\mu\right) \left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^3\right] \right\}$	$\frac{P}{4 \pi} \left(1+\mu\right) \ln \frac{r}{R}$	$\frac{P}{4 \pi} \left[ \left(1-\mu\right) - \left(1+\mu\right) \ln \frac{r}{R} \right]$	$\frac{P}{2 \pi r}$
	$\frac{MR^3}{2 D(1+\mu)} \left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^3\right]$	$M$	$M$	0
	$\frac{qR^4}{64 D} \left[1 - 2 \left(\frac{r}{R}\right)^3 + \left(\frac{r}{R}\right)^4\right]$	$\frac{qR^4}{16} \left[1+\mu - \left(3+\mu\right) \left(\frac{r}{R}\right)^3\right]$	$\frac{qR^4}{16} \left[ \left(1+\mu\right) - \left(1+3\mu\right) \left(\frac{r}{R}\right)^3 \right]$	$\frac{qr}{2}$
	$\frac{PR^3}{16 \pi D} \left\{ \left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^3\right] + 2 \left(\frac{r}{R}\right)^3 \ln \frac{r}{R} \right\}$	$\frac{P}{4 \pi} \left[1 + \left(1+\mu\right) \ln \frac{r}{R}\right]$	$\frac{P}{4 \pi} \left[ \mu + \left(1+\mu\right) \ln \frac{r}{R} \right]$	$\frac{P}{2 \pi r}$

Примечание.  $R$ —радиус пластинки;  
 $r$ —расстояние от центра пластинки до рассматриваемого сечения.



$$\frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial y} + X = 0;$$

$$\frac{\partial N_2}{\partial y} + \frac{\partial T}{\partial x} + Y = 0;$$

$$\frac{N_2}{R} + Z = 0,$$

где  $X, Y, Z$  — проекции нагрузки, отнесённой к единице поверхности;

$N_1$  — усилие по образующей;

$N_2$  — усилие по дуге;

$T$  — касательное усилие.

Усилия предполагаются рассчитанными на полную толщину оболочки и на единицу длины элемента.

**Частные решения.** Нагрузка — собственный вес оболочки  $p \left[ \frac{\text{кг}}{\text{см}^2} \right]$  поверхности:

$$X = 0;$$

$$Y = p \sin \theta;$$

$$Z = p \cos \theta.$$

Интегрирование уравнений и учёт краевых условий даёт:

$$N_1 = \frac{p(x^2 - l^2) \cos \theta}{R};$$

$$N_2 = -p R \cos \theta;$$

$$T = -2 p x \sin \theta.$$

В полученном решении сумма касательных усилий, развивающихся вдоль оболочки по периметру её опирания, должна быть воспринята опорным устройством (краевым элементом). В сечении на расстоянии  $x$  от начала такой элемент подвергается растягивающему усилию

$$N = \int_x^l T dx = p(l^2 - x^2).$$

Это усилие уравнивает суммарные нормальные напряжения в поперечном сечении оболочки.

Нагрузка сплошная равномерная  $q \left[ \frac{\text{кг}}{\text{см}^2} \right]$  по пролёту и длине оболочки. В этом случае:

$$X = 0;$$

$$Y = q \sin \theta \cos \theta;$$

$$Z = q \cdot \cos^2 \theta.$$

Интегрирование уравнений даёт:

$$N_1 = \frac{3}{2} \frac{q}{R} (x^2 - l^2) \cos 2\theta;$$

$$N_2 = -q R \cos^2 \theta;$$

$$T = -\frac{3}{2} q x \sin 2\theta.$$

Ветровая нагрузка (активное действие с наветренной стороны и отсасывающее с подветренной)  $w \left[ \frac{\text{кг}}{\text{см}^2} \right]$ , рассчитанная на единицу вертикальной поверхности. В этом случае:

$$Z = w \sin^2 \theta;$$

$$X = 0;$$

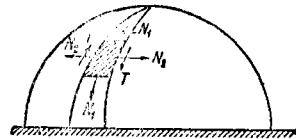
$$Y = w \cos^2 \theta;$$

$$N_1 = \frac{w}{2R} (l^2 - x^2) \sin 2\theta;$$

$$N_2 = -w R \sin^2 \theta;$$

$$T = wx \cos^2 \theta.$$

В случаях оболочки, имеющей вид эллипса и параболы, следует пользоваться выраженными для радиуса кривизны в функции угла  $\theta$ .



Фиг. 60. Схема равновесного состояния бесконечно малого элемента поверхности купола

Эллипс

$$R = \frac{a^2 b^2}{a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta},$$

где  $a$  и  $b$  — полуоси эллипса.

Парабола

$$R = \frac{R_0}{\cos^3 \theta},$$

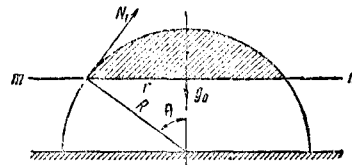
где  $R_0$  — радиус кривизны параболы в вершине.

Расчёт купольной оболочки основан на применении двух уравнений:

$$\frac{N_1}{R_1} + \frac{N_2}{R_2} + Z = 0;$$

$$N_1 = -\frac{G_0}{2\pi r \sin \theta},$$

где  $G_0$  — вес отсечённой части оболочки (с нагрузкой).



Фиг. 61. Схема равновесного состояния заштрихованной части купола

Первое уравнение является следствием проекции сил, приложенных к бесконечно малому элементу поверхности купола (фиг. 60) на радиус; второе — равенства нулю всех сил, приложенных к части купола выше линии  $m-n$  (фиг. 61).

Касательные усилия  $T$  при симметричной нагрузке равны нулю.

Сферическая оболочка под влиянием собственного веса  $p \left[ \frac{\text{кг}}{\text{см}^2} \right]$ :

$$R_1 = R_2 = a;$$

$$Z = p \cos \theta;$$

$$N_1 = -\frac{a}{1 + \cos \theta};$$

$$N_2 = -ap \left( \cos \theta - \frac{1}{1 + \cos \theta} \right).$$

Сферическая оболочка под влиянием равномерно распределённой нагрузки  $q \left[ \frac{\text{кг}}{\text{см}^2} \right]$  горизонтальной поверхности:

$$Z = q \cdot \cos^2 \theta;$$

$$N_1 = -\frac{qa}{2};$$

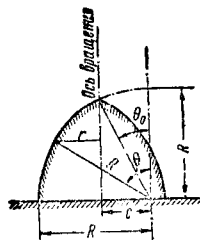
$$N_2 = \frac{qa}{2} \cos 2\theta.$$

Оболочка, образуемая вращением дуги окружности под влиянием собственного веса  $p \left[ \frac{\text{кг}}{\text{см}^2} \right]$

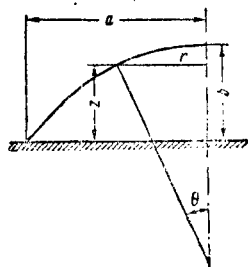
(фиг. 62):

$$N_1 = p \frac{R [R(\cos \theta_0 - \cos \theta) - c(\theta - \theta_0)]}{\sin \theta (R \sin \theta - c)};$$

$$N_2 = p \left[ R \left( \cos \theta - \frac{\cos \theta_0 - \cos \theta}{\sin^2 \theta} - c \left( \operatorname{ctg} \theta - \frac{\theta - \theta_0}{\sin^2 \theta} \right) \right) \right].$$



Фиг. 62. Оболочка, образованная вращением дуги окружности



Фиг. 63. Эллиптическая оболочка

Оболочка, образуемая вращением дуги окружности под влиянием равномерно распределённой нагрузки  $q \left[ \frac{\text{кг}}{\text{см}^2} \right]$ :

$$N_1 = \frac{q}{2} \left( R - \frac{c}{\sin \theta} \right);$$

$$N_2 = \frac{q}{2R} \left( R^2 \cos 2\theta + 2cR \sin \theta - \frac{c^2}{\sin^2 \theta} \right).$$

Эллиптическая оболочка под действием собственного веса  $p \left[ \frac{\text{кг}}{\text{см}^2} \right]$  (фиг. 63).

Формула поверхности эллипсоида от  $z = 0$  до  $z = z$ :

$$F_z = \left( \frac{\pi a}{b^2} \cdot z \sqrt{b^4 + e^2 z^2} + \frac{\pi a b^2}{e} \ln \frac{ez + \sqrt{b^4 + e^2 z^2}}{b^2} \right).$$

Для подсчёта полной поверхности следует положить  $z = b$ .

Здесь:  $e = \sqrt{a^2 - b^2}$  — линейный эксцентриситет;  
 $a, b$  — полуоси эллипса;

$$N_1 = \frac{(F_z - F_b) p}{2\pi r \sin \theta};$$

$$r = \frac{a}{b} \sqrt{b^2 - z^2};$$

$$\sin \theta = \frac{b \sqrt{b^2 - z^2}}{\sqrt{b^4 + e^2 z^2}};$$

$$N_2 = \frac{pb^3}{(b^2 - z^2) \sqrt{b^4 + e^2 z^2}} \left[ \frac{a^3}{2b} + \frac{a^2 b}{2e} \ln \frac{(a+e)b}{ez + \sqrt{b^4 + e^2 z^2}} - \frac{a^2 z^2}{2b^2(b^2 - z^2)} - p \frac{3a^2 z}{2b^2} \right].$$

Эллиптическая оболочка под влиянием равномерно распределённой нагрузки  $q \left[ \frac{\text{кг}}{\text{см}^2} \right]$ :

$$N_1 = \frac{q}{2} a \frac{\sqrt{b^4 + e^2 z^2}}{b^2};$$

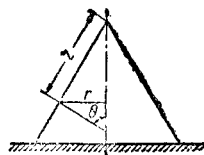
$$N_2 = \frac{qa}{2} \cdot \frac{a^2}{b^2} \frac{b^2 - 2z^2}{\sqrt{b^4 + e^2 z^2}}.$$

Коническая оболочка (фиг. 64).

Действие собственного веса  $p \left[ \frac{\text{кг}}{\text{см}^2} \right]$ :

$$N_1 = -\frac{zp}{2 \sin^2 \theta};$$

$$N_2 = -\frac{1}{2} z \operatorname{ctg}^2 \theta.$$



Фиг. 64. Коническая оболочка

Действие равномерно распределённой нагрузки  $q \left[ \frac{\text{кг}}{\text{см}^2} \right]$ :

$$N_1 = -\frac{zq}{2} \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta};$$

$$N_2 = -\frac{1}{2} zq \frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta}.$$

Расчёт на ветровую нагрузку сферической оболочки (фиг. 65). Проекция интенсивности ветрового усилия на нормаль к поверхности оболочки определяется по формуле

$$w = w_0 \sin^2 \theta \cdot \sin^2 \psi,$$

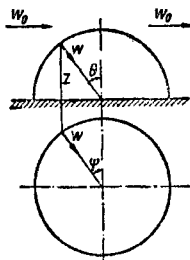
где  $w_0$  — интенсивность ветрового давления на единичную вертикальную поверхность;

$$N_1 = \frac{w_0 z}{\cos \theta} [0,85 (1 - 3 \cos^2 \theta) \sin \psi -$$

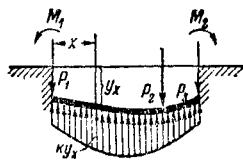
$$- 0,45 (3 - \cos^2 \theta) \sin 3 \psi];$$

$$N_2 = - w_0 z \cos \theta (0,85 \sin \psi - 0,15 \sin 3 \psi);$$

$$T = \frac{w_0 z}{3} (0,85 \cos \psi - 0,45 \cos 3 \psi).$$



Фиг. 65. Действие ветра на оболочку



Фиг. 66. Расчётная схема балки на упругом основании

### БАЛКИ НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ

#### Балки на сплошном упругом основании

Современная общепотребительная теория расчёта балок, покоящихся на сплошном упругом основании, основана на гипотезе, устанавливающей линейную зависимость между вертикальным перемещением подошвы балки и реактивным отпором основания (фиг. 66), т. е.

$$q_k = - k y_x.$$

Подставив это значение реактивных сопротивлений в дифференциальное уравнение изгиба бруса

$$EI \frac{d^4 y}{dx^4} = q(x),$$

можно получить дифференциальное уравнение балки на упругом основании:

$$EI \frac{d^4 y}{dx^4} + k y_x = p(x),$$

где  $p(x)$  — активная распределённая нагрузка, действующая на балку;

$k \left[ \frac{\text{кг}}{\text{см}^2} \right]$  — коэффициент сопротивления основания.

В табл. 17 даются значения  $k$  для ряда грунтов и материалов. Интеграл дифференциального уравнения для случая  $p(x) = 0$  имеет вид:

$$y_x = C_1 e^{\xi} \cos \xi + C_2 e^{\xi} \sin \xi + C_3 e^{-\xi} \cos \xi + C_4 e^{-\xi} \sin \xi,$$

где  $\xi = \frac{x}{L}$  — относительная абсцисса сечения

$$L = \sqrt[4]{\frac{4EI}{k}};$$

$C_1, C_2, C_3, C_4$  — постоянные интегрирования, соответствующие заданным граничным условиям.

Таблица 17

Значения  $k$

Характеристика основания	Наименование грунта	$k \text{ [кг/см}^2\text{]}$
Грунт малой плотности	Пылуи, песок свеженасыпанный, глина мокрая	0,1—0,5
Грунт средней плотности	Песок слежавшийся, гравий насыпной, глина влажная	0,5—5
Грунт плотный	Песок плотно слежавшийся, гравий плотно слежавшийся, глина малой влажности	5—10
Грунт весьма плотный	Глина твёрдая, щебень	10—20
Грунт твёрдый	Мягкая трещиноватая скала, известняк, песчаник	20—100
Искусственное основание	Свайное основание	5—15
Строительные материалы	Кирпич	400—500
	Бутовая кладка	500—600
	Бетон	800—1 500
	Железобетон	800—1 500

Метод расчёта балки на упругом основании существенно зависит от её длины.

При этом различают следующие случаи:

$$l < 0,8 L,$$

где  $l$  — длина балки.

Балка в этом случае рассматривается бесконечно жёсткой и рассчитывается по теории неравномерного сжатия.

1, 2  $L < l < 4 L$  — балки короткие, рассчитываются по методу начальных параметров (см. ниже);

$l > 6 L$  — балки длинные, рассчитываются по формулам для бесконечно длинных балок.

#### Формулы для расчёта бесконечно длинных балок

Балка бесконечно длинная. Нагрузка (фиг. 67), сила  $P$  и момент  $M$  в начальном сечении. Путём соответствующего подбора величин  $C$ , входящих в выражение интеграла



Фиг. 67. Бесконечно длинная балка на упругом основании

дифференциального уравнения, получают следующие общие выражения деформаций  $y_x$ ,  $\varphi_x$  и сил  $M_x$ ,  $Q_x$ :

$$y_x = - \frac{L^2}{2EI} M U_x - \frac{L^3}{2EI} P T_x;$$

$$\varphi_x = \frac{L}{EI} M T_x + \frac{L^2}{2EI} P W_x;$$

Т а б л и ц а 18

Функции влияния						
	$Q$	$M$	$\varphi_0$	$y_0$	$q$	$y_1, y_2, y_3, y_4$
$y_x$	$\frac{L^3}{EI} y_4$	$\frac{L^3}{EI} y_3$	$L y_2$	$y_1$	$\frac{1-y_1}{k}$	$y_1 = \operatorname{ch} \xi \sin \xi$ $y_2 = \frac{1}{2} (\operatorname{ch} \xi \sin \xi + \cos \xi \operatorname{sh} \xi)$ $y_3 = \frac{1}{2} \operatorname{sh} \xi \sin \xi$ $y_4 = \frac{1}{4} (\operatorname{ch} \xi \sin \xi - \cos \xi \operatorname{sh} \xi)$
$\varphi_x$	$\frac{L^2}{EI} y_3$	$\frac{L}{EI} y_2$	$y_1$	$-\frac{4 y_3}{L}$	$\frac{4}{kL} y_4$	
$M_x$	$L y_2$	$y_1$	$-k L^3 y_4$	$-k L^2 y_3$	$L y_2$	
$Q_x$	$y_1$	$-\frac{4 y_3}{L}$	$-k L^2 y_4$	$-k L y_3$	$L y_2$	Значения функций даны в табл. 20

$$M_x = MW_x + L PV_x;$$

$$Q_x = -\frac{2}{L} MV_x + PU_x.$$

Здесь:

$$T_x = e^{-\xi} \cos \xi;$$

$$U_x = e^{-\xi} (\cos \xi - \sin \xi);$$

$$V_x = e^{-\xi} \sin \xi;$$

$$W_x = e^{-\xi} (\sin \xi + \cos \xi).$$

Значения этих функций даны в табл. 19.



Фиг. 68. Бесконечно длинная односторонняя балка на упругом основании

Балка односторонняя, бесконечно длинная. Нагрузка (фиг. 68), сила  $P$  и момент  $M$  в начальном сечении:

$$y_x = \frac{L^3}{4EI} MV_x + \frac{L^3}{8EI} PW_x;$$

$$\varphi_x = \frac{L}{4EI} MU_x - \frac{L^2}{4EI} PV_x;$$

$$M_x = \frac{M}{2} T_x - \frac{L}{4} PU_x;$$

$$Q_x = -\frac{P}{2} T_x - \frac{1}{2L} MW_x.$$

Формулы для расчёта коротких балок. Наилучшим методом расчёта коротких балок является метод начальных параметров, состоящий в том, что любой силовой фактор, возникающий в произвольном сечении балки, выражается через силовые факторы, возникающие в начальном сечении, а также и расположенные левее данного сечения.

Исходя из выражения общего интеграла дифференциального уравнения, получены величины функций влияния, т. е. таких функций, умножение на которые данного силового фактора даёт значение его влияния на изучаемый

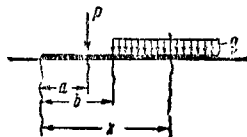
сечением.

В табл. 18 приведены указанные функции влияния для случая деформации  $y_0$ , поворота  $\varphi_0$ , силы  $Q$ , момента  $M$  и нагрузки  $q$ . Функции влияния, соответствующие более высоким степеням нагрузки, получаются путём интегрирования функции влияния для силы  $Q$ .

Для пояснения пользования таблицей функции влияния допустим, что следует составить выражение для  $y_x$  в балке, нагруженной согласно фиг. 69:

$$y_x = y_0 \cdot y_1(x) + \varphi_0 y_2(x) - P \frac{L^3}{EI} y_4(x-a) - q \frac{[1-y_1(x-b)]}{k}.$$

В полученном выражении  $\varphi_0$  и  $y_0$  неизвестны, поэтому следует по описанной схеме составить общие выражения для  $M_l$  и  $Q_l$  (для сечения на правом конце балки) и приравнять их нулю. Решение полученной системы уравнений даёт  $y_0$  и  $\varphi_0$ , после чего становится возможным, пользуясь той же таблицей, подсчитать любой фактор в любом



Фиг. 69. Балка конечных размеров на упругом основании

сечении. Аналогично решается задача и при иных краевых закреплениях. Числовые значения функций  $y_1, y_2, y_3, y_4$  — см. табл. 20.

### Балки на упругих опорах

Балки на отдельных упругих опорах практически также рассчитываются на основе применения гипотезы линейной пропорциональности между давлением, производимым балкой на опору, и её упругой осадкой:

$$A_n = ky_n,$$

Таблица 19

Функции  $U$ ,  $T$ ,  $W$ ,  $V$  для бесконечно длинной балки

$\xi = \frac{x}{L}$	$U_x$	$T_x$	$W_x$	$V_x$
0,0	1,0000	1,0000	1,0000	0,0000
0,1	0,8100	0,9003	0,9907	0,0904
0,2	0,6398	0,8024	0,9651	0,1627
0,3	0,4888	0,7077	0,9267	0,2190
0,4	0,3564	0,6174	0,8784	0,2610
0,5	0,2415	0,5323	0,8231	0,2908
0,6	0,1431	0,4530	0,7628	0,3098
0,7	0,0599	0,3798	0,6997	0,3199
$\frac{1}{4}\pi$	0,0000	0,3224	0,6448	0,3224
0,8	-0,0093	0,3131	0,6354	0,3223
0,9	-0,0657	0,2527	0,5712	0,3185
1,0	-0,1108	0,1988	0,5083	0,3095
1,1	-0,1457	0,1510	0,4476	0,2966
1,2	-0,1716	0,1091	0,3899	0,2808
1,3	-0,1897	0,0729	0,3355	0,2626
1,4	-0,2011	0,0419	0,2849	0,2430
1,5	-0,2068	0,0158	0,2384	0,2226
$\frac{1}{2}\pi$	-0,2079	0,0000	0,2079	0,2079
1,6	-0,2077	-0,0059	0,1959	0,2018
1,7	-0,2047	-0,0235	0,1576	0,1811
1,8	-0,1985	-0,0376	0,1234	0,1610
1,9	-0,1839	-0,0484	0,0932	0,1416
2,0	-0,1794	-0,0563	0,0667	0,1230
2,1	-0,1675	-0,0618	0,0439	0,1057
2,2	-0,1548	-0,0652	0,0244	0,0896
2,3	-0,1416	-0,0668	0,0080	0,0748
$\frac{3}{4}\pi$	-0,1340	-0,0670	0,0000	0,0670
2,4	-0,1280	-0,0669	-0,0056	0,0613
2,5	-0,1149	-0,0658	-0,0166	0,0492
2,6	-0,1019	-0,0636	-0,0254	0,0382
2,7	-0,0895	-0,0608	-0,0320	0,0288
2,8	-0,0777	-0,0573	-0,0369	0,0204
2,9	-0,0663	-0,0534	-0,0403	0,0131
3,0	-0,0563	-0,0493	-0,0423	0,0070
3,1	-0,04688	-0,04501	-0,04314	0,00187
$\pi$	-0,04321	-0,04321	-0,04321	0,00000
3,2	-0,03831	-0,04069	-0,04307	-0,00238
3,3	-0,03060	-0,03642	-0,04224	-0,00584
3,4	-0,02374	-0,03227	-0,04079	-0,00852
3,5	-0,01769	-0,02828	-0,03887	-0,01059
3,6	-0,01241	-0,02450	-0,03659	-0,01209
3,7	-0,00787	-0,02097	-0,03407	-0,01310
3,8	-0,00401	-0,01770	-0,03133	-0,01368
3,9	-0,00077	-0,01469	-0,02862	-0,01393
$\frac{5}{4}\pi$	0,00000	-0,01393	-0,02786	-0,01393
4,0	0,00189	-0,01197	-0,02583	-0,01386
4,1	0,00403	-0,00953	-0,02309	-0,01356
4,2	0,00572	-0,00735	-0,02042	-0,01307
4,3	0,00699	-0,00544	-0,01787	-0,01243
4,4	0,00791	-0,00377	-0,01546	-0,01169
4,5	0,00852	-0,00234	-0,01320	-0,01082
4,6	0,00886	-0,00113	-0,01112	-0,00999
4,7	0,00898	-0,00011	-0,00921	-0,00910
$\frac{6}{4}\pi$	0,00898	0,00000	-0,00898	-0,00898
4,8	0,00892	0,00072	-0,00748	-0,00820
4,9	0,00870	0,00139	-0,00593	-0,00732
5,0	0,00837	0,00191	-0,00455	-0,00646
5,1	0,00795	0,00230	-0,00234	-0,00564
5,2	0,00746	0,00259	-0,00229	-0,00488
5,3	0,00692	0,00277	-0,00139	-0,00416
5,4	0,00636	0,00287	-0,00063	-0,00350
7/4 $\pi$	0,00579	0,00290	0,00000	-0,00290
5,5	0,00578	0,00290	0,00001	-0,00289
5,6	0,00520	0,00287	0,00053	-0,00234
5,7	0,00464	0,00279	0,00095	-0,00184
5,8	0,00409	0,00268	0,00127	-0,00141
5,9	0,00356	0,00254	0,00152	-0,00102
6,0	0,00307	0,00238	0,00169	-0,00069
6,1	0,00261	0,00221	0,00180	-0,00041
6,2	0,00219	0,00202	0,00185	-0,00017
8/4 $\pi$	0,00187	0,00187	0,00187	0,00000
6,3	0,00181	0,00184	0,00187	-0,00003
6,4	0,00146	0,00165	0,00184	-0,00019
6,5	0,00115	0,00147	0,00179	-0,00032
6,6	0,00087	0,00129	0,00172	-0,00043
6,7	0,00063	0,00113	0,00162	-0,00049
6,8	0,00042	0,00097	0,00152	-0,00055
6,9	0,00024	0,00082	0,00141	-0,00059
7,0	0,00009	0,00069	0,00129	-0,00060
9/4 $\pi$	0,00000	0,00060	0,00120	-0,00000

Таблица 2

Функции  $u_1$ ,  $u_2$ ,  $u_3$ ,  $u_4$  для короткой балки

$\frac{x}{L}$	$u_1$	$u_2$	$u_3$	$u_4$
0	1,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,1	1,0000	0,1000	0,0050	0,00015
0,2	0,9997	0,2000	0,0200	0,00135
0,3	0,9987	0,2999	0,0450	0,0045
0,4	0,9957	0,39965	0,0800	0,0107
0,5	0,9895	0,49895	0,1248	0,0208
0,6	0,9784	0,59745	0,17975	0,0360
0,7	0,9600	0,6944	0,24435	0,0571
$\frac{1}{4}\pi$	0,9366	0,77545	0,30712	0,0806
0,8	0,9318	0,7891	0,31855	0,08515
0,9	0,9331	0,8035	0,40205	0,1211
1,0	0,8337	0,96675	0,49445	0,1657
1,1	0,7568	1,04645	0,59515	0,2203
1,2	0,6561	1,1173	0,70345	0,28515
1,3	0,5272	1,1767	0,81825	0,3612
1,4	0,3556	1,22165	0,9383	0,4490
1,5	0,1664	1,24855	1,06195	0,5490
$\frac{1}{2}\pi$	0,0000	1,2546	1,15065	0,6273
1,6	-0,0753	1,2319	1,3118	0,7864
1,7	-0,7060	1,17885	1,4326	0,9237
1,8	-0,7060	1,17885	1,4326	0,9237
1,9	-1,1049	1,0888	1,54635	1,0727
2,0	-1,5656	0,95575	1,64995	1,2325
2,1	-2,0923	0,7735	1,73555	1,4019
2,2	-2,6882	0,5351	1,8018	1,57905
2,3	-3,3532	0,23345	1,84075	1,7614
$\frac{3}{4}\pi$	-3,7638	0,0335	1,8484	1,86515
2,4	-4,0976	-0,1386	1,8461	1,94605
2,5	-4,9128	-0,5885	1,81045	2,12925
2,6	-5,8003	-1,1236	1,72555	2,3065
2,7	-6,7565	-1,7599	1,58265	2,47245
2,8	-7,7759	-2,4770	1,3721	2,6208
2,9	-8,8471	-3,3079	1,08375	2,7443
3,0	-9,9609	-4,23845	0,70685	2,8346
3,1	-11,1119	-5,30225	0,2303	2,8823
$\pi$	-11,5919	-5,77435	0	2,8872
3,2	-12,2655	-6,47105	-0,3574	2,8769
3,3	-13,4048	-7,7549	-1,0678	2,80675
3,4	-14,5008	-9,15065	-1,9121	2,6589
3,5	-15,5198	-10,65245	-2,9014	2,4195
3,6	-16,4218	-12,25075	-4,04585	2,0735
3,7	-17,1622	-13,9315	-5,35435	1,60485
3,8	-17,6375	-15,67605	-6,8343	0,9969
3,9	-17,9387	-17,45985	-8,4909	0,2321
$\frac{5}{4}\pi$	-17,9512	-17,94425	-8,96685	-0,0035
4,0	-17,8493	-19,25235	-10,3265	-0,7073
4,1	-17,3472	-21,0160	-12,3404	-1,8392
4,2	-16,3505	-22,70545	-14,52735	-3,1812
4,3	-14,7722	-24,26685	-16,8773	-4,7501
4,4	-12,5180	-25,63725	-19,37425	-6,5615
4,5	-9,4890	-26,74465	-21,9959	-8,6290
4,6	-5,5791	-27,50565	-24,71165	-10,9638
4,7	-0,6812	-27,8274	-27,4823	-13,57315
$\frac{3}{2}\pi$	0,0000	-27,8317	-27,8272	-13,91585
4,8	5,3164	-27,60515	-30,2589	-16,4604
4,9	12,5239	-26,72385	-32,9814	-19,6232
5,0	21,0504	-25,05645	-35,57745	-23,0525
5,1	39,9997	-22,46605	-37,96185	-26,7317
5,2	42,4661	-18,8057	-40,0350	-30,6346
5,3	55,5317	-13,9201	-41,68225	-34,72455
5,4	70,2637	-7,6440	-42,77265	-38,9524
$\frac{7}{4}\pi$	86,3223	-0,00145	-43,1597	-43,1604
5,5	86,7044	0,19005	-43,15925	-43,2557
5,6	104,8687	9,75435	-42,67745	-47,5556
5,7	124,7352	21,2199	-41,14535	-51,75625
5,8	146,2448	34,7564	-38,32395	-55,74285
5,9	169,2837	50,5203	-34,1198	-59,38045
6,0	193,6813	68,65775	-28,2116	-62,5106
6,1	219,2004	89,29465	-20,3042	-64,9518
6,2	245,5231	112,5249	-10,2356	-66,3981
$2\pi$	267,7468	133,87245	0,0000	-66,9362

Продолжение табл. 20

$\frac{x}{L}$	$y_1$	$y_2$	$y_3$	$y_4$
6,3	272,2487	138,4120	2,28885	-66,91745
6,4	298,8909	166,9722	17,5862	-65,9486
6,5	324,7861	198,1637	35,77125	-63,31045
6,6	349,2554	231,88005	57,2528	-58,6895
6,7	371,4244	267,9374	82,2255	-51,74295
6,8	390,2974	306,0558	110,9037	-42,11895
6,9	404,7145	347,34985	143,1819	-30,1819
7,0	413,3762	386,80715	180,1191	-13,2842
$\frac{7}{4} \pi$	415,2447	415,2444	207,62205	-0,00015
7,1	414,8263	428,2849	220,87175	-6,7296
7,2	407,4216	469,4772	265,76635	31,02805
7,3	389,3783	509,41565	314,72645	60,0189
7,4	358,7306	546,93425	367,56875	94,1019
7,5	313,3700	580,67035	423,9858	133,6506
7,6	251,0334	609,0402	483,5233	179,00345
7,7	169,3472	630,22945	545,5557	230,44115
7,8	65,8475	642,1835	609,25355	288,16805
$\frac{5}{2} \pi$	0,0000	643,9927	643,99255	321,99635
7,9	-62,0375	642,58715	673,6057	352,3123
8,0	-216,8647	628,8779	737,31005	422,8713
8,1	-401,1647	598,23435	798,81785	499,7008
8,2	-617,4142	547,5808	853,28775	582,49745
8,3	-867,9091	478,5993	907,5542	670,7544
8,4	-1154,6587	372,78655	950,11574	763,7226
8,5	-1479,3701	241,41355	981,0984	860,3917
8,6	-1843,2880	75,6088	997,25265	959,44335
$\frac{11}{4} \pi$	-1997,5106	0,0001	998,75525	998,7553
8,7	-2247,0402	-128,58235	994,93765	1059,2289
8,8	-2690,4845	-375,1167	970,1250	1156,18385
8,9	-3172,6917	-667,794	918,36635	1252,35606
9,0	-3691,4815	-1010,87995	834,3607	1340,3007
9,1	-4243,551	-1407,3690	714,40845	1418,0930
9,2	-4824,0587	-1860,5365	551,49275	1481,76105
9,3	-5426,5154	-2372,94855	340,3091	1526,7834
9,4	-6042,3167	-2946,2705	74,8875	1548,0229
$\frac{3}{2} \pi$	-6195,8239	-3097,91195	0,0000	1548,9560
9,5	-6660,9594	-3581,47555	-250,99585	1539,7669
9,6	-7269,3664	-4278,16925	-643,4861	1495,5985
9,7	-7851,7063	-5034,47135	-1108,6182	1408,61742
9,8	-8389,5687	-6847,0360	-1652,2517	1271,2663
9,9	-8860,9431	-8710,27695	-2279,73540	1075,36802
10,0	-9240,8733	-7616,14615	-2995,73945	812,36357

где  $A_n$  — полное давление, передаваемое от балки на опору;

$y_n$  — вертикальное смещение опоры  $n$ ;

$k$  — коэффициент сопротивляемости опоры, т. е. усилие, создающее в опоре единичную просадку (фиг. 70).

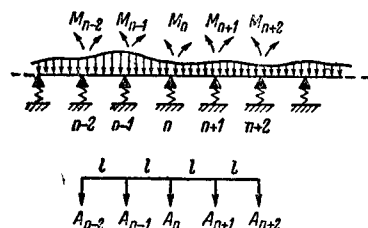
За неизвестные величины, как и в неразрезной балке, принимаются опорные моменты. Для их определения составляют каноническое уравнение метода сил, из условия равенства нулю угловой деформации на  $n$ -ой опоре.

Если обозначить  $\alpha = \frac{6EI}{k l^3}$ , то это уравнение будет иметь пятичленную структуру:

$$M_{n-2}\alpha + M_{n-1}(1 - 4\alpha) + M_n(4 + 6\alpha) + M_{n+1}(1 - 4\alpha) + M_{n+2}\alpha = k_n,$$

где

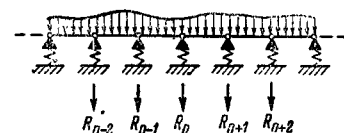
$$k_n = \left[ \alpha l (2R_n - R_{n+1} - R_{n-1}) - \frac{6}{l} (A_{n+1}^\phi + B_n^\phi) \right].$$



Фиг. 70. Балка на упругих опорах

Здесь  $A_{n+1}^\phi$  и  $B_n^\phi$  берутся из табл. 11 (фиктивные опорные реакции — см. неразрезные балки);

$R_n, R_{n+1}, R_{n-1}$  — давление на опоры от нагрузки в предположении введения шарниров во всех опорных сечениях (фиг. 71).



Фиг. 71. Опорные давления в шарнирной схеме

Решением системы уравнений находятся опорные моменты, и затем каждый пролёт рассчитывается как статически определимая балка на действие нагрузки и найденных моментов.

Помимо рассмотренной теории расчёта балок на упругом основании, базирующейся на линейном законе упругости, в современной литературе имеется ряд иных решений — расчёт балок на упругой полуплоскости или упругом полупространстве (см. раздел «Сопротивление материалов»).

## ДИНАМИКА СООРУЖЕНИЙ

### ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

#### Динамические нагрузки и динамические коэффициенты

Динамическая нагрузка складывается из множества переменных по величине, положению и направлению сил. Часто эти силы периодически повторяют своё воздействие по тому или иному закону. Результатом такого воздействия являются колебания сооружений.

Удар — внезапно приложенная нагрузка — является одним из видов динамических нагрузок. Вместе с тем удар надо рассматривать и как одну из характеристик подвижной и переменной нагрузки, будь то автомобиль, поезд, отдельный человек, толпа, ветер и разного рода вибраторы (моторы, двигатели, станки, молоты, копы и пр.).

Если рассмотреть даже только элемент динамической нагрузки, например, паровоз или отдельного человека, мы обнаружим,



данные для паровоза, имеющего характеристику 1-3-1 С; при этом на фиг. 73 римские цифры обозначают номера осей, II — ведущая, остальные — спаренные; пунктирная кривая соответствует ведущей оси при работе с закрытым регулятором. Статические давления для I и II осей — 7850 кг, для III оси — 7900 кг.

Технические условия проектирования железнодорожных и автодорожных мостов рекомендуют при определении динамического коэффициента пользоваться следующей формулой:

$$\mu = 1 + \frac{\alpha}{\beta + l}, \quad (8)$$

где  $l$  — пролёт моста в м;  
 $\alpha$  и  $\beta$  — постоянные величины, приведённые в табл. 21.

Таблица 21  
Значения  $\alpha$  и  $\beta$

Типы мостов	$\alpha$	$\beta$
<b>Железнодорожные</b>		
Каменные, бетонные и железобетонные со сплошным надарочным строением . . . . .	5	20
Железобетонные, балочные и арочные . . . . .	12	20
Стальные . . . . .	27	30
<b>Автодорожные</b>		
Балочные и арочные . . . . .	15	37,5
Висячие . . . . .	50	75

### Задачи и методы динамических расчётов

Динамика сооружений в основном рассматривает два типа задач: 1) по заданным геометрическим и упругим (статическим) характеристикам системы найти её динамические характеристики — собственные частоты и главные формы колебаний; 2) по заданным внешним динамическим воздействиям определить внутренние усилия и деформации сооружения.

Точные и приближённые методы решения этих задач являются аналитическими. Графические и графоаналитические методы мало развиты.

Метод непосредственного интегрирования состоит в интегрировании дифференциальных уравнений колебаний; эти уравнения могут быть записаны в форме дифференциальных уравнений равновесия, в которых помимо заданных сил  $P$  учтены силы инерции, т. е.:

$$\sum P_x - \sum m \cdot x'' = 0; \sum M_x - \sum m \cdot \xi'' = 0^*, \quad (9)$$

либо в виде уравнений перемещений:

$$x_n = \Delta_{n \Sigma P} - \sum m_k \cdot x_k'' \cdot \delta_{nk}^*. \quad (10)$$

☞ Аналогично для остальных координат.

Здесь  $\Delta_{n \Sigma P}$  — перемещение по направлению  $\Delta n$  от заданных сил  $P$ ;  
 $\delta_{nk}$  — статическое перемещение по тому же направлению от инерционной силы  $m_k \cdot x_k'' = 1$ .

Для большинства задач решения дифференциальных уравнений могут быть даны в виде общих уравнений колебательного процесса, канонических уравнений, аналогичных уравнениям статики сооружений, или в виде готовых формул.

**Энергетический метод.** Основой этого метода служит закон сохранения энергии:

$$T + V = \text{const}, \quad (11)$$

где  $T$  — потенциальная энергия системы:

$$T = \frac{1}{2} \sum P \cdot \Delta_P = \sum \int \left( \frac{M^2 ds}{2EI} + \frac{M_{kp}^2 ds}{2GI'} + \frac{N^2 ds}{2EF} + \frac{Q^2 ds}{2GF} k \right); \quad (12)$$

$V$  — кинетическая энергия системы:

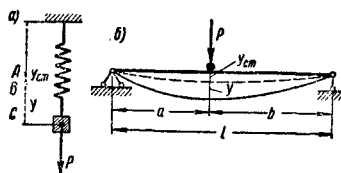
$$V = \frac{1}{2} \sum m v^2. \quad (13)$$

В формулах (12) и (13)  $M$ ,  $M_{kp}$ ,  $N$  и  $Q$  — внутренние силы соответственно изгиба, кручения, растяжения и сдвига;  $v$  — скорость;  $k$  — коэффициент распределения сдвигов.

Приближённые методы основываются часто на энергетическом; удобен метод последовательных приближений; в результате упрощений точных решений также могут быть получены некоторые приближения.

### Динамические характеристики системы с одной степенью свободы

**Свободные гармонические колебания.** Уравнение равновесия применительно к схеме на фиг. 74, а, где  $A$  — уровень системы до



Фиг. 74

нагружения,  $B$  — уровень статической деформации,  $C$  — положение в движении, имеет вид:

$$P - c(y_{cm} + y) - m y'' = 0. \quad (14)$$

При статическом равновесии соблюдается условие

$$P = c y_{cm},$$

где  $c = P : y_{cm} = 1 : \overline{y_{cm}}$  — жёсткость системы или сила, вызывающая единичную деформацию ( $y_{cm}$ ); после замены  $c : m = \varphi^2$  получают дифференциальное уравнение:

$$y'' + \varphi^2 y = 0. \quad (14')$$



Здесь  $\varphi$  — круговая частота колебаний:

$$\begin{aligned}\varphi &= \sqrt{\frac{c}{m}} = \sqrt{\frac{g}{y_{cm}}} \\ &= \sqrt{\frac{1}{m y_{cm}}} = \frac{2\pi}{T},\end{aligned}\quad (15)$$

где  $T$  — период колебаний.

Решение уравнения (14'):

$$y = A \sin \varphi t + B \cos \varphi t = A_1 \sin(\varphi t + \alpha). \quad (16)$$

Здесь  $A_1$  — амплитуда,  $\alpha$  — начальная фаза,

$\alpha = \arcsin \frac{y_0}{A_1}$ ;  $A, B$  или  $A_1, \alpha$  определяются заданными граничными условиями. Например, если  $t = 0, y = y_0 = 0, y' = y'_0 = v_0$  (начальная скорость), то  $B = 0, A = v_0 : \varphi = A_1$  и  $\alpha = 0$ .

Если же при  $t = 0$  начальное перемещение  $y = y_0 \neq 0$ , то уравнение свободных колебаний (16) может быть записано так:

$$y = y_0 \cos \varphi t + \frac{v_0}{\varphi} \sin \varphi t. \quad (16')$$

В технических расчётах особенно необходимыми являются частота (15) и форма колебаний, определяемая амплитудой  $A_1$  и эпюрой прогибов системы. Иногда взамен формулы (15) пользуются следующей формулой<sup>1</sup>, дающей число колебаний в 1 мин. [сравнить с (3)]:

$$n = \frac{30}{\pi} \varphi \approx \frac{300}{\sqrt{y_{cm}}} \text{ мин.}^{-1}. \quad (17)$$

Статическая деформация  $y_{cm}$  под грузом определяется методами сопротивления материалов или строительной механики. Например, в случае колебаний пружины (фиг. 74, а)

$$y_{cm} = \frac{2\pi n P R^3}{G I_p},$$

где  $n$  — число витков;

$G \approx 0,4E$  — модуль сдвига;

$I_p$  — полярный момент инерции сечения пружины.

В случае колебаний свободно лежащей балки (фиг. 74, б)

$$y_{cm} = \frac{P a^2 b^2}{3 E I},$$

где  $EI$  — жёсткость при изгибе. Для балки, защемлённой одним концом (фиг. 75), при поперечных колебаниях  $y_{cm} = Pl^3 : 3EI$ ; при продольных колебаниях  $y_{cm} = \frac{Pl}{EF}$ , где  $EF$  —

жёсткость при растяжении. Для системы, приведённой на фиг. 76, определяя частоту приближённо по (15), следует вместо  $y_{cm}$  подставить

$$(P_1 y_1^2 + P_2 y_2^2 + \dots + P_n y_n^2) : (P_1 y_1 + P_2 y_2 + \dots + P_n y_n),$$

где все деформации  $y$  определяются статическим расчётом.

Для приближённого учёта собственного веса, если он равномерно распределён с ин-

тенсивностью  $q$ , следует в приведённых формулах взамен  $P$  подставить:

для балки по фиг. 74, б

$$P + \frac{17}{35} ql,$$

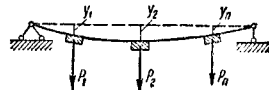
если  $a = b$ ;

для балки по фиг. 75 при поперечных колебаниях

$$P + \frac{33}{140} ql;$$



Фиг. 75



Фиг. 76

при продольных колебаниях

$$P + \frac{1}{3} ql.$$

Опыты, поставленные Научно-техническим комитетом НКПС (1927 г.), привели к таким приближённым формулам для определения основных частот колебаний моста пролётом  $l$  в м:

для вертикальных колебаний железнодорожных металлических мостов

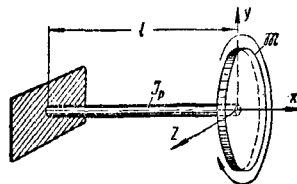
$$\varphi \approx 2\pi : 0,0039 l;$$

то же для горизонтальных поперечных колебаний

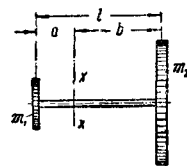
$$\varphi \approx 2\pi : 0,008 l.$$

Первые обертоны при этом вдвое выше основных тонов.

При колебаниях кручения (фиг. 77) дифференциальное уравнение (14') сохраняет вид; вместо прогиба  $y$  и  $y''$  следует подставить



Фиг. 77



Фиг. 78

угол кручения  $\theta$  и  $\theta''$ ; круговая частота колебаний кручения

$$\varphi_{кр} = \sqrt{GI_p : l M_x}, \quad (18)$$

где  $GI_p$  — жёсткость при кручении;

$M_x$  — момент инерции массы шкива [формула (7)].

Если необходимо учесть влияние собственного веса вала, то к  $M_x$  добавляется  $1/3$  момента инерции массы вала.

При наличии на валу двух шкивов при крутильных колебаниях имеется неколеблущееся сечение  $x - x$  (фиг. 78). В этом случае частота

$$\varphi_{кр} = \sqrt{\frac{GI_0 (M_1 + M_2)}{l \cdot M_1 \cdot M_2}}. \quad (19)$$

<sup>1</sup>  $y_{cm}$  в сантиметрах.

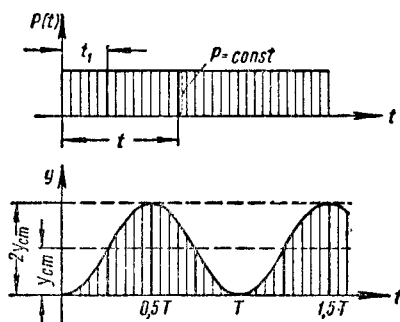
**Вынужденные колебания.** В уравнении равновесия (14') заменяют 0 в правой части на  $P(t)$ ; тогда

$$y'' + \varphi^2 y = \frac{1}{m} P(t). \quad (20)$$

Общий интеграл этого уравнения имеет вид:

$$y = A \sin \varphi t + B \cos \varphi t + \frac{1}{m\varphi} \int_0^t P(t_1) \sin \varphi(t - t_1) dt_1. \quad (21)$$

Здесь первые два члена ( $y_0$ ) определяют собственные колебания с частотой  $\varphi$ ; они довольно быстро затухают (стр. 183); последний член ( $y_0$ ) даёт собственно вынужденные колебания;  $P(t_1)$  — значение функции  $P(t)$  в про-



Фиг. 79. Вынужденные колебания при внезапно приложенной нагрузке

извольный момент времени  $t_1$ , промежуточный между 0 и  $t$ .

Частные случаи. 1. Внезапно приложенная нагрузка

$$P(t) = P = \text{const};$$

$$y_0 = \frac{P}{m\varphi} \int_0^t \sin \varphi(t - t_1) dt_1 = P(1 - \cos \varphi t) : m\varphi^2 = y_{cm}^P (1 - \cos \varphi t). \quad (22)$$

Очевидно, что  $\max y_0 = 2y_{cm}^P$  (фиг. 79).

Учтено, что по формуле (15)  $y_{cm}^P = P : m\varphi^2$ .

В случае кратковременного действия нагрузки  $P$  (импульс  $P \Delta t$ ), дважды применяя формулу (22), имеем:

$$y_0 = y_{cm}^P 2 \sin \frac{2\varphi t - \varphi \Delta t}{2} \sin \frac{\varphi \Delta t}{2},$$

откуда при  $\Delta t < 0,1 T$

$$y_0 \approx y_{cm}^P \cdot \varphi \Delta t \sin \varphi t;$$

очевидно  $\max y_0 = \varphi \Delta t y_{cm}^P = 2\pi \frac{\Delta t}{T} y_{cm}^P < y_{cm}^P$ .

2. Статически нарастающая нагрузка  $P(t) = P_1 = P' \cdot t$ .

Так как  $P(t_1) = P' \cdot t_1$ , то (фиг. 80)

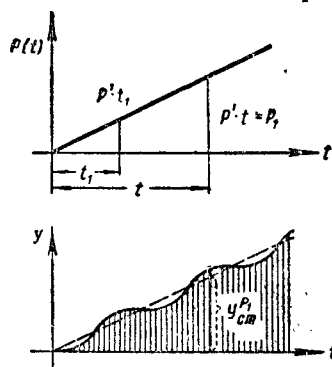
$$y_0 = \frac{P'}{m\varphi} \int_0^t t_1 \sin \varphi(t - t_1) dt_1 = \frac{P'}{m\varphi} \left( \frac{t}{\varphi} - \frac{\sin \varphi t}{\varphi^2} \right) = y_{cm}^P \left( 1 - \frac{\sin \varphi t}{\varphi t} \right).$$

3. Нагрузка, гармонически меняющаяся в частоте  $p$ :

$$P(t) = P \sin pt; y_0 = y_{cm}^P \cdot \mu_t,$$

где  $\mu_t$  — динамический коэффициент, равный  $\mu_t = \mu \left( \sin pt - \frac{p}{\varphi} \sin \varphi t \right), \quad (23)$

при этом  $\mu = \frac{1}{1 - \frac{p^2}{\varphi^2}} = \frac{1}{1 - \frac{T^2}{T_1^2}}.$

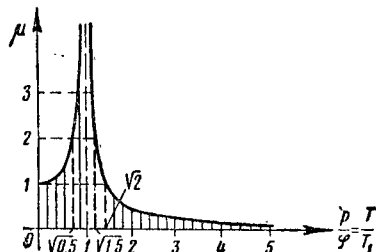


Фиг. 80. Вынужденные колебания при нарастающей нагрузке

Здесь  $T$  и  $T_1$  соответственно периоды собственных и вынужденных колебаний. График изменения  $\mu$  по абсолютной величине приведен на фиг. 81. В области малых вынужденных частот ( $p < \varphi$ ) имеем  $\infty > \mu > 1$ ; при равенстве частот ( $p = \varphi$ ) наступает резонанс  $\mu \rightarrow \infty$ ; в области больших частот ( $p > \varphi$ )  $\mu$  быстро уменьшается и при  $p > \sqrt{2}\varphi$  находится в пределах от 1 до 0.

Для случая резонанса уравнение (23) можно представить в виде:

$$\mu_t = 0,5 (\sin \varphi t - \varphi t \cdot \cos \varphi t), \quad (23')$$



Фиг. 81. График изменения динамического коэффициента

откуда видно, что рост  $\mu_t$  до  $\infty$  происходит не мгновенно (фиг. 82).

Для нагрузок, которые можно выразить полиномом, решение (21) удобно представить рядом:

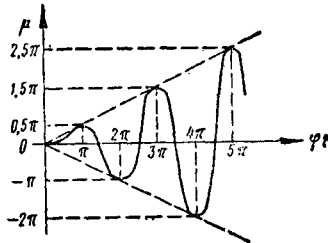
$$y = y_0 \cos \varphi t + \frac{v_0}{\varphi} \sin \varphi t + \frac{P_0}{m\varphi^2} (1 - \cos \varphi t) + \frac{P'_0}{m\varphi^3} (\varphi t - \sin \varphi t) + \frac{P''_0}{m\varphi^4} \left( \frac{\varphi^2 t^2}{2!} - 1 + \cos \varphi t \right) + \frac{P'''_0}{m\varphi^5} \left( \frac{\varphi^3 t^3}{3!} - \varphi t + \sin \varphi t \right) + \dots$$

откуда можно получить частные решения.  $P_0, P'_0, \dots$  — начальные значения нагрузки и её производных.

**Затухание колебаний.** При учёте сил вязкого сопротивления, пропорциональных скорости движения, получают взамен (20)

$$y'' + 2qy' + \varphi^2 y = \frac{1}{m} P(t). \quad (24)$$

Здесь  $q = k/2m$  называют коэффициентом (или частотой) затухания. Общий интеграл урав-



Фиг. 82. График нарастания динамического коэффициента

нения (24), при условии, что  $q < \varphi$ , имеет вид:

$$y = e^{-qt} A_1 \sin(\varphi_1 t + \alpha) + y_0. \quad (25)$$

Первый член правой части уравнения (25) выражает свободные затухающие колебания с частотой

$$\varphi_1 = \varphi \sqrt{1 - (q/\varphi)^2}, \quad (26)$$

при этом отношение ординат перемещений через один период  $T$  колебаний составит  $e^{qT}$ , натуральный логарифм которого

$$\lambda = qT \quad (27)$$

называется логарифмическим декрементом затуханий. По опытным данным, значения  $\lambda$  для металлических железнодорожных мостов составляют от 0,05 до 0,5; для автодорожных — от 0,02 до 0,27; для деревянных конструкций — от 0,02 до 0,25; для железобетонных — от 0,08 до 0,60 (данные приближённые).

Второй член правой части уравнения (25) описывает вынужденные колебания, которые для  $P(t) = P \sin pt$  определяются формулой

$$y_0 = A_2 \sin(pt + \beta); \quad (28)$$

при этом амплитуда колебаний  $A_2$  равна  $y_{ст}^P \cdot \mu_1$ , где динамический коэффициент

$$\begin{aligned} \mu_1 &= 1: \sqrt{\left(1 - \frac{p^2}{\varphi^2}\right)^2 + \frac{4q^2 p^2}{\varphi^4}} = \\ &= 1: \sqrt{\left(1 - \frac{p^2}{\varphi^2}\right)^2 + \frac{\lambda^2 p^2}{\pi^2 \varphi^2}}. \end{aligned} \quad (29)$$

Отсюда видно, что в случае резонанса, т. е. когда  $p = \varphi$ , динамический коэффициент не стремится к  $\infty$ , а определяется формулой

$$\mu_1 = \pi : \lambda.$$

График изменения  $\mu_1$  приведён на фиг. 83.

Наибольшее значение  $\mu_1$  будет при

$$\frac{p^2}{\varphi^2} = 1 - \frac{\lambda^2}{2\pi^2} \text{ и } \mu_1 \text{ наиб} = \frac{\pi}{\lambda} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{4\pi^2}}}.$$

**Пример 1.** Найти число колебаний подрессоренной тележки, несущей нагрузку  $P = 12 \text{ т}$  и опёртой на четыре рессоры; жёсткость каждой рессоры составляет  $c = 0,2 \text{ т/мм}$ .

**Решение.**  $y_{ст} = P : 4c = 15 \text{ мм} = 1,5 \text{ см}$ . По формуле (17) число колебаний в 1 мин.  $n = 300 : \sqrt{1,5} = 245$ .

**Пример 2.** Найти напряжение в стержне (фиг. 75) при условии:

$l = 10 \text{ м}$ ;  $P = 2 \text{ т}$ ;  $F = 4 \text{ см}^2$ ;  $E = 2 \cdot 10^8 \text{ кг/см}^2$ ; жёсткость пружины, скрепляющей стержень с грузом,  $c = 2,67 \text{ т/см}$ . Вибрирующая вертикальная нагрузка  $P_1(t) = 0,1 \sin pt$  с числом оборотов  $n_0 = 300$  в 1 мин.

**Решение.**  $y_{ст} = Pl : EF + P : c = 1 \text{ см}$ .

По формуле (17)  $n = 300$ . Вследствие наличия резонанса имеем по формуле (29) при  $\lambda = 0,2$ :

$$\mu = 3,14 : 0,2 = 15,7.$$

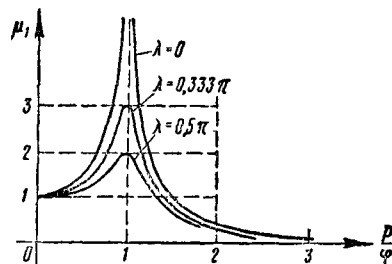
**Напряжение**

$$\sigma = \sigma_{ст} + \sigma_{ст} \cdot \mu = 500 + 25 \cdot 15,7 = 892,5 \text{ кг/см}^2.$$

**Пример 3.** Найти напряжение в подошве фундамента, симметрично передающего статическую нагрузку  $P = 20 \text{ т}$  по площади  $4 \text{ м}^2$  и динамическую нагрузку  $P_1(t) = 0,535 \sin pt$  с числом оборотов в 1 мин.  $n_0 = 250$ , если коэффициент постели грунта  $c_1 = 0,4 \text{ кг/см}^3$ .

**Решение.** Статическое напряжение  $\sigma_{ст} = P : F = 5 \text{ т/м}^2 = 0,5 \text{ кг/см}^2$ . Просадка  $y_{ст} = \sigma_{ст} : c_1 = 0,5 : 0,4 = 1,25 \text{ см}$ . Число колебаний  $n = 300 : \sqrt{y_{ст}} = 268$ . Динамический коэффициент по формуле (23):

$$\mu = 1 : \left[ 1 - \left( \frac{250}{268} \right)^2 \right] = 7,7;$$



Фиг. 83. График зависимости динамического коэффициента от частоты

по формуле (29) при  $\lambda = 0,1$

$$\mu_1 = 1 : \sqrt{0,13^2 + \frac{0,87}{100 \cdot 0,87}} = 7,5.$$

**Полное напряжение**

$$\sigma = 0,5 + \frac{535 \cdot 7,5}{40\,000} = 0,6 \text{ кг/см}^2.$$

## ТЕОРИЯ КОЛЕБАНИЙ СИСТЕМ С НЕСКОЛЬКИМИ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

### Частоты и формы колебаний

Степень свободы массы определяется числом возможных, допускаемых системой, перемещений этой массы. Свободная точечная масса имеет три степени свободы в пространстве и только две в плоскости.

Если такая масса закреплена на балке, совершающей перемещения в одной из главных плоскостей, то можно, пренебрегая её перемещением вдоль оси, считать, что масса имеет одну степень свободы. Если она закреплена на плоской арке или ферме, то следует считать, что такая масса имеет две степени свободы. Объёмная свободная масса имеет в пространстве шесть степеней свободы, в плоскости — три; примером может быть массивный фундамент.

Описать колебательный процесс можно посредством уравнений типа (9) или (10). Применим последние (уравнения перемещений) для случая  $n$  точечных масс, каждая из которых имеет одну степень свободы. Первые два уравнения свободных колебаний из общего числа  $n$  имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= -m_1 y_1'' \cdot \delta_{11} - m_2 y_2'' \cdot \delta_{12} - \dots - \\ &\quad - m_n y_n'' \cdot \delta_{1n}; \\ y_2 &= -m_1 y_1'' \cdot \delta_{21} - m_2 y_2'' \cdot \delta_{22} - \dots - \\ &\quad - m_n y_n'' \cdot \delta_{2n}; \end{aligned} \right\} (30)$$

остальные уравнения записываются аналогично. Полагая, что любое  $y_k$  имеет решение  $y_k = y_k^0 \sin(\varphi t + \alpha)$ , после подстановки в уравнения (30) получают систему однородных уравнений, которые вписывают в матрицу (31):

$m_1 \varphi^2 y_1^0$	$m_2 \varphi^2 y_2^0$	$m_3 \varphi^2 y_3^0$	...	$m_n \varphi^2 y_n^0$
$\delta_{11} - 1 : m_1 \varphi^2$	$\delta_{12}$	$\delta_{13}$	...	$\delta_{1n}$
$\delta_{21}$	$\delta_{22} - 1 : m_2 \varphi^2$	$\delta_{23}$	...	$\delta_{2n}$
$\delta_{31}$	$\delta_{32}$	$\delta_{33} - 1 : m_3 \varphi^2$	...	$\delta_{3n}$
...	...	...	...	...
$\delta_{n1}$	$\delta_{n2}$	$\delta_{n3}$	...	$\delta_{nn} - 1 : m_n \varphi^2$

Здесь любое  $y_k^0$  зависит только от положения массы  $m_k$  в системе, не зависит от времени и является амплитудой колебаний этой массы; коэффициенты  $\delta_{11}$ ,  $\delta_{12}$ ,  $\delta_{1n}$  и т. д. подсчитываются методами статике сооружений.

Значение сил в системе (31), полностью аналогичной системе статических уравнений, определяется амплитудными величинами инерционных сил  $m_1 \varphi^2 y_1^0$ ,  $m_2 \varphi^2 y_2^0$  и т. д., а в общем случае  $m_k \varphi^2 y_k^0$ , что отвечает принципу Даламбера.

Система (31) допускает решения:

1)  $y_1^0 = y_2^0 = \dots = y_n^0 = 0$ , и тогда колебаний нет;

2) при наличии колебаний детерминант  $D$  системы (31) равен 0, т. е.

$$D = 0. \quad (32)$$

Уравнение (32) — уравнение  $n$ -ой степени относительно  $\varphi^2$ ; оно называется вековым, или частотным, и даёт  $n$  значений для собственных частот («спектор частот») колебаний, т. е. столько, сколько в системе степеней свободы.

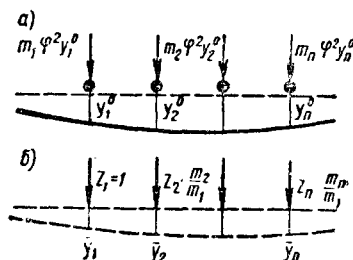
Каждой из  $n$  частот отвечает своя главная форма колебаний, определяющаяся соответствующей группой значений  $y_k^0$ . Каждая такая группа находится решением системы (31) после подстановки в неё соответствующего значения  $\varphi$ . Величины  $y_k^0$  неопределённые, так как в системе нет свободных членов; могут быть найдены лишь соотношения между  $y_k^0$ ; удобно при этом назначить одно из  $y_k^0$ , например  $y_1^0$ , равным 1; после этого, отбрасывая одно из  $n$  уравнений, решают систему  $n-1$  уравнений с  $n-1$  неизвестными.

Взамен описанного порядка раздельного решения задач о частотах и формах колебаний может быть использован практически удобный приём одновременного их определения. На фиг. 84, а представлена даламберова нагрузка; ординатами  $y_k^0$  условно показана одна из главных форм. Очевидно, форма не нарушится, если все силы, её вызывающие, уменьшить в  $m_1 \varphi^2 y_1^0$  раз (фиг. 84, б); изменится лишь масштаб. Из сопоставления фиг. 84, а и 84, б получаем основные формулы этого приёма. Частота для любой формы определяется выражением:

$$\varphi = \sqrt{1 : m_1 y_1^0}. \quad (33)$$

Параметры для сил

$$Z_k = \bar{y}_k : \bar{y}_1. \quad (34)$$



Фиг. 84

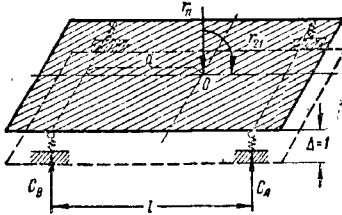
Единичные перемещения  $\bar{y}$  подсчитываются по правилам статике сооружений в функции от воздействий, приложенных по фиг. 84, б, например:

$$\left. \begin{aligned} \bar{y}_1 &= Z_1 \delta_{11} + Z_2 \frac{m_2}{m_1} \delta_{12} + \\ &\quad + \dots + Z_n \frac{m_n}{m_1} \delta_{1n}; \\ \bar{y}_k &= Z_1 \delta_{k1} + Z_2 \frac{m_2}{m_1} \delta_{k2} + \\ &\quad + \dots + Z_n \frac{m_n}{m_1} \delta_{kn}. \end{aligned} \right\} (35)$$

В этом приёме сначала совместно решаются системы (34) и (35); после этого вычис-

ляется  $\varphi$  по формуле (33). Системы (34) и (35) удобно решать, определяя в последовательном порядке формы и частоты, начиная с наименьшей. Каждый переход к порядковой высшей частоте должен сопровождаться соблюдением условия независимости главных форм (условия ортогональности).

Динамический расчёт симметричной системы может быть упрощён и ускорен разделением колебаний на независимые группы, каждая из которых (группа прямосимметричных и группа кососимметричных колебаний) решается самостоятельно.

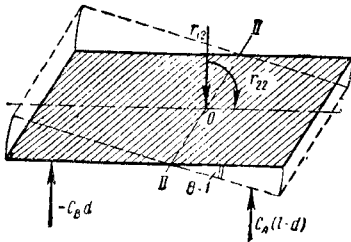


Фиг. 85. Единичное поступательное перемещение тележки

Собственные прямосимметричные колебания подрессоренной тележки описываются уравнениями типа (9). На фиг. 85 кузову тележки дано поступательное вертикальное смещение  $\Delta=1$ ; при этом реакции рессор равны  $C_A$  и  $C_B$ . Воздействия, необходимые для возбуждения этого смещения, приложенные в центре тяжести системы, таковы:

$$\begin{aligned} r_{11} &= 2(C_A + C_B); \\ r_{21} &= 2[C_A(l-d) - C_B d]. \end{aligned} \quad (36')$$

Согласно фиг. 86 дано угловое смещение вокруг центральной оси II—II на  $\theta=1$ ; реакции рессор равны  $C_A(l-d)$  и  $-C_B d$ .



Фиг. 86. Единичный поворот тележки

Реакции в центре системы

$$r_{22} = 2[C_A(l-d)^2 + C_B d^2] \text{ и } r_{12} = r_{21}. \quad (36'')$$

Для процесса колебаний в функции смещений  $\Delta$  и  $\theta$  уравнения (9) запишутся так:

$$\begin{cases} -\Delta \cdot r_{11} - \theta \cdot r_{12} - m \Delta'' = 0; \\ -\Delta \cdot r_{21} - \theta \cdot r_{22} - M_{II} \theta'' = 0. \end{cases} \quad (36''')$$

Задаваясь, как и для уравнений (30), решениями

$\Delta = \Delta^\circ \sin(\varphi t + \alpha)$  и  $\theta = \theta^\circ \sin \varphi t + \alpha$ ,

получим систему уравнений:

$$\begin{cases} \Delta^\circ (r_{11} - m \varphi^2) + \theta^\circ \cdot r_{12} = 0; \\ \Delta^\circ r_{21} + \theta^\circ (r_{22} - M_{II} \varphi^2) = 0, \end{cases} \quad (37)$$

откуда имеем вековое уравнение:

$$\begin{vmatrix} r_{11} - m \varphi^2 & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} - M_{II} \varphi^2 \end{vmatrix} = 0. \quad (38)$$

Решение уравнения (38) определит две частоты. Можно применить и уравнение (10).

### Динамические эпюры

Дифференциальные уравнения вынужденных колебаний получаются из уравнения (30) или (36''') добавлением членов, учитывающих влияние возмущающей нагрузки; из уравнений (30) получают:

$$\begin{cases} y_1 = -m_1 y_1'' \delta_{11} - m_2 y_2'' \delta_{12} - \dots - \\ \quad - m_n y_n'' \delta_{1n} + \delta_{1p} P(t); \\ y_2 = -m_1 y_1'' \delta_{21} - m_2 y_2'' \delta_{22} - \dots - \\ \quad - m_n y_n'' \delta_{2n} + \delta_{2p} P(t) \end{cases} \quad (39)$$

и т. д.

В частном случае, когда  $P(t) = P \sin pt$ , подстановкой в уравнения (39) решений  $y_k = y_k^0 \sin pt$  получают систему  $n$  линейных уравнений относительно  $y_k^0$ , отличающуюся от системы (31) наличием свободных членов; при этом собственная частота  $\varphi$  заменена вынужденной частотой  $p$ :

$$\begin{cases} m_1 p^2 y_1^0 (\delta_{11} - 1 : m_1 p^2) + m_2 p^2 y_2^0 \delta_{12} + \\ \quad + \dots + m_n p^2 y_n^0 \delta_{1n} + \delta_{1p} P = 0; \\ m_1 p^2 y_1^0 \delta_{21} + m_2 p^2 y_2^0 (\delta_{22} - 1 : m_2 p^2) + \\ \quad + \dots + \delta_{2p} P = 0 \end{cases} \quad (40)$$

и т. д.

После определения из уравнений (40) амплитуд колебаний всех масс ( $y_k^0$ ) строят эпюру динамических перемещений; эпюры динамических внутренних сил находят расчётом системы на действие амплитуд инерционных сил  $m_k p^2 y_k^0$  и амплитуды внешней нагрузки  $P$ .

Для балок, несущих сосредоточенные массы, колеблющиеся в одной из главных плоскостей инерции, задачу о построении эпюр удобно иногда решить при помощи обобщённых уравнений; в случае гармонически возмущающей нагрузки  $P(t) = P \sin pt$  уравнения имеют вид (фиг. 87):

а) прогиб

$$\begin{aligned} EI y &= EI y_0 + EI y_0' + M_0 \frac{x^2}{2} + \\ &+ Q_0 \frac{x^3}{6} + P \frac{x_p^3}{6} + \frac{1}{6} \sum P_i x_i^3; \end{aligned}$$

б) угол поворота

$$\begin{aligned} EI y' &= EI y_0' + M_0 x + Q_0 \frac{x^2}{2} + \\ &+ P \frac{x_p^2}{2} + \frac{1}{2} \sum P_i x_i^2; \end{aligned} \quad (41)$$

в) момент

$$M = M_0 + Q_0 \cdot x + P \cdot x_p + \sum P_i x_i;$$

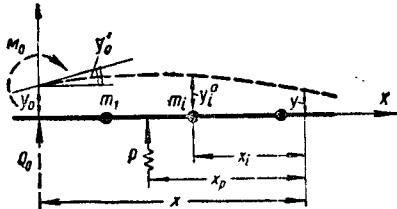
г) поперечная сила

$$Q = Q_0 + P + \sum P_i.$$

В этих уравнениях  $P_i = m_i p^2 y_i^0$ ;  $x_i$  — расстояние от сечения до места приложения силы  $P_i$ , расположенной левее сечения (фиг. 87).

Динамический коэффициент перемещений  $\mu_k$  для любой массы  $m_k$  вычисляется по формуле, вытекающей из (40):

$$\mu_k = 1 + \sum_{i=1}^n \mu_i \frac{m_i p^2 \Delta_{ip}}{\Delta_{kp}} \cdot \delta_{ki}, \quad (42)$$



Фиг. 87. Сосредоточенные массы на балке

где  $\Delta_{kp} = \delta_{kp} \cdot P$  и  $\Delta_{ip} = \delta_{ip} \cdot P$  — статические перемещения соответственно под массами  $m_k$  и  $m_i$  от амплитуды  $P$  возмущающей силы.

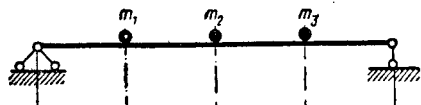
Если известны собственные главные формы колебаний, то динамический коэффициент

$$\mu_k = \frac{1}{\Delta_{kp}} \sum_{i=1}^n \Delta_{ip}^i Z_{ki} \left( 1 - \frac{p^2}{\varphi_i^2} \right). \quad (43)$$

Здесь  $\varphi_i$  — частота  $i$ -й главной формы;  $\Delta_{ip}^i = P \cdot \delta_{ip}^i / N_i$ , где  $\delta_{ip}^i = \delta_{pi}^i$  — перемещение в  $i$ -ой главной форме по направлению действия силы  $P$ ;  $Z_{ki} = \bar{y}_k^i : \bar{y}_1^i$  [см. формулу (34)];  $N_i$  — нормирующий множитель для  $i$ -ой формы, определяемый формулой

$$N_i = 1 + Z_{2i}^2 \frac{m_2}{m_1} + Z_{3i}^2 \frac{m_3}{m_1} + \dots + Z_{ni}^2 \frac{m_n}{m_1}. \quad (44)$$

**Пример 1.** Определить частоты колебаний балки с массами  $m_1 = m$ ;  $m_2 = 2m$  и  $m_3 = 3m$  (фиг. 88).



Фиг. 88. Колебания балки с тремя массами

**Решение.** Единичные перемещения найдены методами статики; увеличенные в  $48 \cdot 16 EI : l^3$  раз, они имеют значения:

$$\delta_{11} = \delta_{22} = 9; \delta_{12} = \delta_{21} = \delta_{33} = 11; \\ \delta_{13} = \delta_{31} = 7; \delta_{22} = 16.$$

Вековое уравнение (32) таково:

$$\begin{vmatrix} 9-k & 11 & 7 \\ 11 & 16-0,5k & 11 \\ 7 & 11 & 9-k \end{vmatrix} = 0.$$

Здесь

$$k = 48 \cdot 16 EI : l^3 m \omega^2.$$

Раскрывая детерминант, получают  $k^3 - 68k^2 + 280k - 168 = 0$ ; корнями уравнения являются:  $k_1 = 63,67$ ,  $k_2 = 3,636$  и  $k_3 = 0,723$ .

Отсюда после подстановки корней в выражение для  $k$

$$\varphi_1 = 3,475 \sqrt{EI : ml^3}; \varphi_2 = 4,18 \varphi_1; \varphi_3 = 9,4 \varphi_1.$$

**Пример 2.** Определить главные формы колебаний балки предыдущего примера.

**Решение.** Составляются системы уравнений (34) и (35):

$$\bar{y}_1 = 9 + 22 Z_1 + 21 Z_2; Z_1 = 1; \\ \bar{y}_2 = 11 + 32 Z_1 + 33 Z_2; Z_2 = \bar{y}_2 : \bar{y}_1; \\ \bar{y}_3 = 7 + 22 Z_1 + 27 Z_2; Z_3 = \bar{y}_3 : \bar{y}_1.$$

Последнюю систему уравнений рассчитывают методом последовательных приближений (табл. 22).

Т а б л и ц а 22

Решение уравнений последовательным приближением

Приближения	$Z_1$	$Z_2$	$\bar{y}_1$	$\bar{y}_2$	$\bar{y}_3$	$\bar{y}_2 : \bar{y}_1$	$\bar{y}_3 : \bar{y}_1$
Первое . .	1	1	52	76	56	1,461	1,076
Второе . .	1,461	1,076	63,72	93,25	68,17	1,462	1,07
Третье . .	1,462	1,07	63,67	93,1	68,12	1,462	1,07

В первом приближении можно было задаться  $Z_1 = Z_2 = 1$  и из системы уравнений найти сначала все  $\bar{y}$ , а затем  $Z_2$  и  $Z_3$ . Эти последние приняты в основу второго приближения. Значения  $\bar{y}_1$ ,  $\bar{y}_2$  и  $\bar{y}_3$  из третьей строки табл. 22 дают основной тон колебаний. Для определения оборотов вводят условие ортогональности: сумма работ сил, вызывающих эти формы, на перемещениях первой формы равна нулю:

$$1 \cdot 63,67 + Z_2 \cdot 2 \cdot 93,10 + Z_3 \cdot 3 \cdot 68,12 = 0,$$

$$\text{откуда } Z_2 = -0,342 - 1,10 Z_3.$$

Подстановка этого значения  $Z_2$ , например, в уравнения  $\bar{y}_1$ ,  $\bar{y}_2$  и  $\bar{y}_3$  даёт ответы: для второй формы  $Z_2 = 0,415$  и  $Z_3 = -0,690$ ; для третьей формы  $Z_2 = -0,605$  и  $Z_3 = 0,240$ . Соответствующие значения  $\bar{y}$  определяют из системы уравнений.

**Пример 3.** Определить главные формы колебаний тележки (фиг. 85), если  $m = 437 : 9,87 = 44,5$  кг·сек<sup>2</sup>/см;  $\rho_{II} = \mathbb{M}_{II} : m = 1,21$  м<sup>2</sup>;  $d = 1,22$  м;  $l = 2,74$  м;  $C_A = 1784$  кг/м;  $C_B = 1146$  кг/м.

**Решение.** По формулам (36') и (36'') находим:

$$r_{11} = 5860 \text{ кг/м}; r_{12} = r_{21} = 2630 \text{ кг};$$

$$r_{22} = 11680 \text{ кг·м}.$$

Формулы (35) после преобразований имеют вид:

$$\bar{y}_1 = \delta_{11} + \rho_{II}^2 \cdot \delta_{12} \cdot Z = (r_{11} - r_{12} \rho_{II}^2 Z) : k;$$

$$\bar{y}_2 = \delta_{21} + \rho_{II}^2 \cdot \delta_{22} \cdot Z = (-r_{21} + r_{11} \rho_{II}^2 Z) : k,$$

где  $k = 4l^3 C_A \cdot C_B = 61,5 \cdot 10^6 \text{ кг}^2$ .

Вычисляя  $\bar{y}_1$  и  $\bar{y}_2$  и подставляя их значения в отношение (34),  $Z = \bar{y}_2 : \bar{y}_1$ , получают  $Z^2 - 1,45Z + 0,825 = 0$ , откуда  $Z_1 = -0,435$  и  $Z_2 = 1,885$ . Формы колебаний показаны на фиг. 89; при этом  $\bar{y}_1 = 0,000213 \text{ м/кг}$ ;  $\bar{y}_2 = 0,0000925 \text{ м/кг}$ . Частоты по формуле (33) равны:

$$\varphi_1 = \sqrt{1 : m_1 \bar{y}_1} = 10,3 \text{ сек.}^{-1}; \varphi_2 = 15,6 \text{ сек.}^{-1}.$$

**Пример 4.** Определить динамические коэффициенты для системы, приведённой на фиг. 90, если  $p^2 = 0,0206 : m \cdot k$ .

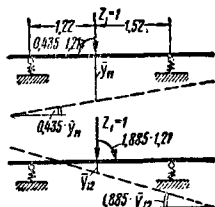
**Решение.** На фиг. 90, б и в показаны главные формы колебаний, найденные, как в примере 2; при этом  $\Delta_{1p} = \Delta_{2p} = 8,625P \cdot k$ ;  $\bar{y}_1^1 = 22,677 k$ ;  $\delta_{p1}^1 = 26,7 k$ ;

$$\varphi_1^2 = 0,0442; mk; \frac{1}{y_1^2} = 1,323 k; \delta_{p1}^2 = 0,397 k; \\ \varphi_2^2 = 0,785; mk; \text{ где } k = l^3 : 486 EI.$$

Согласно формуле (44) имеем

$$N_1 = 1 + 1,048 \cdot 2 = 3,197; N_2 = 1 + 0,477 \cdot 2 = 1,455.$$

Контроль 1:  $N_1 + 1 : N_2 = 1$ .

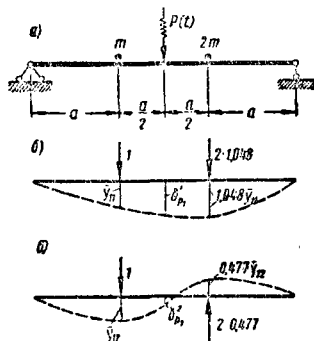


Фиг. 89. Главные формы колебаний тележки

Далее:

$$\Delta_{1p}^1 = P \cdot 26,7 k : 3,197 = 8,36 P \cdot k;$$

$$\Delta_{1p}^2 = P \cdot 0,397 k : 1,455 = 0,273 P \cdot k.$$



Фиг. 90. Определение динамических коэффициентов балки

По формуле (43)

$$\mu_1 = \frac{1}{8,625 P \cdot k} \left[ 8,36 P \cdot k : \left( 1 - \frac{0,0206}{0,0442} \right) + \right. \\ \left. + 0,273 P \cdot k : \left( 1 - \frac{0,0206}{0,785} \right) \right] = 1,848,$$

аналогично  $\mu_2 = 1,887$ .

## ТЕОРИЯ КОЛЕБАНИЙ ВЕСОМЫХ СТЕРЖНЕЙ

### Общие уравнения колебаний

Дифференциальное уравнение свободных колебаний балки постоянного сечения

$$-\frac{q}{gEI} \cdot \frac{d^2 Y}{dt^2} = \frac{d^4 Y}{dx^4}, \quad (45)$$

после подстановки в которое решения

$$Y(x, t) = y(x) \cdot \sin(\varphi t + \alpha),$$

получим

$$y^{IV} = \frac{q \varphi^2 y}{gEI} = k^4 y; \quad (46)$$

$$k = \sqrt[4]{q \varphi^2 : gEI}. \quad (47)$$

Здесь  $k$  — параметр, имеющий размерность  $m^{-1}$ ,  $q$  — интенсивность постоянной нагрузки,  $g = 9,81 \text{ м/сек}^2$ .

Общий интеграл можно записать в форме общих уравнений (фиг. 91):

$$\left. \begin{aligned} y &= y_0 A_x + y'_0 \cdot \frac{B_x}{k} + \frac{M_0}{EI} \cdot \frac{C_x}{k^2} + \\ &+ \frac{Q_0}{EI} \cdot \frac{D_x}{k^3}; \\ y' &= y'_0 A_x + \frac{M_0}{EI} \cdot \frac{B_x}{k} + \frac{Q_0}{EI} \cdot \frac{C_x}{k^2} + \\ &+ y_0 \cdot k \cdot D_x; \\ M &= M_0 A_x + Q_0 \cdot \frac{B_x}{k} + y_0 k^2 EI \cdot C_x + \\ &+ y'_0 k EI D_x; \\ Q &= Q_0 A_x + y_0 \cdot k^3 EI B_x + \\ &+ y'_0 k^2 EI \cdot C_x + M_0 k \cdot D_x. \end{aligned} \right\} \quad (48)$$



Фиг. 91. Колебания весовой балки

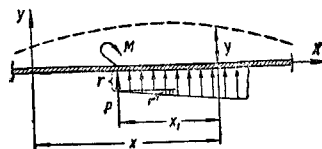
Здесь:

$$\left. \begin{aligned} A_x &= 0,5 (\operatorname{ch} kx + \cos kx) = B'_x : k; \\ B_x &= 0,5 (\operatorname{sh} kx + \sin kx) = C'_x : k; \\ C_x &= 0,5 (\operatorname{ch} kx - \cos kx) = D'_x : k; \\ D_x &= 0,5 (\operatorname{sh} kx - \sin kx) = A'_x : k. \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

Значения этих функций приведены в табл. 23.

При наличии возмущающей нагрузки  $[M(t), P(t), r(t) \dots]$  и др., гармонически меняющейся в общей частоте  $p$  без сдвига фаз, уравнения (48) сохраняются; в них следует лишь приписать по принципу наложения члены, содержащие амплитудные значения возмущающих воздействий; например, уравнение прогибов имеет вид (фиг. 92):

$$\begin{aligned} y &= y_0 \cdot A_x + y'_0 \cdot \frac{B_x}{k} + \frac{M_0}{EI} \cdot \frac{C_x}{k^2} + \\ &+ \frac{Q_0}{EI} \cdot \frac{D_x}{k^3} + \frac{r}{k^4 EI} \cdot A_{x1} + \frac{r'}{k^4 EI} \times \\ &\times \frac{B_{x1}}{k} + \frac{M}{EI} \cdot \frac{C_{x1}}{k^2} + \frac{P}{EI} \cdot \frac{D_{x1}}{k^3}. \end{aligned} \quad (50)$$



Фиг. 92. К учёту скачков

Аналогично составляются остальные уравнения.

При наличии на стержне точечных масс в правой части уравнения (50) добавляются члены вида  $P_i \cdot D_{xi} : k^3 EI$ , где  $P_i = m_i p^2 \cdot y_i$  — амплитуда инерционной силы; если массы обладают моментами инерции, то кроме этого

Таблица 23

Функции  $A_x, B_x, C_x, D_x$ 

кх	$A_x$	$B_x$	$C_x$	$D_x$
0,00	1,00000	0,00000	0,00000	0,00000
0,10	1,00000	0,10000	0,00500	0,00017
0,25	1,00016	0,25000	0,03125	0,00261
0,50	1,00260	0,50026	0,12502	0,02084
1,0	1,04169	1,00833	0,50139	0,16687
1,25	1,10187	1,27545	0,78658	0,32647
1,5	1,21157	1,56338	1,14083	0,56590
0,5π	1,25409	1,65915	1,35493	0,65015
1,75	1,39297	1,88820	1,57122	0,90361
2,0	1,67302	2,26808	2,08918	1,35878
2,25	2,08420	2,73462	2,71237	1,95655
2,5	2,66557	3,32433	3,46672	2,72587
2,6	2,95606	3,60511	3,81295	3,08962
2,7	3,28470	3,91682	4,18877	3,48944
2,8	3,65525	4,26345	4,59748	3,92847
2,9	4,07181	4,64940	5,04277	4,41016
2,95	4,29575	4,85962	5,26042	4,60820
3,0	4,53883	5,07949	5,52882	4,93838
3,05	4,79277	5,31272	5,78858	5,22126
3,1	5,06118	5,55901	6,06033	5,51744
π	5,29597	5,77437	6,29597	5,77437
3,15	5,34475	5,81910	6,34471	5,82751
3,2	5,64418	6,09375	6,64247	6,15213
3,25	5,96021	6,38379	6,95384	6,49199
3,3	6,29364	6,69006	7,28112	6,84782
3,4	7,01597	7,35491	7,98277	7,61045
3,5	7,81818	8,09592	8,75464	8,44671
3,6	8,70801	8,92147	9,60477	9,36399
3,7	9,68159	9,84012	10,54206	10,37037
3,8	10,78540	10,87377	11,57638	11,47564
3,9	11,9271	12,00165	12,71864	12,68944
1,25π	12,24905	12,24407	12,96106	12,94623
3,95	12,64333	12,61744	13,33398	13,34063
4,00	13,32740	13,26656	13,98094	14,02336
4,25	17,30687	17,07529	17,75297	17,97028
1,5π	27,83169	27,32720	27,83169	28,32720
4,75	28,91704	28,39327	28,87944	29,39356
5,0	37,24680	36,62214	36,96314	37,53106
5,20	45,55370	44,87495	45,08518	45,75840
5,5	61,52834	60,81919	60,81967	61,52473
5,70	75,13504	74,44067	74,30033	74,99136
6,0	101,33790	100,71687	100,37773	100,99629
6,1	111,95664	111,37280	110,97337	111,55491
6,2	123,68604	123,19521	122,68950	123,22830
2π	134,37338	133,87245	133,37338	133,87245
6,3	136,64336	136,15092	135,64350	136,13411
6,4	150,96826	150,46912	149,97508	150,35257
6,5	166,77508	166,39259	165,79749	166,17747
6,70	203,55895	203,30357	202,64457	202,89872
7,0	274,53547	274,48655	273,73157	273,82956
7,1	303,33425	303,28381	302,64970	302,62707
7,2	335,16205	335,25434	334,55370	334,46067
7,5	452,18406	452,92446	451,73742	451,54146
7,70	552,16384	552,58097	552,01042	551,58780
2,5π	643,99272	644,49252	643,99272	643,49252
8,0	745,16683	745,73409	745,31233	744,74473
8,20	910,06807	910,70787	910,40722	909,76714
8,5	1228,39125	1229,09140	1228,93326	1228,29291
8,70	1500,35377	1501,05950	1501,10242	1500,39658
9,0	2025,31545	2025,97701	2026,22658	2025,56489
9,1	2238,34934	2238,98270	2239,29706	2238,66360
9,2	2473,73487	2474,39373	2474,76971	2474,17079
9,3	2734,00871	2734,56701	2735,00094	2734,44255
9,4	3021,59536	3022,10755	3022,55505	3022,08297
3π	3097,41192	3097,91193	3098,41197	3097,91193
9,5	3339,43314	3339,89411	3340,43031	3339,96926
9,6	3690,70306	3691,11321	3691,68775	3691,27754
9,70	4078,92063	4079,26590	4079,58293	4079,53766
10,0	5506,19696	5506,34442	5507,03599	5506,88844

приписываются члены  $M_i C x_i: k^2 EI$ , где  $M_i = \mathfrak{M}_i p^2 y_i'$ . Параметр  $k$  в уравнениях (50) определяется формулой (47) с заменой  $\varphi$  на  $p$ .

#### Собственные частоты колебаний

Для определения собственных частот колебаний пользуются уравнениями (48) следующим образом: выбирают начало координат на одном из концов стержня; из четырёх

начальных параметров, как правило, неизвестных будет два; необходимые для их отыскания уравнения составляют из условий на другом конце стержня; если в пролёте имеются опоры, то каждой неизвестной опорной реакции соответствует дополнительное условие равенства нулю прогиба. Система составленных таким образом уравнений является однородной; для возможности колебаний приравнивают нулю детерминант системы.

**Частные случаи.** 1. Свободно лежащая балка.

Условия на левом конце:  $y_0 = M_0 = 0$ ;  
 $y_0' = ? Q_0 = ?$

Условия на правом конце:  $y_l = M_l = 0$ .

Используя первое и третье уравнения (48), получают условие  $B_l = D_l$  или  $\sin kl = 0$ . Отсюда  $kl = n\pi$  и по формуле (47)

$$\varphi = \frac{n^2 \pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{gEI}{q}}, \quad (51)$$

где  $n$  — натуральный ряд чисел или число полуволи формы колебаний.

2. Защемлённая двумя концами балка. Уравнение частот:

$$1 = \operatorname{ch} kl \cdot \cos kl,$$

откуда получаем

$$\varphi = \frac{\alpha^2}{l^2} \sqrt{\frac{gEI}{q}}; \quad (52)$$

для обертонов  $\alpha_n = (1,5 + n) \cdot \pi$  при  $n \geq 1$ ; для основного тона  $\alpha_0 = 4,73$ .

3. Балка, защемлённая одним концом. Уравнение частот:

$$1 = -\operatorname{ch} kl \cdot \cos kl;$$

в формуле (52) для обертонов

$$\alpha_n = (0,5 + n) \pi \text{ при } n \geq 2; \alpha_1 = 4,6944;$$

для основного тона  $\alpha_0 = 1,875$ .

4. Балка, защемлённая на одном и свободно опёртая на другом конце. Уравнение частот:

$$\operatorname{tg} kl = \operatorname{th} kl;$$

в формуле (52) для обертонов  $\alpha_n = (1,25 + n) \pi$  при  $n \geq 1$ ;  $\alpha_0 = 3,927$ .

5. Балка, защемлённая на одном конце со скользящим защемлением на другом. Уравнение частот

$$\operatorname{ch} kl \cdot \sin kl + \operatorname{sh} kl \cdot \cos kl = 0;$$

в формуле (52)  $\alpha_n = (0,75 + n) \pi$  при  $n \geq 1$ ;  $\alpha_0 = 2,365$ .

6. Свободно лежащая балка с грузом  $P$  посередине. Уравнение частот для кососимметричных колебаний:

$$\sin 0,5 kl = 0; \quad [\text{см. решение (51)}];$$

для прямосимметричных

$$A'_{0,5l} = \beta \cdot D'_{0,5l},$$

где функции  $A'$  и  $D'$  приведены в табл. 24;  $\beta = P \cdot ql$ . Например, при  $\beta = 1$  в формуле (52) для обертонов  $\alpha_n = (0,437 + n) \pi$  при  $n \geq 1$ ;  $\alpha_0 \approx 1,37$ .

7. Двухпролётная, свободно лежащая, с равными пролётами балка. Кососимметричные колебания, как в случае 1, прямосимметричные — как в случае 4.



Таблица 24  
Функции  $A'_x$ ,  $B'_x$ ,  $C'_x$ ,  $D'_x$

кх	$A'_x$	$B'_x$	$C'_x$	$D'_x$
0,00	1,00000	0,00000	0,00000	0,00000
0,20	0,9997	0,2000	0,0200	0,00135
0,50	0,9895	0,49895	0,1249	0,0208
1,0	0,8537	0,96675	0,49455	0,1659
1,2	0,6561	1,1173	0,70345	0,28515
1,5	0,1664	1,24855	1,06195	0,5490
0,5π	0,0000	1,2546	1,15065	0,6273
1,7	—	0,3644	1,2319	0,7864
2,0	—	1,5656	0,95575	1,2325
2,2	—	2,6882	0,5351	1,57905
2,5	—	4,9128	0,5885	2,12925
2,6	—	5,8003	1,1236	2,3065
2,7	—	5,7565	1,7509	2,47245
2,8	—	7,7759	2,4770	2,6208
2,9	—	8,8471	3,3079	2,7443
3,0	—	9,9669	4,24845	2,8346
3,1	—	11,1119	5,30225	2,8823
π	—	11,5919	5,77435	2,8872
3,2	—	12,2656	6,47105	2,8769
3,3	—	13,4048	7,7549	2,80675
3,4	—	14,5008	9,15065	2,6589
3,5	—	15,5198	10,65245	2,4195
3,6	—	16,4218	12,25075	2,0735
3,7	—	17,1622	13,9315	1,60485
3,8	—	17,6875	15,67605	0,9969
3,9	—	17,9387	17,45985	0,2321
4,0	—	17,8498	19,25235	—
4,2	—	16,3505	22,70545	14,52735
4,5	—	9,4890	26,74465	21,9959
4,7	—	0,6812	27,8274	27,4823
1,5π	—	0,0000	27,8317	27,8272
5,0	21,9504	25,05645	35,57745	23,0525
5,2	42,4661	18,8057	40,0350	30,6346
5,5	86,7044	0,19005	43,15925	43,2557
5,7	124,7352	21,2199	41,14535	51,75625
6,0	193,6813	68,65775	28,2116	62,5106
6,1	219,2004	89,29465	20,30425	64,9518
6,2	245,5231	112,5249	10,2356	66,4981
2π	267,7468	133,87245	0,0000	66,9362
6,3	272,2487	138,4120	2,28855	66,91745
6,4	298,8909	166,9722	17,5362	65,9486
6,5	324,7861	198,1637	35,77125	63,31045
6,7	371,4244	267,9374	82,2255	51,74295
7,0	413,3762	386,80715	180,1191	13,2842
7,1	414,8263	428,2849	220,87175	6,7296
7,2	407,4216	469,4772	265,76635	31,02805
7,5	313,3700	580,67095	423,9858	133,6506
7,7	169,3472	630,22945	545,5557	230,4412
2,5π	0,0000	643,9927	643,99255	321,99635
8,0	—	216,8647	737,31005	422,8713
8,2	—	617,4142	856,28775	582,49745
8,5	—	1479,3701	981,0984	860,3917
8,7	—	2247,0402	994,93765	1059,2289
9,0	—	3691,4815	834,8607	1340,3007
9,1	—	4243,5551	1407,3690	1418,0930
9,2	—	4824,0587	1860,5365	1481,76105
9,3	—	5426,5154	2372,94855	1526,7834
9,4	—	6042,3167	2946,2708	1548,0229
3π	—	6195,8239	3097,91195	1548,9560
9,5	—	6660,9594	3581,47555	1539,7419
9,6	—	7269,3664	4278,16925	1495,5985
9,7	—	7851,7063	5034,47135	1408,6174
10,0	—	9240,8733	7616,14616	812,3536

Для решения задачи определения собственных частот весомых балок можно снова пользоваться методом, связанным с применением уравнений (33) и (34). Взамен массы  $m$  следует в (33) здесь подставить погонную массу  $\mu$ , перемещение же  $u$  рекомендуется определять графоаналитически.

#### Динамические эпюры

При действии гармонических возбудителей задача построения динамических эпюр решается с помощью уравнения (50). Общий порядок расчёта указан на стр.187. При этом составленные уравнения имеют свободные

члены и дают определённые ответы. Эти ответы весьма часто выражают через следующие сочетания функций (49):

$$\left. \begin{aligned} A_x^2 - C_x^2 &= \operatorname{ch} kx \cdot \cos kx = A'_x; \\ A_x^2 - B_x D_x &= 0,5 (A'_x + 1); \\ A_x \cdot B_x - C_x \cdot D_x &= 0,5 (\operatorname{ch} kx \cdot \sin kx + \\ &\quad + \operatorname{sh} kx \cdot \cos kx) = B'_x; \\ A_x C_x - B_x^2 &= -0,5 \operatorname{sh} kx \cdot \sin kx = -C'_x; \\ A_x \cdot C_x - D_x^2 &= C'_x; \\ A_x \cdot D_x - B_x \cdot C_x &= -0,5 (\operatorname{ch} kx \cdot \sin kx - \\ &\quad - \operatorname{sh} kx \cdot \cos kx) = -2D'_x; \\ B_x^2 - D_x^2 &= 2C_x; \\ B_x \cdot D_x - C_x^2 &= 0,5 (A'_x - 1). \end{aligned} \right\} \quad (53)$$

Значения функций  $A'_x$ ,  $B'_x$ ,  $C'_x$  и  $D'_x$  приведены в табл. 24.

**Частные случаи.** 1. Сосредоточенная нагрузка (с амплитудой  $P$ ) в середине свободно лежащей балки. Неизвестные начальные данные  $y_0$  и  $Q_0$  находят по условиям  $y_{0,5l} = 0$  и  $Q_{0,5l} = 0,5 P$ . Из уравнений (48) и (50) получают:

$$y'_0 \cdot k^2 \cdot EI \cdot A_{0,5l} + Q_0 \cdot C_{0,5l} = 0;$$

$$y'_0 \cdot k^2 \cdot EI \cdot C_{0,5l} + Q_0 \cdot A_{0,5l} = 0,5 P.$$

Отсюда:

$$y'_0 = -0,5 P \cdot C_{0,5l} : k^2 \cdot EI \cdot A'_{0,5l};$$

$$Q_0 = 0,5 P \cdot A_{0,5l} : A'_{0,5l}.$$

Если сила расположена на расстоянии  $b$  от правой опоры, то

$$y'_0 = 0,5 P (B_l \cdot D_b - D_l \cdot B_b) : k^2 EI C'_l$$

и

$$Q_0 = 0,5 P (B_l \cdot B_b - D_l \cdot D_b) : C'_l.$$

2. Та же нагрузка в середине защемлённой двумя концами балки.

$$M_0 = 8P \cdot D'_{0,5l} C'_{0,5l} : k (A'_l - 1);$$

$$Q_0 = -8PD'_{0,5l} \cdot B_{0,5l} : (A'_l - 1).$$

Если сила расположена на расстоянии  $b$  от правой опоры, то

$$M_0 = 2P (D_l \cdot C_b - C_l \cdot D_b) : k (A'_l - 1)$$

и

$$Q_0 = 2P (B_l \cdot D_b - C_l \cdot C_b) : (A'_l - 1).$$

3. Та же нагрузка в середине балки, защемлённой одним и свободно опёртой другим концом.

$$M_0 = -2PC_{0,5l} \cdot C'_{0,5l} : k D'_l;$$

$$Q_0 = -0,5 P (D_{0,5l} - 4C'_{0,5l} \cdot B_{0,5l}) : D'_l.$$

Если сила расположена на расстоянии  $b$  от правой опоры, то

$$M_0 = -0,5 P (B_b \cdot D_l - D_b \cdot B_l) : k D'_l;$$

$$Q_0 = -0,5 P (A_l \cdot D_b - C_l \cdot B_b) : D'_l.$$

4. Момент на левой опоре свободно лежащей балки.

$$y'_0 = -M \cdot D'_l : kEI \cdot C'_l;$$

$$Q_0 = -0,5 M k B'_l : C'_l;$$

$$y'_l = 0,5 M \cdot D_l : kEIC'_l.$$

5. Балка, защемлённая двумя концами, получила на левой опоре угол поворота, амплитуда которого равна единице, причём все воздействия приложены к левому торцу сечения балки (фиг. 93).



Фиг. 93. Динамические реакции при действии  $\varphi=1$

$$M_0 = 4 kEI D'_l : (1 - A'_l);$$

$$Q_0 = -2k^2EIC'_l : (1 - A'_l);$$

$$M_l = -2kEI D_l : (1 - A'_l);$$

$$Q_l = -2k^2EIC_l : (1 - A'_l).$$

6. То же для балки, защемлённой одним и свободно опёртой другим концом (фиг. 93).

$$M_0 = kEIC'_l : D'_l; Q_0 = -0,5 k^2EIB'_l : D'_l;$$

$$Q_l = -0,5 k^2EIB_l : D'_l.$$

7. То же для балки, защемлённой одним концом и со скользящим защемлением на другом.

$$M_0 = kEIA'_l : B'_l; Q_0 = 2k^2EID'_l : B'_l;$$

$$Q_l = 0; M_l = kEIA_l : B'_l; y_l = -C_l : kB'_l.$$

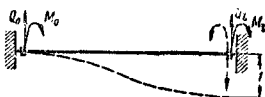
8. Балка, защемлённая двумя концами, получила смещение одного конца, при этом амплитуда смещения равна единице (фиг. 94).

$$M_0 = -2k^2EIC_l : (1 - A'_l);$$

$$Q_0 = 2k^2EIB_l : (1 - A'_l);$$

$$M_l = 2k^2EIC'_l : (1 - A'_l);$$

$$Q_l = 2k^2EIB'_l : (1 - A'_l).$$



Фиг. 94. Динамические реакции при действии  $y=1$

9. То же для балки, защемлённой одним и свободно опёртой другим концом (фиг. 94).

$$M_0 = -0,5 k^2EI B_l : D'_l;$$

$$Q_0 = 0,5 k^2EIA_l : D'_l;$$

$$M_l = 0;$$

$$Q_l = 0,25 k^2EI (1 + A'_l) : D'_l.$$

10. То же для балки с одним жёстким, а другим скользящим защемлением

$$M_0 = -2k^2EIC_l : (1 - A'_l);$$

$$Q_0 = 2k^2EIB_l : (1 - A'_l);$$

$$M_l = 2k^2EIC'_l : (1 - A'_l);$$

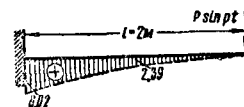
$$Q_l = 2k^2EIB'_l : (1 - A'_l).$$

Пример. Построить эпюру моментов для балки (фиг. 95), если  $q=32,1 \text{ кг/м}$ ,  $P=1 \text{ т}$ ,  $p=350 \text{ сек.}^{-1}$ ;  $EI=400 \text{ т.м}^2$ .

Решение. По формуле (47)  $k=1 \text{ м.}^{-1}$ . Составляем уравнения (50) и (48) по следующим условиям:  $y_0=y'_0=0$ ;  $M_0=?$   $Q_0=?$   $M_l=?$   $Q_l=P$ .

$$M_0 A_l + Q_0 \frac{B_l}{k} = 0;$$

$$M_0 k D_l + Q_0 A_l = P.$$



Фиг. 95. Динамическая эпюра моментов

Отсюда после подстановки численных значений функций из табл. 23 и 24 получаем:

$$Q_0 = 2PA_l : (1 + A'_l) = 2 \cdot 1,673 : (-0,566) = -5,92 \text{ т.}$$

Резонанс будет иметь место при  $A'_l=1$ , или при  $k_0=0,9375 < k=1$ .

## МЕТОДЫ СИЛ И ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

### Колебания неразрезных балок

Статически неопределимые системы, обладающие конечным числом степеней свободы  $n$ , рассчитываются методами, изложенными на стр. 184. Параметры  $\delta$ , входящие в уравнения (31), (32) и (35), определяются обычными способами статического расчёта статически неопределимых систем. При бесконечно большом числе свобод (весомые балки) необходимые для динамического решения данные приведены на стр. 187.

Для расчёта неразрезных балок за лишние неизвестные можно принимать опорные моменты. Уравнение трёх моментов для опоры  $n$  имеет вид:

$$M_{n-1} \cdot \delta_{n,n-1} + M_n \cdot \delta_{nn} + M_{n+1} \cdot \delta_{n,n+1} + \Delta_{np} = 0. \quad (54)$$

Здесь согласно случаю 4 (стр. 190):

$$\left. \begin{aligned} \delta_{n,n-1} &= 0,5 D_{ln} : k_n EI_n C'_{ln}; \\ \delta_{n,n+1} &= 0,5 D_{ln+1} : k_n EI_{n+1} C'_{ln+1}; \\ \delta_{n,n} &= D'_{ln} : k_n EI_n C'_{ln} + \\ &+ D'_{ln+1} : k_{n+1} EI_{n+1} C'_{ln+1}. \end{aligned} \right\} \quad (55)$$

Грузовой член  $\Delta_{np}$  следует принимать соответственно заданной нагрузке (стр. 189). При определении собственных частот  $\Delta_{np}=0$  и в системе уравнений трёх моментов следует искать условия, когда детерминант равен нулю<sup>1</sup>.

<sup>1</sup> Большое число готовых решений имеется в справочнике Ананьева И. В., М., 1946.

Так, при расчёте трёхопорной балки с неравными пролётами уравнение (54) даёт (фиг. 96):

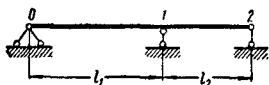
$$M_1 \left( \frac{D'_1}{k_1 EI_1 C'_1} + \frac{D'_2}{k_2 EI_2 C'_2} \right) = 0,$$

откуда уравнение частот

$$\frac{D'_1}{k_1 I_1 C'_1} = - \frac{D'_2}{k_2 I_2 C'_2} \cdot \frac{EI_1 \cdot l_2}{EI_2 \cdot l_1},$$

или при обозначениях, принятых для табл. 25:

$$\psi_1 = -\psi_2 \frac{i_1}{i_2}, \quad (a)$$



Фиг. 96. Колебания неразрезной балки

где  $i = EI : l$  — погонная жесткость. Решение уравнения (a) удобно выполнить графически.

**Пример.** Пусть  $q_1 : q_2 = 2,9$ ;  $l_1 : l_2 = 6$ ;  $i_1 : i_2 = 1,5$ ;  $i_1 : i_2 = 4$ . По данным табл. 25 строят графики  $\psi_1$  и  $-4\psi_2$ ; аргументом первого согласно формуле (47) является

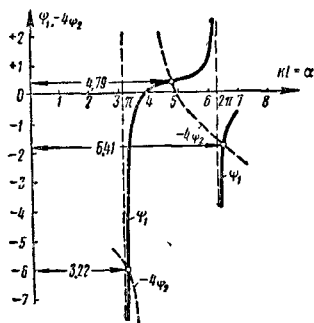
$$kl = k_1 l_1 = l_1 \sqrt[4]{\varphi^3 q_1 : gEI_1} = \alpha;$$

аргументом второго является

$$k_2 l_2 = l_2 \sqrt[4]{\varphi^3 q_2 : gEI_2} = 0,8 kl;$$

данные для  $\psi_2$  берут из табл. 25 по значениям 0,8 kl и откладывают величиной  $4\psi_2$  против абсцисс kl. Из фиг. 97 находят ответы:  $\alpha_0 = 3,22$ ;  $\alpha_1 = 4,79$ ;  $\alpha_2 = 6,41$  и т. д. Для получения частот следует пользоваться формулой (52).

Неразрезную балку можно рассчитать и по методу перемещений. При этом пользуются



Фиг. 97. Графическое решение уравнения частот

уравнением трёх перемещений; это уравнение для  $n$ -опоры имеет вид:

$$Z_{n-1} \cdot r_{n,n-1} + Z_n r_{nn} + Z_{n+1} r_{n,n+1} + R_{np} = 0. \quad (56)$$

Коэффициенты  $r$  определяют по данным, полученным (стр. 190) для пролётов, кончающихся шарниром. Здесь пригодны случаи 6 и 7 (стр. 190); для промежуточных пролётов и кончающихся защемлением — случай 5.

Величины  $R_{np}$  также берут согласно стр. 189.

При определении собственных частот  $R_{np} = 0$ ; уравнение частот получается приравнива-

нием нулю детерминанта. При расчёте балки по фиг. 96 уравнение (56) даёт:

$$Z_1 (k_1 EI_1 C'_1 \cdot D'_1 + k_2 EI_2 C'_2 \cdot D'_2) = 0,$$

что совпадает с результатом решения по методу сил.

Динамические эпюры по заданной возмущающей нагрузке можно вычислять в таком порядке: сначала определяют лишние неизвестные из уравнений (54) или (56), затем для каждого отдельного пролёта строят эпюры посредством уравнений (48) и (50).

Можно упростить определение концевых моментов, возникающих на конце любого стержня многопролётной балки, применяя следующую формулу:

$$M_{ab} = M_{ab}^{осн} - \mu_{ab} [1 - \mu_{ba} \cdot \bar{k}_{ab}^2 (1 + \alpha'_{b-ab})] [M_a^0 (1 + \alpha'_a) - \sum M_{b_1}^0 (1 + \alpha'_{b_1}) (1 + \alpha'_{a-ab}) \mu_{b_1 a} \cdot \bar{k}_{ab_1} + \dots] - \mu_{ba} \bar{k}_{ab} [1 - \mu_{ab} (1 + \alpha'_{a-ab})] [M_b^0 (1 + \alpha'_b) - \sum M_{c_1}^0 (1 + \alpha'_{c_1}) (1 + \alpha'_{b-bc}) \mu_{c_1 b} \cdot \bar{k}_{bc_1} + \dots]. \quad (57)$$

Здесь

$M_{ab}$  — момент на конце  $a$  любого стержня  $ab$ ;

$M_{ab}^{осн}$  — момент там же, определённый, например, по данным для случаев 2, 3 и др. (стр. 189) в основной системе;

$\sum M_a^0$ ,  $\sum M_b^0$  и т. д. — алгебраическая сумма основных моментов  $M_{осн}$  соответственно в узлах  $a$ ,  $b$  и т. д.; при этом узлы  $b$ ,  $c$ ,  $d$ , ... считаются лежащими справа от узла  $a$ ;  $b_1$ ,  $c_1$ , ... — слева;

$\mu_{ab} = l_{ab} : \sum i$  — коэффициент распределения в узле  $a$  по стержню  $ab$ ;

$l_{ab} = i_0 \cdot c_{ab}$  — расчётная погонная жесткость;  $i_0 = EI : l$ ; значения  $c_{ab}$  даны в табл. 26 в зависимости от способа закрепления концов стержня основной системы;

$c = c' = 1 \cdot \bar{k}$  — фокусные отношения в однопролётных защемлённых балках (см. табл. 25).

Коэффициенты  $\alpha'$  подсчитываются лишь для промежуточных пролётов по формулам:

$$\left. \begin{aligned} \text{стержневой коэффициент} \\ \alpha_{ab} \approx \mu \mu' : (c^2 - \mu \mu'); \\ \text{полный узловой (для узла } a) \text{ коэффициент} \\ \alpha'_a \approx \sum [\mu \mu' : (c^2 - \mu \mu')]. \end{aligned} \right\} \quad (58)$$

Коэффициент  $\alpha'_{a-ab_1}$  определяется без учёта члена, относящегося к стержню  $ab_1$ .

Таблица 25

Функции  $\psi_K$ ,  $\Phi_K$ ,  $1:K_K = c_K$ 

$$\psi_K = 1,5 \frac{\operatorname{ctg} h \kappa l - \operatorname{ctg} \kappa l}{\kappa l} = \frac{3 D'}{C' \kappa l}; \quad \Phi_K = 3 \frac{\operatorname{cosec} \kappa l - \operatorname{cosec} h \kappa l}{\kappa l} = \frac{3 D'}{C' \kappa l} \cdot \frac{1}{\kappa_K} = c_K = \frac{2 \psi_K}{\Phi_K} = \frac{\operatorname{ctg} h \kappa l - \operatorname{ctg} \kappa l}{\operatorname{cosec} \kappa l - \operatorname{cosec} h \kappa l} = \frac{2 D'}{D}$$

$\kappa l$	$\psi_K$	$\Phi_K$	$c_K$	$\kappa l$	$\psi_K$	$\Phi_K$	$c_K$	$\kappa l$	$\psi_K$	$\Phi_K$	$c_K$
0	1,0000	1,0000	2,000	3,60	-0,4271	-1,9287	0,442	7,00	-0,0316	0,6515	-0,097
0,25	1,0000	1,0000	2,000	3,70	-0,2430	-1,5704	0,309	7,05	-0,0081	0,6125	-0,026
0,50	1,0004	1,0008	1,999	3,80	-0,1152	-1,3256	0,174	2,25 $\pi$	0	0	0
0,75	1,0020	1,0039	1,996	3,90	-0,0210	-1,1496	0,037	7,10	0,0129	0,5789	0,045
1,00	1,0064	1,0124	1,998	1,25 $\pi$	0	0	0	7,20	0,0486	0,5243	0,185
1,25	1,0159	1,0308	1,971	3,95	0,0174	-1,0795	-0,032	7,25	0,0641	0,5021	0,255
1,50	1,0339	1,0657	1,940	4,00	0,0514	-1,0185	-0,101	7,50	0,1261	0,4260	0,592
1,75	1,0658	1,1278	1,890	4,25	0,1773	-0,8091	-0,438	7,75	0,1733	0,3889	0,891
2,00	1,1212	1,2361	1,814	4,50	0,2615	-0,6968	-0,751	8,00	0,2151	0,3788	1,136
2,25	1,2199	1,4294	1,707	4,75	0,3277	-0,6430	-1,019	8,25	0,2578	0,3940	1,309
2,50	1,4113	1,8069	1,566	5,00	0,3888	-0,6338	-1,227	8,50	0,3095	0,4418	1,401
2,60	1,5423	2,0659	1,493	5,25	0,4561	-0,6713	-1,355	8,75	0,3857	0,5487	1,406
2,70	1,7358	2,4498	1,417	5,50	0,5467	-0,7775	-1,406	9,00	0,5351	0,8087	1,323
2,80	2,0465	3,0676	1,334	5,75	0,7029	-1,0298	-1,365	9,10	0,6544	1,0331	1,266
2,90	2,6195	4,2097	1,244	6,00	1,1091	-1,7919	-1,238	9,20	0,8761	1,4629	1,198
2,95	3,1327	5,2337	1,197	6,10	1,5732	-2,7020	-1,164	9,30	1,4472	2,5919	1,117
3,00	4,0101	6,9863	1,148	6,15	2,0644	-3,6755	-1,123	9,35	2,3018	4,2947	1,072
3,05	5,8484	10,6806	1,097	6,20	3,1436	-5,8255	-1,080	9,40	6,5984	12,8816	1,025
3,10	12,1127	23,1865	1,045	6,25	7,4695	-14,4688	-1,032	3 $\pi$	$\infty$	$\infty$	1,000
$\pi$	$\infty$	$\infty$	1,000	2 $\pi$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	9,45	-6,1333	-12,5880	0,974
3,15	-56,1605	-113,3627	0,991	6,30	-13,9205	28,3195	-0,948	9,50	-1,9372	-4,2021	0,922
3,20	-7,5461	-16,1368	0,935	6,35	-3,2940	7,0745	-0,931	9,55	-1,0907	-2,5153	0,867
3,25	-3,7778	-8,6033	0,878	6,40	-1,7629	4,0204	-0,877	9,60	-0,7263	-1,7927	0,810
3,30	-2,3896	-5,8301	0,819	6,50	-0,8169	2,1441	-0,762	9,75	-0,3024	-0,9630	0,628
3,40	-1,2270	-3,5118	0,700	6,75	-0,2187	0,9765	-0,448	10,00	-0,0814	-0,5515	0,295
3,50	-0,7148	-2,4953	0,573								

Формулы (58) приближённые, рекомендуемые к применению; точная формула имеет вид:

$$\alpha'_a = \frac{\sum \mu \mu' \bar{k}^2 (1 + \alpha'_{a-ab})}{1 - \sum \mu \mu' \bar{k}^2 (1 + \alpha'_{a-ab})}. \quad (59)$$

При необходимости учесть по уравнению (57) влияние не только смежных с узлом  $a$  узловых моментов, но и расположенных далее, приписывают новые члены, которые образуются подобно предыдущим с добавлением множителей вида

$$(1 + \alpha'_{b-bc}) \mu_{cd} \cdot \bar{k}.$$

Для определения опорных моментов можно пользоваться методом фокусов. Формула левого фокусного отношения в пролёте  $n$  имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} k_n &= \frac{M_n}{M_{n-1}} = 2 \frac{\psi_n}{\Phi_n} + \\ &+ \frac{i_n \Phi_{n-1}}{i_{n-1} \Phi_n} \left( 2 \frac{\psi_{n-1}}{\Phi_{n-1}} - \frac{1}{k_{n-1}} \right) = \\ &= c_n + \frac{i_n \Phi_{n-1}}{i_{n-1} \Phi_n} \left( c_{n-1} - \frac{1}{k_{n-1}} \right), \end{aligned} \right\} \quad (60)$$

где

$$\psi_n = 3 D'_n : C'_n \cdot k_n l_n;$$

$$\Phi_n = 3 D_n : C'_n \cdot k_n l_n; \quad c_n = 2 D'_n : D_n.$$

Значения функций  $\psi$ ,  $\Phi$  и  $c$  приведены в табл. 25 и 26; погонная жёсткость  $i_n = EI : l_n$ . Неудобство формулы (60) состоит в необходимости знать  $k_{n-1}$  для подсчёта  $k_n$ ; приближённой формулой, освобождающей от этого, является

$$k_n = k_{ab} \approx c_n + c_{n-1} \frac{i_n \Phi_{n-1}}{i_{n-1} \Phi_n} \times \frac{c_{n-1}^2 - 1}{c_{n-1}^2 - \mu_{ab}^{n-1}}. \quad (61)$$

Опорные моменты в единственно загруженном пролёте

$$\left. \begin{aligned} M_{лев} &= - \frac{\Delta_{n-1,p} \cdot k'_n - \Delta_{n,p}}{\Phi_n (k_n k'_n - 1)} \cdot 6 l; \\ M_{np} &= - \frac{-\Delta_{n-1,p} + \Delta_{n,p} \cdot k_n}{\Phi_n (k_n k'_n - 1)} 6 l. \end{aligned} \right\} \quad (62)$$

Порядок пользования формулами (60) и (62) тот же, что и в статике. Так, если требуется найти от симметрично расположенной силы  $P \cdot \sin pt$  моменты в пятипролётной неразрезной балке с защемлёнными концами при  $l = \text{const} = 4 \text{ м}$ ,  $i = \text{const}$  и  $k = 1 \text{ м}^{-1}$ , то при  $kl = 4$  по табл. 25 находят  $\Phi_n = -1,018$ ;  $c_n = -0,1008$ . Следовательно<sup>1</sup>, по (60) и (61)

$$k_1 = -0,1008; \quad k_1 = -0,1008;$$

$$k_2 = 9,716; \quad k_2 = 9,720; \quad k_3 = -0,305;$$

$$k_3 = -0,303.$$

По формуле для случая 1-го (стр. 189) имеем:

$$\begin{aligned} \Delta_{np} &= \Delta_{n-1,p} = -P \cdot C_{0,5} l : 2k^2 E I A'_{0,5} l = \\ &= -0,667 P : 4 l. \end{aligned}$$

<sup>1</sup> Совпадение результатов по обеим формулам наблюдается вне зоны резонанса; в данной задаче близок резонанс.

Таблица 26

Функции  $c_{ab}$ ,  $c_{ab}^m$ ,  $c_{ab}^{CK}$ 

$$c_{ab} = \frac{3\psi_k}{4\psi_k^2 - \Phi_k^2} = \frac{\kappa l}{4 \sec \kappa l \cdot \sec \kappa l - 1} = \frac{\kappa l D'}{1 - A'}; \quad c_{ab}^m = \frac{0,75}{\psi_k} = \frac{\kappa l}{2(\operatorname{ctg} \kappa l - \operatorname{ctg} \kappa l)} = \frac{\kappa l C'}{4 D'};$$

$$c_{ab}^{CK} = \kappa l : 2 (\operatorname{tg} \kappa l + \operatorname{th} \kappa l) = \kappa l A' : 4 B'$$

$\kappa l$	$c_{ab}$	$c_{ab}^m$	$c_{ab}^{CK}$	$\kappa l$	$c_{ab}$	$c_{ab}^m$	$c_{ab}^{CK}$	$\kappa l$	$c_{ab}$	$c_{ab}^m$	$c_{ab}^{CK}$
0	1,0000	0,7500	0,2500	3,60	0,4284	-1,7560	1,2065	7,00	0,2255	-23,73	1,8702
0,25	1,0000	0,7500	0,2500	3,70	0,3269	-3,086	1,1395	7,05	0,0641	-92,60	1,7952
0,50	0,9998	0,7497	0,2479	3,80	0,2027	-6,510	1,0719	2,25 $\pi$	0	$\infty$	1,7671
0,75	0,9992	0,7485	0,2394	3,90	0,0478	-35,714	1,0017	7,10	-0,1155	58,14	1,7192
1,00	0,9976	0,7452	0,2156	1,25 $\pi$	0	$\pm \infty$	0,9818	7,20	-0,5497	15,43	1,5621
1,25	0,9941	0,7382	0,1620	3,95	-0,0450	43,10	0,9651	7,25	-0,8172	11,70	1,5343
1,50	0,9877	0,7254	0,0500	4,00	-0,1501	14,591	0,9271	7,50	-3,2090	5,948	1,0118
1,75	0,9771	0,7037	-0,1913	4,25	-1,0063	4,230	0,7069	7,75	-16,9454	4,327	0,3659
2,00	0,9608	0,6689	-0,8190	4,50	-3,7021	2,868	0,3995	2,5 $\pi$	$\pm \infty$	0	0
2,25	0,9361	0,6148	-4,0739	1,5 $\pi$	$\pm \infty$	0	0	8,00	15,5278	3,487	-0,6897
0,75 $\pi$	$\pm \infty$	$\pm \infty$	4,75	4,75	70,575	2,288	-0,0931	8,25	7,0864	2,909	-2,9970
2,50	0,9002	0,5314	5,2172	5,00	5,7486	1,929	-1,0501	8,50	4,9402	2,423	-13,0222
2,60	0,8818	0,4863	3,3534	5,25	3,5884	1,644	-3,8838	2,75 $\pi$	4,3197	$\pm \infty$	$\pm \infty$
2,70	0,8607	0,4321	2,0048	1,75 $\pi$	$\pm \infty$	0	0	8,75	3,7864	1,945	22,0445
2,80	0,8361	0,3694	2,1974	5,50	2,7758	1,3718	627,489	9,00	3,2667	1,402	8,2164
2,90	0,8079	0,2863	1,9397	5,75	2,3030	1,0668	7,0248	9,10	3,0403	1,146	6,8597
2,95	0,7922	0,2334	1,8423	6,00	1,9465	0,6762	4,2313	9,20	2,8253	0,8560	5,9635
3,0	0,7754	0,1870	1,7595	6,10	1,8158	0,4767	3,7446	9,30	2,6161	0,5182	5,3169
3,05	0,7572	0,1282	1,6878	6,15	1,7510	0,3632	3,5513	9,35	2,5121	0,3260	4,9542
3,10	0,7377	0,0619	1,6242	6,20	1,6861	0,2386	3,3819	9,40	2,4078	0,1137	4,8194
$\pi$	0,7210	0	1,5708	6,25	1,6206	0,1004	3,2327	3 $\pi$	2,3562	0	4,7124
3,15	0,7166	-0,0133	1,5677	2 $\pi$	1,5708	0	3,1416	9,45	2,3025	-0,1223	4,6091
3,20	0,6940	-0,0994	1,5158	6,30	1,5542	-0,0539	3,0989	9,50	2,1957	-0,3871	4,4171
3,25	0,6694	-0,1985	1,4696	6,35	1,4865	-0,2276	2,9763	9,55	2,0866	-0,6876	4,2413
3,30	0,6430	-0,3139	1,4261	6,40	1,4170	-0,4254	2,8739	9,60	1,9747	-1,0326	4,0780
3,40	0,5832	-0,6112	1,3470	6,50	1,2710	-0,9181	2,6633	9,75	1,6153	-2,480	3,6458
3,50	0,5126	-1,049	1,2748	6,75	0,8391	-3,429	2,2410	10,00	0,8790	-9,213	3,0333

По формуле (62):

$$M_{лев} = M_{np} = -1,416 \text{ тм} = M_3;$$

$$M_2 = 1,416 : 9,716 = 0,146 \text{ тм};$$

$$M_1 = -0,146 : -0,1008 = 1,446 \text{ тм}.$$

## Колебания рам

При расчёте рам можно, как и при расчёте неразрезных балок, пользоваться методом сил и методом перемещений. Первый, если обратиться к данным стр. 190, приведёт к схожему с известным в статике сооружений уравнению четырёх моментов; второй более удобен, так как содержит меньшее число неизвестных.

Канонические уравнения метода перемещений записываются, как и в статике:

$$\left. \begin{aligned} Z_1 r_{11} + Z_2 r_{12} + \dots + Z_n r_{1n} + R_{1p} &= 0, \\ Z_1 r_{21} + Z_2 r_{22} + \dots + Z_n r_{2n} + R_{2p} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (63)$$

и т. д.

Коэффициенты  $r$  и  $R$  подсчитываются на основе данных стр. 189—190.

Собственные частоты находятся из условия равенства нулю детерминанта.

**Частные случаи.** 1. П-образная рама с зашумленными стойками. Основная система для симметричных колебаний (фиг. 98) требует решения одного уравнения

$$Z_1 r_{11} = 0,$$

где

$$r_{11} = 4k_1 E I_1 D'_1 : (1 - A'_1) + k_2 E I_2 A'_2 : B'_2,$$

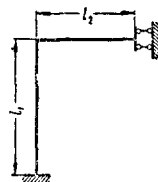
откуда уравнение частот

$$\frac{4k_1 l_1 i_1 D'_1}{1 - A'_1} = - \frac{k_2 l_2 i_2 A'_2}{B'_2}$$

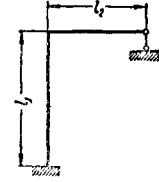
или

$$4i_1 c_{ab} = -0,25 i_2 c_{ab}^{CK},$$

которое удобно решить графически (стр. 191).



Фиг. 98



Фиг. 99

Основная система кососимметричных колебаний (фиг. 99) требует решения двух уравнений, так как неизвестны угол поворота и смещение узла; детерминант даёт условие для нахождения частот:

$$\begin{aligned} r_{11} r_{22} - r_{12}^2 &= \\ &= \left( \frac{4k_1 l_1 i_1 D'_1}{1 - A'_1} + \frac{k_2 l_2 i_2 C'_2}{D'_2} \right) \frac{2k_2^3 l_2 i_2 B'_2}{1 - A'_2} - \\ &- \left( \frac{2k_1^2 l_1 i_1 C'_1}{1 - A'_1} \right)^2 = 0. \end{aligned}$$

2. Симметричная рама с тремя равными пролётами, жёстко зашумленная. Урав-

нение частот прямосимметричных колебаний:

$$\frac{i_1}{i_2} \left( 2 - \frac{1}{c_1} \right) + \frac{c_{ab2}}{c_{ab1}} = i_1^2 : i_2^2 \cdot c_1^2 \left( \frac{i_1}{i_2} + \frac{c_{ab2}}{c_{ab1}} \right),$$

где параметры с индексом 1 относятся к ригелю, с индексом 2 — к стойке; величины, необходимые в расчёте, берут из табл. 25 и 26.

Динамические эпюры в рамах можно отыскивать, как указано на стр. 189. Остаются в силе и формулы (57), (58) и (59). Применяя метод фокусов, следует взамен (60) и (61) пользоваться формулами:

$$k_n = c_n + \frac{i_n : \Phi_n}{\sum_{-n} \frac{i : \Phi}{c - 1 : \kappa}}; \quad (64)$$

$$k_n = k_{ab} \approx c_n + \frac{2l_n : \Phi_n}{\sum_{-n} \frac{i(c^2 - \mu_{ab})}{\psi(c^2 - 1)}}. \quad (65)$$

В формулах (64) и (65) в знаменатель входят параметры стержней, примыкающих к узлу  $a$ , исключая стержень  $n$ . Формулы (62) остаются в силе.

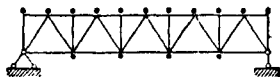
Расчёт рам, в особенности при определении собственных частот, иногда выполняют приближённо, заменяя распределённые массы сосредоточенными; при этом пользуются методами, изложенными на стр. 184—186.

## КОЛЕБАНИЯ ФЕРМ, АРОК И ФУНДАМЕНТОВ

### Колебания ферм

Плоскую ферму при колебаниях в её плоскости рассчитывают в предположении, что массы сосредоточены только в узлах; собственный вес элементов относят также в узлы. Таким образом, ферма обращается в систему с  $n$  степенями свободы, где  $n$  равно удвоенному числу узлов без трёх (стр. 184).

Для определения собственных колебаний удобно пользоваться методом, описанным на стр. 184—185, при этом необходимо отделить



Фиг. 100. Ферма с сосредоточенными массами

прямосимметричные колебания от кососимметричных. [Формулы (33)—(35)].

Для фермы (фиг. 100) такое разделение показано на фиг. 101—102. В прямосимметричных колебаниях (фиг. 101) этой фермы можно пренебречь семью горизонтальными смещениями масс и определять лишь восемь вертикальных, учтя, кроме того, что колебания массы в узле 0 независимы от колебаний прочих масс. В кососимметричных колебаниях из общего числа 15 частот можно ограничиться определением семи вертикальных (из них одно, для узла 0, независимое) и одного горизонтального (общее смещение масс верхнего пояса). Применение уравне-

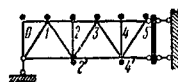
ний (33)—(35) не вызывает затруднений, и станет возможным найти все частоты и все формы колебаний.

Расчёты показали, что третья частота колебаний (вторая прямосимметричная) больше первой примерно в 4 раза, а не в 9, как в сплошных балках.

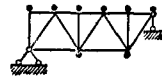
Существует метод последовательных приближений для определения основного тона колебаний. Основная формула этого метода:

$$\varphi^2 = 1 : \sqrt{\sum_1^n (m_k^2 x_k^2 + m_k^2 y_k^2)}, \quad (66)$$

которая сложнее формулы (33); порядок применения этого метода следующий:



Фиг. 101



Фиг. 102

а) ферма рассчитывается на узловую статическую нагрузку с определением для каждого узла  $k$  вертикального  $y_k$  и горизонтального  $x_k$  перемещений;

б) величины  $x_k$  и  $y_k$  подставляются в формулу (66);

в) полученное значение  $\varphi^2$  в первом приближении даёт возможность вычислить амплитуды инерционных сил  $m_k \varphi^2 x_k$  и  $m_k \varphi^2 y_k$ ; на их действие следует вновь рассчитать ферму и снова определить  $x_k$  и  $y_k$ ; эти последние значения  $x_k$  и  $y_k$  вновь подставляют в формулу (66); в результате находят  $\varphi^2$  во втором приближении.

Процесс повторяют обычно не менее трёх раз. Этот метод уступает методу, основанному на применении уравнений (33)—(35).

Для определения первой частоты иногда пользуются формулой

$$\varphi_1 = 1,13 \sqrt{g : \delta}, \quad (67)$$

где  $\delta$  — статический прогиб балочной фермы в середине пролёта.

Опытные исследования металлических мостов привели к таким формулам:

а) для вертикальных колебаний

$$\varphi = 2\pi \cdot 10^4 : (47 - 0,1 l) l; \quad (68)$$

б) для горизонтальных колебаний

$$\varphi = 2\pi \cdot 10^4 : 80 l. \quad (69)$$

В этих формулах пролёт  $l$  в метрах.

### Колебания арок

Методы непосредственного интегрирования не привели пока к получению удобных решений. Имеющиеся формулы основаны на применении методов приближённых вычислений (стр. 195—196).

Для круговых арок радиуса  $R$ , с центральным углом  $\theta$ , постоянного поперечного сечения, при постоянной радиальной нагрузке  $q$ , включающей собственный вес, предложены формулы частот колебаний:

а) очень пологих арок при симметричной форме колебаний в одну полуволну (фиг. 103)

$$\varphi^2 = \frac{EFg}{R^2q} \left( 1 + \frac{\alpha^4 l^2}{\theta^4 R^2} \right), \quad (70)$$

где  $l$  — радиус инерции сечения арки;  $\alpha = \pi$  для двухшарнирных арок;  $\alpha = 4,75$  для бесшарнирных;

б) при кососимметричной форме — в две полуволны (фиг. 104)

$$\varphi^2 = \frac{EIg}{q\theta^4 R^4} \cdot \alpha^2, \quad (71)$$



Фиг. 103. Симметричное колебание арки



Фиг. 104. Антисимметричное колебание арки

где

$$\alpha = (4\pi^2 - \theta^2) : \sqrt{1 + 0,75 \theta^2 : \pi^2}$$

для двухшарнирной системы;

$$\alpha = \sqrt{(3803 - 92,1\theta^2 + \theta^4) : (1 + 0,060\theta^2)}$$

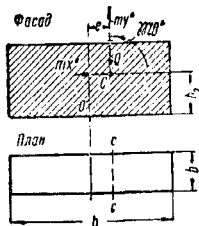
для бесшарнирной системы.

Для двухшарнирной круговой арки может быть указана полученная в результате применения формул (33) — (34) приближенная формула первой частоты колебаний в две полуволны:

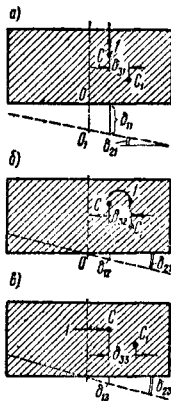
$$\varphi = \frac{K}{R^2} \sqrt{\frac{EIg}{q}}, \quad (71')$$

где

$$K = \frac{2\pi \cdot \cos 0,25\theta}{\theta \sin \frac{\theta}{2\pi}}$$



Фиг. 105



Фиг. 106. Единичные перемещения фундамента

Для параболических двухшарнирных арок при двух полуволнах колебаний и при условии  $I = I_0 : \cos \beta$ , где  $\beta$  — угол наклона касательной, имеем:

$$\varphi^2 = \frac{EIg}{q l^4} \alpha^2; \quad (72)$$

здесь

$$\alpha \approx 60 : (0,0386 + 0,527 f^2 : l^2)$$

при  $q = \text{const}$ ;

$$\alpha \approx 60 : (0,0386 + 0,701 f^2 : l^2 + 1,333 f^4 : l^4)$$

при

$$q = q_0 : \cos \beta.$$

Можно рекомендовать при приближенном решении перейти от распределенных масс к ряду сосредоточенных и использовать методы, изложенные на стр. 184—186. При этом следует полагать, что каждая масса обладает в плоскости арки двумя степенями свободы соответственно вертикальной и горизонтальной проекциям полного перемещения.

### Колебания массивных фундаментов

Рассматривается случай (фиг. 105), когда центр тяжести  $O$  прямоугольной площади  $F = ab$  подошвы и центр тяжести  $C$  вертикальных сил  $Q$  лежат в вертикальной плоскости, пересекающей фундамент по одной из главных осей. Дифференциальные уравнения можно записать по типу уравнений (9) или (10). Применительно к (10) имеем (фиг. 106):

$$\left. \begin{aligned} \delta_{11} &= 1 : m\varphi_y^2 + e^2 : M_0\varphi_\theta^2; \delta_{12} = \\ &= \delta_{21} = e : M_0\varphi_\theta^2; \\ \delta_{13} &= \delta_{31} = h_2 \cdot \delta_{12}; \delta_{22} = 1 : M_0\varphi_\theta^2; \\ \delta_{23} &= \delta_{32} = h_2 : M_0\varphi_\theta^2; \\ \delta_{33} &= 1 : m\varphi_x^2 + h_2^2 : M_0\varphi_\theta^2. \end{aligned} \right\} \quad (73)$$

Здесь обозначено:

$$\begin{aligned} m\varphi_y^2 &= c_y \cdot F; m\varphi_x^2 = c_x \cdot F; M_0\varphi_\theta^2 = \\ &= c_y I - Qh_2, \end{aligned} \quad (74)$$

где  $c_y, c_x$  — коэффициенты постели при сжатии и сдвиге;

$I = bh^3 : 12$  — момент инерции.

Для определения собственных частот колебаний следует решить детерминант (32). Расчет упрощается в случае (весьма частом), когда  $e = 0$ . Тогда  $\delta_{12} = \delta_{13} = 0$ , и для частот<sup>1</sup> получают:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 &= \varphi_y^2 = c_y F : m; \\ \varphi_{2,3} &= \frac{\varphi_x^2 + \varphi_\theta^2}{2M : M_0} \pm \\ &\pm \sqrt{\left( \frac{\varphi_x^2 + \varphi_\theta^2}{2M : M_0} \right)^2 - \frac{\varphi_x^2 \cdot \varphi_\theta^2}{M : M_0}}, \end{aligned} \right\} \quad (75)$$

где  $M_0 = M + mh_2^2$ .

Для расчета вынужденных колебаний применяют методы, изложенные на стр. 186.

### ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОСНОВНОЙ ЧАСТОТЫ

Приближенные методы используются для определения собственных частот и при расчете динамических эпюр. Ниже указаны приемы нахождения первой частоты.

Метод приведения масс. Распределенную вдоль стержня массу заменяют одной сосредоточенной массой  $M$  из условия равенства кинетической энергии  $V$  от обоих воздействий; формула приведенной массы:

$$M = \left( \int q_x y_x^2 dx \right) : gy_a^2, \quad (76)$$

<sup>1</sup> См. пример 3 на стр. 186.

где  $y_x$  — амплитуда прогиба в текущей точке (под массой  $q_x$ ;  $g$ );  
 $y_a$  — частное значение  $y_x$  для точки приложения массы  $M$ . Частоту находят по формуле (15):

$$\varphi^2 = g y_a^2 : \bar{y}_{cm} \int q_x y_x^2 dx. \quad (77)$$

**Энергетический метод.** Из условия (11), приводящего к равенству наибольших значений кинетической энергии  $V_{\max}$  и потенциальной  $T_{\max}$ , имеем:

$$\varphi^2 = Elg \int y_x'' dx : \int q_x \cdot y_x^2 dx; \quad (78)$$

$$\varphi^2 = g \int q_x y_x dx : \int q_x y_x^2 dx. \quad (79)$$

Выражение  $y_x$  в формулах (76) — (79) точно неизвестно, поэтому необходимо им задаться произвольно, соблюдая граничные условия.

**Метод переноса массы.** Условием для переноса массы из одной точки  $x_i$  в другую  $a$  принимают равенство частот (15):

$$m_a \cdot \bar{y}_a = m_i \bar{y}_i;$$

переноса в точку  $a$  все массы по принципу сложения, получают

$$M_a \cdot \bar{y}_a = \sum m_i \bar{y}_i, \quad (80)$$

откуда по формуле (15)

$$\frac{1}{\varphi^2} = \sum \frac{1}{\varphi_i^2} = \frac{1}{\varphi_1^2} + \frac{1}{\varphi_2^2} + \dots + \frac{1}{\varphi_n^2}. \quad (81)$$

В случае распределённой массы

$$\frac{1}{\varphi^2} = \int \frac{q_x}{g} \bar{y}_x dx. \quad (82)$$

В формулах (80) — (82)  $\bar{y}_x$  — статический прогиб в точке с абсциссой  $x$  от действия единичного груза в этой же точке.

**Метод проф. С. А. Бернштейна.** Применяется неравенство

$$\frac{1}{V_{B_2}} < \varphi^2 < \frac{2}{B_1 \left[ 1 + \sqrt{\frac{2B_2}{B_1} - 1} \right]}, \quad (83)$$

где

$$B_1 = \sum m_i \bar{y}_i \text{ и } B_2 = \sum \sum m_i m_k \bar{y}_{ik}.$$

## ДВИЖЕНИЕ ГРУЗА ПО БАЛКЕ

**Критическая скорость.** Скорость движения груза по мосту, при которой может наступить резонанс, называется критической. Ниже приведены частные случаи:

1. Вес груза пренебрежимо мал сравнительно с весом балки, интенсивность которого  $q$ . Частота собственных колебаний просто опёртой сплошной балки (51)

$$\varphi = \frac{n^2 \pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{gEI}{q}};$$

частота обращения нагрузки

$$p = \frac{\pi n v_{кр}}{l}; \quad (84)$$

используя условия резонанса  $p = \varphi$  при  $n = 1$  находят:

$$v_{кр} = \frac{\pi}{l} \sqrt{\frac{gEI}{q}} \approx 2,46 \sqrt{h} \sqrt{\frac{E}{\sigma}}, \quad (85)$$

где  $h$  — высота балки в м;

$\sigma$  — статическое напряжение от собственного веса.

2. Вес балки пренебрежимо мал сравнительно с грузом  $P$ . Частота обращения нагрузки попрежнему

$$p = \pi n v_{кр} : l;$$

частота колебаний балки

$$\varphi = \sqrt{g : y_{cm}} = \sqrt{3EIgl : Px^2(l-x)^2};$$

из условия  $p = \varphi$  при  $n = 1$  определяют:

$$v_{кр} \approx 1,22 \sqrt{h} \sqrt{\frac{E}{\sigma}} \sqrt{\frac{l^2}{(l-x)x}}, \quad (86)$$

а при  $x = 0,5l$  формула почти совпадает с формулой (85), при этом  $\sigma$  — статическое напряжение от груза  $P$ .

**Динамические коэффициенты.** Тяжёлый груз по балке малого веса. Расчётная нагрузка — статический вес  $P$ , сложенный с инерционной силой

$$P_1 = -\frac{P}{g} \frac{d^2 y}{dt^2}; \text{ заменяют } \frac{d^2 y}{dt^2} \text{ на}$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} \cdot \frac{dx^2}{dt^2} = \frac{d^2 y}{dx^2} v^2,$$

где  $v$  — скорость. От действия силы  $P$  прогиб  $y = \frac{P(l-x)^2 x^2}{3EI l}$ ;

поэтому

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{2P}{3EI l} (-l^2 + 6lx - 6x^2).$$

Максимум динамического коэффициента при  $x = 0,5l$  составит:

$$\mu = (P + P_1) : P = 1 + \frac{Plv^2}{3EIg} \approx 1 + \frac{\sigma v^2}{El} \cdot \frac{s}{3,70}. \quad (87)$$

Здесь  $\sigma$  — статическое напряжение от силы  $P$ ;  $s = l : h$ , где  $h$  — высота сплошной балки. Очевидно, что с увеличением пролёта  $\mu$  уменьшается.

**Лёгкий груз по массивной балке.** Частоту обращения груза при его движении по балке берут по формуле (84), груз  $P(x, t)$  — по формуле (4). Дифференциальное уравнение колебаний согласно формуле (43) будет:

$$y_x^{IV} + \frac{q}{gEI} y_t'' = \frac{2P}{EI l} \sum_{n=1}^{\infty} \sin pt \sin \frac{\pi n x}{l}; \quad (88)$$

общее решение (88)

$$y = y_t \cdot \sin \frac{\pi n x}{l},$$

где

$$y_t = A \sin \varphi t + B \cos \varphi t + \frac{2Pg \sin pt}{lq(\varphi^2 - p^2)}. \quad (89)$$

Собственная частота  $\varphi$  определяется согласно формуле (51). После использования



начальных условий  $y_{t=0} = y'_{t=0}$  определяют  $B = 0$  и  $A = -\frac{2P \cdot p \cdot g}{\varphi l q (\varphi^2 - p^2)}$ . Затем из (89) и (51) получают

$$\left. \begin{aligned} y &= \frac{2Pg \sin \frac{\pi x}{l}}{l q \varphi^2 (1 - \beta^2)} |\sin pt - \beta \sin \varphi t| \approx \\ &\approx y^0 \frac{\sin \frac{\pi x}{l}}{n^4 (1 - \beta^2)} (\sin pt - \beta \sin \varphi t), \end{aligned} \right\} \quad (90)$$

где

$$\beta = p : \varphi, \quad y^0 = \frac{Pl^3}{48EI}.$$

При  $v = 0$  из формулы (90)

$$y_{cm} = y^0 \cdot \frac{\sin \frac{\pi x}{l}}{n^4} \sin \frac{\pi a}{l},$$

где  $a$  заменяет  $v \cdot t$ . Максимум (90) составит:

$$y_{\max} \approx y_{cm} \frac{1 + \beta}{1 - \beta^2} = \frac{y_{cm}}{1 - \beta},$$

откуда динамический коэффициент

$$\mu \approx \frac{1}{1 - \frac{p}{\varphi}}. \quad (91)$$

Заменяя  $p$  и  $\varphi$  их выражениями, получают

$$\mu \approx 1 + \frac{1}{\frac{2,46}{v} \sqrt{\frac{E}{\sigma}} \sqrt{\frac{l}{s}} - 1}, \quad (92)$$

где попрежнему  $s = l : h$ .

## КРУЧЕНИЕ И ИЗГИБ ТОНКОСТЕННЫХ ПРОФИЛЕЙ

Теоретические и экспериментальные данные, относящиеся к кручению круглых профилей, показывают, что их поперечные сечения остаются плоскими и не деформируются в своей плоскости. Поперечные сечения некруглых профилей в общем случае искривляются (депланируют) при отсутствии, как и в предыдущем случае, деформаций в своей плоскости.

Для инженерной практики особое значение имеют некруглые тонкостенные профили, составленные из узких прямоугольников. Согласно экспериментальным и теоретическим исследованиям в этих профилях оказывается возможным также пренебречь деформацией поперечных сечений в своей плоскости, т. е. в данном случае их можно считать жёсткими в этом направлении. Тогда при скручивании таких профилей остаётся учесть только депланиацию поперечных сечений, выражающуюся в том, что отдельные точки этих сечений при чистом кручении дают продольные вдоль оси бруса упругие перемещения, тем самым искривляя плоскость самого сечения.

Наиболее полное развитие теории расчёта таких профилей осуществлено в СССР трудами В. З. Власова и А. А. Уманского.

Проф. Власовым дана общая теория расчёта замкнутых тонкостенных профилей, включающая вопросы их прочности, устойчивости и колебаний.

Экспериментальные исследования, связанные с этой теорией, проведены в ЦНИПС.

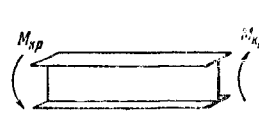
Проф. А. А. Уманский дал общую теорию расчёта замкнутых тонкостенных профилей.

Наконец, в Институте строительной механики АН УССР разработаны под руководством проф. Б. Н. Горбунова основы расчёта пространственных рам, состоящих из тонкостенных стержней.

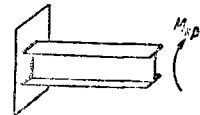
Ниже даются основы теории изгиба и кручения тонкостенных стержней в соответствии с работами проф. В. З. Власова.

Если условия кручения тонкостенного стержня таковы, что поперечные сечения

бруса могут свободно депланировать, то очевидно, что в поперечных сечениях будут отсутствовать нормальные напряжения. Такой способ кручения бруса называют свободным. В этих условиях, например, будет находиться двутавр (фиг. 107), подверженный действию двух концевых крутящих пар. В случае свободного кручения распределение касательных напряжений по длине бруса будет одинаково, и вычисляется оно по известным правилам сопротивления материалов как для сечения, состоящего из совокупности узких прямоугольников.



Фиг. 107. Свободное кручение



Фиг. 108. Стеснённое кручение

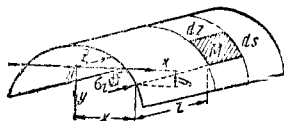
Далее рассматривается другой случай (фиг. 108) двутавра, заделанного одним концом и нагруженного на другом скручивающей парой. Здесь уже сечение двутавра не будет иметь возможности свободно депланировать; очевидно, что в этом случае в продольных волокнах бруса возникнут нормальные напряжения, размер которых будет прежде всего зависеть от величины крутящего момента, — такой способ кручения бруса называют стеснённым. Стеснённое кручение возникнет также и тогда, когда по длине бруса скручивающий момент будет меняться по величине. Совершенно ясно, что в связи с появлением в последнем случае нормальных напряжений, обусловленных кручением бруса, возникнут также и дополнительные касательные напряжения.

Дополнительные напряжения получают того же порядка, как и напряжения, по которым сечение обычно подбирается, и, следовательно, пренебречь их влиянием при проектировании сооружения становится невозможным.

Изложенная ниже теория даёт способы обнаружения и оценки полного напряжённого состояния в самом общем случае работы тонкостенного профиля.

### ДЕФОРМАЦИИ И НАПРЯЖЕНИЯ ТОНКОСТЕННОГО ПРОФИЛЯ

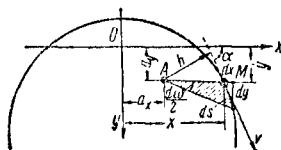
На фиг. 109 изображена тонкостенная незамкнутая оболочка. Начало координат выбирается в поперечном сечении в произ-



Фиг. 109. Тонкостенная оболочка

вольной точке  $O$ , направление оси  $x$  — горизонтальное, оси  $y$  — вертикальное и оси  $z$  — параллельно образующей. Система осей — правосторонняя.

Произвольная точка  $A(x, y)$  неразрывно связана с сечением, которое, по предположению, в своей плоскости не деформируется (фиг. 110).



Фиг. 110. Образование секториальной площади

Для дальнейших доказательств рассматривается такое смещение поперечного сечения, как целого, при котором в точке  $A$  имеют место смещения: по оси  $x$  —  $\xi$ , по оси  $y$  —  $\eta$  и угол вращения  $\theta$ .

$\xi$  и  $\eta$  — положительные при направлении по соответствующим осям;  
 $\theta$  — отрицательно при направлении по часовой стрелке.

Вторая произвольная точка  $M(x, y)$  лежит на самом профиле. Её перемещения обозначены: по касательной к контуру —  $v$ ; по нормали —  $w$ ; по оси  $z$  —  $u$ .

Для выражения смещения точки  $M(x, y)$  по касательной  $v$  сечение рассматривается как жёсткий диск.

Проектируя величины  $\xi$  и  $\eta$  на направление  $v$  и учитывая влияние вращения, получают:

$$v = \xi \cos \alpha + \eta \sin \alpha + h \theta.$$

Исходя из экспериментальных данных, для упрощения расчёта можно предположить отсутствие сдвигов в срединной поверхности оболочки.

По фиг. 109 эта вторая гипотеза будет соответствовать отсутствию перекашивания сторон элементарного прямоугольника  $ds \cdot dz$ , выделенного из срединного слоя оболочки в точке  $M$ . На фиг. 111 изображён элементарный прямоугольник  $MM_1M_2$ .

Перемещение точки  $M_1$  по оси  $z$  будет отличаться от перемещения  $u$  точки  $M$  на величину  $du$ .

Аналогично перемещение точки  $M_2$  по дуге (или по касательной) будет отличаться от перемещения  $v$  в том же направлении точки  $M$  на величину  $dv$ . Это даёт возможность подсчитать размер угловой деформации, т. е. деформации сдвига в срединной поверхности в точке  $M$ :

$$\gamma = \varphi + \psi = \frac{du}{ds} + \frac{dv}{dz}.$$

Но ввиду того что

$$du = \frac{\partial u}{\partial z} ds \text{ и } dv = \frac{\partial v}{\partial z} dz,$$

получим

$$\gamma = \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial z}.$$

Однако по условию  $\gamma = 0$ , т. е.

$$\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial z} = 0.$$

Частным интегрированием по  $s$  находим:

$$u = \zeta(z) - \int_0^s \frac{\partial v}{\partial z} ds,$$

где  $\zeta(z)$  — произвольная функция, играющая роль постоянной при интегрировании по  $s$ .

Пользуясь формулой для  $v$ , получим:

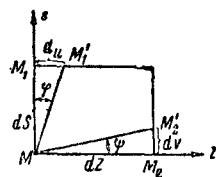
$$\frac{\partial v}{\partial z} = \xi' \cos \alpha + \eta' \sin \alpha + \theta' h.$$

Подставляя  $\frac{\partial v}{\partial z}$  в выражение для  $u$ , а также замечая, что:

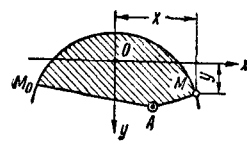
$$\frac{dx}{ds} = \cos \alpha; \frac{dy}{ds} = \sin \alpha; h ds = d\omega,$$

где  $d\omega$  — удвоенная элементарная площадь сектора  $A$  —  $ds$  (секториальная площадь), находим значение  $u$ :

$$\begin{aligned} u &= \zeta(z) - \int_0^s \left[ \xi' \frac{dx}{ds} + \eta' \frac{dy}{ds} + \theta' h \right] ds = \\ &= \zeta(z) - \left[ \xi' \int_0^s dx + \eta' \int_0^s dy + \theta' \int_0^s d\omega \right] = \\ &= \zeta(z) - \xi' (x - x_0) - \eta' (y - y_0) - \theta' (\omega - \omega_0). \end{aligned}$$



Фиг. 111. Деформации элемента поверхности



Фиг. 112. Отсчёт секториальных площадей

В последнем выражении величину  $[\xi' x_0 + \eta' y_0 + \theta' \omega_0]$ , как не зависящую от  $x, y$ , относим к произвольной интегрирования  $\zeta(z)$ , в результате закон деформации поперечного сечения оболочки будет иметь вид:

$$u = \zeta(z) - \xi' x - \eta' y + \theta' \omega.$$

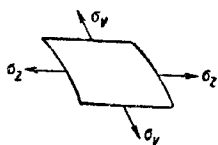
Первые три слагаемых дают закон плоскости, последнее даёт так называемый закон

секториальных площадей, показывающий, что сечение в этом случае не остаётся плоским, а деформируется, причём перемещение  $u$  пропорционально удвоенной площади сектора с вершиной в точке  $A$  (фиг. 112).

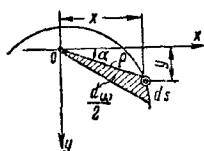
Точку  $A$  назовём секториальным полюсом. Относительная продольная деформация образующей оболочки

$$\epsilon_z = \frac{\partial u}{\partial z} = \zeta'(z) - \xi''x - \eta''y - \theta''\omega.$$

На основе предыдущего, пользуясь законом Гука, можно составить и выражение нормального напряжения, возникающего в поперечном сечении оболочки.



Фиг. 113. Нормальные напряжения оболочки



Фиг. 114. Элементарная центральная секториальная площадь

Относительные удлинения по образующей и по касательной к дуге контура для прямоугольника будут равны (по фиг. 113)

$$\epsilon_z = \frac{1}{E} (\sigma_z - \mu\sigma_y); \quad \epsilon_y = \frac{1}{E} (\sigma_y - \mu\sigma_z).$$

В силу несжимаемости контура оболочки

$$\epsilon_y = \frac{1}{E} (\sigma_y - \mu\sigma_z) = 0;$$

$$\sigma_y = \mu\sigma_z; \quad \epsilon_z = \frac{1}{E} (\sigma_z - \mu^2\sigma_z) = \frac{\sigma_z}{E} (1 - \mu^2).$$

Отсюда:

$$\sigma_z = E_1 \epsilon_z; \quad E_1 = \frac{E}{1 - \mu^2};$$

$$\sigma_z = E_1 [\zeta'(z) - \xi''x - \eta''y - \theta''\omega].$$

Таким образом, нормальное напряжение оказалось выраженным через производные перемещения оболочки  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\theta$ .

В дальнейшем с помощью условий равновесия удаётся эти факторы выразить через внутренние усилия и тем придать формуле  $\sigma_z$  более удобный вид.

### Координатные упрощения

Если  $O_x$  и  $O_y$  — главные центральные оси поперечного сечения оболочки, то

$$\int x dF = 0; \quad \int y dF = 0; \quad \int xy dF = 0.$$

Поставим дополнительно ещё три условия:

$$\int \omega dF = 0; \quad \int x \omega dF = 0; \quad \int y \omega dF = 0.$$

Для их выполнения имеются три произвольные величины: две координаты точки  $A(a_x, a_y)$  и начало отсчёта  $M_0$  секториальных площадей  $\omega$ .

По фиг. 114 составляется выражение элементарной секториальной площади с полюсом в начале координат

$$d\omega = \rho^2 d\alpha = (x^2 + y^2) d\alpha = x \cdot x d\alpha + y \cdot y d\alpha.$$

Но

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \alpha; \quad y = \rho \sin \alpha; \\ dx &= -\rho \sin \alpha d\alpha = -y d\alpha; \\ dy &= \rho \cos \alpha d\alpha = x d\alpha; \\ d\omega &= x dy - y dx. \end{aligned}$$

Аналогично по фиг. 115 для секториальных полюсов  $A$  и  $B$ :

$$d\omega_A = (x - a_x) dy - (y - a_y) dx;$$

$$d\omega_B = (x - b_x) dy - (y - b_y) dx;$$

$$d(\omega_A - \omega_B) = (a_y - b_y) dx - (a_x - b_x) dy;$$

$$\omega_A = \omega_B + [(a_y - b_y)x - (a_x - b_x)y] + C.$$

Выбрав произвольно полюс  $B$ , положение полюса  $A$  определяем при соблюдении условий:

$$\begin{aligned} \int \omega_A x dF &= \int \omega_B x dF + (a_y - b_y) \int x^2 dF - \\ &- (a_x - b_x) \int xy dF + C \int x dF = 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \omega_A y dF &= \int \omega_B y dF + (a_y - b_y) \int xy dF - \\ &- (a_x - b_x) \int y^2 dF + C \int y dF = 0. \end{aligned}$$

Учитывая, что оси  $x, y$  — главные, находим:

$$a_x = b_x + \frac{\int \omega_B y dF}{I_x};$$

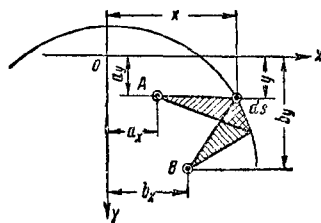
$$a_y = b_y - \frac{\int \omega_B x dF}{I_y}.$$

Это даёт координаты точки  $A$ :

$$a_x = a_x - b_x = \frac{\int \omega_B y dF}{I_x};$$

$$a_y = a_y - b_y = -\frac{\int \omega_B x dF}{I_y}.$$

Они не зависят от величины  $C$ , т. е. от начала отсчёта секториальных площадей, и определяются исключительно геометрией поперечного сечения.



Фиг. 115. Преобразование секториальных полюсов

Значения  $a_x, a_y$  откладывают от начального произвольно выбранного полюса  $B$  по направлениям главных центральных осей в соответствии с их знаком.

Полюс  $A$  является центром изгиба. Если внешняя нагрузка проходит через этот полюс, то сечение не испытывает кручения и напряжённое состояние поперечного сечения подчиняется обычному закону плоскости.

В дальнейшем полюс секториальных площадей переносят в точку  $A$ , т. е. в центр изгиба.

Задаваясь произвольным полюсом  $B$ , возможно для любого сечения разыскать положение центра изгиба.

Если обозначить через  $\omega$  секториальную площадь при искомом начале отсчёта,  $\omega'$  — секториальную площадь при предварительно выбранном начале отсчёта, то разность этих площадей будет постоянной величиной:

$$\omega = \omega' + D.$$

Из условия  $\int \omega dF = 0$ , т. е. путём выбора соответствующего начала отсчёта секториальных площадей, находят:

$$\begin{aligned} \int (\omega' + D) dF &= \int \omega' dF + D \int dF = \\ &= \int \omega' dF + D \cdot F = 0, \\ D &= - \frac{\int \omega' dF}{F}. \end{aligned}$$

Взяв произвольное начало отсчёта секториальных площадей  $\omega'$ , можно подсчитать  $D$ . Этим путём определяется искомое начало отсчёта (секториальная нулевая точка).

В дальнейшем положительными значениями секториальной площади будут те, которые соответствуют вращению радиуса вектора по часовой стрелке.

Условия симметрии существенно упрощают разыскание центра изгиба и секториальной нулевой точки. Именно при наличии одной оси симметрии — центр изгиба и секториальная нулевая точка лежат на ней.

При двух осях симметрии вообще отпадает необходимость в их разыскании.

Таким образом, система отсчёта такова:

1. Оси  $x$ ,  $y$  являются главными центральными:

$$\int x dF = \int y dF = \int xy dF = 0.$$

2. Секториальный полюс  $A$  находится в центре изгиба и потому

$$\int \omega_A x dF = \int \omega_A y dF = 0.$$

3. Секториальная нулевая точка

$$\int \omega dF = 0.$$

### Нормальные напряжения

Нормальное напряжение, выраженное через перемещения  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\theta$ ,

$$\sigma_z = E_1 [\zeta' (z) - \xi'' x - \eta'' y - \theta'' \omega]$$

( $\sigma_z$  положительно при совпадении с  $+z$ ).

Помножив последовательно обе части формулы на величины 1,  $x$ ,  $y$ ,  $\omega$  и проинтегрировав по всему поперечному сечению оболочки, на основании условий 1, 2, 3 (фиг. 109) получим:

$$\left\{ \begin{aligned} \sigma_z dF &= N = \zeta' E_1 F; \\ \sigma_z x dF &= -M_y = -\xi'' E_1 I_y; \\ \sigma_z y dF &= M_x = -\eta'' E_1 I_x; \\ \sigma_z \omega dF &= B = -\theta'' E_1 I_\omega, \end{aligned} \right\},$$

где  $N$  — нормальная сила в поперечном сечении, положительная при совпадении с  $+z$ .

Здесь принято, что моменты положительны в том случае, если их векторы совпадают с направленными осями координат.

После подстановки значений величин  $\zeta'$ ,  $\xi''$ ,  $\eta''$ ,  $\theta''$ , полученных из предшествующих уравнений, формула  $\sigma_z$  примет вид:

$$\sigma_z = \frac{N}{F} + \frac{M_x}{I_x} \cdot y - \frac{M_y}{I_y} \cdot x + \frac{B}{I_\omega} \cdot \omega.$$

Здесь появляются:

1) секториальный момент инерции поперечного сечения

$$I_\omega = \int \omega^2 dF \text{ в см}^6,$$

2) изгибо-крутящий бимомент

$$B = \int \sigma_z \cdot \omega dF \text{ в кг} \cdot \text{см}^2.$$

Формула  $\sigma_z$  является обобщением соответствующей формулы внецентренного сжатия.

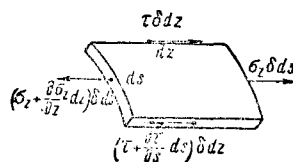
Последнее слагаемое возникает в том случае, когда поперечная нагрузка, действующая на стержень с тонкостенным профилем сечения, не проходит через центр изгиба, сообщая ему кручение. Это кручение в данном случае даёт дополнительные нормальные напряжения, распределённые в поперечном сечении по закону секториальных площадей.

Все усилия и напряжение положительны, если их векторы совпадают с осями координат. Секториальная площадь положительна при вращении радиуса вектора по часовой стрелке.

Бимомент определяется путём интегрирования дифференциального уравнения кручения. Определённое в этих условиях значение  $+ \sigma_z$  следует направить по оси  $+z$ .

### Касательные напряжения

Рассматриваем равновесие прямоугольного элемента, выделенного из оболочки в точке  $M$  (фиг. 109, 116). (На фиг. 116 показаны только силы, параллельные оси  $z$ .) Проектируем силы на ось  $z$ . Считая толщину оболочки  $\delta$  постоянной, а также предполагая поверхность оболочки свободной от нагрузки, получим:



Фиг. 116. Касательные усилия элемента оболочки

$$d\sigma \cdot \delta \cdot ds + d\tau \cdot \delta \cdot dz = 0;$$

$$d\sigma = \frac{\partial \sigma}{\partial z} dz; \quad d\tau = \frac{\partial \tau}{\partial s} ds,$$

или, по сокращении на  $dzds$ ,

$$\frac{\partial \sigma}{\partial z} + \frac{\partial \tau}{\partial s} = 0.$$

Стсюда после интегрирования по  $s$

$$\tau = - \int_0^s \frac{\partial \sigma}{\partial z} ds + f(z).$$

Если края оболочки свободны от касательной нагрузки, то  $f(z) = 0$ .

Вводя элемент площади  $dF = \delta ds$  после подстановки в полученную формулу выражения  $\sigma_z$ , получим:

$$\tau = -\frac{M'_x}{I_x \delta} \int_0^s y dF + \frac{M'_y}{I_y \delta} \int_0^s x dF - \frac{B'}{I_\omega \delta} \int_0^s \omega dF,$$

где  $M'_x$ ,  $M'_y$ ,  $B'$  — производные.

Считая положительными поперечные силы, направленные вдоль соответствующих осей и сопоставляя это условие с приведённым выше правилом знаков для моментов, получим поперечные силы:

$$M'_x = +Q_y; \quad M'_y = -Q_x,$$

кроме того,

$\int_0^s y dF = S_x$ ;  $\int_0^s x dF = S_y$  — статические моменты отсечённой части поперечного сечения относительно осей  $x$ ,  $y$ .

Здесь входят также новые секториальные характеристики:

$$\frac{dB}{dz} = M_\omega;$$

$$S_\omega = \int_0^s \omega dF,$$

где  $M_\omega$  — изгибо-крутящий момент в кг·см;

$S_\omega$  — секториальный статический момент отсечённой части поперечного сечения.

Формула касательного напряжения  $\tau$  в новых обозначениях будет иметь вид:

$$\tau = -\left[ \frac{Q_y S_x}{I_x \delta} + \frac{Q_x S_y}{I_y \delta} + \frac{M_\omega S_\omega}{I_\omega \delta} \right].$$

Последнее слагаемое формулы отлично от нуля в том случае, когда поперечная нагрузка не проходит через центр изгиба.

Рассмотрим подробнее новые статические величины  $M_\omega$ ,  $B$ :

$$M_\omega = \frac{dB}{dz};$$

$$B = \int_F \sigma_z \omega dF.$$

После подстановки значения  $B$  в  $M_\omega$

$$M_\omega = \frac{dB}{dz} = \int_F \frac{\partial \sigma}{\partial z} \omega dF = \int_F \frac{\partial (\sigma \delta)}{\partial z} ds \cdot \omega,$$

и далее:

$$\begin{aligned} M_\omega &= \int_F \frac{\partial (\sigma \delta)}{\partial z} \omega ds = - \int_F \frac{\partial (\tau \delta)}{\partial s} ds \cdot \omega = \\ &= - \int_F d(\tau \delta) \cdot \omega = - \int_L (\tau \delta) \cdot \omega + \int_F \tau \delta \cdot d\omega. \end{aligned}$$

Первое слагаемое равно нулю, так как по условию края оболочки свободны от касательных усилий; вследствие этого

$$M_\omega = \int_F \tau \delta \cdot d\omega.$$

Этому выражению можно дать механическую интерпретацию.

Момент касательных напряжений относительно точки  $A$

$$M = \int_F (\tau \delta) ds \cdot r = \int_F \tau \delta \cdot d\omega = M_\omega,$$

т. е. изгибо-крутящий момент равен моменту всего потока касательных напряжений, равномерно распределённых по толщине оболочки и следующего по её сечению относительно центра изгиба  $A$ .

Секториальные характеристики  $\alpha_x$ ,  $\alpha_y$ ,  $M_\omega$ ,  $\omega$ ,  $I_\omega$ ,  $S_\omega$  определяются в соответствии с указаниями, изложенными ниже.

Силовые факторы  $B$  и  $M_\omega$  непосредственно по нагрузке чисто статическим путём определены быть не могут. Для их отыскания необходимо предварительно интегрировать дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет функция  $\theta$  углов закручивания бруса относительно секториального полюса.

Определив  $\theta$ , можно подсчитать значение  $B$ :

$$B = -\theta'' E_1 I_\omega.$$

Отсюда величина  $M_\omega$  определяется простым дифференцированием:

$$M_\omega = \frac{dB}{dz}.$$

#### Дифференциальное уравнение кручения стержня

При кручении тонкостенного стержня относительно секториального полюса  $A$  в данном поперечном сечении с абсциссой  $z$  возникают две системы усилий.

Помимо равномерно распределённых касательных напряжений  $q = \tau \delta$ , в сечении возникают неравномерно распределённые по толщине напряжения, определяемые по формулам узкого прямоугольника (кручение по Сен-Венану); они приводятся к крутящему моменту  $H$ , причём известно, что

$$\theta = \frac{Hz}{GI_d},$$

$$I_d = \alpha \frac{1}{3} \sum S \delta^3,$$

где  $S$  — длина полосы;

$\delta$  — ширина;

$\alpha$  — коэффициент, зависящий от рода сечения.

Суммирование распространено по всем полосам (прямолинейным и криволинейным), образующим профиль.

Суммарное действие  $M_\omega$  и  $H$  приводится к полному крутящему моменту  $L$  внешних нагрузок относительно центра изгиба  $A$  для данного сечения с абсциссой  $z$ , т. е.

$$L = M_\omega + H.$$

Ранее было получено:

$$M_\omega = \frac{dB}{dz} = -E_1 I_\omega \theta''.$$

Кроме того,

$$\theta' = \frac{H}{GI_d} \quad \text{или} \quad H = GI_d \theta'.$$

Подставляя эти величины, получим:

$$-E_1 I_\omega \theta''' + g I_d \theta' - L = 0.$$

Дифференцируем по  $z$ :

$$E_1 I_\omega \theta^{IV} - g I_d \theta'' + m = 0,$$

где  $m = \frac{dL}{dz}$  — интенсивность внешнего крутящего момента.

Отсюда

$$\theta^{IV} - k^2 \theta'' = f(z),$$

$$k = \sqrt{\frac{g I_d}{E_1 I_\omega}}.$$

Изгибо-крутильная характеристика

$$f(z) = -\frac{m}{E_1 I_\omega}.$$

без труда подсчитать влияние нагрузки, расположенной по длине бруса.

Для нашего случая действие нагрузки — моментное, оно даёт закручивание бруса, ибо, если закручивание отсутствует, то и необходимость в подобном расчёте отпадает. Подсчитаем, например, для случая, изображённого на фиг. 117, коэффициент влияния равномерной моментной нагрузки интенсивности  $m$  на поворот  $\theta$  в сечении  $z$ . Нагрузка  $m$  приложена на всём протяжении бруса от  $z = 0$ .

Выделяем на расстоянии  $t$  от заданного сечения элементарный отрезок бруса  $dt$  и рассматриваем действие единичного сосредоточенного момента  $mdt$ . Его влияние на поворот учтём посредством коэффициента влияния, данного в табл. 27 для такого сосредоточенного момента (столбец  $L_0$ ). Суммируя

Таблица 27

Коэффициенты влияния тонкостенных профилей

	$L_0$	$B_0$	$\theta'_0$	$\theta_0$	$m$
$\theta$	$\frac{1}{kg I_d} (kz - \text{sh} kz)$	$\frac{1}{g I_d} (1 - \text{ch} kz)$	$\frac{\text{sh} kz}{k}$	1	$\frac{1}{k^2 g I_d} \left[ \frac{(kz)^2}{2} + 1 - \text{ch} kz \right]$
$\theta'$	$\frac{1}{g I_d} (1 - \text{ch} kz)$	$-\frac{k}{g I_d} \text{sh} kz$	$\text{ch} kz$	0	$\frac{1}{kg I_d} [kz - \text{sh} kz]$
$B$	$\frac{\text{sh} kz}{k}$	$\text{ch} kz$	$-\frac{g I_d}{k} \text{sh} kz$	0	$\frac{1}{k^2} (\text{ch} kz - 1)$
$L$	1	0	0	0	$z$

Функция  $f(z)$  даёт влияние внешней нагрузки.

Полагая  $f(z) = 0$ , найдём:

$$\theta(z) = C_1 + C_2 z + C_3 \text{sh} kz + C_4 \text{ch} kz.$$

Далее составим выражения:

$$\theta'; B = -E_1 I_\omega \theta''; L = -E_1 I_\omega \theta''' + g I_d \theta'.$$

Получим:

$$\theta' = C_2 + C_3 k \text{ch} kz + C_4 k \text{sh} kz;$$

$$B = -g I_d (C_3 \text{sh} kz + C_4 \text{ch} kz);$$

$$L = g I_d C_2.$$

Полагая  $z = 0$  и выразив  $C_1, C_2, C_3, C_4$  через начальные параметры, получим:

$$\theta_0 = C_1 + C_4; B_0 = -C_4 g I_d;$$

$$\theta'_0 = C_2 + k C_3; L_0 = C_2 g I_d.$$

Постоянные интегрирования:

$$C_1 = \theta_0 + \frac{B_0}{g I_d}; C_3 = \frac{1}{k} \left( \theta'_0 - \frac{L_0}{g I_d} \right);$$

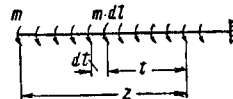
$$C_2 = \frac{L_0}{g I_d}; C_4 = -\frac{B_0}{g I_d}.$$

Подстановка этих значений даёт общие выражения  $\theta, \theta', B, L$  в функции начальных параметров. Результат сведён в табл. 27.

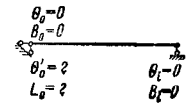
Величины, расположенные в клетках, являются коэффициентами влияния начальных факторов данного столбца на текущий фактор данной строки. Пользуясь ими, можно

такие влияния на всём протяжении от  $z = 0$  до  $z = z$ , найдём:

$$\theta_m = \int_0^z \frac{m}{kg I_d} (kt - \text{sh} kt) dt.$$



Фиг. 117. Действие рас-  
пределённого крутящего  
момента



Фиг. 118. Шарнирно  
опёртый брус

Пользуясь этой формулой, можно подсчитать коэффициент влияния для любой закономерности  $m$ . В частности при  $m = \text{const}$

$$\theta_m = \frac{m}{k^2 g I_d} \left[ \frac{(kz)^2}{2} - \text{ch} kz + 1 \right].$$

Сомножитель при  $m$  и является коэффициентом влияния  $m$  на  $\theta$ .

Остальные коэффициенты влияния можно подсчитать дифференцированием. Значения этих коэффициентов даны для случая  $m = \text{const}$  в последнем столбце табл. 27.

Составленные таким образом для данного типа моментной нагрузки общие выражения  $\theta, \theta', B$  будут содержать неизвестные факторы начального поперечного сечения.

В соответствии с общеизвестной методикой решения задач этого рода указанные факторы определяют, исходя из условий закрепления

бруса на его противоположном конце. При этом при любых комбинациях опорных креплений никогда не получается более двух уравнений, так как часть факторов на левом конце бруса известна.

Под шарнирно опёртым брусом (фиг. 118) следует понимать брус, опорные сечения которого могут вращаться в плоскости  $zy$  и закреплены от вращения в плоскости  $xz$ . (Например, при швеллерном или двутавровом сечении препятствием к такому вращению является наличие полки, посредством которой брус опирается на опорное устройство). Здесь  $\theta_0 = 0$ .

Равен нулю также и  $B_0$  — бимомент, ввиду того что

$$B_0 = \int \sigma_0 \omega dF$$

и в свою очередь  $\sigma_0 = 0$ .

На левой опоре возникают две неизвестные величины  $L_0$  и  $\theta'_0$ , их следует определить, записав для правой опоры с помощью коэффициентов табл. 27, что  $\theta_e = 0$ ,  $B_e = 0$ .

Для другой комбинации (фиг. 119) опорных креплений:

$$\theta_0 = 0, \quad \theta'_0 = 0.$$

Неизвестными величинами являются  $B_0 = ?$ ;  $L_0 = ?$

Их следует определить, записав:

$$\theta_e = 0; \quad \theta'_e = 0.$$

Третья комбинация (фиг. 120):

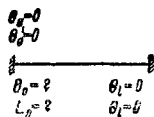
$$\theta_0 = 0; \quad \theta'_0 = 0; \quad B_0 = ? \quad L_0 = ?$$

Условия:  $\theta_e = 0$ ;  $B_e = 0$ .

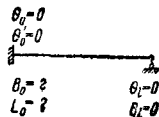
Аналогично решается и случай неразрезной балки. Здесь следует записать для  $n$ -ой промежуточной опоры условие непрерывности упругой линии закручивания:

$$\theta'_{лев} = \theta'_{прав}.$$

Подстановка в это уравнение значений  $\theta'$ , выраженных через нагрузку, даёт так называемое уравнение трёх бимоментов, о чём подробнее ниже.



Фиг. 119. Брус с заделкой на вращение



Фиг. 120. Двусторонняя заделка

**Правило знаков.** При взгляде на поперечное сечение бруса вдоль положительного направления оси  $z$  положительные значения  $L$  будут направлены по часовой стрелке.

**Пример.** Дана двухопорная балка с шарнирным креплением, нагруженная равномерно распределённым крутящим (относительно центра изгиба) моментом интенсивности  $m$  (фиг. 121).

Начальные параметры

$$\theta_0 = 0; \quad B_0 = 0; \quad L_0 = -\frac{ml}{2}; \quad \theta'_0 = ?$$

Условие закрепления на противоположной опоре:  $\theta_e = 0$ .

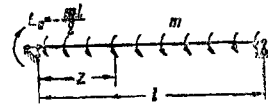
По табл. 27

$$-\frac{ml}{2} \frac{1}{k^2 I_d} (kl - \text{sh } kl) + \theta'_0 \frac{\text{sh } kl}{k} +$$

$$+ \frac{m}{k^2 I_d} \left[ \frac{(kl)^2}{2} + 1 - \text{ch } kl \right] = 0.$$

Отсюда

$$\theta'_0 = -\frac{m}{k^2 EI_\omega} \left( \frac{kl}{2} - \frac{\text{sh } \frac{kl}{2}}{\text{ch } \frac{kl}{2}} \right).$$



Фиг. 121. Действие равномерно распределённого крутящего момента

Пользуясь той же табл. 27, находим:

$$B_z = -\frac{ml}{2} \frac{\text{sh } kz}{k} +$$

$$+ \frac{mg I_d}{k^2 EI_\omega k} \left( \frac{kl}{2} - \frac{\text{sh } \frac{kl}{2}}{\text{ch } \frac{kl}{2}} \right) \text{sh } kz + \frac{m}{k^2} (\text{ch } kz - 1).$$

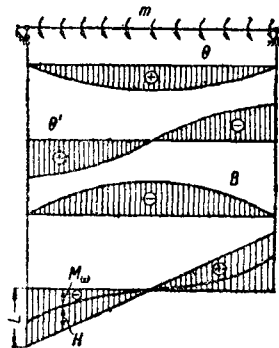
После преобразований

$$B_z = -\frac{m}{k^2} \left[ 1 - \frac{\text{ch } k \left( \frac{l}{2} - z \right)}{\text{ch } \frac{kl}{2}} \right].$$

Отсюда (путём дифференцирования)

$$M_\omega = \frac{dB_z}{dz} = -\frac{m}{k} \frac{\text{sh } k \left( \frac{l}{2} - z \right)}{\text{ch } \frac{kl}{2}}.$$

Эпюры величин  $B_z$  и  $M_\omega$  даны на фиг. 122.



Фиг. 122. Эпюры  $\theta$ ,  $\theta'$ ,  $B$ ,  $M_\omega$

При  $z = \frac{l}{2}$

$$B_{z_{наиб}} = -\frac{m}{k^2} \left[ 1 - \frac{1}{\text{ch } \frac{kl}{2}} \right];$$

при  $z = 0$

$$M_{\omega_{наиб}} = -\frac{m}{k} \frac{\text{sh } \frac{kl}{2}}{\text{ch } \frac{kl}{2}}.$$

Найденные величины достаточны для суждений о напряжённом состоянии бруса.

Пользуясь коэффициентами влияния (табл. 27), можно найти:

$$\theta = -\frac{m}{k^4 EI_w} \left[ \frac{k^2 z(l-z)}{2} + \frac{\operatorname{ch} k \left( \frac{l}{2} - z \right)}{\operatorname{ch} \frac{kl}{2}} - 1 \right],$$

$$\theta' = -\frac{m}{k^3 EI_w} \left[ k \left( \frac{l}{2} - z \right) - \frac{\operatorname{sh} k \left( \frac{l}{2} - z \right)}{\operatorname{ch} \frac{kl}{2}} \right].$$

Эпюры развита соответствующих величин даны на фиг. 122.

### ОПРЕДЕЛЕНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ДЛЯ ОТКРЫТЫХ ПРОФИЛЕЙ

Для расчёта напряжённого состояния тонкостенных стержней незамкнутого профиля, помимо обычных геометрических характеристик—центров тяжести, статических моментов и моментов инерции сечений, необходимо знать также и специальные геометрические характеристики, связанные с законом секториальных площадей—координаты центра изгиба, секториальные площади, секториальные статические моменты, секториальные моменты инерции.

Ниже приведены способы определения указанных величин.

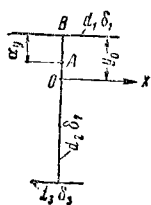
**Двуглавый профиль (фиг. 123)**

Координаты центра изгиба. Положение центра изгиба определяется формулами:

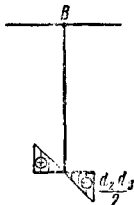
$$\alpha_x = \frac{\int \omega_B y dF}{I_x};$$

$$\alpha_y = -\frac{\int \omega_B x dF}{I_y}.$$

Вспомогательный полюс  $B$  следует выбрать в точке пересечения осей верхней горизонтальной полки с вертикальной стенкой. Для подсчёта интегралов, входящих в формулу,



Фиг. 123. Несимметричный двуглаз



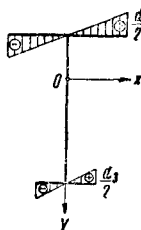
Фиг. 124. Эпюра  $\omega_B$

предварительно следует построить эпюры  $x$ ,  $y$  и  $\omega_B$  (удвоенная секториальная площадь) и затем провести их сопряжение по правилам «Строительной механики».

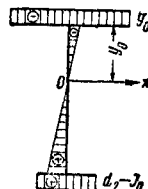
При построении эпюры  $\omega_B$  (фиг. 124) начальный радиус принимают совпадающим с вертикальной стенкой. Площади  $\omega_B$ , соответ-

ствующие вращению радиуса вектора по ходу часовой стрелки, принимают положительными.

Эпюры  $x$ ,  $y$  даны на фиг. 125, 126.



Фиг. 125. Эпюра  $x$



Фиг. 126. Эпюра  $y$

По правилу сопряжения эпюр находим (фиг. 124, 125):

$$\int_F \omega_B x dF = \delta_3 \int_{-\frac{d_3}{2}}^{+\frac{d_3}{2}} \omega_B x ds =$$

$$= -2 \delta_3 \frac{d_3}{2} \frac{d_3}{2} \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{d_2 d_3}{2} =$$

$$= -\frac{\delta_3 d_3^3}{12} \cdot d_2 = -I_{3y} d_2;$$

$I_{3y}$ —момент инерции сечения третьего элемента относительно оси  $y$ .

Совершенно так же

$$\int_F \omega_B y dF = 0.$$

Кроме того, если считать  $I_{2y} = 0$  по малости, то

$$I_y = I_{1y} + I_{3y}.$$

После подстановки полученных величин в исходные формулы определяется положение центра изгиба, т. е. точки  $A$ :

$$\alpha_x = 0; \quad \alpha_y = \frac{I_{3y}}{I_{1y} + I_{3y}} d_2.$$

Найденные значения следует отложить в соответствии с их знаками от вспомогательного полюса  $B$  в направлении осей  $x$  и  $y$ .

Центр изгиба лежит на оси симметрии  $y$ . Для случая двух осей симметрии он совпадает с центром тяжести сечения.

**Секториальный статический момент и секториальный момент инерции.** Построение эпюры  $\omega_A$  главных секториальных площадей (фиг. 127) производят после определения положения центра изгиба и совмещения начального радиуса с вертикальной стенкой. Эта эпюра характеризует распределение нормальных напряжений от кручения. Для симметричного сечения начальный радиус отсчёта секториальных площадей должен всегда совмещаться с осью симметрии.

В нашем случае это условие обеспечило необходимое равенство нулю главного секториального статического момента

$$\int_F \omega dF = 0.$$

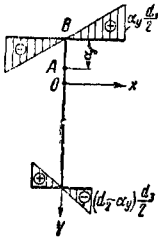
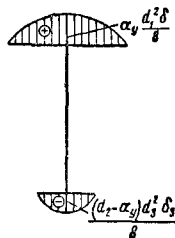


Пользуясь эпюрой  $\omega_A$ , нетрудно подсчитать эпюру секториальных статических моментов (фиг. 128):

$$S_\omega = \int_F \omega dF.$$

Каждая ордината этой эпюры даёт значение площади отсечённой части эпюры главных секториальных площадей.

Для вертикальной стенки  $S_\omega = 0$ . Это значит, что в ней отсутствуют напряжения сдвига при кручении. Наибольшая ордината эпюры соответствует середине длинной полки


 Фиг. 127. Эпюра  $\omega_A$ 

 Фиг. 128. Эпюра  $S_\omega$ 

и она равна площади треугольника эпюры  $\omega_A$ :

$$S_\omega^{\max} = \alpha_y \frac{d_1}{2} \frac{d_1}{2} \frac{1}{2} \delta_1 = \alpha_y \frac{d_1^2 \delta_1}{8}.$$

Пользуясь той же эпюрой  $\omega_A$ , по правилам сопряжения эюр можно подсчитать величину главного секториального момента инерции:

$$I_\omega = \int \omega^2 dF = \alpha_y^2 I_{1y} + (d_2 - \alpha_y)^2 I_{3y}.$$

Можно пользоваться также сокращённой формулой:

$$I_\omega = \frac{I_{1y} I_{3y} d_2^2}{I_y}.$$

**Симметричный двутавр:**

$$\alpha_x = 0; \alpha_y = \frac{d_2}{2}.$$

Центр изгиба совпадает с центром тяжести:

$$S_\omega^{\max} = \frac{d_1^2 d_2}{16} \delta_1;$$

$$I_\omega = I_{1y} \frac{d_2^2}{2}.$$

**Тавровое сечение:**

$$I_{3y} = 0; \alpha_x = 0; \alpha_y = 0,$$

т. е. центр изгиба лежит в точке пересечения стенки с полкой. В этом случае эпюра  $\omega_A = 0$  и  $I_\omega = 0$ . То же свойство относится и к сечению, состоящему из пучка прямолинейных элементов.

Помимо способа сопряжения эюр, те же величины можно подсчитать с помощью теоремы: если сечение сплошного незамкнутого профиля имеет одну (или две) ось симметрии

и может быть разложено на элементы, из которых каждый имеет свою ось симметрии, совпадающую с осью симметрии всего сечения, то:

а) координата центра изгиба этого составного сечения, отсчитанная от центра изгиба какого-либо из элементов (начала отсчёта), равна сумме произведений экваториальных моментов инерции остальных элементов относительно оси симметрии сечения на расстояния центров изгиба их от начала отсчёта, делённой на экваториальный момент инерции относительно оси симметрии всего составного сечения;

б) секториальный момент инерции этого составного сечения равен сумме собственных секториальных моментов инерции отдельных элементов (относительно своих центров изгиба) плюс сумма произведений экваториальных моментов, взятых попарно, на квадраты расстояний между центрами изгиба их, делённой на экваториальный момент инерции относительно оси симметрии всего составного сечения. Особенно удобным становится применение указанной теоремы к расчёту характеристик составных профилей, если принять в расчёт таблицы секториальных характеристик, составленные для сортамента (табл. 28).

Пусть профиль состоит из двутавра № 24а и горизонтального листа  $200 \times 10$ , прикреплённого к верхней полке (фиг. 129). Тогда по таблице секториальных характеристик:

$$I_{1y} = 280 \text{ см}^4; I_{1\omega} = 33\,799 \text{ см}^6;$$

для листа

$$I_{2y} = 667 \text{ см}^4; I_{2\omega} = 0;$$

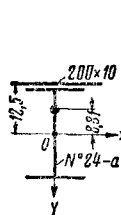
$$I_y = I_{1y} + I_{2y} = 280 + 667 = 947 \text{ см}^4.$$

За начало отсчёта принимаем центр тяжести двутавра:

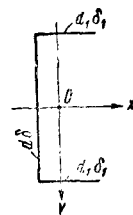
$$\alpha_y = \frac{667 \cdot 12,5}{947} = 8,81 \text{ см}.$$

**Секториальный момент инерции**

$$I_\omega = 33\,799 + 0 + \frac{667 \cdot 280 \cdot 12,5^2}{947} = 64\,599 \text{ см}^6.$$



Фиг. 129. Составной профиль



Фиг. 130. Швеллер

**Швеллер (фиг. 130)**

Если принять вспомогательный полюс  $B$  в точке пересечения оси симметрии с вертикальной стенкой швеллера и начальный радиус совмещённым с осью  $x$  (фиг. 131, 132), то комбинирование эюр  $\omega_B$  и  $y$  даст

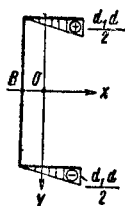
$$\int \omega_B y dF = - \frac{d^2 d_1^2 \delta_1}{4}.$$

Кроме того

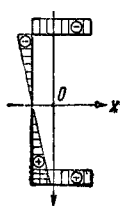
$$I_x = \frac{d^2 \delta}{12} + \frac{d^2 d_1 \delta_1}{2}.$$

Отсюда

$$\alpha_x = - \frac{d_1 \delta_1}{2d_1 \delta_1 + \frac{d \delta}{3}} d_1.$$



Фиг. 131. Эпюра  $\omega_B$



Фиг. 132. Эпюра  $y$

т. е. центр изгиба расположен вне контура швеллера (на расстоянии  $\alpha_x$  от стенки).

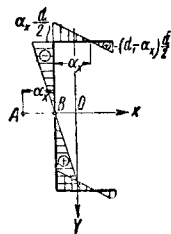
Построение (фиг. 134) эпюры  $S_\omega = \int \omega dF$  возможно по эпюре главных секториальных площадей  $\omega_A$  (фиг. 133).

Главный секториальный момент инерции:

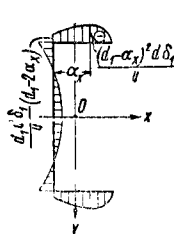
$$I_\omega = \int_F \omega^2 dF = \alpha_x^2 I_x + \frac{1}{6} (d_1 - 3\alpha_x) \delta_1 d^2 d^2.$$

Помещённые выше примеры непосредственного определения секториальных характеристик имели в виду дать методику отыскания указанных величин.

Для прокатных профилей при практических расчётах рекомендуется использовать табл. 28а секториальных характеристик, составленную с учётом переменности толщины полок, а также наличия выкружек.



Фиг. 133. Эпюра  $\omega_A$



Фиг. 134. Эпюра  $S_\omega$

**Пример.** Определение напряжений для случая двухопорной балки (фиг. 121, 122, 135), подверженной равномерно распределённому действию  $m$  крутящих моментов.

Сечение (фиг. 136) — двутавр № 30-а, пролёт  $l = 4$  м; нагрузка равномерно распределённая с интенсивностью  $q = 2$  т/м, приложенная с эксцентриситетом  $l = 5$  см; интенсивность крутящего момента  $m = q \cdot e = 20 \cdot 5 = 100$  кг·см/см.

Нормальные напряжения возникают в крайних боковых волокнах горизонтальных полок. Для их определения можно воспользоваться данными сортамента:

$$I_x = 8950 \text{ см}^4; k = \sqrt{\frac{GI_d}{EI_\omega}} = 0,01389 \text{ см}^{-1};$$

$$I_\omega = 76704 \text{ см}^6.$$

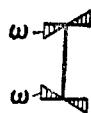


Таблица 28

Секториальные характеристики двутавров (по ГОСТ 10016-89)

№ профилей	Секториальный момент инерции $I_\omega$ в см <sup>6</sup>	Секториальная площадь для крайней точки профиля $\omega_{\max}$ в см <sup>2</sup>	Секториальный момент сопротивления $W_\omega$ в см <sup>4</sup>	Момент инерции при чистом кручении $I_d$ в см <sup>4</sup>	Упругая изгибно-крутильная характеристика $k = \sqrt{\frac{GI_d}{EI_\omega}}$ в см <sup>-1</sup>
10	644,28	15,246	42,259	2,873	0,04122
12	1353,2	20,098	67,330	4,243	0,03457
14	2560,0	25,540	100,23	5,911	0,02966
16	4879,0	32,248	151,30	8,406	0,02562
18	8219,3	38,902	211,28	11,37	0,02295
20	a 13 121 b 13 857	46,150 47,053	294,31 294,50	14,81 17,85	0,02074 0,02215
22	a 22 773 b 23 930	55,908 56,902	407,33 420,55	20,32 24,08	0,01844 0,01958
24	a 33 799 b 35 426	64,484 65,573	524,15 540,25	25,57 30,12	0,01698 0,01800
27	a 52 987 b 55 414	76,683 77,915	690,99 711,21	31,93 37,60	0,01515 0,01608
30	a 76 704 b 80 114 c 83 612	88,376 89,754 91,130	867,93 892,60 917,50	38,83 45,78 55,23	0,01389 0,01475 0,01587
33	a 107 160 b 111 780 c 116 520	100,69 102,21 103,73	1064,3 1093,6 1123,3	46,19 54,49 65,74	0,01281 0,01363 0,01466
36	a 154 820 b 161 210 c 167 760	115,19 116,85 118,51	1344,0 1379,6 1415,6	56,85 66,72 79,99	0,01183 0,01256 0,01348
40	a 228 900 b 237 950 c 247 210	134,13 136,00 137,85	1706,6 1749,6 1793,3	68,75 80,68 96,55	0,01070 0,01137 0,01220
45	a 376 630 b 390 770 c 405 220	159,75 161,86 163,96	2357,6 2414,4 2471,5	95,31 111,3 131,8	0,009819 0,01041 0,01113
50	a 611 990 b 633 900 c 656 270	187,10 189,44 191,79	3270,9 3346,2 3421,8	131,2 150,3 174,9	0,009038 0,009504 0,01007
55	a 906 350 b 937 220 c 968 720	216,79 219,36 221,94	4180,8 4272,5 4364,8	159,9 182,7 211,5	0,008198 0,008617 0,009119
60	a 1 349 900 b 1 393 200 c 1 437 300	251,22 254,04 256,86	5373,4 5484,2 5595,7	195,5 221,9 255,3	0,007427 0,007790 0,008226

Примечание. При вычислении  $k$  приняты  $G=800\,000$  кг/см<sup>2</sup>;  
 $E=2\,100\,000$  кг/см<sup>2</sup>

Секториальная площадь для опасной точки  $I$  горизонтальной полки двутавра

$$\omega_{\max} = -88,376 \text{ см}^2$$

(вращение против часовой стрелки).

Максимальный изгибающий момент

$$M_{\max} = - \frac{ql^2}{8} = - \frac{20 \cdot 400^2}{8} = -400\,000 \text{ кг·см}$$

(вращение относительно оси  $x$  против часовой стрелки).

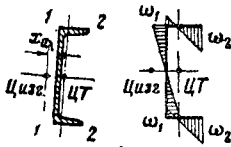


Таблица 28а

Секториальные характеристики швеллеров (по ГОСТ 10017-89)

№ профи- лей	Координата центра изгиба $x_d$ в см	Сектори- альный момент инерции $I_\omega$ в см <sup>4</sup>	Секториальные площади		Секториальный мо- мент сопротивления		Момент инерции при чистом кручении $I_d$ в см <sup>4</sup>	Упругая из- гибо-кру- тительная ха- рактеристика $k = \sqrt{\frac{GI_d}{EI_\omega}}$ в см <sup>-1</sup>
			$\omega_1$ в см <sup>2</sup>	$\omega_2$ в см <sup>2</sup>	$W_{\omega_1}$ в см <sup>3</sup>	$W_{\omega_2}$ в см <sup>3</sup>		
5	1,081	24,907	2,7018	4,2602	9,2187	5,8464	1,350	0,1437
6,5	1,146	64,879	3,8628	6,3557	16,796	10,208	1,497	0,09375
8	1,218	141,83	5,1453	8,7526	27,565	16,204	1,940	0,07219
10	1,344	354,78	7,1894	12,709	49,343	27,916	2,727	0,05411
12	1,482	768,26	9,5427	17,308	80,508	44,388	3,634	0,04245
14 а	1,581	1512,5	12,029	22,626	125,74	66,848	4,815	0,03483
б	1,392	1711,2	11,460	23,850	149,32	71,748	6,248	0,03730
16 а	1,678	2759,8	14,740	28,630	187,23	96,395	6,306	0,02950
б	1,482	3099,4	14,033	30,092	220,87	103,00	8,227	0,03180
18 а	1,834	4744,7	17,677	35,318	268,41	134,34	8,128	0,02555
б	1,572	5292,4	16,828	37,022	314,50	142,95	10,50	0,02749
20 а	1,868	7773,0	20,829	42,702	373,18	182,03	10,33	0,02250
б	1,662	8616,3	19,845	44,640	434,18	193,02	13,30	0,02425
22 а	1,926	11 819	23,846	50,148	495,64	235,68	12,83	0,02034
б	1,717	13 038	22,730	52,318	573,60	249,21	16,46	0,02193
24 а	2,127	15 183	27,515	55,448	551,81	273,82	12,69	0,01784
б	1,948	16 873	26,629	57,473	633,63	293,58	15,59	0,01876
с	1,737	18 541	25,383	59,872	730,45	309,68	20,00	0,02027
27 а	2,213	24 075	32,518	66,073	740,36	364,37	15,56	0,01569
б	1,980	26 676	30,831	69,069	865,23	386,22	19,23	0,01657
с	1,765	29 195	29,372	71,830	993,97	406,45	24,72	0,01796
30 а	2,258	36 645	37,208	76,533	984,87	478,78	20,39	0,01456
б	2,028	40 436	35,229	79,975	1147,8	505,61	25,01	0,01535
с	1,802	44 104	33,590	83,063	1313,0	530,97	31,75	0,01656
33 а	2,253	52 630	41,387	88,539	1271,7	594,43	24,29	0,01326
б	2,017	57 844	39,265	92,265	1473,2	626,93	29,92	0,01404
с	1,800	62 890	37,439	95,689	1679,8	657,23	38,04	0,01518
36 а	2,465	92 189	49,504	104,55	1862,2	881,77	38,91	0,01268
б	2,235	100 430	47,296	108,51	2123,4	925,54	46,56	0,01329
с	2,021	108 420	45,360	112,18	2390,2	966,48	57,18	0,01417
40 а	2,430	148 100	55,779	121,67	2655,1	1217,2	59,74	0,01240
б	2,210	160 100	53,514	125,86	2991,7	1272,1	70,78	0,01298
с	2,004	171 870	51,513	129,80	3336,4	1324,0	85,72	0,01378

 Примечания. 1. При вычислении  $k$  приняты  $G=800\,000$  кг/см<sup>2</sup>;  $E=2\,100\,000$  кг/см<sup>2</sup>.

 2. Координата центра изгиба  $x_d$  отсчитывается от наружного края стенки.

Величина наибольшего бимоента

$$B_{\max} = -\frac{m}{k^2} \left[ 1 - \frac{1}{\operatorname{ch} \frac{kl}{2}} \right] = -454\,920 \text{ кг} \cdot \text{см}^3;$$

$$y_{\max} = -15 \text{ см.}$$

Наибольшее нормальное напряжение в точке 1 (середина пролёта балки)

$$\begin{aligned} \sigma_{\max} &= \frac{M_{\max}}{I_x} y_{\max} + \frac{B_{\max}}{I_\omega} \omega_{\max} = \\ &= \frac{400\,000}{8\,950} \cdot 15 + \frac{454\,920}{76\,704} \cdot 88,4 = 1\,200 \text{ кг/см}^2. \end{aligned}$$

 Ввиду того что  $\sigma_{\max}$  направлено по оси  $z$ , оно сжимает сечение оболочки; нормальные секториальные напряжения составили 44% от общих напряжений и 76% от нормальных напряжений изгиба.

 Если бы потребовалось вычислить нормальные секториальные напряжения в других точках сечения (горизонтальной полки), то данных таблицы сортамента было бы недостаточно и пришлось бы вычислять для соответствующих точек величины главных секториальных площадей, используя для данного профиля закон линейного убывания этих площадей от края полки до нуля у вертикальной стенки. В общем случае необходимо для той же цели воспользоваться изложенными выше правилами построения эпюры  $\omega_d$ .

Касательные напряжения. Опасными точками в смысле развития максимальных касательных напряжений являются точки 2 и 3 профиля (фиг. 136), соответствующие серединам сторон горизонтальной полки и вертикальной стенки.

 В точке 2 напряжения складываются из:  
1) касательных напряжений  $\tau_x$  поперечного изгиба:

$$\tau_x = \frac{\theta_x S_x}{I_x \cdot \delta_1};$$

2) касательных секториальных напряжений:

$$\tau_{\omega} = \frac{M_{\omega} S_{\omega}}{I_{\omega} \cdot \delta_1};$$

3) касательных напряжений кручения горизонтальной полки, как узкого прямоугольника:

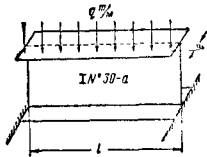
$$\tau_{кр} = \frac{H \delta_1}{I_d}.$$

В точке 3 будут отсутствовать секториальные касательные напряжения.

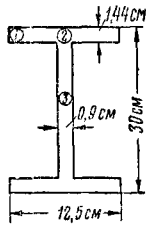
По длине балки, как это следует из характера эпюр  $Q_x$ ,  $M_x$ ,  $H$ , опасное сечение будет соответствовать опоре.

В точке 1

$$Q_x = \frac{20 \cdot 400}{2} = 4000 \text{ кг}; \delta_1 = 1,44 \text{ см.}$$



Фиг. 135. Двутавр при эксцентричной нагрузке



Фиг. 136. Поперечное сечение двутавра

$S_x$  — статический момент площади сечения половины горизонтальной полки относительно нейтральной оси.

Ввиду отсутствия такой величины в таблицах сортамента определяем её значение, принимая сечение за прямоугольник (пренебрегая уклоном и выкружками):

$$S_x = \frac{1,44 \cdot 12,5}{2} \cdot \frac{28,56}{2} = 128 \text{ см}^3;$$

$$S_{\omega} = \frac{d_1^2 d_1}{16} \cdot \delta_1 = \frac{12,5^2 \cdot 28,56}{16} \cdot 1,44 = 400 \text{ см}^4;$$

$$M_{\omega} = \frac{m}{k} \operatorname{tg} \frac{kl}{2} = 7180 \text{ кг-см};$$

$$H = L - M_{\omega} = 12820 \text{ кг-см.}$$

По таблице сортамента

$$I_d = 38,83 \text{ см}^4.$$

Напряжения:

$$\tau_x = \frac{4000 \cdot 128}{8950 \cdot 1,44} = 40 \text{ кг/см}^2;$$

$$\tau_{\omega} = \frac{7180 \cdot 400}{76704 \cdot 1,44} = 25 \text{ кг/см}^2;$$

$$\tau_{кр} = \frac{12820 \cdot 1,44}{38,83} = 475 \text{ кг/см}^2.$$

Полное напряжение в точке 1

$$\tau_1 = \tau_x + \tau_{\omega} + \tau_{кр} = 540 \text{ кг/см}^2.$$

Наибольшее значение в данном случае имеют касательные напряжения чистого кручения.

### Теорема о трёх бимоментах

Теорема о трёх бимоментах возникает по аналогии с теоремой о трёх моментах для неразрезной балки.

Упрощённый её вид для случая, когда можно пренебречь величиной  $EI_d$ , определяется в полном соответствии с правилами определения опорных моментов неразрезной балки. В общем случае требуется применение специально выведенной формулы, связываю-

щей три последовательно взятых опорных бимомента неразрезной балки.

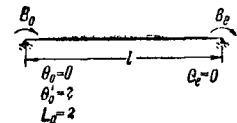
Прежде всего необходимо уточнить понятие о неразрезной балке для случая деформации её скручивания эксцентрично приложенной нагрузкой.

Опорное сечение такой балки предполагается неповорачивающимся. В нём возникают, следовательно, величины крутящего момента (аналогия поперечной силе), бимомента (аналогия моменту) и производной угла закручивания (аналогия углу поворота сечения балки при изгибе).

Условия неразрезанности упругой линии углов закручивания запишется в виде равенства этих производных слева и справа на  $n$ -ом пролёте:

$$\theta'_n = \theta'_{n+1}$$

(аналогия равенству углов поворота опорных сечений простых балок).



Фиг. 137. Нагружение опорными бимоментами

Пусть по фиг. 137 свободно лежащая балка (с неповорачивающимися вдоль продольной оси опорами) нагружена в опорных сечениях положительными бимоментами  $B_0$  и  $B_l$ . В левом её сечении возникнут неизвестные величины:

$$\theta'_0 = ?; L_0 = ?$$

(производная угла закручивания и начальный крутящий момент, воспринимаемый опорным устройством).

По методу начальных параметров, исходя из условий на правой опоре (по табл. 27)  $B_e = B_e$ ,  $\theta_e = 0$ , получим:

$$B_e = L_0 \frac{\operatorname{sh} kl}{k} + B_0 \operatorname{ch} kl - \theta'_0 g \frac{I_d}{k} \operatorname{sh} kl;$$

$$\theta_e = L_0 \frac{1}{kgI_d} (kl - \operatorname{sh} kl) + \frac{B_0}{gI_d} (1 - \operatorname{ch} kl) + \theta'_0 \frac{\operatorname{sh} kl}{k} = 0.$$

Отсюда

$$L_0 = \frac{B_e - B_0}{l}, \quad (44)$$

$$\theta'_0 = \frac{1}{lgI_d \operatorname{sh} kl} [B_e (\operatorname{sh} kl - kl) - B_0 (\operatorname{sh} kl - kl \operatorname{ch} kl)].$$

Величина  $\theta'_e$  производной угла закручивания на правой опоре

$$\theta'_e = L_0 \frac{1}{gI_d} (1 - \operatorname{ch} kl) - B_0 \frac{k}{gI_d} \operatorname{sh} kl + \theta'_0 \operatorname{ch} kl,$$

или (подставляя сюда найденные величины  $L_0$  и  $\theta'_0$  и выполняя преобразования)

$$\theta'_e = -\frac{1}{lgI_d \operatorname{sh} kl} [B_0 (\operatorname{sh} kl - kl) - B_e (\operatorname{sh} kl - kl \operatorname{ch} kl)].$$

Далее рассматривается неразрезная балка (фиг. 138). Обозначим через  $I_n$  — секториальный момент инерции. Производя разрез над-

опорных сечений, соответствующий действию бимоментов и прикладывая в них к обеим частям разрезанных концов положительное действие надпорных бимоментов  $B_{n-1}$ ,  $B_n$ ,  $B_{n+1}$ , можно записать условие неразрезанности:

$$\theta'_n = \theta'_{n+1}.$$

Значения указанных производных представляют в виде суммы действия опорных бимоментов и пролётов нагрузки:



Фиг. 138. Схема неразрезной балки, работающей на кручение

$$\theta'_n = \theta'_n{}^B + \theta'_n{}^P; \theta'_{n+1} = \theta'_{n+1}{}^B + \theta'_{n+1}{}^P.$$

По ранее описанной схеме

$$\theta'_n{}^B = -\frac{1}{l_n g l_d \operatorname{sh} k l_n} [B_{n-1} (\operatorname{sh} k n l_n - k n l_n) - B_n (\operatorname{sh} k n l_n - k n l_n \operatorname{ch} k n l_n)],$$

$$\theta'_{n+1}{}^B = \frac{1}{l_{n+1} g l_d \operatorname{sh} k n_{+1} l_{n+1}} \times \\ \times [B_{n+1} (\operatorname{sh} k_{n+1} l_{n+1} - k_{n+1} l_{n+1}) - B_n (\operatorname{sh} k_{n+1} l_{n+1} - k_{n+1} l_{n+1} \operatorname{ch} k_{n+1} l_{n+1})].$$

Оставляя величины  $\theta'_n{}^P$  и  $\theta'_{n+1}{}^P$  в буквенном виде, подставляя найденные величины в условие неразрезанности, перенеся все члены, содержащие бимоменты, в левую часть, приняв  $g l_d = k^2 E I_\omega$ , можно выразить теорему о трёх бимоментах в следующем виде:

$$B_{n-1} \frac{(\operatorname{sh} k n l_n - k n l_n)}{k_n^2 l_n E I_n \operatorname{sh} k n l_n} + \\ + B_n \left[ \frac{(k n l_n \operatorname{ch} k n l_n - \operatorname{sh} k n l_n)}{k_n^2 l_n E I_n \operatorname{sh} k n l_n} + \right. \\ \left. + \frac{(k_{n+1} l_{n+1} \operatorname{ch} k_{n+1} l_{n+1} - \operatorname{sh} k_{n+1} l_{n+1})}{k_{n+1}^2 l_{n+1} E I_{n+1} \operatorname{sh} k_{n+1} l_{n+1}} \right] + \\ + B_{n+1} \frac{(\operatorname{sh} k_{n+1} l_{n+1} - k_{n+1} l_{n+1})}{k_{n+1}^2 l_{n+1} E I_{n+1} \operatorname{sh} k_{n+1} l_{n+1}} = \\ = \theta'_n{}^P - \theta'_{n+1}{}^P.$$

Величины  $\theta'_n{}^P$  и  $\theta'_{n+1}{}^P$  находят по табл. 27, по методу начальных параметров. Эти величины в последнее уравнение подставляют с их знаком.

Для случая равных пролётов и равных жёсткостей это уравнение значительно упрощается:

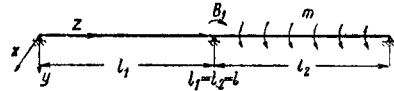
$$B_{n-1} \frac{\operatorname{sh} kl - kl}{\operatorname{sh} kl} + 2 B_n \frac{(kl \operatorname{ch} kl - \operatorname{sh} kl)}{\operatorname{sh} kl} + \\ + B_{n+1} \frac{\operatorname{sh} kl - kl}{\operatorname{sh} kl} = E I_\omega k^2 l (\theta'_n{}^P - \theta'_{n+1}{}^P).$$

**Пример.** Определить опорный бимомент двухпролётной неразрезной балки по фиг. 139, нагруженной во втором пролёте сплошной нагрузкой  $q$  с эксцентриситетом  $l$ , дающим равномерный крутящий момент  $m = ql$  (положительный, т. е. вращающий ось балки по часовой стрелке).

Если  $B_0 = B_2 = 0$ , то из уравнения трёх бимоментов

$$B_1 = -\frac{E I_\omega k^2 l \theta'_1{}^P \operatorname{sh} kl}{2 kl \operatorname{ch} kl - \operatorname{sh} kl}.$$

Величина  $\theta'_1{}^P$  есть производная угла закручивания начала второго пролёта, рассматриваемого как свободно лежащая балка.



Фиг. 139. Двухпролётная неразрезная балка под действием распределённого крутящего момента.

Её значение было определено ранее:

$$\theta'_1{}^P = -\frac{m}{k^2 E I_\omega} \left( \frac{kl}{2} \frac{\operatorname{sh} \frac{kl}{2}}{\operatorname{ch} \frac{kl}{2}} \right).$$

После подстановки

$$B_1 = \frac{m l}{2 k} \left( \frac{kl}{2} \frac{\operatorname{sh} \frac{kl}{2}}{\operatorname{ch} \frac{kl}{2}} \right) \frac{\operatorname{sh} kl}{kl \operatorname{ch} kl - \operatorname{sh} kl},$$

так как величина  $B_1$  оказалась положительной, то, следуя координатному правилу знаков, в опорном сечении в правой по ходу балки части этого сечения (там, где положительна секториальная площадь  $\omega$ ), нормальное напряжение будет иметь положительное значение,

$$\sigma_\omega = \frac{B_1 \omega}{I_\omega},$$

т. е. это напряжение как действующее на правоотсечённую часть вдоль оси  $z$ , будет сжимать это сечение, что соответствует физическому представлению о работе балки.

Приложив найденный бимомент положительным к правому и левому пролётам, можно в дальнейшем по табл. 27 и 28 составить все нужные силовые и деформационные факторы для любого сечения.

## УСТОЙЧИВОСТЬ СИСТЕМ

### МЕТОДЫ ТЕОРИИ УСТОЙЧИВОСТИ

Непосредственное интегрирование дифференциальных уравнений, получаемых рассмотрением слегка изменённой, сравнительно с заданной, формы равновесия («вынужденное смещение») приводит к системе однородных уравнений. Приравняв нулю детерминант, составленный из

коэффициентов при постоянных параметрах, получают условие устойчивости:

$$D_\omega = 0. \quad (1)$$

Дифференциальные уравнения иногда удобно заменить конечно-разностными.

Использование энергетического принципа состоит в решении уравнения:

$$|\Delta V| = |\Delta T|, \quad (2)$$

где  $|\Delta V|$  — приращение энергии внутренних сил при «вынужденном смещении»,  $|\Delta T|$  — внешних сил. Для устойчивого равновесия  $|\Delta V| > |\Delta T|$  или  $|\Delta V| - |\Delta T| = \Delta U > 0$ , т. е. потенциальная энергия устойчивой системы минимальна.

В динамическом методе критерием перехода системы из устойчивого в неустойчивое положение является условие обращения в нуль частоты колебаний нагруженной системы.

При графоаналитическом и графическом методе решают задачу интегрирования дифференциальных уравнений построением эпюр, верёвочных кривых и пр.

Общие уравнения устойчивости прямого стержня, выделенного из стержневой системы (рамы, фермы):

$$EIy = EIy_0 + EIy'_0 \frac{\sin kx}{k} + M_0 \frac{1 - \cos kx}{k^2} + Q_0 \frac{kx - \sin kx}{k^3}; \quad (3)$$

$$EIy' = EIy'_0 \cos kx + M_0 \frac{\sin kx}{k} + Q_0 \frac{1 - \cos kx}{k^2}; \quad (4)$$

$$M = M_0 \cos kx + Q_0 \frac{\sin kx}{k} - EIy'_0 k \sin kx, \quad (5)$$

где  $y_0, y'_0, M_0$  и  $Q_0$  — начальные параметры (прогиб, угол, момент, поперечная сила); коэффициент  $k$ , имеющий размерность  $m^{-1}$ , связан с критической силой  $P_k$

$$P_k = EI k^2 = \nu^2 \frac{EI}{l^2}. \quad (6)$$

Зная относительную длину  $\nu = kl$ , находят коэффициент, приводящий длину  $l$  данного стержня к длине  $l_{np}$  стержня с шарнирными концами:

$$l_{np} = \beta l; \quad \beta = \pi : \nu. \quad (7)$$

При наличии на стержне сплошной нагрузки, имеющей начальные интенсивность  $q_0$  и скорость её изменения  $q'_0$ , в уравнении (3) приписывают члены:

$$q_0 \frac{0,5k^2 x^2 - 1 + \cos kx}{k^4} + \frac{k^3 x^3}{6} - kx + \sin kx + q'_0 \frac{1}{k^5};$$

дифференцируя их по  $x$ , находят члены для (4) и (5).

Дифференциальное уравнение устойчивости пластинки получается из уравнения на стр. 169 заменой в правой части  $q(x, y)$  на

$$N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2T \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \quad (8)$$

где  $N_x, N_y$  — продольные силы вдоль осей  $x$  и  $y$  и  $T$  — касательная сила, причём

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial T}{\partial x} = 0. \quad (9)$$

Для цилиндрической оболочки радиуса  $R$  и толщины  $h$ , осесимметрично нагруженной радиальной нагрузкой  $p$  и осевым давлением  $N_x$ , дифференциальное уравнение:

$$D \frac{d^4 w}{dx^4} = p + \frac{1}{R} \mu N_x - \frac{w}{R^2} E h + N_x \frac{d^2 w}{dx^2}, \quad (10)$$

где  $D = \frac{E h^3}{12(1 - \mu^2)}$  — цилиндрическая жёсткость,  $w$  — радиальное перемещение.

### МНОГОПРОЛЁТНЫЕ БАЛКИ

Уравнение трёх моментов для опоры  $n$  имеет вид (54) (см. стр. 190); при наличии только продольных сил грузовой член  $\Delta_{np} = 0$ , и в системе однородных уравнений (54) надо искать условие, когда  $D_v = 0$  [см. (1)]. Коэффициенты при неизвестных  $M$ :

$$\left. \begin{aligned} \delta_{n, n-1} &= \Phi_n : 6l_n; \delta_{n, n+1} = \\ &= \Phi_{n+1} : 6l_{n+1}; \\ \delta_{nn} &= \psi_n : 3l_n + \psi_{n+1} : 3l_{n+1} \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

При этом погонная жёсткость  $i = EI : l$ , а функции:

$$\left. \begin{aligned} \psi &= \frac{3(\operatorname{tg} \nu - \nu)}{\nu^3 \operatorname{tg} \nu} = 1 : \bar{\alpha}; \\ \Phi &= \frac{6(\nu - \sin \nu)}{\nu^2 \sin \nu} = 1 : \bar{\beta}, \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

значения которых по параметру  $\nu = kx$  приведены в табл. 29.

С учётом (11) уравнение трёх моментов:

$$M_{n-1} \Phi_n : l_n + 2M_n (\psi_n : l_n + \psi_{n+1} : l_{n+1}) + M_{n+1} \Phi_{n+1} : l_{n+1} = 0. \quad (13)$$

Уравнение трёх перемещений для опоры  $n$  имеет вид (56) (см. стр. 193); при наличии только продольных сил грузовой член  $R_{np} = 0$ , и в системе однородных уравнений (56) ищут условие, когда  $D_v = 0$  [см. (1)]. Коэффициенты при неизвестных  $Z$  определяют по данным табл. 29 и 30; при необходимости вычислить реакции и перемещения для новых схем пользуются уравнениями (3) — (5).

Значения функций в табл. 30:

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \frac{\nu(\operatorname{tg} \nu - \nu)}{8 \operatorname{tg} \nu (\operatorname{tg} 0,5 \nu - 0,5 \nu)} = \frac{\psi}{\chi}; \\ \beta &= \frac{\nu(\nu - \sin \nu)}{4 \sin \nu (\operatorname{tg} 0,5 \nu - 0,5 \nu)} = \frac{\Phi}{\chi}; \\ \gamma &= \frac{1}{\chi} = \frac{\nu^2}{24 (\operatorname{tg} 0,5 \nu - 0,5 \nu)}; \\ \bar{\alpha} &= \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{1}{\psi}; \\ \bar{\beta} &= \frac{\gamma}{\beta} = \frac{1}{\Phi}; \quad \bar{\gamma}_{(v)} = \gamma_{(2v)} = \\ &= \frac{\nu^2}{3 (\operatorname{tg} \nu - \nu)}; \quad 2\alpha + \beta = \frac{2\psi + \Phi}{\chi}. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Функции влияния в теории устойчивости

Таблица 29

$\nu$	$\Phi$	$\beta$	$\psi$	$\alpha$	$z$	$\gamma$	$\alpha$	$\beta$	$\operatorname{tg} \nu$
0	1	1	1	1	1	1	1	1	0
0,5	1,03	0,970	1,0171	0,984	1,0256	0,974	0,99	1,003	0,5463
1,0	1,1304	0,885	1,0737	0,931	1,1113	0,898	0,966	1,0172	1,5574
1,20	1,1979	0,835	1,1114	0,898	1,1686	0,856	0,951	1,0251	2,5722
1,40	1,2878	0,776	1,1610	0,861	1,2445	0,803	0,933	1,0348	+ 5,7979
1,60	1,4078	0,710	1,2266	0,815	1,3455	0,743	0,912	1,0463	-34,233
1,80	1,5710	0,637	1,3147	0,761	1,4821	0,675	0,887	1,0500	-4,2863
2,0	1,7993	0,556	1,4365	0,696	1,6722	0,598	0,859	1,0760	-2,1850
2,10	1,9494	0,513	1,5158	0,660	1,7967	0,556	0,844	1,0850	-1,7098
2,20	2,1336	0,468	1,6124	0,619	1,9491	0,513	0,827	1,0946	-1,3738
2,30	2,3641	0,423	1,7325	0,577	2,1392	0,468	0,810	1,1052	-1,1192
2,40	2,6596	0,376	1,8854	0,531	2,3822	0,419	0,791	1,1164	-0,9160
2,50	3,0502	0,328	2,0864	0,479	2,7027	0,370	0,772	1,1286	-0,7470
2,60	3,5890	0,279	2,3618	0,423	3,1435	0,318	0,752	1,1417	-0,6016
2,70	4,3766	0,228	2,7619	0,362	3,7863	0,264	0,729	1,1559	-0,4727
2,80	5,6315	0,177	3,3963	0,295	4,8082	0,208	0,706	1,1712	-0,3555
2,90	7,9343	0,126	4,5550	0,220	6,6798	0,149	0,682	1,1878	-0,2464
3,0	13,5057	0,074	7,3486	0,136	11,2013	0,089	0,656	1,2057	-0,1426
3,10	45,9234	0,0218	23,5659	0,0423	37,4839	0,0267	0,628	1,2252	-0,0416
$\pi$	$\pm \infty$	0	$\pm \infty$	0	$\pm \infty$	0	0,617	1,233	0
3,20	-32,7063	-0,0306	-15,7398	-0,0635	-26,2445	-0,038	0,600	1,246	+ 0,0585
3,30	-12,0770	-0,0629	-5,4154	-0,185	-9,5164	-0,105	0,569	1,269	0,1597
3,40	-7,4248	-0,135	-3,0787	-0,325	-5,7378	-0,174	0,536	1,294	0,2644
3,50	-5,3769	-0,186	-2,0433	-0,490	-4,0697	-0,246	0,502	1,3212	0,3747
3,60	-4,2292	-0,237	-1,4572	-0,686	-3,1308	-0,320	0,465	1,3508	0,4935
3,70	-3,4990	-0,286	-1,0787	-0,928	-2,5292	-0,396	0,426	1,3834	0,6247
3,80	-2,9931	-0,334	-0,8123	-1,23	-2,1133	-0,474	0,385	1,4191	0,7736
3,90	-2,6314	-0,379	-0,6147	-1,65	-1,8043	-0,556	0,340	1,4584	0,9474
4,0	-2,3570	-0,425	-0,4603	-2,17	-1,5694	-0,633	0,293	1,5019	1,1578
4,10	-2,1454	-0,466	-0,3355	-2,98	-1,3840	-0,723	0,242	1,5501	1,4235
4,20	-1,9792	-0,506	-0,2317	-4,32	-1,2342	-0,810	0,188	1,6036	1,7778
4,30	-1,8475	-0,542	-0,1430	-6,98	-1,1105	-0,900	0,129	1,6637	2,2859
4,40	-1,7429	-0,573	-0,0652	-15,36	-1,0069	-0,993	0,065	1,7309	3,0963
4,50	-1,6603	-0,602	+ 0,0044	+227,2	-0,9188	-1,09	-0,005	1,8070	4,6373
4,60	-1,5962	-0,626	+ 0,0682	+14,68	-0,8431	-1,185	-0,081	1,8932	+ 8,8602
4,80	-1,5152	-0,660	0,1851	5,40	-0,7196	-1,390	-0,257	2,1056	-11,385
5,0	-1,4914	-0,670	0,2975	3,36	-0,6234	-1,605	-0,477	2,3924	-3,3805
5,25	-1,5482	-0,647	0,4495	2,23	-0,5296	-1,89	-0,848	2,9213	-1,6934
5,50	-1,7446	-0,573	0,6470	1,546	-0,4563	-2,19	-1,418	3,8234	-0,9956
5,75	-2,2344	-0,447	0,9747	1,026	-0,3974	-2,52	-2,402	5,6225	-0,5922
6,0	-3,7455	-0,267	1,8015	0,555	-0,3492	-2,87	-5,16	10,7268	-0,2910
6,25	-29,0567	-0,0344	14,5346	0,0688	-0,3088	-3,23	-47,07	94,1920	0
$2\pi$	$-\infty$	0	$\infty$	0	-0,3040	-3,29	$-\infty$	$\infty$	0

Реакции однопролётной балки для метода перемещений

Таблица 30

Граничные условия	Формулы реакций
1. Концы защемлены 2. Левое защемление повернуто на $Z=1$	$M_{лев} = 4i\alpha; M_{пр} = -2i\beta; Q_{лев} = -Q_{пр} = -2i(2\alpha + \beta); l$
1. То же 2. Левое защемление смещено поперёк оси на $Z=1$	$M_{лев} = -M_{пр} = -2i(2\alpha + \beta); l; Q_{лев} = -Q_{пр} = 12i\gamma; l^3$
1. Левый конец защемлён, правый шарнирно опёрт 2. Защемление повернуто на $Z=1$	$M_{лев} = -3i\bar{\alpha}; M_{пр} = 0; Q_{лев} = -Q_{пр} = -3i\bar{\alpha}; l$
1. То же 2. Защемление смещено поперёк оси на $Z=1$	$M_{лев} = -3i\bar{\alpha}; l; M_{пр} = 0; Q_{лев} = -Q_{пр} = 3i\bar{\gamma}; l^3$
1. Левый конец жёстко защемлён; правый имеет скользящее защемление 2. Левое защемление повернуто на $Z=1$	$M_{лев} = i\nu; \operatorname{tg} \nu; M_{пр} = i\nu; \sin \nu; Q_{лев} = Q_{пр} = 0$
1. Левый конец имеет скользящее защемление, правый — свободно опёрт 2. Защемление повернуто на $Z=1$	$M_{лев} = -i\nu; \operatorname{tg} \nu; M_{пр} = 0; Q_{лев} = Q_{пр} = 0$
Примечание. Положительные $M$ и $Q$ , будучи приложены к балке, стремятся вызвать растяжение нижних волокон. Погонная жёсткость $i = EI/l$ .	

Для консольной балки на двух шарнирных опорах с одной консолью из (3) — (5) находят условие устойчивости:

$$\frac{\operatorname{tg} \nu - \nu}{\nu \operatorname{tg} \nu} = \frac{k_1 (P + P_1)}{Pk \operatorname{tg} k_1 a}, \quad (15)$$

где  $\nu = kl$  — относительная длина пролёта;  $k_1 a$  — относительная длина консоли;  $P$  — сила сжатия консоли;  $P + P_1$  — то же пролёта;  $k_1^2 = P : EI_1$  и  $k^2 = (P + P_1) : EI$ .

Если неразрезная балка лежит на упругих опорах, потеря устойчивости будет сопровождаться появлением реакций:

$$R_0 = y_0 \cdot K_0; R_1 = y_1 \cdot K_1; R_n = -$$

$$- \sum_0^{n-1} R = y_n \cdot K_n, \quad (16)$$

где  $y_l, K_l$  — прогиб  $l$ -ой опоры и жёсткость её. Для решения задачи можно применить уравнения (3) — (5). С податливостью опор (при равнопролётности) можно не считаться, если  $K$  превышает величину  $\pi^2 EI : l^3 \beta$ , где при числе пролётов  $m = 2; 3; 5; 11, \beta = 0,5; 0,333; 0,276; 0,255$ .

#### Рамы

Канонические уравнения методов сил и перемещений записывают, как и в статике (или динамике) сооружений (стр. 149, 150, 193). При наличии только узловой нагрузки грузовые члены уравнений отсутствуют. Коэффициенты уравнений в методе перемещений определяются по табл. 30. Коэффициенты в методе сил — по формулам (11) или специальными вычислениями с помощью уравнений (3) — (5) в зависимости от вида основной системы; обычно они выражаются через функции (12) и (14) (табл. 29) или их сочетания.

Система однородных уравнений даёт условие устойчивости по (1):  $D\nu = 0$ .

#### Кольца, арки

Дифференциальное уравнение упругой кривой равномерно сжатого стержня с круговой осью:

$$\frac{d^2 w}{d\varphi^2} + w \left( 1 + \frac{pR^3}{EI} \right) = 0, \quad (17)$$

где  $w$  и  $p$  — радиальные перемещение и давление;

$R$  — радиус круга,  $\varphi$  — полярный угол.

Из (17) получают критические давления:

$$a) \text{ для кругового кольца: } p_k = 3 \frac{EI}{R^3}; \quad (18)$$

б) для двухшарнирной круговой арки:

$$p_k = \frac{EI}{R^3} (m^2 - 1), \quad (19)$$

где  $m = \pi : \alpha$ , причём  $\alpha$  — половина центрального угла.

Для бесшарнирной и трёхшарнирной круговых арок формула (19) сохраняется, однако для бесшарнирной арки

$$m = \operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{tg} m\alpha, \quad (20)$$

для трёхшарнирной  $m = 4\nu : \alpha$ , причём  $\nu$  подчинено условию:

$$\frac{\nu^3}{\operatorname{tg} \nu - \nu} = \frac{\alpha^3}{4(\operatorname{tg} \alpha - \alpha)}. \quad (21)$$

Критическая сжимающая сила в круговой арке:

$$N_k = K \frac{EI}{R^2}, \quad (22)$$

где  $K$  берут в табл. 31. Данные для иных арок см. в подробном курсе.

Таблица 31  
Коэффициенты устойчивости  $K$  для арок

$2\alpha^\circ$	Бесшарнирная	Двухшарнирная	Трёхшарнирная
30	294	143	108
60	73,3	35	27,1
90	32,4	15	12
120	18,1	8	6,75
150	10,5	4,76	4,32
180	8	3	3

#### Фермы

Верхний пояс открытого моста рассчитывается, как стержень на упругом основании с коэффициентом сопротивления  $c \approx 1 : \left( \frac{h^3}{3EI_1} + \frac{h^2b}{2EI_2} \right) \cdot d$ , где  $h, b$  и  $d$  — высота моста, ширина его и длина панели;  $I_1$  и  $I_2$  — моменты инерции стойки и поперечной балки. Критическая (сжимающая пояс), распределённая по закону треугольника, сила:

$$P_k = \frac{ql}{4} = \frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2}, \quad (23)$$

где  $I$  и  $l$  — момент инерции пояса и пролёт фермы;

$\mu$  — в табл. 32 в зависимости от  $\gamma = cl^4 : \pi^4 EI$ .

Таблица 32  
Коэффициенты длины  $\mu$

$\gamma$	0	0,82	1,64	3,75	9,35	16,4	32,8	164
$\mu$	0,696	0,524	0,443	0,363	0,324	0,29	0,246	0,174

Устойчивость элементов ферм следует оценивать по данным для многопролётных балок и рам, выделяя из фермы соответственные расчётные схемы.

#### Пластинки и оболочки

Для свободно опёртой, сжатой в одном направлении ( $x-x$ ) прямоугольной пластинки (со сторонами  $a$  и  $b$ ) критическая сила см. (8):

$$N_k = K \frac{\pi^2 D}{a^2} = K_1 \frac{\pi^2 D}{b^2}, \quad (24)$$

где  $D$  — цилиндрическая жёсткость,  $a$  — вдоль оси  $x$ ;  $K$  и  $K_1$ , в табл. 33.



Т а б л и ц а 33  
Коэффициенты устойчивости  $K$  и  $K_1$

$a/b$	0,4	0,6	0,8	1	1,41	2	2,45	3	4	5
$K$	1,35	1,85	2,69	4	9	16	25	36	64	100
$K_1$	8,41	5,14	4,20	4	4,47	4	4,13	4	4	4

При  $a/b > 5$  коэффициент  $K_1 \approx 4$ .

Для случая симметричной местной потери устойчивости стенок цилиндра при осевом сжатии из (10) критическое напряжение

$$\sigma_k = \frac{Eh}{R\sqrt{3(1-\mu^2)}}. \quad (25)$$

Потеря устойчивости вследствие радиального давления  $p$  происходит в цилиндре при

$$p_k = \frac{3EI}{R^3(1-\mu^2)}. \quad (26)$$

В случае действия центрально сжимающей силы на тонкостенный стержень (оболочку) открытого профиля, шарнирно опертый по концам, критическая сила  $P$  (по Власову) является наименьшим корнем кубического уравнения:

$$-P^3 r_1^2 + P^2 (P' r^2 - P_x a_y^2 - P_y a_x^2) - P_y^2 P'' + r^2 P''' = 0, \quad (27)$$

где (см. стр. 201—205):

$$\begin{aligned} r_1^2 &= (I_x + I_y) : F; \quad r^2 = r_1^2 + a_x^2 + \\ &+ a_y^2; \quad P' = P_x + P_y + P_z; \\ P'' &= P_x P_y + P_y P_z + P_z P_x; \quad P''' = P_x P_y P_z; \\ P_x &= \pi^2 EI_x : l^2; \quad P_y = \pi^2 EI_y : l^2; \quad P_z = \\ &= (GI_d + \pi^2 EI_w : l^2) : r^2. \end{aligned}$$

#### Графоаналитический метод

В случае действия постоянной продольной силы применяется формула

$$P_k = E_1 I_1 : \bar{y}_1, \quad (28)$$

где  $E_1 I_1$  — жёсткость в удобном для расчёта сечении номер 1;

$\bar{y}_1$  — момент в этом сечении от распределённых фиктивных сил, определяемых для любого сечения  $n$  формулой:

$$q_{\phi \cdot n} = \frac{\bar{y}_n}{y_1} \cdot \frac{E_1 I_1}{E_n I_n}. \quad (29)$$

Порядок пользования формулами (28) — (29) аналогичен указанному на стр. 184—186 для формул (33) — (35). Его можно применять к стержням прямым и кривым (аркам) постоянного и переменного сечений. Для случая переменной продольной силы, взамен (28) и (29) применяют формулы:

$$M_{k1} = E_1 I_1 y_1 : y_1; \quad q_{\phi \cdot n} = \frac{M_n}{M_1} \cdot \frac{E_1 I_1}{E_n I_n}. \quad (30)$$

#### ЛИТЕРАТУРА И ИСТОЧНИКИ

- Ананьев И. В. Справочник по расчёту собственных колебаний. М.—Л., Гостехиздат, 1946, 223 с.
- Безухов Н. И. В кн.: «Исследования по теории сооружений». Стройиздат, 1939.
- Безухов Н. И. Статика сооружений. М.—Л., Стройиздат, 1931, 216 с.
- Безухов Н. И. Динамика сооружений в примерах и задачах. М., Стройиздат, 1947, 200 с.
- Бернштейн С. А. Основы динамики сооружений. М.—Л., Стройиздат, 1941, 188 с.
- Бычков Д. В. Кручение и изгиб металлических балок. М.—Л., Стройиздат, 1945.
- Бычков Д. В. Расчёт балочных и рамных систем из тонкостенных элементов. М., Стройиздат, 1949, 208 с.
- Власов В. З. Тонкостенные упругие стержни. М.—Л., Стройиздат, 1940, 276 с.
- Власов В. З. Строительная механика тонкостенных пространственных систем. М., Стройиздат, 1949, 435 с.
- Власов В. З. Общая теория оболочек. М.—Л., Гос. изд-во техн. теорет. литер., 1949, 784 с.
- Гольденблат И. В. Динамическая устойчивость сооружений. М., Стройиздат, 1948.
- Горбунов-Посадов Б. Балки и плиты на упругом основании. М., Машиностроение, 1949.
- Горбунов Б. Н. и Стрельбицкая А. И. Теория рам из тонкостенных стержней. М.—Л., Гостехиздат, 1948, 198 с.
- Дарков А. В. и Кузнецов В. И. Статика сооружений. М., Трансжелдориздат, 1938, 276 с.
- Джанелидзе Г. Ю. и Пановко Я. Г. Статика упругих тонкостенных стержней. Л.—М., Гостехиздат, 1948, 208 с.
- Завриев К. С. Сопrotивление сооружений. Тбилиси, 1939, 622 с.
- Завриев К. С. Динамика сооружений. М., Трансжелдориздат, 288 с.
- Казей И. М., Максимов Н. Н., Муров А. И. Динамические коэффициенты металлических балочных пролётных строений железнодорожных мостов, 1939, 199 с.
- Кан С. Н. и Пановко Я. Г. Элементы строительной механики стержневых систем. М., Оборонгиз, 1949, 128 с.
- Корякин Н. И. Труды МЭМИИТ. 57 вып. М., Трансжелдориздат, 1949.
- Лазарьян В. А. Исследование неустановившихся режимов движения поездов. М., Трансжелдориздат, 1949, 134.
- Кузнецов В. И. Методы расчёта балок на упругом основании. М., Трансжелдориздат, 1938.
- Прокорьев И. П. Теория сооружений. Т. I, II, III, М., Трансжелдориздат, 1947.
- Рабинович И. М. Строительная механика стержневых систем. М., Стройиздат, 1946, 420 с.
- Рабинович И. М. Методы расчёта рам. Вып. I, II, III, М., Гостройиздат, 1934, 1937.
- Рабинович И. М. К расчёту сооружений на действие сил, меняющихся во времени. Вестник В. И. А., 1937.
- Смирнов А. Ф. Статическая и динамическая устойчивость сооружений. М., Трансжелдориздат, 1947, 308 с.
- Снитко Н. К. Динамика транспортных сооружений. Л., 1949.
- Сорокин Е. С. Динамика междуэтажных перекрытий. М.—Л., Стройиздат, 1941, 240 с.
- Урбан И. В. Теория расчёта статически неопределимых конструкций. М., Трансжелдориздат, 1937, 421 с.
- Уманский А. А. Пространственные системы. М., Стройиздат, 1948.
- Уманский А. А. Специальный курс строительной механики. Т. I, II, М., Стройиздат.
- Филипов А. П. Методы расчёта на колебания. М.—Л., Стройиздат, 1941, 230 с.
- Филоненко-Бородич М. М. Сопrotивление материалов Ч. II, М. Гос. изд-во техн. теорет. литер., 1949.

# МЕХАНИКА ГРУНТОВ



## В ВЕДЕНИЕ

Механика грунтов — наука о расчёте устойчивости и деформаций земляных масс и оснований сооружений.

Объектом механики грунтов являются только такие грунты, которые можно рассматривать как состоящие из отдельных мелких частиц, образовавшихся в результате механического и химического выветривания горных пород.

Механика грунтов основана на ряде упрощающих представлений как о механических свойствах грунтов, так и о геологических условиях. Изучение влияния физико-механических свойств реальных грунтов и различных геологических, гидрогеологических условий на устойчивость и деформации оснований сооружений и земляных масс составляет предмет инженерной геологии и грунтоведения. Инженерная геология позволяет оценивать степень расхождения между результатами расчётов и действительностью. Это расхождение вызывается различием между свойствами реальных грунтов и идеализированного материала, рассматриваемого в механике грунтов.

Теория деформаций в механике грунтов охватывает методы расчёта осадок сооружений и напряжённого состояния грунтов при действии нагрузок различных видов.

Основные исследования в СССР в области теории деформаций оснований и земляных масс также стоят далеко впереди соответствующих работ за рубежом и выполнены проф. Н. М. Герсевановым, проф. Н. А. Цытовичем, проф. В. А. Флоринным и др.

Механика грунтов включает теорию устойчивости и теорию деформаций.

Теория устойчивости в механике грунтов охватывает методы расчёта устойчивости грунтов в основаниях и земляных сооружениях и методы расчёта давления, развиваемого грунтом, на подпорные стены и другие виды ограждений и креплений.

Основные исследования в СССР по устойчивости оснований и земляных масс, немногочисленные работы, опубликованные за границей, принадлежат В. В. Соколовскому, проф. И. П. Прокофьеву, проф. Г. М. Шахуняццу, проф. В. И. Курдюмову, проф. Н. П. Пузыревскому и др.

Кроме того, вопросы температурных деформаций грунтов разработаны впервые в СССР и опубликованы в ряде работ проф.

Н. А. Цытовича, проф. Н. Н. Иванова, проф. М. И. Сумгина и др.

В настоящем разделе «Справочника» излагаются лишь некоторые основные вопросы, наиболее часто встречающиеся в практической работе инженера.

## Простейшие физические характеристики грунтов

**Объёмный вес грунта (объёмный вес брутто)  $\gamma_b$ .** Вес единицы объёма грунта, включая вес воды в его порах, в  $t/m^3$  или  $g/cm^3$ .

**Объёмный вес скелета грунта (объёмный вес нетто)  $\gamma_d$ .** Вес единицы объёма грунта за вычетом веса воды в его порах, в  $t/m^3$  или  $g/cm^3$ .

**Удельный вес грунта  $\gamma_s$ .** Вес единицы объёма твёрдых минеральных частиц (скелета) грунта в  $g/cm^3$  или  $t/m^3$ .

Удельный вес в большинстве случаев колеблется для песков и глин в пределах от 2,65 до 2,70  $g/cm^3$ . Примеси некоторых тяжёлых минералов (главным образом в глинах) повышают  $\gamma_s$ ; органические примеси, наоборот, понижают его.

**Влажность  $w$ .** Отношение веса воды в порах грунта к весу абсолютно сухого грунта в процентах.

**Пористость  $n$ .** Отношение объёма пор в образце грунта к общему объёму образца. Часто выражается в процентах.

**Коэффициент пористости  $e$ .** Отношение объёма пор в образце грунта к объёму скелета в образце.

## Некоторые зависимости между простейшими физическими характеристиками грунта

Зависимость между пористостью и коэффициентом пористости:

$$n = \frac{e}{1+e}; \quad e = \frac{n}{1-n}. \quad (1)$$

Объём скелета в единице объёма грунта  $V_s$ :

$$V_s = \frac{1}{1+e} = 1 - n. \quad (2)$$

Объём пор в единице объёма грунта  $V_p$ :

$$V_p = n = \frac{e}{1+e}. \quad (3)$$

Зависимость между объёмным весом грунто и нетто (скелета):

$$\gamma_b = \gamma_n \left( 1 + \frac{w}{100} \right); \gamma_n = \frac{\gamma_b}{1 + \frac{w}{100}}. \quad (4)$$

Зависимость между коэффициентом пористости и объёмным весом:

$$e = \frac{\gamma_s \left( 1 + \frac{w}{100} \right)}{\gamma_b} - 1 = \frac{\gamma_s}{\gamma_n} - 1. \quad (5)$$

Объёмный вес нетто грунта под водой (с учётом взвешивания):

$$\gamma'_n = (\gamma_s - \gamma_w) (1 - n), \quad (6)$$

где  $\gamma_w$  — объёмный вес воды.

### Эффективные и нейтральные напряжения

Всякое увеличение нагрузки на грунт вызывает изменение его пористости. Если поры грунта совершенно заполнены водой, то уменьшение объёма пор сопровождается выжиманием из грунта равного объёма воды. Это изменение происходит тем медленнее, чем ниже водопроницаемость грунта. Процесс уменьшения влажности грунта при изменении напряжённого состояния последнего называется процессом консолидации. Обратный процесс — увеличения пористости и влажности грунта при разгрузке — носит название процесса набухания.

В течение процесса консолидации часть полного сжимающего напряжения  $\sigma$ , действующего в некотором сечении грунта, передаётся на скелет грунта, а часть — на воду в порах, заставляя избыточную влагу выжиматься из грунта. Часть полного напряжения, воспринимаемая водой, называется нейтральным напряжением  $u_w$ . Вторая часть полного напряжения

$$\bar{\sigma} = \sigma - u_w \quad (7)$$

воспринимается скелетом и носит название эффективного напряжения.

Нейтральное напряжение можно представить в виде избыточного гидростатического давления, оказываемого столбом воды высотой  $h_w$ :

$$u_w = \gamma_w \cdot h_w, \quad (8)$$

где  $\gamma_w$  — объёмный вес воды;

$h_w$  — пьезометрическая высота в рассматриваемой точке.

Положительное нейтральное напряжение называется нейтральным давлением, отрицательное — нейтральным натяжением.

Для случая, изображённого на фиг. 1, будем иметь полное сжимающее напряжение, действующее на горизонтальную площадку на глубине  $z$ :

$$\sigma = \gamma_s (1 - n) (z - D) + n \gamma_w (z - D) + \gamma_w D. \quad (9)$$

Нейтральное напряжение на глубине  $z$

$$u_w = \gamma_w z.$$

Эффективное напряжение на той же глубине

$$\begin{aligned} \bar{\sigma} &= \sigma - u_w = (\gamma_s - \gamma_w) (1 - n) (z - D) = \\ &= \gamma'_n (z - D). \end{aligned} \quad (10)$$

Если вода в порах грунта находится в движении, уравнение (10) неприменимо.

### Сопротивление грунтов сдвигу

В механике грунтов различают две основные категории грунтов: сыпучие (несвязные) и связные.

Сыпучими называются грунты, сопротивление сдвигу которых подчиняется уравнению

$$\tau = \bar{\sigma} \operatorname{tg} \varphi = (\sigma - u_w) \operatorname{tg} \varphi, \quad (11)$$

где  $\bar{\sigma}$  — эффективное сжимающее напряжение, действующее по площадке сдвига;

$\operatorname{tg} \varphi$  — коэффициент внутреннего трения грунта;

$\varphi$  — угол внутреннего трения грунта.

Таким образом, при  $\bar{\sigma} = 0$  у сыпучих грунтов  $\tau = 0$ . Типичным представителем сыпучих грунтов является крупнозернистый чистый песок.

Если изменение напряжённого состояния в процессе сдвига происходит с такой скоростью, что в каждый момент времени  $\sigma = \bar{\sigma}$ , а  $u_w = 0$ , то имеет место явление так называемого эффективного сдвига. При эффективном сдвиге угол внутреннего трения различных песков колеблется в пределах от 30 до 50°.

Для одного и того же сыпучего грунта  $\varphi$  зависит от плотности.

Связными называются грунты, сопротивление сдвигу которых подчиняется уравнению

$$\begin{aligned} \tau &= c + \psi \bar{R} + \\ &+ \bar{\sigma} \operatorname{tg} \varphi_f = c_e + \bar{\sigma} \operatorname{tg} \varphi_f, \end{aligned} \quad (12)$$

где  $\bar{\sigma}$  — эффективное сжимающее напряжение по площадке сдвига (при замедленном сдвиге);

$\bar{R}$  — гидроёмкость скелета, т. е. сумма главных напряжений в данной точке;

$\varphi_f$  — истинный угол внутреннего трения;

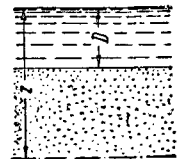
$c$  и  $\psi$  — эмпирические величины, определяемые при лабораторных испытаниях на сдвиг.

При  $\bar{\sigma} = 0$  у связных грунтов  $\tau = c$ . Величина  $c$  называется кажущимся сцеплением ( $\text{кг/см}^2$ ). Истинное сцепление

$$c_e = c + \psi \bar{R}. \quad (13)$$

Типичным представителем связных грунтов является пластичная глина.

Член  $\psi \bar{R}$  выражает собой зависимость части истинного сцепления в связных грун-



Фиг. 1

тах от влажности (являющейся функцией суммы главных напряжений).

При обычном методе испытаний связных грунтов на замедленный сдвиг зависимость принимает вид:

$$\tau = c + \bar{\sigma} \cdot \operatorname{tg} \varphi, \quad (14)$$

где  $\varphi$  — кажущийся угол внутреннего трения.

Здесь член  $\bar{\sigma} \operatorname{tg} \varphi$  охватывает как сопротивление трения, так и часть сцепления, зависящую от влажности.

При расчёте устойчивости глинистых грунтов рекомендуется пользоваться уравнением (14), подставляя в него значения  $c$  и  $\varphi$ , определённые при испытании в лаборатории на срез образца глины при тех условиях загрузки и дренирования, при которых можно ожидать потери устойчивости в естественных условиях.

### Сжимаемость грунтов

Различают три вида лабораторных испытаний грунтов на сжимаемость: 1) испытание на сжатие в обойме (сжатие при отсутствии бокового расширения), 2) испытание на простое сжатие (при свободном боковом расширении) и 3) испытание на трёхосное сжатие.

Сжатие в обойме (компрессионные испытания). График зависимости между коэффициентом пористости и эффективным давлением на образец грунта называется компрессионной кривой (фиг. 2).

В практически встречающихся пределах изменения нагрузок на грунт эта зависимость принимается линейной. В этом случае уравнение сжимаемости имеет вид:

$$\epsilon_0 - \epsilon_1 = a_c (p_1 - p_0), \quad (15)$$

где  $p_0$  и  $\epsilon_0$  — начальные давления и коэффициент пористости грунта;

$p_1 - p_0 = p$  — добавочное давление на грунт в  $\text{кг/см}^2$ ;

$\epsilon_1$  — конечный коэффициент пористости;

$a_c$  — коэффициент сжимаемости, равный

$$a_c = \frac{\epsilon_0 - \epsilon_1}{p_1 - p_0} \text{ см}^2/\text{кг}. \quad (16)$$

Если высота образца в обойме равна  $h$  в см при коэффициенте пористости  $\epsilon_0$ , то увеличение давления на образец, равное  $p$ , вызовет осадку

$$s = \frac{a_c p h}{1 + \epsilon_0} \text{ см}. \quad (17)$$

Эта осадка в грунтах, насыщенных водой, произойдёт не сразу, и скорость её будет зависеть от водопроницаемости грунта. Если обозначить  $s_t$  осадку через некоторое время  $t$ , то отношение

$$U = \frac{s_t}{s} \quad (18)$$

носит название степени консолидации и.

(Часто  $U$  выражают в процентах и называют процентом консолидации.)

Испытания на сжатие в обойме (компрессионные испытания) имеют важное значение в механике грунтов, так как позволяют найти основные параметры, определяющие осадку грунтов под нагрузкой.

**Простое и трёхосное (всестороннее) сжатие.** Испытания на простое сжатие характеризуют главным образом прочность грунта (сопротивление сдвигу).

Для большинства грунтов эти испытания заменяются испытаниями на трёхосное сжатие (при ограниченном боковом расширении).

Испытания на простое и трёхосное сжатие проводятся редко, и обычно сопротивление грунтов сдвигу определяется испытаниями на срез.

## РАСЧЁТ ОСАДОК СООРУЖЕНИЙ

### Расчёт полной осадки

Определение осадок сооружений неизбежно носит приближённый характер вследствие разнообразия природных гидрогеологических условий и невозможности учесть в расчёте все факторы, влияющие на размер осадок и характер их хода во времени. Однако в зависимости от степени однородности грунтов и условий их залегания и в зависимости от полноты и подробности материалов геотехнических исследований приближение может быть получено вполне удовлетворяющее практическим целям.

При однородности грунта на глубину не менее чем 2,5—3 ширины фундамента и при незначительных размерах последнего (например под отдельные колонны или опоры) осадка

$$s = \frac{\omega p \sqrt{F}}{C}, \quad (19)$$

где

$s$  — осадка в см;

$p$  — среднее давление на основание в  $\text{кг/см}^2$  (за вычетом веса грунта в объёме фундамента);

$F$  — площадь фундамента в  $\text{см}^2$ ;

$\omega$  — коэффициент, зависящий от формы фундамента в плане;

$C = \frac{E}{1 - \mu^2}$  — параметр, характеризующий

свойства грунта, в  $\text{кг/см}^2$ ;

$E$  — модуль сжатия грунта в  $\text{кг/см}^2$ ;

$\mu$  — коэффициент Пуассона.

Значение  $C$  должно быть получено из испытания грунта пробной нагрузкой и определяется по той же формуле

$$C = \frac{\omega p \sqrt{F}}{s}, \quad (20)$$

в которую подставляются значения, полученные при испытании штампом площадью  $F$ .

Для квадратного штампа площадью  $0,5 \text{ м}^2$ , обычно применяемого при испытаниях,

$$C = 67 \frac{p}{s} \text{ кг/см}^2.$$

Модуль деформации грунта  $E$  может быть определён по результатам пробной нагрузки, пользуясь формулами, полученными из (20):

для песка

$$E = 62 \frac{P}{S} \text{ кг/см}^2;$$

для глины

$$E = 57 \frac{P}{S} \text{ кг/см}^2.$$

Значения  $\mu$ , входящих в формулу (19) и (20) для различных соотношений сторон фундаментов или штампов приводятся в табл. 1.

Способ вычисления  $C$  по значениям  $E$  и  $\mu$ , найденным в лаборатории, менее точен вследствие небольших размеров образцов и труд-

как при определении физико-механической характеристики грунта  $C$  с помощью поверхностных испытаний штампами грунт обжимается лишь на незначительную глубину (примерно две ширины штампа). Это относится и к случаю залегания в основании разнородных грунтов (фиг. 3), где показаны эпюры вертикальных сжимающих напряжений в точках грунта, расположенных под осью фундамента.

Кроме того, формула (19), выведенная для случая полупространства, неприменима при незначительной мощности сжимаемых

Таблица 1

Круг	Квадрат	Прямоугольник с отношением сторон $a:b$														
		1,5	2	3	4	5	6	7	8	9	10	20	30	40	50	100
0,96	0,95	0,94	0,92	0,88	0,85	0,82	0,80	0,77	0,75	0,73	0,71	0,59	0,53	0,48	0,45	0,37

ности сохранения структуры грунта при их извлечении и обработке.

Модуль деформации грунта  $E$  в лаборатории может быть определен с помощью компрессионной кривой по формуле

$$E = \frac{\beta (1 + \epsilon_0)}{a_c}, \quad (21)$$

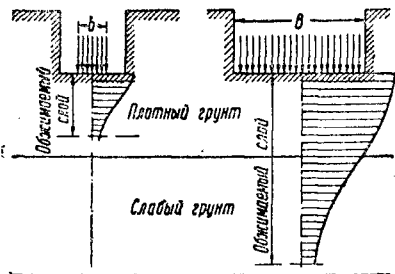
где  $\epsilon_0$  — начальный коэффициент пористости;  
 $a_c$  — коэффициент сжимаемости для заданного диапазона нагрузки;  
 $\beta$  — коэффициент, зависящий от  $\mu$ .

Можно принимать в качестве первого приближения для песков  $\beta = 0,72 - 0,82$ , в среднем 0,77; для глин  $\beta = 0,42 - 0,55$ , в среднем 0,48.

Так как произведение  $\beta (1 + \epsilon_0)$  обычно близко к 1, приближенно принимают

$$E \approx \frac{1}{a_c}. \quad (22)$$

Значения  $\mu$  колеблются в пределах: для песка  $0,26 \div 0,31$ , для глин  $0,37 \div 0,41$ .



Фиг. 3

Если сооружение имеет значительные размеры, то обжимаемая им толща грунтов будет относительно мощной, что не позволяет считать её однородной при расчёте осадок, даже в случае сравнительно постоянного минералогического и гранулометрического состава. Условия генезиса, различие в структуре, различная степень уплотнения — всё это делает неприменимой формулу (19), так

грунтов, подстилаемых скалой на небольшой глубине.

Во всех этих случаях применяется следующий метод расчёта осадок.

1. Приближенно определяется обжимаемая толща (активная глубина), которая равна в случае местного нагружения

$$h_a = 1,34 \sqrt[3]{\frac{P}{\gamma_b}}, \quad (23)$$

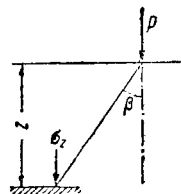
или в случае ленточной нагрузки

$$h_a = 1,8 \sqrt{\frac{P}{\gamma_b}}, \quad (24)$$

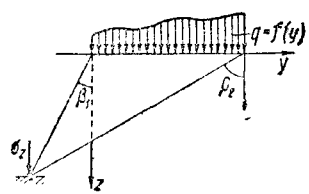
где  $h_a$  — активная глубина в м, на которой сжимающие напряжения от внешней нагрузки составляют около 20% от напряжений, вызванных собственным весом грунта;

$\gamma_b$  — объёмный вес грунта в  $\text{т/м}^3$ . В случае напластования грунтов с различным объёмным весом находится средневзвешенное значение  $\gamma_b$ ;

$P$  — полная нагрузка в т на весь фундамент [формула (23)] или на 1 пог. м ленточного фундамента [формула (24)].



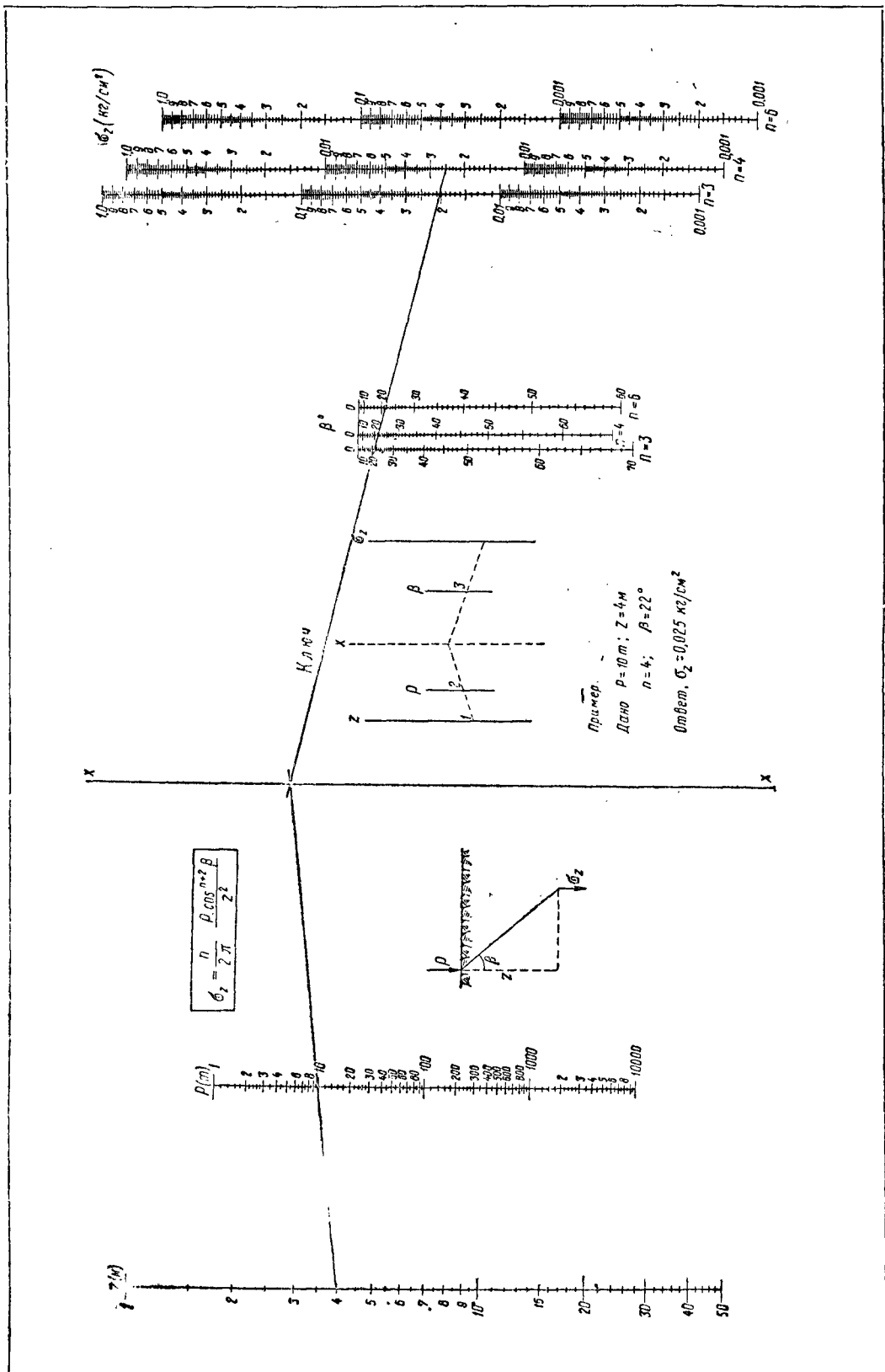
Фиг. 4



Фиг. 5

2. Определяются вертикальные сжимающие напряжения по середине высоты каждого пласта, входящего в активный слой, как полусумма напряжений в кровле и подошве его. Напряжения определяются в точках, лежащих на вертикальной оси, проходящей через центр тяжести фундамента на глубине  $z$ , по формуле

$$\sigma = \frac{n \cos^{n+2} \beta}{2\pi} \cdot \frac{P}{z^3} \quad (25)$$



для случая сосредоточенной силы (фиг. 4) или

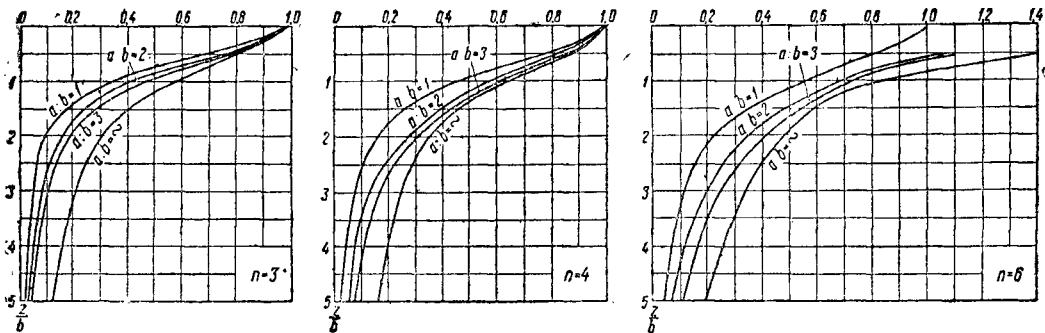
$$\sigma = \frac{n_1}{\pi} \int_{\beta_1}^{\beta_2} q \cos^{n-1} \beta d\beta \quad (26)$$

для случая распределённой ленточной нагрузки  $q = f(y)$  в кг/см<sup>2</sup> (фиг. 5).

Величины  $n$  и  $n_1$  называются коэффициентами концентрации напряжений. Значения их должны приниматься на основании следующих указаний:

а) Основание состоит из чередующихся тонких пластов различных грунтов или из мощного пласта глины:

$$n = 3; \quad n_1 = 2.$$



(По горизонтали нанесены значения  $\sigma$  в долях  $q$ )

Фиг. 7

б) Пласт глины подстилается на небольшой глубине (меньшей двух ширины фундамента) скалой:

$$n = 4; \quad n_1 = 2,36.$$

в) Грунт основания — песок:

$$n = 6; \quad n_1 = 2,95.$$

При вышеуказанных значениях  $n$  по формуле (25) по вертикальной оси основания напряжения будут:

$$\left. \begin{aligned} n = 3; \quad \sigma &= 0,48 \frac{P}{z^2} \\ n = 4; \quad \sigma &= 0,64 \frac{P}{z^2} \\ n = 6; \quad \sigma &= 0,96 \frac{P}{z^2} \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

В случае равномерно распределённой ленточной нагрузки сжимающие напряжения в грунте по вертикальной оси нагрузки, т. е. при  $\beta_1 = \beta_2 = \beta$ , будут равны на основании (26):

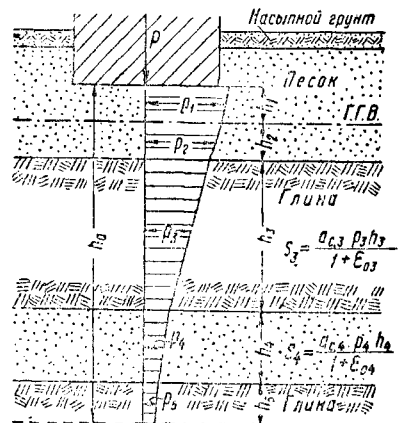
$$\left. \begin{aligned} n_1 = 2; \quad \sigma &= 0,64 q \left( \beta + \frac{\sin 2\beta}{2} \right) \\ n_1 = 2,36; \quad \sigma &= 1,50 q \left( \sin \beta - \frac{\sin^3 \beta}{3} \right) \\ n_1 = 2,95; \quad \sigma &= 1,88 q \left( \sin \beta - \frac{2 \sin^3 \beta}{3} + \frac{\sin^5 \beta}{5} \right) \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

Если нагрузка расположена по некоторой ограниченной площади, распределение напряжений в грунте находят следующим образом: площадь нагрузки разбивается на ряд мелких площадок, ширина которых вдвое меньше расстояния от центра площадки до точки, в которой ищут напряжение. Нагрузка на каждой площадке рассматривается как сосредоточенная сила; по формуле (25) находят от всех таких сил значения напряжений в данной точке. Сумма последних и будет представлять собой искомое напряжение от действия всей нагрузки.

Для ускорения расчётов в этом случае удобно пользоваться номограммой (фиг. 6).

На фиг. 7 приведён график напряжений  $\sigma$  по вертикальной оси основания для различ-

ных значений  $n$  и при различных соотношениях сторон прямоугольного фундамента. Графики сразу дают напряжение  $\sigma$  при интен-



Фиг. 8

сивности нагрузки  $q = 1$ . Для перехода к заданной интенсивности  $q$  значение  $\sigma$ , найденное по графику, умножается на последнюю.

3. Зная среднее напряжение  $p = \sigma$  от нагрузки в пределах каждого пласта (см. предыдущий пункт), для напряжения  $p_1 = p_0 + p$  по компрессионной кривой находят значение  $\epsilon_1$  и определяют значение  $a_c$  по формуле (16).

## 4. Вычисляется осадка по формуле

$$s = \sum \frac{a_c p h}{1 + \varepsilon_0}, \quad (29)$$

как сумма обжатий всех  $i$  пластов, входящих в активный слой (фиг. 8).

## Расчёт течения осадок глинистых пластов во времени

Ниже приводится приближённый метод расчёта времени осадки, происходящей благодаря линейной консолидации (уплотнению) пласта грунтовой массы.

Расчёт осадок в случае плоской и пространственной задач, а также с учётом переменности коэффициента фильтрации разработан и изложен в книге проф. В. А. Флорина «Теория уплотнения земляных масс».

Расчёт скорости осадок при пластическом течении глины в настоящее время ещё не разработан.

Осадку за время  $t$  [см. формулу (18)]

$$s_t = U s, \quad (30)$$

где  $s$  — полная осадка.

Степень консолидации  $U$  меняется в пределах от 0 до 1 и является функцией времени  $t$ .

Определение времени осадки производится с помощью табл. 2 и 3 в зависимости от характера распределения напряжений от нагрузки по глубине обжимаемого пласта грунта.

В этих таблицах для ряда значений  $U$  даны величины коэффициентов  $T_v$ , входящих в формулу

$$t = T_v \frac{h^2}{c_v}, \quad (31)$$

где  $t$  — время осадки в сек;

$T_v$  — табличный коэффициент (фактор времени);

$h$  — мощность обжимаемого пласта в см;

$c_v$  — коэффициент консолидации, зависящий от свойств грунта.

Коэффициент консолидации грунта

$$c_v = \frac{k(1 + \varepsilon_0)}{\gamma_w a_c} \text{ в см}^2/\text{сек}, \quad (32)$$

где  $k$  — коэффициент фильтрации грунта;

$\gamma_w$  — объёмный вес воды в кг/см<sup>3</sup>.

Таблица 2

Значения коэффициентов  $T_v$  для случая прямоугольной эпюры (фиг. 9)

$T_v$	$U_1$	$T_v$	$U_1$	$T_v$	$U_1$
0,004	0,0795	0,083	0,3233	0,40	0,6973
0,008	0,1033	0,100	0,3562	0,50	0,7640
0,012	0,1243	0,125	0,3989	0,60	0,8156
0,020	0,1593	0,150	0,4370	0,70	0,8569
0,028	0,1889	0,167	0,4610	0,80	0,8874
0,036	0,2141	0,175	0,4718	0,90	0,9119
0,048	0,2464	0,200	0,5041	1,00	0,9313
0,060	0,2764	0,250	0,5622	2,00	0,9942
0,072	0,3028	0,300	0,6132	$\infty$	1,0000
		0,350	0,6582		

Таблица 3

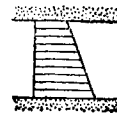
Значения коэффициентов  $T_v$  для случая треугольной эпюры с основанием у водонепроницаемого слоя (фиг. 12)

$T_v$	$U_1$	$T_v$	$U_1$	$T_v$	$U_1$
0,004	0,0085	0,083	0,1646	0,35	0,5649
0,008	0,0162	0,100	0,1976	0,40	0,6154
0,012	0,0241	0,125	0,2442	0,50	0,6994
0,020	0,0400	0,150	0,2886	0,60	0,7652
0,028	0,0560	0,167	0,3174	0,70	0,8165
0,036	0,0720	0,175	0,3306	0,80	0,8566
0,048	0,0950	0,200	0,3704	0,90	0,8880
0,060	0,1193	0,250	0,4432	1,00	0,9125
0,072	0,1436	0,300	0,5078		1,0000

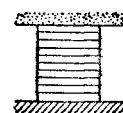
Расчёт по таблицам ведётся следующим образом. Задаваясь рядом значений  $T_v$ , находят соответствующие значения  $U$  и по формулам (31) и (30) вычисляют время и соответствующую осадку.



Фиг. 9



Фиг. 10



Фиг. 11

Если нужно определить осадку за определённое время  $t$ , то по формуле (31) вычисляется значение  $T_v$  и по таблицам определяется  $U$  для ближайшего значения  $T_v$ .

При расчёте течения осадки во времени могут встретиться следующие расчётные схемы:

1. Глинистый пласт находится между водопроницаемыми пластами. Эпюра напряжений от нагрузки по глубине — прямоугольник (фиг. 9).

Определение  $t$  ведётся с помощью табл. 2, из которой для ряда значений  $T_v$  берутся значения  $U_1$ .

В формулу (31) вместо  $h$  подставляется  $\frac{h}{2}$  — половина толщины глинистого пласта

(так как благодаря возможности водоотдачи через верхнюю и нижнюю поверхности пласта консолидация обеих его половин идёт одновременно).

2. Глинистый пласт находится между водопроницаемыми пластами. Эпюра напряжений — треугольная либо трапециевидная (фиг. 10).

Расчёт времени осадки ведётся по табл. 2 и тем же способом, что и для случая прямоугольной эпюры. Следовательно, при одинаковых свойствах и мощности грунтов основания в случае прямолинейной эпюры напряжений время осадок совершенно одинаково и не зависит от формы этой эпюры.

3. Глинистый пласт находится между водопроницаемым и водонепроницаемым пластами. Эпюра напряжений — прямоугольник (фиг. 11).

Расчёт ведётся, как в случае 1, но в формулу (31) подставляется полная мощность пласта  $h$ .

4. Глинистый пласт находится между водопроницаемыми и водонепроницаемыми



Характеристика грунта	Жёсткость фундамента	Круг	Квад- рат	Прямоугольник с отношением сторон															
				1,5	2	3	4	5	6	7	8	9	10	20	30	40	50	100	
$\mu = 0,20$ (песчаные грунты)	0 средняя $\infty$	1,07 0,90 0,84	1,20 1,01 0,84	1,45 1,23 0,95	1,62 1,39 1,05	1,90 1,63 1,21	2,09 1,81 1,35	2,24 1,95 1,45	2,38 2,09 1,55	2,49 2,18 1,65	2,56 2,26 1,70	2,65 2,34 1,75	2,70 2,40 1,80	3,15 2,82 2,10	3,45 3,08 2,25	3,66 3,28 2,40	3,78 3,44 2,55	4,27 3,94 2,85	
$\mu = 0,366$ (глинистые грунты)	0 средняя $\infty$	1,50 1,27 1,19	1,68 1,43 1,19	2,04 1,73 1,45	2,28 1,95 1,65	2,67 2,30 1,95	2,94 2,55 2,15	3,15 2,75 2,35	3,34 2,94 2,50	3,50 3,06 2,65	3,63 3,18 2,75	3,74 3,29 2,85	3,80 3,38 2,95	4,43 3,96 3,50	4,85 4,32 3,85	5,13 4,61 4,10	5,31 4,83 4,30	6,00 5,54 5,00	

мощности пласта, а время осадки — квадрату этой мощности, соответственно перестраивается график осадок.

Этим приближённым приёмом можно пользоваться в случае достаточной однородности грунта на всю толщу активного слоя как штампа, так и сооружения.

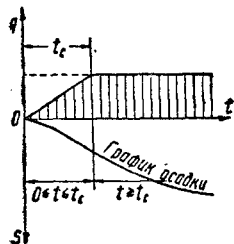
Вышеприведённые методы расчёта хода осадок во времени относятся к случаям, когда нагрузка на основание прикладывается сразу полной своей величиной. В большинстве случаев сооружения возводятся в такие промежутки времени, что принятие подобного допущения мало изменяет конечные результаты. Если же возникает необходимость учёта строительного периода, то поступают следующим образом (фиг. 15).

Принимают, что за время строительства  $t_c$  нагрузка возрастает по линейному закону от 0 до своего конечного значения. Тогда степень консолидации  $U$ , соответствующая некоторому времени  $t$ , определяется из соотношений:

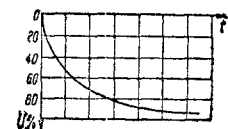
$$\left. \begin{aligned} 0 < t < t_c; U &= \frac{t}{t_c} U\left(\frac{1}{2}t\right) \\ t > t_c; U &= U\left(t - \frac{1}{2}t_c\right) \end{aligned} \right\}, \quad (41)$$

т. е., если время  $t$  меньше времени  $t_c$ , при котором нагрузка достигает своей полной величины, то степень консолидации при линейном возрастании нагрузки равна степени консолидации  $U_{\frac{1}{2}t}$  при внезапном приложении нагрузки, соответствующей времени  $\frac{1}{2}t$  и умноженной на отношение  $\frac{t}{t_c}$ .

Если же  $t > t_c$ , т. е. когда нагрузка приложена полностью, степень консолидации равна степени консолидации  $U(t - \frac{1}{2}t_c)$  при



Фиг. 15



Фиг. 16

Пользуясь соответствующими таблицами для различных случаев нагрузки, легко учесть с достаточной для практики точностью и влияние постепенного роста нагрузки.

Расчёт хода осадки сооружения во времени может быть приближённо произведён с помощью кривых консолидации для глинистых пластов, входящих в активный слой.

Кривые консолидации представляют собой график хода уплотнения образца грунта на компрессионном приборе при различных степенях нагрузки. По оси абсцисс откладывается время в минутах, а по оси ординат — обжатие образца в процентях к полному обжатию от данной нагрузки на образец

(фиг. 16). Таким образом, кривую консолидации можно с достаточным приближением рассматривать, как график осадки слоя толщиной, равной толщине образца, заключённого между двумя водопроницаемыми пластинами и загруженного безгранично распространённой равномерной нагрузкой.

По теории консолидации время уплотнения двух пластов одинакового грунта (при условии одинаковой загрузки) прямо пропорционально квадратам их толщин. График осадки сооружения легко получить, соответственно изменяя масштаб времени кривой консолидации. При этом, если в действительности пласт ограничен водопроницаемой поверхностью только с одной стороны, то для сравнения с кривой консолидации следует принимать удвоенную мощность пласта, но ограниченного водопроницаемыми слоями с обеих сторон.

В случае, если велись наблюдения за осадкой сооружения в течение некоторого времени, можно удовлетворительно предсказать ход дальнейшей осадки, пользуясь формулой проф. Г. И. Покровского:

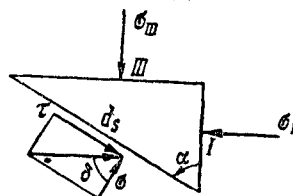
$$s_t = s_1 \cdot \frac{\ln\left(\frac{t_2 - 2t_1}{t_1} t' + 1\right)}{\ln\left(\frac{t_2}{t_1} - 1\right)}, \quad (42)$$

где  $t'$  — время, соответствующее осадке  $s_t$ ;  
 $t_1$  — время, за которое произошла некоторая осадка  $s_1$ ;  
 $t_2$  — время, которому соответствует вдвое большая осадка  $s_2 = 2s_1$ .

## ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ УСТОЙЧИВОСТИ ГРУНТОВ

### Пластическое равновесие

В механике грунтов приходится иметь дело главным образом с плоским деформированным состоянием. Для вывода формул



Фиг. 17

выделяют в некоторой точке грунтового массива призму, по двум граням которой действуют главные напряжения  $\sigma_I$  и  $\sigma_{III}$  (фиг. 17). Третья грань наклонена под углом  $\alpha$  к главной площадке  $I-I$ . Угол  $\alpha$  отсчитывается против часовой стрелки. Напряжения  $\sigma_I$  и  $\sigma_{III}$  принимаются положительными в случае сжатия. Между напряжениями, действующими на грани выделенной призмы, существуют следующие соотношения, вытекающие из равновесия призмы:

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{1}{2} (\sigma_I + \sigma_{III}) + \\ &+ \frac{1}{2} (\sigma_I - \sigma_{III}) \cos 2\alpha; \end{aligned} \quad (43)$$

$$\tau = \frac{1}{2} (\sigma_I - \sigma_{III}) \sin 2\alpha. \quad (44)$$

При  $\alpha < 90^\circ$  значение  $\tau$  положительно и положителен угол  $\delta$  между результирующим напряжением по площадке  $ds$  и нормалью. Угол  $\delta$  называется углом отклонения.

По площадке  $ds$  произойдет сдвиг, если напряжение  $\tau$  удовлетворяет условиям:

$$\tau = c - \sigma \operatorname{tg} \varphi \text{ (связный грунт);} \quad (45)$$

$$\tau = \sigma \operatorname{tg} \varphi \text{ (сыпучий грунт).} \quad (46)$$

Использование в расчетах уравнения (45) или (46) требует одновременно введения следующих предположений:

1) уравнение (45) или (46) действительно при любом значении третьего главного напряжения  $\sigma_{II}$ . Это предположение удовлетворительно согласуется с экспериментами;  
2) величины  $\varphi$  и  $c$  сохраняют одно и то же значение при любой ориентировке площадки сдвига. Это предположение согласуется с экспериментальными данными в случае сыпучих грунтов. В случае связных грунтов это допущение хотя и не оправдывается экспериментально, но сохраняется ради упрощения расчетов.

Ради упрощения дальнейших выводов удобно ввести подстановку:

$$c = p_k \operatorname{tg} \varphi; \quad (47)$$

тогда

$$\tau = (p_k + \sigma) \operatorname{tg} \varphi, \quad (48)$$

т. е. связный грунт рассматривается как сыпучий, с той только разницей, что он предполагается испытывающим дополнительное всестороннее равномерное сжатие с интенсивностью  $p_k$ , которое носит название эквивалентного гидростатического давления.

Уравнения (43) и (44) для связного грунта примут вид:

$$\sigma + p_k = \frac{1}{2} (\sigma_I + \sigma_{III} + 2p_k) + \frac{1}{2} (\sigma_I - \sigma_{III}) \cos 2\alpha; \quad (49)$$

$$\tau = \frac{1}{2} (\sigma_I - \sigma_{III}) \sin 2\alpha. \quad (50)$$

Очевидно, что в сыпучем грунте сдвиг по площадке  $ds$  произойдет в том случае, если  $\operatorname{tg} \delta = \frac{\tau}{\sigma} = \operatorname{tg} \varphi$ .

Условием сдвига в связном грунте будет также  $\operatorname{tg} \delta = \frac{\tau}{\sigma + p_k}$ .

На основании формул (49) и (50)

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \delta &= \frac{\tau}{\sigma + p_k} = \frac{(\sigma_I - \sigma_{III}) \sin 2\alpha}{\sigma_I + \sigma_{III} + 2p_k + (\sigma_I - \sigma_{III}) \cos 2\alpha} = \\ &= \frac{(\sigma_I - \sigma_{III}) \operatorname{tg} \alpha}{\sigma_I + p_k + (\sigma_{III} + p_k) \operatorname{tg}^2 \alpha}, \end{aligned} \quad (51)$$

т. е. угол отклонения зависит от ориентировки площадки  $ds$  относительно главной площадки.

Из (51) находят значение  $\operatorname{tg} \alpha$ , при котором  $\operatorname{tg} \delta$  принимает максимальное значение. Приравняв производную от  $\operatorname{tg} \delta$  по  $\operatorname{tg} \alpha$  нулю, находят значение  $\operatorname{tg} \alpha$ , при котором  $\operatorname{tg} \delta$  имеет максимум:

$$\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{\frac{\sigma_I + p_k}{\sigma_{III} + p_k}}. \quad (52)$$

Из уравнений (51) и (52) получают зависимость между  $\alpha$  и  $\delta$  при наибольшем значении последнего:

$$\operatorname{tg} \delta_{\text{наиб}} = \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha - 1}{2 \operatorname{tg} \alpha} = -\frac{1}{\operatorname{tg} 2\alpha}, \quad (53)$$

откуда

$$\alpha = 45 + \frac{\delta_{\text{наиб}}}{2}. \quad (54)$$

Если угол наибольшего отклонения равен углу внутреннего трения, т. е.

$$\sigma_{\text{наиб}} = \varphi,$$

$$\alpha = 45 + \frac{\varphi}{2},$$

то из формулы (52)

$$\frac{\sigma_I + p_k}{\sigma_{III} + p_k} = \operatorname{tg}^2 \left( 45 + \frac{\varphi}{2} \right). \quad (55)$$

При  $p_k = 0$

$$\frac{\sigma_I}{\sigma_{III}} = \operatorname{tg}^2 \left( 45 + \frac{\varphi}{2} \right). \quad (56)$$

Уравнение (55) называется условием пластического равновесия.

Величина  $\operatorname{tg}^2 \left( 45 + \frac{\varphi}{2} \right)$  играет важную роль в теории устойчивости грунтов.

Условие пластического равновесия иногда представляют в виде

$$\frac{\sigma_I - \sigma_{III}}{\sigma_I + \sigma_{III} + 2p_k} = \sin \varphi \quad (57)$$

или в виде

$$\frac{\sigma - \sigma_{III}}{2} = \left( p_k + \frac{\sigma_I + \sigma_{III}}{2} \right) \sin \varphi. \quad (58)$$

Если выразить главные напряжения в данной точке через напряжения  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  и  $\tau_{xy}$ , то условие пластического равновесия примет вид:

$$\frac{\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}}{\sigma_x + \sigma_y + 2p_k} = \sin \varphi. \quad (59)$$

Из условия (55) следует:

$$\begin{aligned} \sigma_I &= \sigma_{III} \operatorname{tg}^2 \left( 45 + \frac{\varphi}{2} \right) + \\ &+ p_k \left[ \operatorname{tg}^2 \left( 45 + \frac{\varphi}{2} \right) - 1 \right]. \end{aligned} \quad (60)$$

Для сыпучего грунта ( $p_k = 0$ )

$$\sigma_I = \sigma_{III} \operatorname{tg}^2 \left( 45 + \frac{\varphi}{2} \right). \quad (61)$$

Условие пластического равновесия можно сформулировать следующим образом: если грунт находится в состоянии пластического равновесия, отношение между наибольшим и наименьшим эффективными главными напря-

жениями (включая эквивалентное гидростатическое давление) в любой точке равно

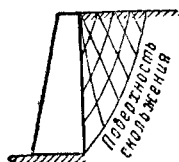
$$\operatorname{tg}^2 \left( 45 + \frac{\varphi}{2} \right).$$

Зависимость сцепления  $c$  в связных грунтах от положения площадки сдвига практически не влияет на условие пластического равновесия. Зато она может приводить к существенному различию между расчётной и фактической ориентировкой площадки сдвига. Ошибка особенно возрастает при подстановке в уравнения полных напряжений вместо эффективных.

В большинстве случаев расчёты по теории пластического равновесия приводят к громоздким и длительным вычислениям. В то же время действительные геологические и гидрогеологические условия и свойства грунтов не позволяют получить при таких расчётах достаточно близкие к истинным поверхности скольжения и определить коэффициент устойчивости. Поэтому практически обычно пользуются упрощёнными методами расчёта.

#### Упрощённые методы расчёта устойчивости

Упрощённые методы расчёта устойчивости основаны на предположении, что некоторая часть грунтового массива при нарушении равновесия перемещается относительно



Фиг. 18

остального грунта, как одно целое по поверхности, называемой поверхностью скольжения (фиг. 18). Поверхность скольжения выбирается таким образом, чтобы получить наименее выгодное соотношение между силами, удерживающими и сдвигающими.

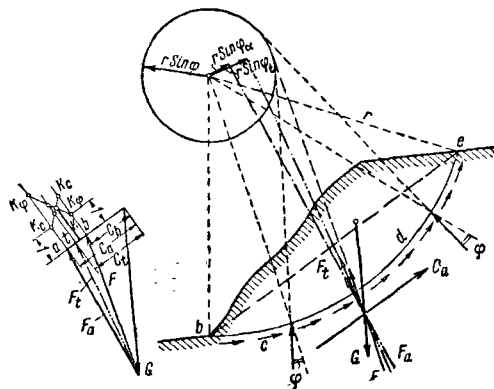
Наиболее простым является предположение о плоских поверхностях скольжения.

Это предположение при расчёте подпорных стен соответствует и решению теории пластического равновесия при некоторых условиях.

При расчёте устойчивости откосов и оснований сооружений обычно принимают круглоцилиндрическую поверхность скольжения. Существуют также методы расчёта устойчивости грунтов, предполагающие очертание линий скольжения по логарифмической спирали и др.

Задавшем очертанием поверхности скольжений, находят далее также положение этой поверхности в грунте для рассматриваемой задачи, при котором коэффициент устойчивости имеет минимум (критическая или опасная поверхность скольжения). Существует ряд графических и аналитических методов, облегчающих нахождение опасной поверхности скольжения. Приводим схему расчёта откоса в случае цилиндрической поверхности скольжения (фиг. 19). Вдоль вероятной круглоцилиндрической поверхности скольжения  $bde$  действуют сцепление с интенсивностью  $c$  и реактивные усилия, направленные под некоторым углом к нор-

малям. В случае предельного равновесия этот угол равен  $\varphi$  и все эти усилия касательны к окружности, описанной вокруг центра кривой скольжения  $O$  радиусом  $r \cdot \sin \varphi$ . Предполагается, что и их равнодействующая  $F$  касательна к той же окружности (называемой кругом трения). Равнодействующая сил сцепления  $C_a$  дей-



Фиг. 19

ствует параллельно хорде кривой скольжения. Если обозначить длину кривой скольжения  $L$ , а длину её хорды  $L'$ , то плечо  $a$  силы  $C_a$  будет найдено из условия:

$$cL'a = cLr;$$

$$a = \frac{L}{L'} r. \quad (62)$$

Проводя через точку пересечения сил  $G$  и  $C_a$  прямую, касательную к окружности, описанной вокруг центра  $O$ , находят положение и направление силы  $F$ . Построив треугольник сил, определяют величину равнодействующей сцепления  $C_b$ , необходимой для равновесия.

Для определения коэффициента устойчивости можно рекомендовать следующий приём. Проводят в треугольнике сил замыкающую к концу вектора  $C_a$  и таким образом получают величину и направление силы  $F_a$  в случае полного использования равновесия силы  $C_a$ .

Из точек  $a$  и  $b$  восставляют к вектору  $C_a$  перпендикуляры, на которых откладывают в произвольном масштабе коэффициенты  $k_c$  и  $k_\varphi$ , представляющие собою отношения:

$$k_c = \frac{C_a}{C_i}; \quad k_\varphi = \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\operatorname{tg} \varphi_i},$$

где  $C_i$  и  $\operatorname{tg} \varphi_i$  — сила сцепления и коэффициент трения, требующиеся для замыкания треугольника сил в любой точке  $i$ .

Таким образом, в точке  $a$ :

$$k_c = \frac{C_a}{C_a} = 1; \quad k_\varphi = \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\operatorname{tg} \varphi_a},$$

где  $\operatorname{tg} \varphi_a$  определяется следующим образом: на чертеже откоса через точку пересечения  $G$  и  $C$  проводится прямая, параллельная направлению  $F_a$ . Из центра  $O$  опускается перпендикуляр на эту прямую и измеряется его величина. Принимая его равным  $r \cdot \sin \varphi_a$ , находят отсюда значение  $\varphi_a$  и, далее,  $\operatorname{tg} \varphi_a$ .

В точке  $b$  откладывают:

$$k_c = \frac{C_a}{C_\theta}; \quad k_\varphi = \frac{\operatorname{tg} \varphi_\theta}{\operatorname{tg} \varphi_a} = 1.$$

Кроме того, выбирают на векторе  $C_a$  промежуточную точку  $t$  и, принимая её за начало вектора  $C_t$ , проводят к ней замыкающую  $F_t$  и по предыдущему, проводя на чертеже откос направление силы  $F_t$ , находят значение  $\operatorname{tg} \varphi_t$ . Затем на перпендикуляре к  $C_a$  в точке  $t$  откладывают значения

$$k_c = \frac{C_a}{C_t} \text{ и } k_\varphi = \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\operatorname{tg} \varphi_t}.$$

Через полученные точки  $k_c$  и  $k_\varphi$  проводят плавные кривые. Ордината точки их пересечения даёт истинное значение коэффициента устойчивости.

Если прямая, проведённая на чертеже откоса параллельно направлению  $F_a$ , пройдёт через центр  $O$  или левее его, так что  $\operatorname{tg} \varphi$  будет иметь значение, равное нулю или отрицательное, то для построения кривой  $k_\varphi$  следует выбрать две-три промежуточные точки на векторе  $C_a$  и определить для них  $\operatorname{tg} \varphi_t$  подобно тому, как это было сделано для точки  $t$ .

Построение повторяется для нескольких кривых скольжения. Опасной кривой скольжения будет та, для которой  $k$  наименьшее. Расчёт устойчивости оснований в предложении кругло-цилиндрической поверхности скольжения производится по аналогичному методу.

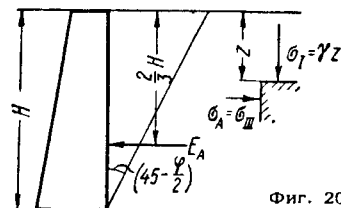
#### Активное и пассивное давления грунта

Если провести мысленно вертикальную плоскость в массиве грунта, ограниченном горизонтальной поверхностью, то боковое давление на эту плоскость не будет зависеть от сцепления и внутреннего трения в грунте, а будет определяться исключительно его упругими свойствами. Это давление носит название «боковое давление в состоянии покоя». Такое давление оказывает грунт на вертикальную жёсткую, абсолютно неподвижную подпорную стенку. В случае, если грунт находится при этом под действием собственного веса или равномерно распределённой нагрузки, отношение наименьшего к наибольшему главному напряжению ( $\sigma_{III} : \sigma_I$ ) может быть названо коэффициентом упругого давления. В литературе это отношение часто называют коэффициентом бокового давления в состоянии покоя и обозначают  $\xi_0$ .

Если под влиянием давления земли подпорная стенка может смещаться, то давление на неё падает, пока не доходит до определённого предела, при котором перестает зависеть от упругих свойств грунта. Последний переходит в пластическое состояние и в нём образуются поверхности скольжения, после чего боковое давление на вертикальную, абсолютно гладкую стенку полностью определяется сопротивлением грунта сдвигу. Это будет активное давление грунта. Оно является минимальным пределом бокового давления, при котором нормальные напряжения по вертикальной поверхности являются наименьшими главными

напряжениями  $\sigma_{III}$ . Соответственно коэффициент активного давления [см. формулу (56)]

$$\xi_A = \frac{\sigma_{III}}{\sigma_I} = \operatorname{tg}^2 \left( 45 - \frac{\varphi}{2} \right). \quad (64)$$



Фиг. 20

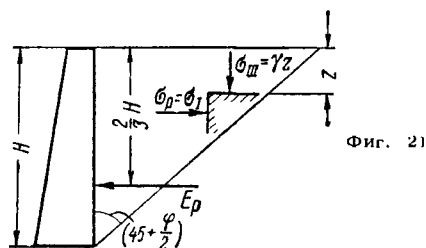
Если стенка под влиянием внешних сил смещается в сторону грунта, сжимая его до пластического состояния и образования поверхностей скольжения, давление на стенку постепенно возрастает, пока не доходит до определённого предела, называемого пассивным давлением. Оно является максимальным пределом бокового давления земли и соответствует случаю, когда нормальные напряжения, действующие на вертикальную гладкую стенку, будут наибольшими главными напряжениями  $\sigma_I$ .

Коэффициент пассивного давления:

$$\xi_P = \frac{\sigma_I}{\sigma_{III}} = \operatorname{tg}^2 \left( 45 + \frac{\varphi}{2} \right). \quad (65)$$

В случае вертикальной гладкой стенки и активного давления сыпучего грунта с объёмным весом  $\gamma$  (фиг. 20) нормальные напряжения, действующие на стенку от собственного веса грунта, будут равны (на глубине  $z$ )

$$\sigma_A = \gamma z \operatorname{tg}^2 \left( 45 - \frac{\varphi}{2} \right) = \gamma z \xi_A. \quad (66)$$



Фиг. 21

Полное активное давление на плоскую стенку высотой  $H$  и шириной, равной единице, будет

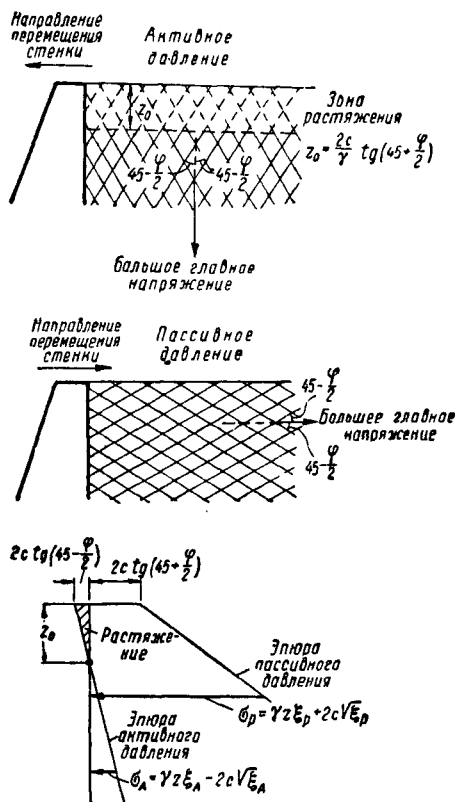
$$E_A = \int_0^H \sigma_A dz = \frac{1}{2} \gamma H^2 \xi_A. \quad (67)$$

Аналогично для случая пассивного давления на стенку (фиг. 21):

$$\sigma_P = \gamma z \operatorname{tg}^2 \left( 45 + \frac{\varphi}{2} \right) = \gamma z \xi_P; \quad (68)$$

$$E_P = \int_0^H \sigma_P dz = \frac{1}{2} \gamma H^2 \xi_P. \quad (69)$$

В рассмотренных случаях эпюры давления на подпорную стенку имеют вид треугольников; равнодействующие давления  $E$  приложены на глубине  $\frac{2}{3} H$ .



Фиг. 22

В случае связного грунта, после несложных преобразований формул (47) и (55):

$$\sigma_A = \gamma z \xi_A - 2c \sqrt{\xi_A}; \quad (70)$$

$$E_A = \frac{1}{2} \gamma H^2 \xi_A - 2cH \sqrt{\xi_A}; \quad (71)$$

$$\sigma_P = \gamma z \xi_P + 2c \sqrt{\xi_P}; \quad (72)$$

$$E_P = \frac{1}{2} \gamma H^2 \xi_P + 2cH \sqrt{\xi_P}. \quad (73)$$

Эпюра давления на подпорную стенку в случае связного грунта приведена на фиг. 22.

Если поверхность грунта несёт равномерно распределённую нагрузку интенсивностью  $q$ , то напряжения на подпорную стенку возрастают на величину  $q \xi_A$  в случае активного давления и на  $q \xi_P$  — в случае пассивного давления. Соответственно:

$$E_A = \left( \frac{1}{2} \gamma H^2 + qH \right) \xi_A - 2cH \sqrt{\xi_A}; \quad (74)$$

$$E_P = \frac{1}{2} \left( \gamma H^2 + qH \right) \xi_P + 2cH \sqrt{\xi_P}. \quad (75)$$

#### Давление грунта на подпорные стенки

При учёте трения между грунтом и подпорной стенкой, а также при ломаном очер-

тании подпорной стенки или поверхности грунта, поверхности скольжения будут криволинейными. Расчёт давления грунта в этих случаях по теории пластического равновесия чрезвычайно сложен, и практически обычно поверхности скольжения принимают плоскими.

Формулы, полученные по этому методу для стенок с плоской задней гранью, приведены в табл. 5. В табл. 6 приведены коэффициенты  $\xi_A$  для случаев 5 и 6 по табл. 5. В табл. 6 приведены также значения  $\xi'_A$  для трёх значений угла трения по стенке  $\rho$ . При  $\rho \neq 0$  давление на стенку  $E$  отклоняется от горизонтали на угол  $\rho$ . Соответственно в таблице приведены значения  $\xi_A$  для определения полного давления на стенку по формуле

$$E_A = \frac{\gamma H^2}{2} \xi_A \quad (76)$$

и значения

$$\xi'_A = \xi_A \cdot \cos \rho \quad (77)$$

для определения горизонтального давления  $E'_A$  на стенку:

$$E'_A = \frac{\gamma H^2}{2} \xi'_A. \quad (78)$$

В случае наклонной или ломаной задней грани подпорной стенки также можно пользоваться формулами табл. 5. Для этого через нижнее ребро стенки  $A$  проводят вертикаль  $AB'$  до пересечения с поверхностью грунта и находят давление на плоскость  $AB'$  (фиг. 23). Давление на стенку получают, суммируя геометрически это давление и вес призмы  $ABB'$ .

При расчёте пассивного давления применяются те же формулы, что и для расчёта активного давления с заменой в них знака на обратный перед углом трения  $\varphi$ , т. е. подставляя  $(-\varphi)$  вместо  $\varphi$ .

Для случаев, когда временная нагрузка расположена на некотором участке поверхности грунта (фиг. 24), давление на стенку может быть приближённо определено путём замены нагрузки сплошным эквивалентным слоем земли, высота которого

$$h = \frac{Px}{\gamma bH}, \quad (79)$$

где  $h$  — высота эквивалентного слоя грунта;  $P$  — нагрузка на 1 пог. м полосы загруз-

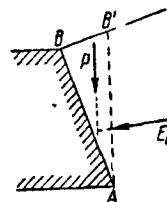
жения;

$b$  — ширина загруженной полосы;

$\gamma$  — объёмный вес грунта;

$H$  — высота стенки;

$x$  — расстояние от ближайшего к стенке края загруженной полосы до вертикали, проходящей на расстоянии  $l$  от нижнего ребра стенки, причём  $l = H - h$ , где  $h$  — глубина, на которой приложена нагрузка.



Фиг. 23

Таблица 5

Формула для расчёта давления грунта на стенки с плоской гранью

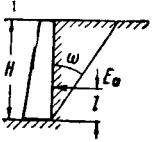
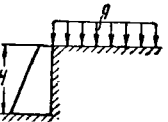
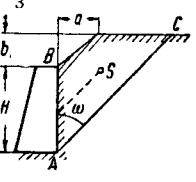
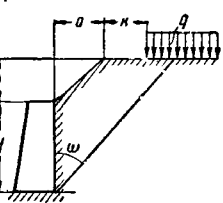
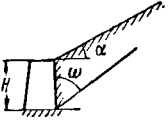
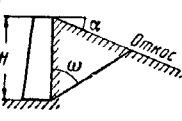
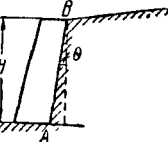
Форма стенки и засыпки	Угол $\omega$ наклона плоскости скольжения	Давление на стенку $E_a$	Плечо $E_a$ относительно подошвы стенки
	$45 - \frac{\varphi}{2}$	$\frac{\gamma H^3}{2} \operatorname{tg}^2 \left( 45 - \frac{\varphi}{2} \right)$	$\frac{H}{3}$
	$45 - \frac{\varphi}{2}$	$\frac{\gamma H}{2} (H + 2h) \times \operatorname{tg}^2 \left( 45 - \frac{\varphi}{2} \right);$ $h = \frac{q}{\gamma}$	$\frac{H}{3} \cdot \frac{H + 3h}{H + 2h}$
	$\operatorname{tg} \omega = -\operatorname{tg} \varphi + \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi} \left( 1 + \frac{ab}{(H+b)^2 \operatorname{tg} \varphi} \right)$	$\frac{\gamma (H+b)^2 \operatorname{tg} \omega - ab \gamma}{2 \operatorname{tg} (\omega + \varphi)}$	Точка приложения $E_a$ находится проектированием центра тяжести призма скольжения на АВ по направлению АС
	$\operatorname{tg} \omega = -\operatorname{tg} \varphi + \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi + \frac{2B}{A \sin 2\varphi}};$ $A = (H+b) \left( \frac{H+b}{2} + h \right);$ $B = \left( ah + \frac{ab}{2} + kh \right); \quad h = \frac{q}{\gamma}$	$\frac{A \operatorname{tg} \omega - B}{\operatorname{tg} (\omega + \varphi)} \gamma$	Как в случае 3
	$\operatorname{tg} \omega = \frac{-\operatorname{tg} \varphi + \sqrt{\sec^2 \varphi - \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{\sin^2 \varphi}}}{1 - \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{\sin 2\varphi}}$	$\frac{\gamma H^3}{2} \cos \alpha \times \frac{\sin \omega}{\cos (\alpha + \omega) \operatorname{tg} (\omega + \varphi)}$	Приблизительно $\frac{H}{3}$
	Как в предыдущем случае, но знак у $\alpha$ меняется на обратный	Как в предыдущем случае, но знак у $\alpha$ меняется на обратный. При $\alpha = \varphi$ $\frac{\gamma H^3}{2} \cdot \frac{\cos \varphi}{(1 + \sqrt{2 \cdot \sin \varphi})^2}$	$\frac{H}{3}$
	Определяется давление $E_a$ на вертикальную стенку высотой H, давление на стенку АВ $E = E_a (1 - \operatorname{tg} \theta \cdot \operatorname{tg} \varphi)$		

Таблица 6

Значения коэффициентов  $\xi_A$  и  $\xi_A^1$ 

Откос	$\alpha$	$\rho$	$\varphi^\circ$	20	25	30	35	40	45	50	20	25	30	35	40	45	50
Восходящий (табл. 5, случай б)	+50°	0	—	—	—	—	—	—	—	0,413	—	—	—	—	—	—	0,413
		$\frac{1}{3} p$	—	—	—	—	—	—	—	0,431	—	—	—	—	—	—	0,413
		$\frac{1}{3} p$	—	—	—	—	—	—	—	0,495	—	—	—	—	—	—	0,413
	+45°	0	—	—	—	—	—	—	—	0,643	—	—	—	—	—	—	0,413
		$\frac{1}{3} p$	—	—	—	—	—	—	—	0,500	—	—	—	—	—	—	0,500
		$\frac{1}{3} p$	—	—	—	—	—	—	—	0,518	—	—	—	—	—	—	0,500
	+40°	0	—	—	—	—	—	—	—	0,359	—	—	—	—	—	—	0,500
		$\frac{1}{3} p$	—	—	—	—	—	—	—	0,577	—	—	—	—	—	—	0,500
		$\frac{1}{3} p$	—	—	—	—	—	—	—	0,707	—	—	—	—	—	—	0,500
	+35°	0	—	—	—	—	—	—	—	0,303	—	—	—	—	—	—	0,586
		$\frac{1}{3} p$	—	—	—	—	—	—	—	0,602	—	—	—	—	—	—	0,287
		$\frac{1}{3} p$	—	—	—	—	—	—	—	0,655	—	—	—	—	—	—	0,586
	+30°	0	—	—	—	—	—	—	—	0,214	—	—	—	—	—	—	0,586
		$\frac{1}{3} p$	—	—	—	—	—	—	—	0,765	—	—	—	—	—	—	0,254
		$\frac{1}{3} p$	—	—	—	—	—	—	—	0,359	—	—	—	—	—	—	0,303
	+25°	0	—	—	—	—	—	—	—	0,206	—	—	—	—	—	—	0,368
		$\frac{1}{3} p$	—	—	—	—	—	—	—	0,686	—	—	—	—	—	—	0,349
		$\frac{1}{3} p$	—	—	—	—	—	—	—	0,731	—	—	—	—	—	—	0,331
	+20°	0	—	—	—	—	—	—	—	0,190	—	—	—	—	—	—	0,672
		$\frac{1}{3} p$	—	—	—	—	—	—	—	0,819	—	—	—	—	—	—	0,311
		$\frac{1}{3} p$	—	—	—	—	—	—	—	0,408	—	—	—	—	—	—	0,294
	+15°	0	—	—	—	—	—	—	—	0,224	—	—	—	—	—	—	0,750
		$\frac{1}{3} p$	—	—	—	—	—	—	—	0,750	—	—	—	—	—	—	0,434
		$\frac{1}{3} p$	—	—	—	—	—	—	—	0,762	—	—	—	—	—	—	0,421
	+10°	0	—	—	—	—	—	—	—	0,165	—	—	—	—	—	—	0,305
		$\frac{1}{3} p$	—	—	—	—	—	—	—	0,798	—	—	—	—	—	—	0,427
		$\frac{1}{3} p$	—	—	—	—	—	—	—	0,310	—	—	—	—	—	—	0,310
Нисходящий (табл. 6, случай б)	± 0°	0	—	—	—	—	—	—	—	0,162	—	—	—	—	—	—	0,821
		$\frac{1}{3} p$	—	—	—	—	—	—	—	1,830	—	—	—	—	—	—	0,486
		$\frac{1}{3} p$	—	—	—	—	—	—	—	0,857	—	—	—	—	—	—	0,486
	-10°	0	—	—	—	—	—	—	—	0,188	—	—	—	—	—	—	0,906
		$\frac{1}{3} p$	—	—	—	—	—	—	—	0,884	—	—	—	—	—	—	0,572
		$\frac{1}{3} p$	—	—	—	—	—	—	—	0,891	—	—	—	—	—	—	0,550
	-15°	0	—	—	—	—	—	—	—	0,154	—	—	—	—	—	—	0,884
		$\frac{1}{3} p$	—	—	—	—	—	—	—	0,884	—	—	—	—	—	—	0,572
		$\frac{1}{3} p$	—	—	—	—	—	—	—	0,891	—	—	—	—	—	—	0,550
	-20°	0	—	—	—	—	—	—	—	0,153	—	—	—	—	—	—	0,908
		$\frac{1}{3} p$	—	—	—	—	—	—	—	0,884	—	—	—	—	—	—	0,546
		$\frac{1}{3} p$	—	—	—	—	—	—	—	0,884	—	—	—	—	—	—	0,546
	-25°	0	—	—	—	—	—	—	—	0,177	—	—	—	—	—	—	0,904
		$\frac{1}{3} p$	—	—	—	—	—	—	—	0,884	—	—	—	—	—	—	0,533
		$\frac{1}{3} p$	—	—	—	—	—	—	—	0,884	—	—	—	—	—	—	0,533
	-30°	0	—	—	—	—	—	—	—	0,147	—	—	—	—	—	—	0,640
		$\frac{1}{3} p$	—	—	—	—	—	—	—	0,640	—	—	—	—	—	—	0,503
		$\frac{1}{3} p$	—	—	—	—	—	—	—	0,640	—	—	—	—	—	—	0,503
	-35°	0	—	—	—	—	—	—	—	0,140	—	—	—	—	—	—	0,618
		$\frac{1}{3} p$	—	—	—	—	—	—	—	0,618	—	—	—	—	—	—	0,479
		$\frac{1}{3} p$	—	—	—	—	—	—	—	0,606	—	—	—	—	—	—	0,468

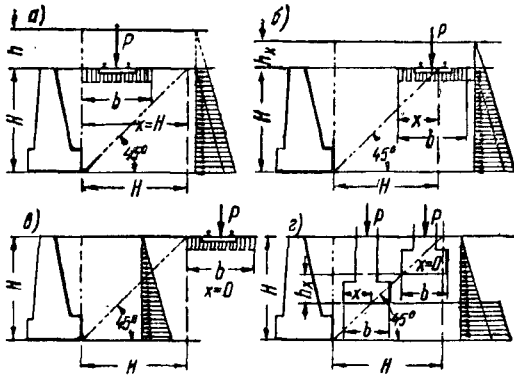
Насыщение грунта водой как в случае крупнозернистых, так и в случае мелкозернистых грунтов изменяет величину давления на стенку, которое равно сумме полного давления воды и бокового давления грунта с объёмным весом  $\gamma_n$  [см. формулу (16)].

Задача определения бокового давления грунта на стенку усложняется при переходе

к связным грунтам, когда приходится отдельно учитывать трение и сцепление. При связных грунтах можно также пользоваться формулами, выведенными для сыпучих. Для этого связный грунт рассматривается как сыпучий, с приведённым коэффициентом внутреннего трения, который определяется, как некоторый эквивалент действительного коэффициента трения и сцепления. В качестве



условия эквивалентности приближённо принято условие равенства давления на вертикальную стенку заданной высоты сыпучего и связного грунтов. Это означает, что если нуж-



Фиг. 24

но определить давление связного грунта на ломаную подпорную стенку высотой  $H$ , то

определяется давление связного грунта на вертикальную стенку той же высоты по формуле

$$E = \frac{1}{2} \gamma H^2 \operatorname{tg}^2 \left( 45 - \frac{\varphi}{2} \right) - 2cH \operatorname{tg} \left( 45 - \frac{\varphi}{2} \right)$$

и приравнивается величине

$$E = \frac{1}{2} \gamma H^2 \operatorname{tg}^2 \left( 45 - \frac{\varphi'}{2} \right),$$

представляющей собой давление на ту же стенку сыпучего грунта с некоторым эквивалентным (по давлению) углом внутреннего трения  $\varphi'$ .

Таким образом

$$\varphi' = \frac{\pi}{2} - 2 \operatorname{arctg} \sqrt{\operatorname{tg} \left( 45 - \frac{\varphi}{2} \right) \left[ \operatorname{tg} \left( 45 - \frac{\varphi}{2} \right) - \frac{4c}{\gamma H} \right]}.$$

Определив эквивалентное значение угла  $\varphi'$ , рассчитывают давление на подпорную стенку, при заданном контуре засыпки, по приведённым выше формулам.

#### ЛИТЕРАТУРА И ИСТОЧНИКИ

1. Герсеванов Н. М. и Польшин Д. Е. Теоретические основы механики грунтов и их практические применения. М., Стройиздат, 1948, 247 с.
2. Гольдштейн М. Н. Деформация земляного полотна и оснований сооружений. М., Транспорт, 1948, 211 с.
3. Прокофьев И. П. Давление сыпучего тела и расчёт подпорных стенок. М. Стройиздат, 1947, 144 с.

4. Соколовский В. В. Статика сыпучей среды. М. — Л. Акад. наук СССР, 1942, 207 с.
5. Сумгин М. И. и Цытович Н. А. Основания механики мерзлых грунтов. Акад. наук СССР, 1937.
6. Флорин В. А. Теория уплотнения земляных масс. Стройиздат, 1948.
7. Флорин В. А. Расчёты оснований гидротехнических сооружений. Стройиздат, 1948.
8. Цытович Н. А. Механика грунтов. М. — Л., Стройиздат, 1940, 388 с.

# ДЕТАЛИ МАШИН



## ВИНТОВЫЕ И БОЛТОВЫЕ СОЕДИНЕНИЯ

### РЕЗЬБЫ

#### Крепёжные резьбы

Метрические резьбы (фиг. 1) — основная и мелкие (ОСТ/НКТП 32, 94, 193, 271, 272, 273, 4120, 4121, 4122). Наиболее распространены основные резьбы для диаметров до 12 мм. Мелкие резьбы с шагом 1,5 мм — для диаметров до 76 мм и с шагом 2,0 мм — для диаметров более 76 мм.

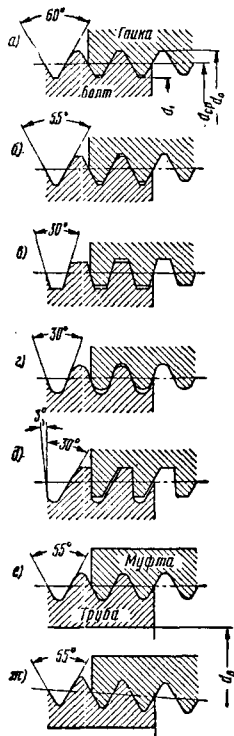
Для крепления шарикоподшипников применяются резьбы с шагом 1,5 мм. В отличие от нормальных резьб наружный диаметр их, начиная от 15 до 75 мм, округляется до цифр, оканчивающихся на 5 и 0 (ОСТ 26002).

Дюймовые резьбы с углом 55° (ОСТ/НКТП 1260). Эти резьбы применяются только при ремонте старых машин и не подлежат использованию при новом проектировании.

#### Ходовые резьбы

Трапециoidalные резьбы (ОСТ 2409, 2410 и 2411) — основной вид ходовых резьб — применяются при значительных усилиях, действующих на резьбу с обеих сторон.

Круглая резьба (ГОСТ 3510-47) применяется в тех случаях, когда невозможно избежать загрязнения винта и требуется лёгкое вращение без значительных



Фиг. 1. Типы существующих резьб: а — метрическая; б — дюймовая; в — трапециoidalная; г — круглая; д — упорная; е — трубная цилиндрическая; ж — трубная коническая

мёртвых ходов.

Упорные резьбы (ОСТ/ВКС 7739, 7740, 7741) применяются при односторонних очень больших усилиях.

#### Трубные резьбы

Трубная цилиндрическая резьба (ОСТ/НКТП 266) широко распространена в трубопроводах невысокого давления; плотность соединения достигается применением пеньки и краски.

Трубная коническая резьба (ОСТ 20008-38) применяется в трубопроводах высокого давления; плотность достигается за счёт натяга по конусу. Хорошие результаты с точки зрения плотности даёт комбинация трубы с конической резьбой и муфты с цилиндрической резьбой.

### БОЛТЫ

Болты распределяются на три основные группы (фиг. 2):

1) чёрные болты (ОСТ 20035-38) с необработанным стержнем и невыверенными опорными плоскостями головки, болта и гайки;

2) получистые болты (ОСТ/НКТП 3524), у которых стержень не обработан; опорные поверхности болта и гайки выверены с точки зрения их неровности и неперпендикулярности к оси резьбы;

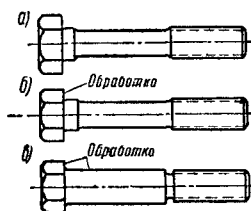
3) чистые болты (ОСТ/НКТП 3522, 3523) — стержень болта и опорные поверхности головки и гайки обработаны.

Основным материалом, применяющимся для болтов, является Ст. 25 (Ст. 3, Ст. 4). Для ответственных болтов, подвергающихся термообработке, применяют Ст. 40 (Ст. 6).

При изготовлении болтов на автоматах применяются автоматные стали с повышенным содержанием серы марок А12, А15 и А20.

#### Усилия в болтовых соединениях

По характеру работы болтовые соединения могут быть разбиты на три группы: а) соединения, воспринимающие усилия, действующие вдоль оси болта; б) соединения,

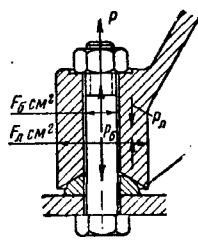


Фиг. 2. Чистый, получистый и чёрный болты

воспринимающие усилия, действующие перпендикулярно к оси болта; в) соединения под действием обеих сил.

Работа и расчёт этих видов соединений различны.

**А. Силы действуют вдоль оси болта.** Удовлетворительно это соединение будет работать в том случае, когда перед нагрузкой болт будет затянут силой, превосходящей внешнюю нагрузку (фиг. 3).



Фиг. 3. Болтовое соединение под растягивающей нагрузкой

Пусть  $P$  — нагрузка на соединение в кг;  
 $P_0$  — предварительная затяжка болта в кг;  
 $F_б$  — поперечное сечение стержня болта в см<sup>2</sup>;  
 $F_а$  — поперечное сечение сболчиваемых деталей, например лапы, в см<sup>2</sup>;  
 $E_б$  — модуль упругости материала болта в кг/см<sup>2</sup>;  
 $E_а$  — модуль упругости материала лапы в кг/см<sup>2</sup>.

Тогда: а) до нагрузки болт растянут силой  $P_0$  (кг), лапа сжата силой  $P_а$  (кг); б) после нагрузки болт растянут силой

$$P_б = P_0 + \frac{E_б F_б}{E_б F_б + E_а F_а} P \text{ (кг)},$$

лапа сжата силой

$$P_а = P_0 - \frac{E_а F_а}{E_б F_б + E_а F_а} P \text{ (кг)}.$$

Напряжение в болте может быть найдено по формуле простого растяжения:

$$\sigma_{рас} = \frac{4P_б}{\pi d_1^2} \leq R_{рас},$$

где  $\sigma_{рас}$  — напряжения в опасном сечении болта на растяжение в кг/см<sup>2</sup>;

$R_{рас}$  — допускаемое напряжение на растяжение на металл болта в кг/см<sup>2</sup>;

$d_1$  — внутренний диаметр резьбы болта в см.

**Б. Силы действуют перпендикулярно оси болта.** Возможны три случая.

1. Усилие, приложенное к соединению, воспринимается трением между сболченными деталями — болт работает на растяжение (фиг. 4, а).

Пусть  $P$  — усилие в соединении в кг;

$P_0$  — затяжка болта в кг;

$f$  — коэффициент трения между сболченными деталями;

$n$  — число соприкасающихся плоскостей.

Тогда

$$P < n/P_0.$$

Напряжение в болте может быть найдено по формуле простого растяжения.

2. Усилие, приложенное к соединению, воспринимается стержнем болта — болт не затянут, вставлен с зазором и работает на изгиб (фиг. 4, б).

Момент, изгибающий болт, может быть приближённо принят равным

$$M = \frac{Pl}{6},$$

где  $M$  — момент, изгибающий болт, в кгсм;

$P_0$  — усилие, приложенное к соединению, в кг;

$l$  — расстояние между серединами соединяемых листов в см.

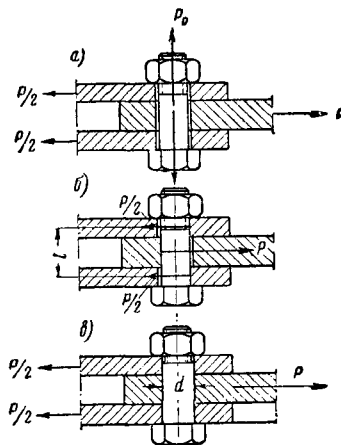
Напряжение в болте

$$\sigma_{изг} = \frac{M}{0,1 d^3} \leq R_{изг},$$

где  $\sigma_{изг}$  — напряжение в болте от изгиба в кг/см<sup>2</sup>;

$R_{изг}$  — допускаемое напряжение на изгиб металла болта в кг/см<sup>2</sup>;

$d$  — диаметр стержня болта в см.



Фиг. 4. Болтовые соединения под срезающей нагрузкой

3. Усилие, приложенное к соединению, воспринимается стержнем болта, вставленным плотно и работающим на срез (фиг. 4, в).

Напряжение в болте

$$\tau_{ср} = \frac{4P}{\pi d^2 n} \leq R_{ср},$$

где  $\tau_{ср}$  — напряжение от среза в стержне болта в кг/см<sup>2</sup>;

$R_{ср}$  — допускаемое напряжение на срез в металле стержня болта в кг/см<sup>2</sup>;

$P$  — усилие, приложенное к соединению, в кг;

$n$  — число срезаемых сечений;

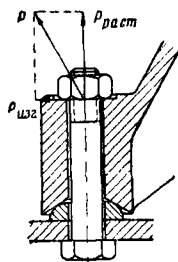
$d$  — диаметр стержня болта в см.

Боковые поверхности болта должны быть проверены на смятие.

**В. Силы действуют наклонно к оси болта.** 1. Общий случай, который имеет место в опорах узлов машин (фиг. 5). Болт в таком соединении бывает сильно затянут; зазоры между болтом и стенками отверстия

имеют место — болт работает на изгиб и растяжение.

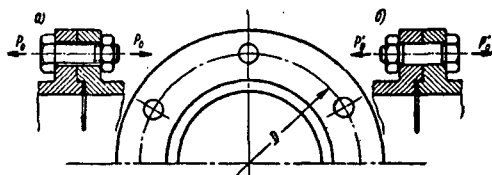
Расчёт такого соединения может быть приведён к случаям А и Б разложением действующей силы на вертикальную и горизонтальную составляющие.



Фиг. 5. Общий случай нагрузки на болтовое соединение

Если имеется группа болтов, то их расчёт должен быть произведён в соответствии с конструктивным оформлением соединения.

2. Фланцевое круглое соединение (фиг. 6, а), нагруженное моментом в плоскости разреза.



Фиг. 6. Фланцевое болтовое соединение

В случае, если это соединение работает только за счёт трения между фланцами (фиг. 6, а), усилие затяжки будет

$$P_0 = \frac{2M}{zfD},$$

где  $P_0$  — усилие затяжки в кг;

$M$  — момент в плоскости разреза в кгсм;

$D$  — диаметр центров отверстий под болты в см;

$z$  — число болтов;

$f$  — коэффициент трения между фланцами.

3. Если болты вставлены плотно и работают на срез (фиг. 6, б), то они могут быть рассчитаны на восприятие всего момента  $M$  плоскостями среза; тогда усилие, воспринимаемое каждым болтом,

$$P_{ср} = \frac{2M}{zD}.$$

Если часть усилия воспринимается трением затянутых болтов, то оно может быть учтено частично или полностью и тогда

$$P_{ср} = \frac{2M}{zD} - P'_0 f,$$

где  $P_{ср}$  — усилие на болте, воспринимаемое срезом болта, в кг;

$P'_0$  — усилие затяжки болта в кг, создающее трение между фланцами.

Далее расчёт ведётся, как указано в пунктах Б, 3.

4. Для прямоугольного стыка, нагруженного моментом в плоскости стыка (фиг. 7), усилие, приходящееся на  $i$ -ый болт,

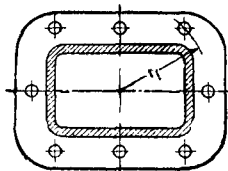
$$P_i = \frac{Mr_i}{(z_1 r_1^2 + z_2 r_2^2 + \dots + z_i r_i^2 + \dots + z_n r_n^2)},$$

где  $P_i$  — усилие, воспринимаемое  $i$ -ым болтом, в кг;

$r_1 \dots r_i \dots r_n$  — расстояние от центра до болтов в см;

$z_1 \dots z_i \dots z_n$  — количество болтов, находящихся на расстояниях  $r_1 \dots r_n$ .

Фиг. 7. Прямоугольный фланец под моментом в плоскости стыка



5. Прямоугольный стык, нагруженный силой и моментом не в плоскости стыка (фиг. 8).

Напряжение от предварительной затяжки болтов

$$\sigma_{зат} = \frac{P_0 z}{F}.$$

Напряжение от усилия, разрывающего болты,

$$\sigma_{раз} = \frac{Q}{F}.$$

Напряжение от изгиба всего стыка моментом

$$M = Ql_Q - Tlt;$$

$$\sigma_{из} = \pm \frac{M}{W},$$

где  $Q$  — составляющая внешней силы  $S$  (см. фиг. 8), перпендикулярная к плоскости стыка, в кг;

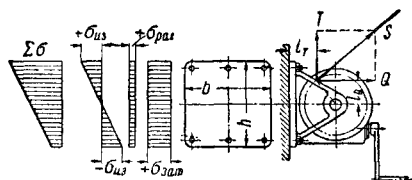
$T$  — то же, параллельная стыку в кг;

$W$  — момент сопротивления стыка в см<sup>3</sup>;

$F$  — площадь сечения всех болтов в см<sup>2</sup>;

$z$  — число болтов;

$P_0$  — усилие предварительной затяжки в каждом болте.



Фиг. 8. Крепление кронштейна

Напряжение в болте будет равно сумме напряжений  $\sigma_{зат}$ ,  $\sigma_{раз}$  и  $\sigma_{из}$ .

Этот расчёт необходимо считать ориентировочным, так как при составлении формул сделан ряд произвольных допущений, как следствие статической неопределённости конструкции. Кроме того, предположено, что усилие  $T$  воспринимается полностью трением стыка, что не всегда имеет место.

Нагрузки, которые выдерживают болты на растяжение и срез при напряжениях 1 000 кг/см<sup>2</sup>, даны в табл. 1.

Таблица 1  
Прочность болтов

Резьба диаметр $\times$ шаг = $d \times s$ в мм	Диаметр		Сечение болта по внутреннему диаметру резьбы в $\text{см}^2$	Прочность болта на разрыв при $\sigma_{\text{рас}} = 1\ 000\ \text{кг/см}^2$ в кг	Сечение точёного стержня болта в $\text{см}^2$	Прочность точёного болта на срез при $\sigma_{\text{ср}} = 1\ 000\ \text{кг/см}^2$ в кг
	стержня под резьбу наибольший в мм	сверла для отверстия под резьбу в мм				
3 $\times$ 0,5	3	2,5	0,043	43	0,0942	94
4 $\times$ 0,7	4	3,25	0,088	83	0,1257	125
5 $\times$ 0,8	5	4,1	0,132	132	0,1964	196
6 $\times$ 1	6	5,0	0,167	167	0,2827	283
8 $\times$ 1,25	8	6,7	0,308	308	0,5027	503
10 $\times$ 1,5	10	8,4	0,492	492	0,7854	785
12 $\times$ 1,75	12	10,1	0,718	718	1,131	1 131
14 $\times$ 2	14	11,9	0,989	989	1,539	1 539
16 $\times$ 2	16	13,9	1,373	1 373	2,011	2 011
18 $\times$ 2,5	18	15,3	1,657	1 657	2,545	2 545
20 $\times$ 2,5	20	17,3	2,145	2 145	3,142	3 142
22 $\times$ 2,5	22	19,3	2,696	2 696	3,801	3 801
24 $\times$ 3	24	20,7	3,089	3 089	4,524	4 524
27 $\times$ 3	27	23,8	4,094	4 094	5,726	5 726
30 $\times$ 3,5	30	26,2	4,963	4 963	7,069	7 069
33 $\times$ 3,5	33	29,2	6,218	6 218	8,553	8 553
36 $\times$ 4	36	31,6	7,279	7 279	10,18	10 180
39 $\times$ 4	39	34,6	8,785	8 785	11,95	11 950
42 $\times$ 4,5	42	37,1	10,04	10 040	13,85	13 850
45 $\times$ 4,5	45	40,1	11,79	11 790	15,90	15 900
12 $\times$ 1,25	12	10,6	0,845	845	1,131	1 131
14 $\times$ 1,5	14	12,3	1,140	1 140	1,539	1 539
16 $\times$ 1,5	16	14,3	1,550	1 550	2,011	2 011
18 $\times$ 1,5	18	16,3	2,022	2 022	2,545	2 545
20 $\times$ 1,5	20	18,3	2,558	2 558	3,142	3 142
22 $\times$ 1,5	22	20,3	3,151	3 157	3,801	3 801
24 $\times$ 1,5	24	22,3	3,818	3 818	4,524	4 524
27 $\times$ 1,5	27	25,3	4,928	4 928	5,726	5 726
30 $\times$ 1,5	30	28,3	6,180	6 180	7,069	7 069
33 $\times$ 1,5	33	31,3	7,572	7 572	8,553	8 553
36 $\times$ 1,5	36	34,3	9,106	9 106	10,18	10 180
39 $\times$ 1,5	39	37,3	10,78	10 781	11,95	11 950
42 $\times$ 1,5	42	40,3	12,60	12 596	13,85	13 850
45 $\times$ 1,5	45	43,3	14,56	14 556	15,90	15 900
48 $\times$ 1,5	48	46,3	16,65	16 655	18,10	18 100
52 $\times$ 1,5	52	50,3	19,67	19 674	21,24	21 240

## Допускаемое напряжение на болты

В табл. 2 даны допускаемые напряжения на болты при спокойной нагрузке, в зависимости от материала болта.

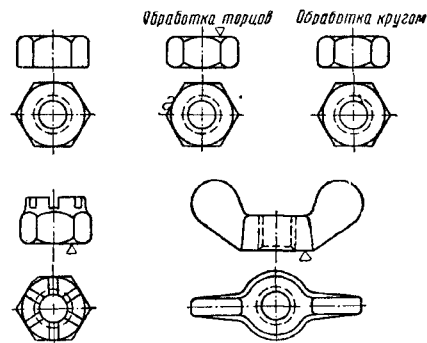
Таблица 2  
Допускаемые напряжения на болты

Материал	Допускаемое напряжение в $\text{кг/см}^2$		
	на растяжение и изгиб	на срез	на смятие
Ст. 25, Ст. 4, А12, А15, А20	600	480	1 000
Ст. 40 сырая	900	700	1 500
Ст. 40 улучшенная, $H_B = 250-300$	1 500	1 200	2 400
Ст. 40 закалённая, $H_B = 350-400$	1 800	1 400	3 000

## Гайки

Гайки, так же как и болты, разделяются (фиг. 9) на чёрные (ОСТ/НКТП 3310),

получистые (ОСТ/НКТП 3311) и чистые (ОСТ/НКТП 3312), которые отличаются видом опорной поверхности и обделкой граней.



Фиг. 9. Типы гаек

Кроме того, имеются специальные виды гаек: гайки корончатые, применяющиеся совместно со шпильками (ГОСТ 397-41), и гайки-барашки (ОСТ 2071, ГОСТ 3032-45) и др.

## ШАЙБЫ

Шайбы круглые чёрные (ОСТ/НКТП 3100) и чистые (ОСТ/НКТП 3233) применяются в тех случаях, когда необходимо увеличить площадь опорной поверхности гайки или головки болта, например при свёртывании деревянных или пластмассовых деталей.

Свёртывание деталей с неровными плоскостями, например, литых или кованных необработанных деталей, недопустимо, так как эксцентричное приложение усилия к болту вызывает значительные напряжения и не гарантирует прочности соединения. Поверхности под опорные плоскости гайки и головки болта должны быть цекованы. Применение простых шайб в этом случае нецелесообразно.

Напротив, применение пружинных шайб по ОСТ 26042, предупреждающих соединение от отвинчивания, должно быть рекомендовано.

## ВИНТЫ

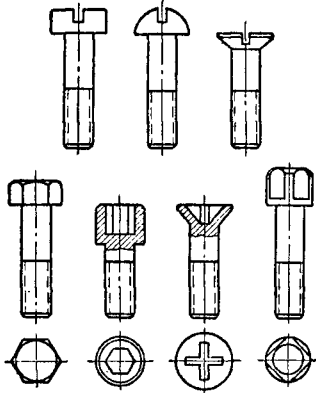
Винты отличаются по форме головки (ГОСТ В-1472-42 до 1492) (фиг. 10) и изготовляются по основной метрической резьбе. Эксплуатационным недостатком винтов является невысокая стойкость резьбы на повторные завинчивания. Последнее особенно относится к чугуно, цветным сплавам и пластмассам.

Применение шпилек (фиг. 11) (ОСТ 20001-38) улучшает условия работы внутренней резьбы в теле детали, но требует точной резьбы, исполненной по тугой посадке.

Тугое завинчивание шпильки за счёт сбега резьбы не гарантирует качества соединения и вывёртывания шпильки вместо свёртывания гайки.

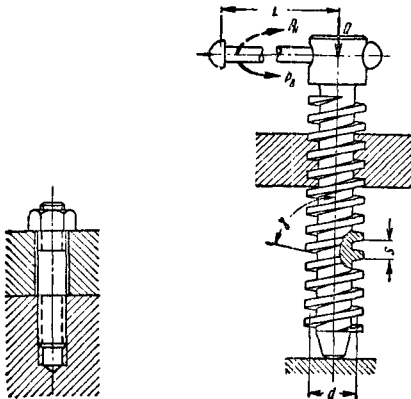
Основным видом резьбы, применяющейся у винтов, передающих движение, является трапецидальная резьба (ОСТ 2409 до 11) (фиг. 1, в), заменившая квадратную, не удовлетворяющую требованиям технологии из-

готовления. Преимущества квадратной резьбы — более высокий коэффициент полезного действия — остались у упорной резьбы (ОСТ/ВКС 7739 до 41), имеющей (фиг. 1,б)



Фиг. 10. Типы винтов

почти плоскую рабочую поверхность и применяющуюся при больших односторонних усилиях.



Фиг. 11

Фиг. 12. Упорный винт

В нижеприведённых формулах приняты следующие обозначения (фиг. 12):

$Q$  — сила, приложенная к гайке вдоль оси винта, в кг;

$P_0$  — сила, приложенная к рукоятке (соединённой с винтом) при движении гайки против направления действия силы  $Q$ , в кг;

$P_H$  — то же, при движении гайки по направлению действия силы  $Q$ , в кг;

$L$  — длина рукоятки в см;

$d$  — средний диаметр резьбы винта в см;

$s$  — ход резьбы винта в см;

$f$  — коэффициент трения в резьбе;

$\eta_0$  — коэффициент полезного действия винта при движении против силы  $Q$ ;

$\eta_H$  — то же, при движении вдоль линии действия силы  $Q$ .

Величина коэффициента трения при работе стали по чугуну или бронзе со смазкой может быть принята равной 0,08—0,10, если трущаяся поверхность перпендикулярна оси винта (квадратная резьба); для трапецо-

идальной резьбы надо учитывать конусность и вводить так называемый приведённый коэффициент трения

$$f_1 = \frac{f}{\sin \gamma},$$

где  $\gamma$  — угол наклона грани резьбы к оси винта (фиг. 13).

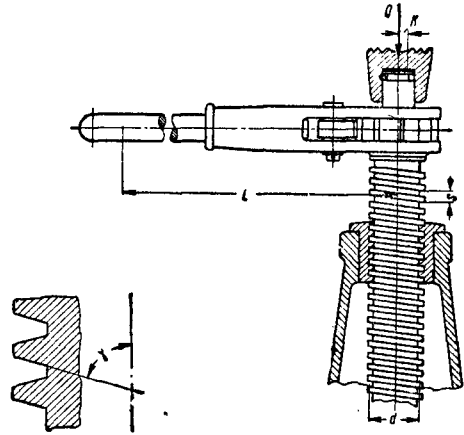
В нижеприведённых формулах коэффициент  $f$  везде может быть заменён коэффициентом  $f_1$ , который для стандартизованных трапециoidalных резьб может быть принят 1,04  $f$ .

Упорный винт (фиг. 12)

$$P_0 = \frac{Qd}{2L} \cdot \left( \frac{s + \pi d f}{\pi d - f s} \right);$$

$$P_H = \frac{Qd}{2L} \cdot \left( \frac{\pi d f - s}{\pi d + f s} \right);$$

$$\eta_0 = \frac{1 - f \frac{s}{\pi d}}{1 + f \frac{\pi d}{s}}; \quad \eta_H = \frac{1 + f \frac{s}{\pi d}}{f \frac{\pi d}{s} - 1}.$$



Фиг. 13

Фиг. 14. Винт домкрата

Если через  $\beta$  обозначить угол подъёма гайки винта, через  $\varphi$  — угол трения в резьбе, то

$$\eta_0 = \frac{\tan \beta}{\tan (\beta + \varphi)}; \quad \eta_H = \frac{\tan \beta}{\tan (\beta - \varphi)}.$$

Самоторможение винта будет при  $\beta < \varphi$ .

Домкратный винт с опорной поверхностью (фиг. 14)

$$P_0 = \frac{Q}{L} \left( f K + \frac{s + f \pi d}{\pi d - f s} \cdot \frac{d}{2} \right);$$

$$P_H = \frac{Q}{L} \left( f K + \frac{f \pi d - s}{\pi d + f s} \cdot \frac{d}{2} \right).$$

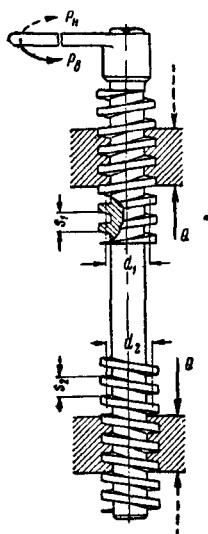
Здесь  $K$  — средний радиус опорной поверхности винта в см.

Если пренебречь трением, то в обоих случаях усилие на рукоятке

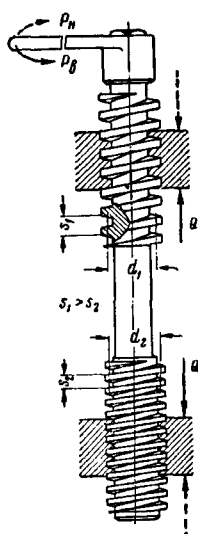
$$P_0 = \frac{Qs}{2\pi L}.$$

Коэффициент полезного действия

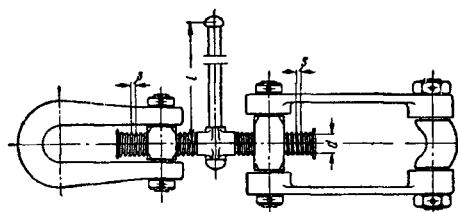
$$\eta_0 = \frac{P_0}{P_0} \text{ и } \eta_H = \frac{P_0}{P_H}.$$



Фиг. 15. Стяжной винт



Фиг. 16. Дифференциальный винт



Фиг. 17. Вагонная стяжка

Стяжной винт с правой и левой резьбой (фиг. 15)

$$P_s = \frac{Q}{L} \left( \frac{s_1 + f\pi d_1}{\pi d_1 - fs_1} \cdot \frac{d_1}{2} + \frac{s_2 + f\pi d_2}{\pi d_2 - fs_2} \cdot \frac{d_2}{2} \right);$$

$$P_n = \frac{Q}{L} \left( \frac{\pi d_1 f - s_1}{\pi d_1 + fs_1} \cdot \frac{d_1}{2} + \frac{\pi d_2 f - s_2}{\pi d_2 + fs_2} \cdot \frac{d_2}{2} \right).$$

Здесь  $s_1$  и  $s_2$  — шаги резьб в см;  
 $d_1$  и  $d_2$  — средние диаметры резьб в см.  
Пренебрегая трением,

$$P_0 = \frac{Q}{L} \cdot \frac{s_1 + s_2}{2\pi}.$$

Коэффициент полезного действия

$$\eta_s = \frac{P_0}{P_s} \text{ и } \eta_n = \frac{P_0}{P_n}.$$

Для случая, когда шаги и диаметры резьб равны, например, вагонное сцепное устройство (фиг. 15 и 17):

$$P_s = \frac{Q}{L} \cdot \frac{s + f\pi d}{\pi d - fs} \cdot d;$$

$$P_n = \frac{Q}{L} \cdot \frac{\pi d f - s}{\pi d + fs} \cdot d.$$

Дифференциальный винт (фиг. 16)

$$P_s = \frac{Q}{L} \left( \frac{s_1 + f\pi d_1}{\pi d_1 - fs_1} \cdot \frac{d_1}{2} + \frac{f\pi d_2 - s_2}{\pi d_2 + fs_2} \cdot \frac{d_2}{2} \right);$$

$$P_n = \frac{Q}{L} \left( \frac{f\pi d_1 - s_1}{\pi d_1 + fs_1} \cdot \frac{d_1}{2} + \frac{s_2 + f\pi d_2}{\pi d_2 - fs_2} \cdot \frac{d_2}{2} \right).$$

Пренебрегая трением,

$$P_0 = \frac{Q}{L} \cdot \frac{s_1 - s_2}{2\pi}.$$

Коэффициент полезного действия

$$\eta_s = \frac{P_0}{P_s} \text{ и } \eta_n = \frac{P_0}{P_n}.$$

## ЗАКЛЁПОЧНЫЕ СОЕДИНЕНИЯ

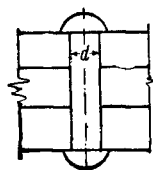
### ТИПЫ ЗАКЛЁПОК

Заклёпки служат для соединения металлических листов и других фасонных профилей между собой. Заклёпка (фиг. 18) вставляется в отверстие, заготовленное в пакете листов или других профилей, которые должны быть прочно скреплены между собой. Заклёпка имеет две головки: одна головка «закладная» изготавливается заранее вместе со стержнем, другая «закрывающая» делается на месте клёпки путём сплющивания выступающего из отверстия куска заклёпочного стержня ударами молотка.

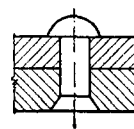
Заклёпки с полукруглой головкой (ГОСТ 1187-41 для прочных швов и ГОСТ 1191-41 для плотно-прочных швов) (фиг. 18). В плане полукруглая головка имеет вид круга, диаметр которого равен  $1,75 d$ , высота её равна  $\sim 0,6 d$ , радиус сферической поверхности  $\sim 1,07 d$ , где  $d$  — диаметр стержня заклёпки. Заклёпка с полукруглой головкой является нормальным, наиболее употребительным типом заклёпки.

Заклёпки с потайной головкой для прочных и плотно-прочных швов (ГОСТ 1195-41) (фиг. 19). Потайная головка не выступает из склеиваемых частей. Она имеет коническую форму и утапливается в изделие на глу-

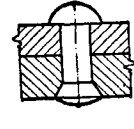
бину  $\sim 0,5 d$ . Употребляется, когда требуется гладкая поверхность изделия.



Фиг. 18



Фиг. 19



Фиг. 20

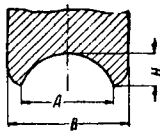
Заклёпки с полупотайной головкой (ГОСТ 1192-41) (фиг. 20). Полупотайная головка имеет утопленную часть, подобную потайной. Выступающая часть головки, сферической формы, выступает над поверхностью изделия на  $\sim 0,18 d$ . Употребляется, когда имеются ограничения для возможности постановки полукруглой головки. Заклёпки с потайной и полупотайной головками требуют дополнительных затрат на раззенковку дыр на нужную глубину.

### КЛЕПАЛЬНЫЕ РАБОТЫ

Холодная клёпка. Головки заклёпок, имеющих диаметр  $d=8-10$  мм и меньше, не требуют больших усилий для своего образо-

вания и могут быть изготовлены без предварительного нагрева стержня заклёпки. Заклёпки диаметром 8 мм и менее ставят холодными.

**Горячая клёпка.** При диаметре заклёпок  $d > 10 - 12$  мм является обязательной горячая клёпка. Перед установкой в отверстие заклёпка нагревается до светлокрасного каления. Особой поддержкой закладная головка прижимается к изделию. Сильными ударами молотка выступающий с другой стороны изделия горячий стержень осаживается в отверстие до плотного её заполнения. Из оставшегося стержня частями ударами молотка по «обжимке» (фиг. 21), имеющей сферическое углубление (табл. 3), соответствующее головке заклёпки, формируется замыкающая головка. Стержень заклёпки, остывая, стягивает головки и сжимает изделие.



Фиг. 21

Таблица 3  
Размеры обжимок в мм

Диаметр отверстия	Диаметр заклёпки	Размеры обжимки		
		A	B	H
14	13	21,5	28,0	7,2
17	16	27,0	34,5	8,4
20	19	31,0	38,0	10,4
23	22	36,0	44,0	12,1
26	25	41,5	50,0	13,8
29	28	46,5	55,4	15,5
32	31	51,5	61,0	17,2

Наружный диаметр обжимки на 5—6 мм больше диаметра головки заклёпки.

**Ручная клёпка.** При ручной клёпке замыкающая головка формируется при помощи кувалды.

**Машинная клёпка.** Наиболее употребительным способом машинной клёпки является клёпка при помощи пневматических молотков или особой скобы, приводимой в движение посредством пневматических, гидравлических или электрических устройств.

Клёпка с помощью скоб даёт более однородное и высокое качество соединения, однако не всегда может быть применена вследствие затруднений в установке скобы.

**Подготовка отверстий.** Отверстия под заклёпки пробивают на дыропробивных станках, сверлят на сверлильных станках или пробивают с последующей рассверловкой ручной дрелью по месту. Разметка отверстий бывает ручная и по шаблонам.

Метод ручной разметки даёт наихудшие результаты с точки зрения обеспечения совпадения отверстий.

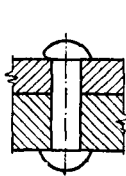
Наибольшая толщина пробиваемого металла достигает 20—22 мм. Точного совпадения отверстий при пробивке достигнуть не удастся.

Лучшие результаты получаются при сверловке по кондуктору, т. е. по шаблону с готовыми отверстиями, наилучшие — при од-

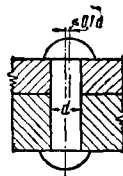
новременной сверловке всего пакета или при рассверловке отверстий до полного диаметра по месту после проколки или предварительной сверловки.

**Качество клёпки.** Заклёпка, включая закладную головку, должна быть нагрета равномерно до светлокрасного каления. Нагрев заклёпки до белого каления ведёт к пережогу металла. Отверстие должно быть тщательно очищено от грязи. С горячей заклёпки, перед её постановкой в отверстие, ударами о твёрдый предмет должна быть сбита окалина. Во время клёпки закладная головка должна плотно прижиматься поддержкой. К концу клёпки заклёпка должна иметь вишнёво-красный цвет.

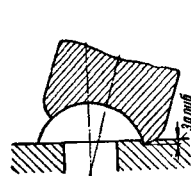
Готовой заклёпке предъявляются следующие требования: головка заклёпки должна быть плотно прижата к листам; зазор не должен превышать 0,1 мм; подчеканка неплотных головок не допускается, головка заклёпки должна быть полной и не должна быть «губатой» (фиг. 22), т. е.



Фиг. 22



Фиг. 23



Фиг. 24

иметь округлые края; заруб головки более чем на 2 мм не допускается; если головка имеет заусенцы, то их следует удалить; головка не должна иметь трещиноватостей (вследствие перегрева в горне); не допускается сбой оси головки от оси отверстия (фиг. 23) более чем на  $0,1d$ ; металл вокруг заклёпки не должен быть зарублен (фиг. 24).

Все дефектные заклёпки должны быть устранены и заменены новыми.

### ПЛОТНО-ПРОЧНЫЕ СОЕДИНЕНИЯ

Плотно-прочные соединения часто находят под весьма значительным давлением, они не должны допускать течи жидкости или газов (котлы, цистерны, резервуары и т. п.).

Толщина стенок резервуара (котла)

$$\delta = \frac{pD}{2R_{\text{раст}} \varphi} + 1 \text{ до } 2 \text{ мм},$$

где  $\delta$  — толщина стенки в см;

$p$  — внутреннее давление в кг/см<sup>2</sup>;

$D$  — диаметр резервуара в см;

$R_{\text{раст}}$  — допускаемое напряжение в материале стенки в кг/см<sup>2</sup>;

$\varphi$  — коэффициент ослабления или коэффициент прочности шва.

Разрывающее напряжение в стенке котла в продольном направлении, возникающее вследствие внутреннего давления на днище, равно

$$\sigma = \frac{pD}{4\delta}.$$

Коэффициент прочности шва

$$\varphi = \frac{p_{\text{ос}}}{p},$$



где  $p_{ос}$  — прочность стенки по ослабленному дырами сечению;  
 $p$  — прочность стенки по цельному сечению.



Фиг. 25. Заклепочный шов внахлестку

Коэффициент прочности шва (табл. 4) зависит от характера стыка.

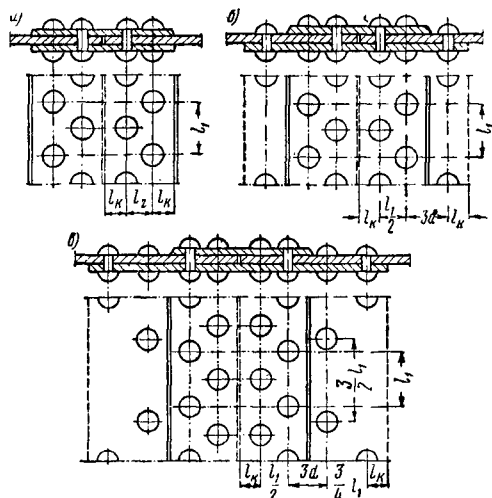
Различают швы:

1) внахлестку (внапуск) (фиг. 25) при количестве рядов заклепок от 1 до 3; при этом расположение заклепок может быть прямое и «в шахмат»;

2) впритык (встык) с парными накладками (фиг. 26); накладки могут быть равные (фиг. 26, а) и неравные (фиг. 26, б, в).

Таблица 4  
Ориентировочные значения коэффициентов  $\varphi$

Характер стыка	Расположение заклепок	
	прямое	в шахмат
Внапуск . . . . .	0,60	0,70
Впритык с равными накладками . . . . .	0,70	0,75
Впритык с неравными накладками . . . . .	—	0,85—0,90



Фиг. 26. Заклепочные швы с накладками

Диаметр заклепок

$$d = \sqrt{5\delta} - a \text{ (см)},$$

где  $\delta$  — толщина стенки в см;  
 $a$  — постоянная величина;  
 для швов внапуск  $a = 0,4$  см;  
 для швов встык  $a = 0,6$  см.

Минимальное расстояние от центра заклепки до края листа

$$l_k = 1,5d + 0,3\delta,$$

где  $l_k$  — расстояние до края листа в см;  
 $d$  — диаметр дыры в см;  
 $\delta$  — толщина листа в см.

Расстояние  $0,3\delta$  дается как припуск на «зачеканку», которая обязательна в плотно-прочных соединениях.

При стыковании внахлестку зачеканивается кромка листа, при стыковании встык — кромки накладок.

После чеканки должен получиться скос кромки с наклоном 1:3. Зачеканка производится ударами молотка. Край кромки вдавливается в материал изделия, чем устраняются имеющиеся неплотности и зазоры.

Наименьшее расстояние между заклепками при прямом расположении заклепок (фиг. 25)  $l_1 = 2,5$  до  $3d$ , при шахматном расположении заклепок (фиг. 26)  $l_1 = 4d$ .

Расстояние между рядами при прямом расположении заклепок  $l_2 = 0,6l_1$ , а при шахматном расположении  $l_2 = 0,5l_1$ .

Толщина накладок принимается равной около  $\frac{2}{3}\delta$ .

Необходимое число рядов заклепок

$$n = \frac{\sigma \delta l_1}{\varphi P_3},$$

где  $n$  — число рядов заклепок;

$\sigma$  — напряжение растяжения в стенке в кг/см<sup>2</sup>;

$\delta$  — толщина стенки в см;

$l_1$  — расстояние между заклепками поперек усилия в см;

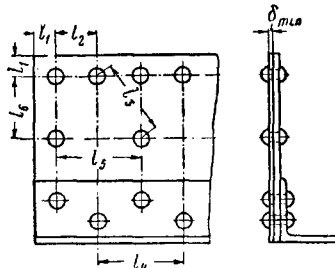
$\varphi$  — коэффициент прочности шва;

$P_3$  — наименьшее допускаемое усилие на заклепку в кг.

## ПРОЧНЫЕ СОЕДИНЕНИЯ

В прочных соединениях подчеканки не требуется. Частое расположение заклепок практикуется только в стыках в целях сокращения размеров стыковых накладок.

Рекомендуемые расстояния для расположения заклепок см. на фиг. 27.



Фиг. 27. Расположение заклепок в прочном соединении

$$l_1 = \text{от } 1,5d \text{ до } 8\delta_{\min};$$

$$l_2 = \text{от } 3d \text{ до } \begin{cases} 7d \\ 16\delta_{\min} \end{cases}$$

$$l_3 = \text{от } 3,5 \frac{d}{\delta_{\min}};$$

$$l_4 = \text{от } 6d \text{ до } \begin{cases} 14d \\ 32\delta_{\min} \end{cases};$$

$$l_5 = \text{от } 3d \text{ до } \begin{cases} 16\delta_{\min} \text{ для сжатых,} \\ 24\delta_{\min} \text{ для растянутых;} \end{cases}$$

$$l_6 = \text{от } 3d \text{ до } 24\delta_{\min}$$

Наименьшее расстояние от края элемента до заклепки во всех направлениях  $l_1 = 1,5d$ .  
 Наименьшее расстояние между заклепками во всех направлениях  $l_2 = 3d$ , а по диаго-

нали  $l_3 = \frac{3,5d}{\delta_{\min}}$ , где  $\delta_{\min}$  — толщина самого тонкого листа пакета в см.

Наибольший шаг заклёпок в крайнем ряду пакета равен  $l_2 = 7d$  и  $16\delta_{\min}$ .

При наличии обрамляющего жёсткого профиля (например, уголка) и расположения крайних заклёпок «в шахмат» расстояние это удваивается.

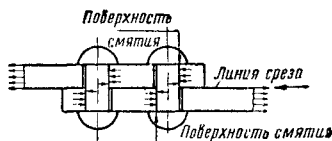
Наибольший шаг связующих заклёпок в сжатых стержнях  $l_5$  равен  $16\delta_{\min}$  в продольном направлении (вдоль усилия) и  $24\delta_{\min}$  в поперечном ( $l_6$ ).

Для растянутых стержней норма эта равна  $24\delta_{\min}$  как в продольном, так и в поперечном направлениях.

Вдоль усилия при однорядном расположении заклёпок их должно быть поставлено не менее трёх, а при двух рядах не менее двух. В мощных стыках количество заклёпок в ряду значительно больше и нормами не ограничивается.

## РАСЧЁТ ЗАКЛЁПОЧНЫХ СОЕДИНЕНИЙ

При передаче усилия с одного профиля (пакета) на другой (фиг. 28) заклёпки испытывают смятие стержня по поверхности со-



Фиг. 28. Расчётные нагрузки на односрезную заклёпку

прикасания с материалом профиля и срез по плоскости соприкасания передающих друг другу усилие профилей.

Усилие между заклёпками в ряду распределяется неравномерно; крайние заклёпки оказываются более нагруженными; однако в расчёте принято считать, что все заклёпки одного ряда воспринимают одинаковые усилия.

Зная прочность одной заклёпки, мы получим прочность всего ряда, как произведение наибольшего усилия, воспринимаемого одной заклёпкой, на число заклёпок ряда.

**Сопротивление заклёпки смятию.** Усилие, воспринимаемое одной заклёпкой по смятию,

$$P_{см} = d\delta R_{см},$$

где  $P_{см}$  — допускаемое усилие на смятие заклёпки в кг;

$d$  — диаметр заклёпки в см;

$\delta$  — толщина листа (пакета), передающего усилие, в см;

$R_{см}$  — допускаемое напряжение на заклёпку по смятию в кг/см<sup>2</sup>.

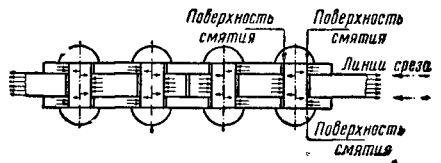
**Сопротивление заклёпки срезу.** Сопротивление заклёпки срезу

$$P_{ср} = \frac{\pi d^2}{4} R_{ср},$$

где  $P_{ср}$  — допускаемое усилие на срез заклёпки в кг;

$R_{ср}$  — допускаемое напряжение на заклёпку по срезу в кг/см<sup>2</sup>.

Следует иметь в виду, что если со среднего элемента через ряд заклёпок передаётся усилие на два симметрично расположенных крайних элемента (фиг. 29) (например, с ли-



Фиг. 29. Расчётные нагрузки на двухсрезную заклёпку

ста на две накладки), то в этом случае заклёпка испытывает срез по двум плоскостям и сопротивление заклёпки

$$P_{ср} = \frac{\pi d^2}{2} R_{ср}.$$

Определив сопротивление заклёпки по смятию и срезу, узнают необходимое количество заклёпок делением величины усилия в соединении на  $P$  наименьшее.

**Сопротивление заклёпки отрыву головки.** В некоторых случаях, как, например, при соединениях в виде фланцев или при передаче усилия через выступающие полки уголков, что часто имеет место при взаимном прикреплении балок в мостах или прикреплении балок к фермам, сопротивление заклёпок определяют, как сопротивление головки заклёпки отрыву (фиг. 30):

$$P_{отр} = \frac{\pi d^2}{4} R_{отр},$$

$P_{отр}$  — допускаемое усилие на отрыв головки заклёпки в кг;

$R_{отр}$  — допускаемое напряжение на отрыв головки в кг/см<sup>2</sup>.

**Расчёт по площади.** Если усилие в стержне неизвестно, количество заклёпок определяют на основании принципа равнопрочности стержня и соединения в стыке. Количество заклёпок  $n$  в этом случае будет следующее.

Для растянутых стержней:

$$n = F_{нетто} \varphi_1$$

при расчёте на срез и

$$n = F_{нетто} \varphi_2$$

при расчёте на смятие.

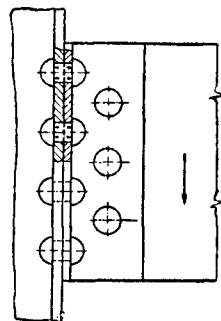
Для сжатых стержней:

$$n = F_{брутто} \varphi_1$$

при расчёте на срез и

$$n = F_{брутто} \varphi_2$$

при расчёте на смятие.



Фиг. 30. Работа заклёпок на отрыв головок

Здесь  $\mu_1, \mu_2$  — коэффициент для расчёта заклёпок по площади (табл. 5);

$n$  — количество заклёпок;

$\varphi$  — коэффициент уменьшения напряжения от продольного изгиба;

$F_{\text{брутто}}$  — площадь, не ослабленная заклёпочными отверстиями прикрепляемого стержня, в  $\text{см}^2$ ;

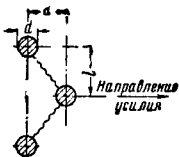
$F_{\text{нетто}}$  — площадь, ослабленная заклёпочными отверстиями прикрепляемого стержня, в  $\text{см}^2$ .

Таблица 5

 Значения коэффициентов  $\mu_1$  и  $\mu_2$ 

Коэффициент	Наименьшая толщина листа в мм	Диаметр заклёпок в мм						Примечание
		14	17	20	23	26	29	
$\mu_1$	—	0,81	0,55	0,40	0,30	0,24	0,19	При $R_{cp} = 0,8R_0$ .
$\mu_2$	8	0,45	0,37	0,31	0,27	0,24	0,22	При $R_{cm} = 2R_0$ . $R_0$ — допускаемое напряжение на растяжение в материале изделия
	10	—	0,29	0,25	0,22	0,19	0,17	
	12	—	0,23	0,21	0,18	0,16	0,14	
	14	—	—	0,18	0,16	0,14	0,12	
	16	—	—	0,16	0,14	0,12	0,11	
	18	—	—	0,14	0,12	0,11	0,10	
	20	—	—	—	0,11	0,10	0,09	

**Расчёт ослабления в растянутых стержнях.** При определении  $F_{\text{нетто}}$  следует иметь в виду, что при шахматном расположении заклёпок разрыв листа может произойти по зигзагу (фиг. 31). В этом случае, если продольный шаг заклёпок удовлетворяет условию



Фиг. 31. Разрыв изделия по зигзагу

разрыва по зигзагу более, чем по прямому ряду. Если

$$a < \sqrt{ld + \frac{d^2}{4}},$$

то следует сделать дополнительный вычет на каждый полузигзаг. В долях площади заклёпочного отверстия вычет будет равен при чётном числе полузигзагов

$$\frac{\Delta F}{\delta d} = \frac{1}{2} - \frac{l}{d} \left[ \sqrt{1 + \left( \frac{a}{l} \right)^2} - 1 \right],$$

где  $a$  — продольный шаг в  $\text{см}$ ;

$l$  — поперечный шаг в  $\text{см}$ ;

$d$  — диаметр заклёпочной дыры в  $\text{см}$ ;

$\Delta F$  — дополнительная площадь ослабления сечения в  $\text{см}^2$ ;

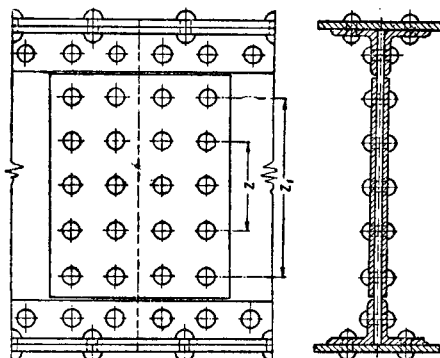
$\delta$  — толщина прикрепляемого листа или пакета в  $\text{см}$ .

При нечётном числе полузигзагов

$$\frac{\Delta F}{\delta d} = \frac{m}{n} - \frac{l}{d} \left[ \sqrt{1 + \left( \frac{a}{l} \right)^2} - 1 \right],$$

где  $m$  — число заклёпок в сечении при нечётном числе полузигзагов.

**Расчёт стыков составных балок, работающих на изгиб.** Расчёт стыков поясов составных балок, состоящих обыкновенно (фиг. 32) из двух уголков и пакета горизонтальных листов, производят, как для стержней, работающих на растяжение или сжатие.



Фиг. 32. Стык стенки балки, работающей на изгиб

Стык стенки рассчитывают на изгибающий момент, воспринимаемый стенкой, который будет равен

$$M_{cm} = M \frac{I_{cm}}{I},$$

где  $I$  — момент инерции всего сечения в  $\text{см}^4$ ;

$I_{cm}$  — момент инерции стенки в  $\text{см}^4$ ;

$M_{cm}$  — изгибающий момент, воспринимаемый стенкой, в  $\text{кгсм}$ ;

$M$  — изгибающий момент в сечении балки в  $\text{кгсм}$ .

Усилие, воспринимаемое заклёпкой крайнего ряда, определяется по формуле

$$P_3 = \frac{M_{cm}}{z_1} \cdot \frac{z_1^2}{n_1 \Sigma z^2},$$

где  $P_3$  — усилие, воспринимаемое одной заклёпкой крайнего ряда, в  $\text{кг}$ ;

$z_1$  — расстояние между крайними рядами заклёпок;

$z$  — расстояние между симметричными рядами заклёпок;

$n_1$  — число заклёпок в крайнем ряду полунакладки.

Очевидно, что  $P_3 < P_{cp}$  и  $P_3 < P_{cm}$ , где  $P_{cp}$  и  $P_{cm}$  — допустимые усилия на заклёпку по срезу и смятию в  $\text{кг}$ .

В случае действия в стыке поперечной силы  $Q$  (фиг. 33), последняя условно распределяется равномерно между всеми заклёпками, работающими на изгиб, т. е.

$$P'_3 = \frac{Q}{\Sigma n},$$

где  $Q$  — поперечная сила в  $\text{кг}$ ;

$P'_3$  — усилие, воспринимаемое одной заклёпкой стыка стенки от поперечной силы, в  $\text{кг}$ ;

$n$  — число заклёпок в полунакладке.

Действующие в разных направлениях силы  $P_3$  и  $P'_3$  складываются геометрически:

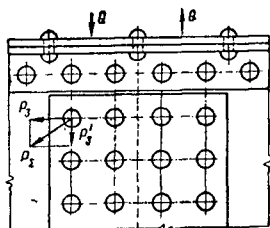
$$P_{\Sigma} = \sqrt{P_3^2 + P'^2_3},$$

$P_{\Sigma}$  — усилие, воспринимаемое наиболее напряжённой заклёпкой, в кг.

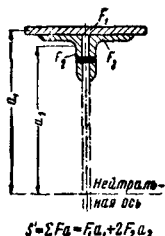
В этом случае очевидно, что

$$P_{\Sigma} < P_{ср} \text{ и } P_{\Sigma} < P_{сж}.$$

Здесь  $P_{ср}$ ,  $P_{сж}$  — допустимые усилия на срез и смятие заклёпки в кг.



Фиг. 33. Усилие в заклёпках стыка стенки балки, работающей на изгиб



Фиг. 34. Определение статического момента сечения части балки при расчёте поясных заклёпок

**Расчёт поясных заклёпок** (фиг. 34). Поясные заклёпки, прикрепляющие поясные уголки к горизонтальный пакет к вертикальному листу, препятствуют скольжению пояса балки по вертикальной стенке, т. е. обеспечивают работу балки как цельного сечения. Усилие от сдвига, в этом случае, для одной поясной заклёпки будет равно

$$P_m = \frac{QS'}{I} a,$$

где  $Q$  — расчётная поперечная сила в сечении в кг;

$S'$  — статический момент пояса балки брутто относительно нейтральной оси в  $\text{см}^3$ ;

$a$  — шаг поясных заклёпок в см;

$I$  — момент инерции сечения балки брутто в  $\text{см}^4$ .

Это усилие не должно быть меньше расчётного сопротивления заклёпки смятию или срезу.

С другой стороны, стенка листа между заклёпками не должна выколоться, т. е. должно быть соблюдено условие

$$a > \frac{2R_{ср}}{2R_{ср} - \tau} d$$

Здесь  $R_{ср}$  — допускаемое напряжение на срез в изделии в  $\text{кг/см}^2$ ;

$\tau = \frac{QS'}{I\delta}$  — фактическое скалывающее напряжение в стенке с учётом её ослабления, в  $\text{кг/см}^2$ ;

$Q$  — поперечная сила в рассчитываемом сечении в кг;

$S'$  — статический момент сечения балки, лежащего «за» расчётным сечением листа, в  $\text{см}^3$ ;

$a$  — шаг заклёпок в см;

$d$  — диаметр заклёпки в см;

$I$  — момент инерции всего сечения брутто в  $\text{см}^4$ ;

$\delta$  — толщина стенки в см.

В случае, если поясные заклёпки передают давление непосредственно лежащего на поясе балки груза  $N$  (фиг. 35) и давление от  $N$  распределяется на участке длиной  $\lambda$ ,

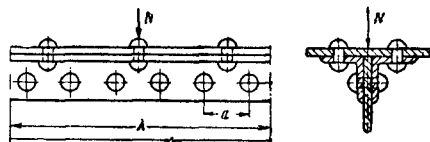
то результирующее усилие, приходящееся на заклёпку, определяется как геометрическая сумма двух усилий:

$$P_{\Sigma} = a \sqrt{\left(\frac{QS'}{I}\right)^2 + \left(\frac{N}{\lambda}\right)^2}.$$

$P_{\Sigma}$  — суммарное усилие на срез или смятие заклёпки в кг;

$a$  — шаг поясных заклёпок в см;

$N$  — груз, расположенный на поясе балки, в кг;



Фиг. 35. Местная нагрузка на балке

$\lambda$  — длина участка, распределяющего давление от груза  $N$  на заклёпки, в см. Необходимо, чтобы

$$P_{\Sigma} < P_{ср} \text{ и } P_{\Sigma} < P_{сж}.$$

Здесь  $P_{ср}$ ,  $P_{сж}$  — допускаемое усилие на срез и смятие заклёпки в кг.

### ДОПУСКАЕМЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ НА ЗАКЛЁПКИ

Допускаемые напряжения на заклёпки (табл. 6) принимаются в зависимости от основного допускаемого напряжения на материал изделия. При этом необходимо, чтобы материал заклёпок по механическим качествам соответствовал материалу изделия.

Таблица 6  
Допускаемые напряжения на заклёпку

Род усилия	Допускаемое напряжение в $\text{кг/см}^2$	Примечание
Срез Смятие Отрыв	0,8 $R_b$ 1,75—2,0 $R_b$ 0,6 $R_b$	$R_b$ — основное допускаемое напряжение материала изделия на растяжение—сжатие в $\text{кг/см}^2$

В неотвешенных конструкциях, при оставлении продавленных дыр нерассверлёнными, допускаемые напряжения на срез и смятие понижаются на 20%.

В случае, если усилие в стержне при повторных загрузках меняет знак, допускаемые напряжения на заклёпки уменьшаются умножением на коэффициент

$$\gamma = \frac{1}{1 - k \frac{P_{\min}}{P_{\max}}}.$$

Здесь  $P_{\min}$  — значение наименьшего усилия в стержне, взятое со своим знаком;

$P_{\max}$  — значение наибольшего усилия в стержне, взятое со своим знаком;

$k$  — коэффициент, равный 0,3—0,5.

# СВАРНЫЕ СОЕДИНЕНИЯ

## ЭЛЕКТРОДУГОВАЯ СВАРКА

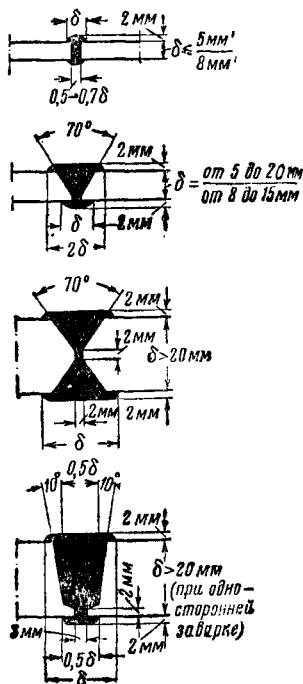
Применение полуавтоматической и автоматической сварки ограничивается заваркой длинных швов в нижнем положении, что выгодно при крупносерийном производстве.

Ручная сварка допускает наложение швов в любом положении — вертикальных и верхних — потолочных.

Однако потолочные швы не получаются качественными, а потому не рекомендованы для несущих соединений.

### Сварные швы<sup>1</sup>

Соединение встык (фиг. 36) требует различной подготовки стыковых кромок профилей, в зависимости от их толщины.



Фиг. 36. Размеры стыковых швов (в знаменателе — при автоматической сварке под слоем флюса)

Соединение внахлестку осуществляется валиковыми швами и подготовки кромок не требует.

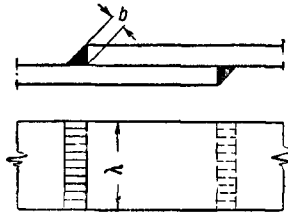
В зависимости от направления шва вдоль, поперёк или под углом к направлению усилия, различают лобовые (фиг. 37), фланговые (фиг. 40) и косые швы (фиг. 41).

Лобовые швы работают на растяжение — сжатие, фланговые — на срез, между тем как косые швы испытывают как нормальные, так и касательные напряжения.

Соединение в угол (фиг. 38) и в тавр (фиг. 39) может осуществляться без скоса

кромки, однако последнее весьма желательно при больших толщинах свариваемых профилей.

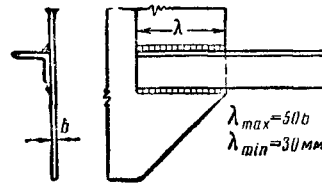
При обработке скосом кромки листа колонки тавра образуется парный шов, именуемый «К-образным» (фиг. 42).



Фиг. 38

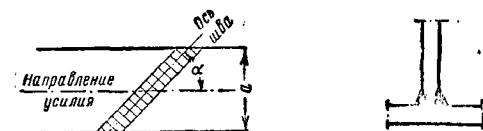
Фиг. 39

Нормальной формой поперечного сечения валикового шва является прямоугольный треугольник с равными катетами (фиг. 43).



Фиг. 40

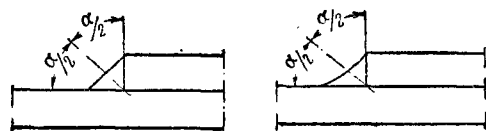
Улучшенной формой (фиг. 44) является треугольник с удлиненным катетом, направленным вдоль усилия и со скругленным, вогнутым очертанием свободной стороны.



Фиг. 41

Фиг. 42

Однако для создания такого шва требуется



Фиг. 43

Фиг. 44

дополнительная механическая обработка его после сварки, что удорожает изделие. Наиболее опасным сечением шва при его разрыве или срезывании является сечение по биссектрисе угла между свариваемыми деталями (фиг. 43, 44).

<sup>1</sup> Подробнее см. ТСЖ, т. VI «Сварка металлов».

### Механические свойства наплавленного металла

Механические свойства наплавленного металла (образцы Гагарина) и допускаемые напряжения приведены в табл. 7 и 8.

Таблица 7  
Механические свойства стыкового шва

Метод сварки	Наименьший предел прочности в кг/мм <sup>2</sup>	Наименьший угол загиба в °
Ручной, электроды с ионизирующим покрытием	0,85σ <sub>60</sub>	40
То же, электроды с толстым покрытием	0,90σ <sub>60</sub>	120
Автоматический под слоем флюса	0,95σ <sub>60</sub>	120

\* σ<sub>60</sub> — предел прочности основного металла, подлежащего сварке

Таблица 8  
Допускаемые напряжения в сварных швах

Метод сварки	Соединения встык		Валиковые швы
	растяжение	сжатие	срез
	R <sub>рас</sub>	R <sub>сж</sub>	R <sub>ср</sub>
Ручной, электроды с ионизирующим покрытием То же, электроды с толстым покрытием Автоматический под слоем флюса	в кг/см <sup>2</sup>		
	0,65R <sub>0</sub>	0,75R <sub>0</sub>	0,5R <sub>0</sub>
	0,8R <sub>0</sub>	0,9R <sub>0</sub>	0,6R <sub>0</sub>
	R <sub>0</sub>	R <sub>0</sub>	0,75R <sub>0</sub>

Примечание. 1. Допускаемые напряжения для полуавтоматической сварки рекомендуется назначать по норме ручной сварки при электродах с толстым покрытием.  
2. R<sub>0</sub> — основное допускаемое напряжение в металле изделия.

При расчёте швов на переменную и знакопеременную нагрузку вводятся коэффициенты снижения допускаемых напряжений γ.

Для швов встык при переменной нагрузке

$$\gamma = 1.$$

То же при знакопеременной нагрузке

$$\gamma = \frac{1}{1 - 0,3 \frac{P_{\min}}{P_{\max}}},$$

где P<sub>min</sub>, P<sub>max</sub> — наибольшее и наименьшее расчётные усилия, взятые со своими знаками.

Для швов валиком при переменной и знакопеременной нагрузке

$$\gamma = \frac{1}{1,3 - 0,3 \frac{P_{\min}}{P_{\max}}}.$$

### РАСЧЁТ СВАРНОГО ШВА

Прямой шов встык

$$P_{ш} = b \lambda \gamma R_{рас},$$

где P<sub>ш</sub> — усилие, воспринимаемое сварным швом, в кг;

b = δ<sub>min</sub> — толщина наиболее тонкого профиля в см;

λ — длина шва в см;

γ — коэффициент, учитывающий изменение нагрузки;

R<sub>рас</sub>, R<sub>сж</sub> — допускаемое напряжение на растяжение или сжатие на сварной шов в кг/см<sup>2</sup>.

Косой шов встык (фиг. 41). На растяжение или сжатие

$$P_{ш} = b \lambda \gamma R_{рас} = \frac{a}{\sin \alpha} \gamma R_{рас} = P_0 \sin \alpha,$$

где a — ширина профиля в см;

α — угол между направлением шва и действием усилия;

P<sub>0</sub> — усилие в профиле в кг.

Следовательно, растягивающее или сжимающее напряжение в шве будет равно

$$\sigma = \frac{P_0 \sin^2 \alpha}{\gamma a b} = \sigma_0 \sin^2 \alpha / \gamma,$$

где σ<sub>0</sub> — растягивающее или сжимающее напряжение в профиле в кг/см<sup>2</sup>;

σ — растягивающее или сжимающее напряжение в шве в кг/см<sup>2</sup>.

Усилие, воспринимаемое швом на срез,

$$P_{ш} = b \lambda \gamma R_{ср} = \frac{a}{\sin \alpha} \gamma R_{ср} = P_0 \cos \alpha.$$

Напряжение в шве на срез

$$\tau = \frac{P_0}{\gamma a b} \sin \alpha \cos \alpha = \sigma_0 \sin \alpha \cos \alpha / \gamma.$$

Некоторыми авторами рекомендуется косой шов встык, направленный под углом α = 45°, считать равнопрочным основному металлу без расчёта.

Лобовой шов валиком (фиг. 37)

$$P_{ш} = b \lambda \gamma R_{ср},$$

здесь b — длина перпендикуляра, опущенного из вершины прямого угла треугольного сечения шва; обычно b = 0,7 h, где h — высота шва;

R<sub>ср</sub> — допускаемое напряжение в шве на срез в кг/см<sup>2</sup>.

(В настоящее время, с целью упрощения, все валиковые швы рассчитываются только на срез.)

Соединение прорезью. В том случае, когда валикового лобового шва недостаточно по расчёту, он может быть усилен соединением прорезью (фиг. 45).

Ширина прорези

$$a = 2\delta,$$

длина прорези

$$\lambda = 10 - 25\delta.$$

Сопротивление прорези срезу

$$P_{ср} = 2\delta \lambda \gamma R_{ср},$$

где λ — длина прорези в см;

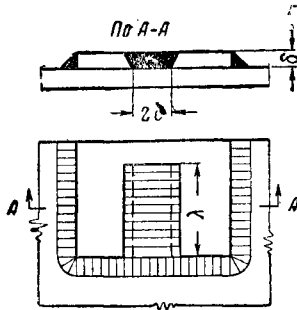
δ — толщина прорезанного листа в см.

Фланговый шов валиком

$$P_{ш} = b \lambda \gamma R_{ср}.$$

Обозначения см. лобовой шов валиком.

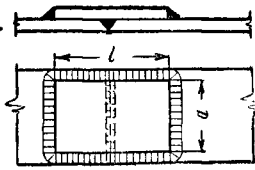
**Шов встык, усиленный накладками.** Прямой шов встык недостаточен для передачи



Фиг. 45. Расчётные размеры соединения с прорезью

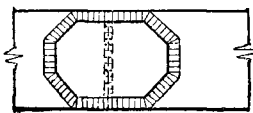
усилия, действующего на профиль (фиг. 46), поэтому такой шов обычно усиливают накладками.

Накладки применяются односторонние и двусторонние. Наличие односторонних накладок вызывает изгиб стыка от эксцентрич-



Фиг. 46. Шов встык, усиленный накладками

ной передачи усилия через накладку. Накладка должна перекрывать не менее половины длины шва встык. Длина накладок принимается равной полуторной её ширине. Желательна срезка углов накладки (фиг. 47).



Фиг. 47. Накладка со скошенными углами

Толщина односторонней накладки должна быть не менее  $(0,6 - 1,0) \delta$ , где  $\delta$  — толщина стыкуемого листа. Толщина двусторонних накладок может быть равной  $(0,4 - 0,5) \delta$ .

Допускаемое усилие в соединении

$$P_{ш} = (b \delta \lambda R_{рас} + P b_n R_{ср}) \gamma$$

при односторонних накладках и

$$P_{ш} = (b \delta \lambda R_{рас} + 2 P b_n R_{ср}) \gamma$$

при двусторонних накладках.

Здесь  $b \delta$  — расчётная толщина шва встык в см;

$\lambda$  — длина стыкового шва в см;

$b_n$  — расчётная толщина валикового шва накладки в см;

$P$  — полупериметр накладки в см;

$\gamma$  — коэффициент уменьшения допускаемых напряжений при переменных и знакопеременных усилиях;

$R_{ср}, R_{рас}, R_{сш}$  — допускаемые напряжения в сварном шве на срез, растяжение или сжатие в кг/см<sup>2</sup>.

## РАСЧЁТ СТЫКОВ БАЛОК, РАБОТАЮЩИХ НА ИЗГИБ

**Стыковые швы.** Расчёт стыков поясов балок, состоящих обыкновенно из пакета горизонтальных листов, производится как для элементов, работающих на растяжение—сжатие, одним из способов, указанных выше, в зависимости от характера шва.

Стык стенки рассчитывается (фиг. 48) на изгибающий момент, воспринимаемый стенкой, который равен

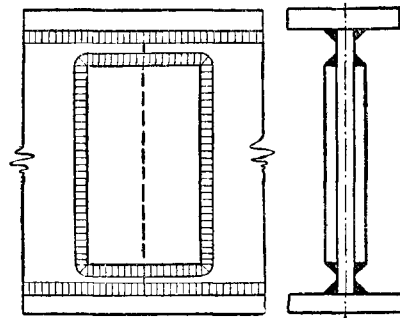
$$M_{ст} = M \frac{I_{ст}}{I},$$

где  $I$  — момент инерции всего сечения в см<sup>4</sup>;

$I_{ст}$  — момент инерции стенки в см<sup>4</sup>;

$M$  — изгибающий момент в полном сечении в кгсм;

$M_{ст}$  — изгибающий момент в стенке в кгсм.



Фиг. 48. Стык стенки сварной балки, работающей на изгиб

Если стенка не имеет шва встык и перекрыта парными накладками, обваренными валиковым швом по контуру, то расчёт сводится к определению момента сопротивления сварных швов двух полунакладок и напряжения (ввиду расчёта всех валиковых швов на срез) по формуле

$$\tau = \frac{M_{ст}}{W_{ш}},$$

$W_{ш}$  — момент сопротивления площади шва в см<sup>3</sup>.

Если стенка, кроме того, сварена встык, то при нахождении  $W_{ш}$  необходимо учитывать сопротивление стыкового шва.

Если в стыке действует поперечная сила, то определяется среднее напряжение среза

$$\tau' = \frac{Q}{\Sigma F_{ш}},$$

где  $Q$  — поперечная сила в сечении в кг;

$F_{ш}$  — площади среза всех сварных швов в см<sup>2</sup>;

$\tau'$  — напряжение среза в швах, вызываемое поперечной силой, в  $\text{кг/см}^2$ .

Результирующее напряжение в сварном шве

$$\tau_{\Sigma} = \sqrt{\tau^2 + (\tau')^2}.$$

**Поясные швы.** Поясные швы, прикрепляющие листы горизонтального пакета к вертикальному листу, препятствуют отрыву пояса балки, т. е. обеспечивают работу балки как цельного сечения.

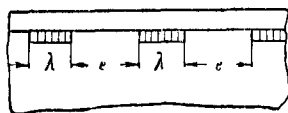
Напряжение среза в сварном шве при двух валиковых швах

$$\tau = \frac{QS'}{2Ib}$$

при непрерывном шве и

$$\tau = \frac{QS' e + \lambda}{2Ib \lambda}$$

при прерывистых швах (фиг. 49).



Фиг. 49. Прерывистый поясной шов

Здесь  $Q$  — поперечная сила в  $\text{кг}$ ;

$S'$  — статический момент поясных листов относительно центра тяжести сечения в  $\text{см}^3$  (фиг. 50);

$I$  — момент инерции сечения в  $\text{см}^4$ ;

$b$  — расчётная высота валикового шва в  $\text{см}$ ;

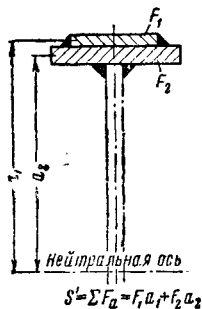
$\lambda$  — длина прерывистого шва в  $\text{см}$ ;

$e$  — расстояние между швами в  $\text{см}$ .

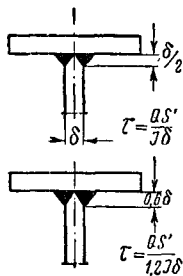
При парном К-образном шве (фиг. 51) принимают

$$\tau = \frac{QS'}{I\delta} \text{ до } \tau = \frac{QS'}{1,2I\delta},$$

где  $\delta$  — толщина вертикального листа в  $\text{см}$ .



Фиг. 50. К подсчёту статического момента пояса балки



Фиг. 51. Расчётные размеры К-образных поясных швов

Необходимо учитывать напряжённое состояние сварного шва, работающего вместе с сечением балки на изгиб:

$$\sigma = \frac{Mu_{\text{ш}}}{I},$$

$M$  — изгибающий момент в сечении балки в  $\text{кгсм}$ ;

$u_{\text{ш}}$  — расстояние от центра тяжести сечения до центра тяжести поясного шва в  $\text{см}$ .

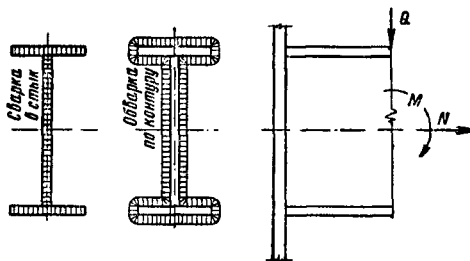
Результирующее (главное) напряжение

$$\sigma_{\Sigma} = \frac{\sigma}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq R_{\text{раст, сж}}$$

Местные напряжения в пояском шве, возникающие вследствие передачи через них давления груза, расположенного на балке, в расчёт не принимаются ввиду их благоприятного влияния на усадочные напряжения.

**Расчёт мест примыкания балок.** Места примыкания торцов балок рассчитываются на изгиб в зависимости от того, приварена ли балка встык или обварена по контуру валиковым швом, который рассчитывается на срез по формулам (фиг. 52):

$$\sigma = \frac{M}{W_{\text{ш}}} \text{ или } \tau = \frac{M}{W_{\text{ш}}}$$



Фиг. 52. Примыкание балок у опор

или, при наличии нормальной силы,

$$\sigma_{\Sigma} = \frac{M}{W_{\text{ш}}} \pm \frac{N}{F} \text{ или } \tau = \frac{M}{W_{\text{ш}}} \pm \frac{N}{F},$$

где  $\sigma$  — нормальное напряжение в сечении швов при заварке встык в  $\text{кг/см}^2$ ;

$\tau$  — касательное напряжение в швах при обварке по контуру в  $\text{кг/см}^2$ ;

$M$  — изгибающий момент в стыке в  $\text{кгсм}$ ;

$W_{\text{ш}}$  — момент сопротивления швов в  $\text{см}^3$ ;

$N$  — нормальная сила в  $\text{кг}$ ;

$F$  — площадь сечения швов в  $\text{см}^2$ .

В случае наличия касательных напряжений  $\tau'$  от поперечной силы результирующее напряжение

$$\sigma_{\Sigma} = \frac{\sigma}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4(\tau')^2} \leq R_{\text{раст, сж}}$$

при заварке встык или

$$\tau_{\Sigma} = \sqrt{\tau^2 + (\tau')^2} \leq R_{\text{ср}};$$

при обварке по контуру

$$\tau' = \frac{Q}{\Sigma F_{\text{ш}}},$$

где  $Q$  — поперечная сила в сечении в  $\text{кг}$ ;

$F_{\text{ш}}$  — площади среза всех сварных швов в  $\text{см}^2$ ;

$\tau$  — напряжение среза в швах, вызываемое поперечной силой, в  $\text{кг/см}^2$ .

### ПЛОТНО-ПРОЧНЫЕ СВАРНЫЕ СОЕДИНЕНИЯ

При сварке плотно-прочных соединений, т. е. котельных конструкций, резервуаров и труб, употребляются электроды только с толстой обмазкой. При массовом изготовлении труб продольные швы труб весьма желатель-



но сваривать автоматической сваркой под слоем флюса по способу акад. Е. О. Патона.

Как продольные, так и поперечные швы следует выполнять встык с соответствующей подготовкой кромок, без накладок.

Толщина стенки резервуара (трубы)

$$\delta = \frac{PD}{2 R_{рас}} + 1 \text{ до } 2 \text{ мм},$$

где  $P$  — внутреннее давление в  $\text{кг/см}^2$ ;

$D$  — диаметр резервуара в  $\text{см}$ ;

$R_{рас}$  — допускаемое напряжение на сварной шов на растяжение в  $\text{кг/см}^2$ .

Напряжение в поперечном шве дна

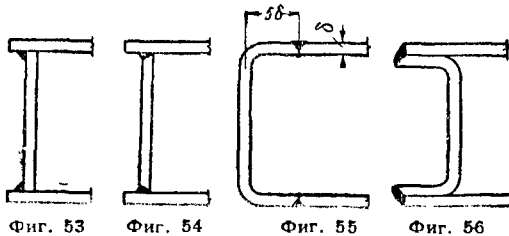
$$\sigma = \frac{PD}{4\delta},$$

$P$  — внутреннее давление в  $\text{кг/см}^2$ ;

$D$  — диаметр резервуара в  $\text{см}$ ;

$\delta$  — толщина стенки резервуара в  $\text{см}$ .

Приварку плоских дна рекомендуется осуществлять угловым швом без подготовки кромок (фиг. 53) при малых давлениях и с подготовкой кромок при больших давлениях (фиг. 54).



Выпуклые днища требуют отбортовки кромок на  $5\delta$  ( $\delta$  — толщина листа) с приваркой встык (фиг. 55).

Вогнутые днища привариваются валиковыми швами со скосом кромок листа дна (фиг. 56).

Напряжение в шве вогнутого дна

$$\tau = \frac{PD}{4b},$$

где  $P$  — внутреннее давление в  $\text{кг/см}^2$ ;

$D$  — диаметр резервуара в  $\text{см}$ ;

$b$  — расчетная высота шва в  $\text{см}$ .

Патрубки ответственных конструкций следует приваривать с отбортовкой, встык, неответственных — угловым внутренним швом или наружным в тавр.

## КОНТАКТНАЯ ЭЛЕКТРОСВАРКА

**Стыковая сварка.** Стыковой сваркой сваривают детали по всей соприкасающейся поверхности. Свариваемая площадь достигает  $24 \text{ см}^2$  при непрерывной работе сварочной машины и  $60 \text{ см}^2$  — при работе машины с перерывами.

Сварочная машина, применяемая на железнодорожном транспорте, сваривает встык рельсы любого профиля.

При сваривании встык круглых прутков требуются припуски, приведенные в табл. 9.

Допускаемые напряжения при сварке встык рекомендуется назначать по нормам

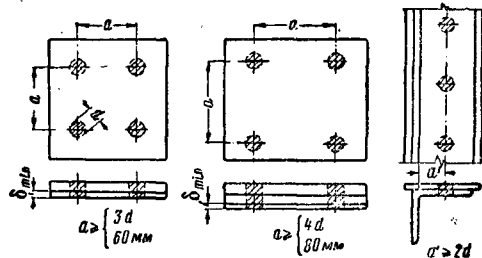
Таблица 9

Припуски на длину при сварке встык

Диаметр прутка в мм	Площадь поперечного сечения прутка в $\text{мм}^2$	Припуск в мм
10—14	80—150	8
15—24	180—450	10—12
25—34	490—900	14—15
35—44	960—1500	18—20
45—54	1600—2280	22
55—65	2400—3800	24

автоматической сварки под слоем флюса исходя из механических свойств материала изделия.

**Точечная сварка.** Точечной сваркой сваривают тонкие (например штампованные) профили. Точки, как бы склеивающие детали, разбросаны с интервалами по смежным поверхностям листов изделия.



Фиг. 57

Фиг. 58

Фиг. 59

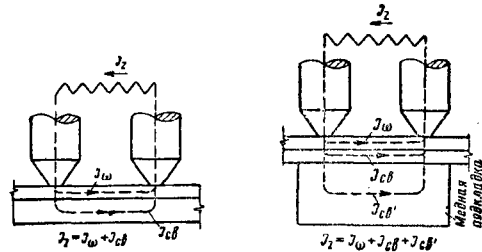
По толщине точками сваривают 2—3 листа. Суммарная свариваемая толщина достигает 18—20 мм. При сварке трёх листов разных толщин не рекомендуется приваривать тонкий лист между двумя толстыми ввиду неудовлетворительной прочности соединения.

Диаметр точки

$$d \leq (1,5\delta + 5) \text{ (мм)},$$

где  $d$  — диаметр точки в мм;

$\delta$  — толщина самого тонкого листа соединения в мм.



Фиг. 60

Фиг. 61

Расстояние между точками при сваривании двух листов  $a \geq 3d$ , но не менее 60 мм (фиг. 57); при сваривании трёх листов  $a \geq 4d$ , но не менее 80 мм (фиг. 58). Расстояние до внутренней грани выступающей полки  $a' \geq 2d$  (фиг. 59).

При сварке с одной стороны точечным методом (фиг. 60) тонкого листа с толстым или двух листов одинаковой толщины (фиг. 61) с медной подкладкой указанные предельные расстояния взаимного расположения точек могут не соблюдаться.

При этом, если сила тока в цепи равна  $I_z$ , то сила тока, расходуемая на сваривание листов, равна  $I_{св}$  и  $I'_{св}$  соответственно, а сила тока  $I_{\infty}$  расходуется непроизводительно.

Определение количества точек в общем напоминает расчёт заклёпок.

Продольные усилия распределяются между точками равномерно.

Сопротивление точки срез

$$P_{ср} = \frac{\pi d^2}{4} R_{ср},$$

$P_{ср}$  — допускаемое усилие на точку в кг;

$d$  — диаметр сварочной точки в см;

$R_{ср}$  — допускаемые напряжения на срез точки в кг/см<sup>2</sup>.

Сопротивление точки отрыв

$$P_{от} = \frac{\pi d^2}{4} R_{отр}.$$

Допускаемые напряжения для точек назначаются в зависимости от основных допускаемых напряжений для материала изделия на растяжение  $R_0$ :

на срез

$$R_{ср} = 0,5 R_0,$$

на отрыв

$$R_{от} = 0,5 R_0.$$

Кроме того, в соединении должно соблюдаться условие

$$\tau \geq 0,65 \sigma_0.$$

Здесь  $R_{от}$  — допускаемое напряжение на отрыв точки в кг/см<sup>2</sup>;

$R_{ср}$  — допускаемое напряжение точки на срез точки в кг/см<sup>2</sup>;

$\tau$  — временное сопротивление точки на срез в кг/см<sup>2</sup>;

$\sigma_0$  — временное сопротивление материала изделия на растяжение в кг/см<sup>2</sup>.

Коэффициенты  $\gamma$  снижения допускаемых напряжений в точечном соединении при переменной и знакопеременной нагрузке рекомендуются следующие.

Для основного материала, при связующих нерабочих точках:

при переменной нагрузке

$$\gamma = 1;$$

при знакопеременной нагрузке

$$\gamma = \frac{1}{1 - 0,3 \frac{P_{\min}}{P_{\max}}},$$

где  $P_{\min}$  и  $P_{\max}$  — минимальное и максимальное расчётные усилия, взятые с их знаком.

Для основного материала, при точках, как рабочем соединении, при переменных и знакопеременных нагрузках

$$\gamma = \frac{1}{1,7 - 0,7 \frac{P_{\min}}{P_{\max}}}.$$

Для точек, при расчёте на срез: при переменных нагрузках

$$\gamma = 1;$$

при знакопеременных нагрузках

$$\gamma = \frac{1}{1 - 0,3 \frac{P_{\min}}{P_{\max}}}.$$

Для точек при расчёте на отрыв: при переменных нагрузках

$$\gamma = 1;$$

при знакопеременных нагрузках

$$\gamma = \frac{1}{2 - \frac{P_{\min}}{P_{\max}}}.$$

## ГАЗОВАЯ (АВТОГЕННАЯ) СВАРКА

Специфические области применения газовой сварки — металлремонт, сварка деталей толщиной от долей мм до 2—3 мм, сварка чугуна, сплавов, цветных металлов, труб и пр.

Типичным соединением является шов встык. Соединение в тавр вызывает коробление изделия. Тонкие листы до 2 мм толщиной свариваются без присадочного металла (фиг. 62) с загибом ребра, листы толщиной до 5 мм свариваются без скоса кромок.

Допускаемые напряжения в сварных швах принимаются по нормам допускаемых напряжений для ручной электродуговой сварки с электродами в толстой обмазке.



Фиг. 62

## ОСИ И ВАЛЫ

### ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ В ОСЯХ

Оси, не передающие вращающего момента, могут быть разделены на две группы:

- неподвижные оси (фиг. 63);
- вращающиеся оси (фиг. 64).

Как те, так и другие рассчитываются на чистый изгиб от внешних сил.

Метод расчёта дан на примере расчёта вагонной оси (фиг. 64).

Пусть  $P$  — вертикальное давление на колесо со стороны вагона в кг;

$H$  — горизонтальное давление на борт оси и ребро колеса, возникающее от инерционных сил на повороте и от давления ветра, в кг;

$T$  — горизонтальное давление на колесо со стороны тормозной колодки в кг;

$l_0, l_1, l_2$  — см. фиг. 64, в см.

Тогда момент в основании цапфы подшипника оси:

от силы  $H$

$$M_H = H \cdot r_0;$$

от силы  $P$

$$M_P = R_{AP} \frac{l_0}{2};$$

от силы  $T$

$$M_T = R_{AT} \frac{l_0}{2},$$



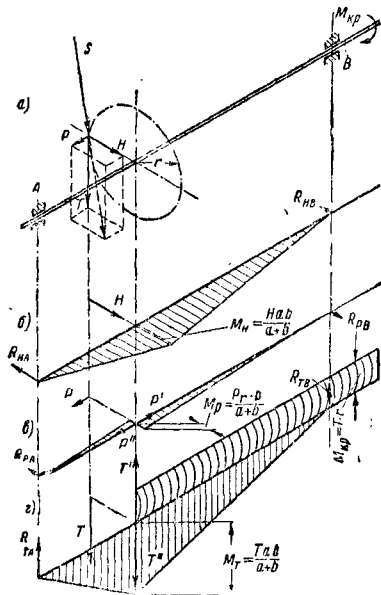
сумма изгибающих и крутящего моментов, вызываемых этими силами).

Сила  $H$  изгибает вал моментом, равным

$$M_H = \frac{abH}{a+b}.$$

Эпюра этого момента дана на фиг. 65, б.

Для разбора влияния силы  $P$  на вал необходимо приложить к валу вдоль его оси две силы  $P'$  и  $P''$ , равные  $P$  и направленные



Фиг. 65. К расчёту вала

в противоположные стороны (фиг. 65, в); тогда сила  $P''$  будет сжимать вал, а силы  $P$  и  $P'$  составят момент, изгибающий вал:

$$M_P = PR.$$

Сила  $T$ , касательная к начальной окружности насаженного тела, будет изгибать вал и создаст рабочий крутящий момент. Для определения величины этих моментов необходимо приложить к валу две взаимно уравновешивающиеся силы  $T'$  и  $T''$ , равные и параллельные силе  $T$  (фиг. 65, г); тогда сила  $T''$  будет изгибать вал моментом

$$M_T = \frac{abT''}{a+b},$$

а силы  $T$  и  $T'$  создадут рабочий крутящий момент

$$M_{кр} = Tg.$$

Этот момент будет снят с вала реактивным моментом на конце.

При действии на вал нескольких сил в разных плоскостях и на различных расстояниях от опор каждая из сил должна быть разбрана изложенным способом.

Дальнейший расчёт должен состоять в сложении найденных изгибающих моментов в различных сечениях вала по правилу параллелограмма и нахождении максимального момента, изгибающего вал.

Для данного случая наибольший изгибающий момент будет под точкой приложения силы  $S$ .

Величина суммарного изгибающего момента

$$M_{изг} = \sqrt{\left(M_H + \frac{b}{a+b}M_P\right)^2 + M_T^2}.$$

Величина расчётного изгибающего момента

$$M = \sqrt{M_{изг}^2 + M_{кр}^2}.$$

Имея диаметр вала в расчётном сечении, найдём напряжение в валу

$$\sigma_{изг} = \frac{M}{w} = \frac{M}{0,1 d^3} \leq R_{изг},$$

где  $\sigma_{изг}$  — напряжение в валу от изгиба в  $\text{кг/см}^2$ ;

$M$  — расчётный изгибающий момент в  $\text{кгсм}$ ;

$w$  — момент сопротивления сечения в  $\text{см}^3$ ;

$d$  — диаметр вала в  $\text{см}$ ;

$R_{изг}$  — допускаемое напряжение на изгиб в  $\text{кг/см}^2$ .

### ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДЕФОРМАЦИЙ ОСЕЙ И ВАЛОВ

Расчёт прогибов валов на практике производится сравнительно редко, только при относительно длинных валах, как проверка. Он может быть произведён следующим образом.

Пусть вал нагружен какой-либо силой (фиг. 66), пересекающей вал. Тогда

$$EIy = \frac{Pcx}{6l} (x^2 + c^2 - l^2),$$

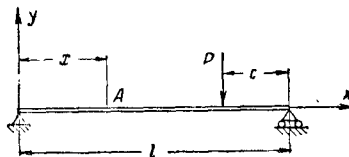
где  $P$  — сила, изгибающая вал, в  $\text{кг}$ ;

$E$  — модуль упругости материала вала в  $\text{кг/см}^2$ ;

$I$  — момент инерции поперечного сечения вала в  $\text{см}^4$ ;

$y$  — прогиб вала в точке  $A$  на расстоянии  $x$  от начала координат в  $\text{см}$ .

На основании этого уравнения можно найти величину прогиба в интересующей нас точке от действия данной силы.



Фиг. 66. К расчёту прогиба вала

Пусть от силы  $P'$  прогиб в точке  $A$  будет  $y_1$ ; от действия других сил прогибы будут  $y_2, y_3, \dots$ . Общий прогиб в данной точке будет равен геометрической сумме этих прогибов.

Норм, ограничивающих величину прогиба, в настоящее время нет; практически в тяжёлом машиностроении они достигают до  $1/3000$  от пролёта, в автостроении валы коробок скоростей прогибаются до  $1/2000$  пролёта.

Угол закручивания вала, так же как и прогиб, не является величиной, определяющей размеры вала. В автостроении допускаются углы закручивания вала  $5-8^\circ$  и более на метр длины.

Угол закручивания

$$\varphi = \frac{Ml}{GI_p},$$

где  $\varphi$  — угол закручивания на длине  $l$  в радианах;

$M$  — крутящий момент на валу в кгс·м;

$l$  — длина вала в см;

$G$  — модуль упругости при сдвиге в кг/см<sup>2</sup>;

$I_p$  — полярный момент инерции в см<sup>4</sup>.

Расстояния между опорами трансмиссионных валов даны в табл. 10.

Таблица 10

Расстояние между опорами трансмиссионных валов

Диаметр вала в мм	Расстояние между опорами валов в м	
	передаточных без шкивов или с лёгкими шкивами около подшипников	обыкновенных трансмиссионных валов с часто расположенными шкивами
$\frac{30}{35}$	1,75	1,50
$\frac{40}{45}$	2,00	1,75
$\frac{50}{60}$	2,50	2,00
$\frac{70}{80}$	3,00	2,50
$\frac{90}{110}$	3,50	3,00
$\frac{125}{140}$	4,00	3,50

Проверка критического числа оборотов (см. стр. 250) для быстроходных трансмиссионных валов обязательна.

Расчёт многоопорных валов, например трансмиссионных, может быть произведён приближённо, если вал разбить на участки по опорам и рассчитывать, как двухопорные валы, при несколько пониженных напряжениях. Диаметры валов при этом могут быть выбраны по ОСТ 1654. Расстояние между подшипниками см. табл. 10.

### ДОПУСКАЕМЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ

Основной материал для валов — Ст. 40 в нормализованном и в термообработанном виде. Трансмиссионные валы изготавливаются также из сталей Ст. 5 и Ст. 4.

Допускаемые напряжения для валов выбираются в зависимости от материала и применённой термообработки, а также в зависимости от конструкции вала. В табл. 11 даны допускаемые напряжения в обычных точёных ступенчатых валах: гладкие валы без резких переходов сечений с галтелями допускают более высокие напряжения, чем валы ступенчатые, при расчёте которых нужно учитывать возможность возникновения концентрации напряжений.

В случае шлифования валов допускается повышение допускаемых напряжений.

Данные табл. 11 можно принимать для вращающихся осей. Для неподвижных осей, принимая во внимание постоянное направление нагрузки, можно брать несколько более высокие допускаемые напряжения.

Таблица 11

Допускаемые напряжения на валы при расчёте на изгиб

Материал	Допускаемое напряжение $R_{изг}$ в кг/см <sup>2</sup>
Ст. 4	600
Ст. 5	700
Ст. 40 нормализованная (в состоянии поставки)	800
Ст. 40 улучшенная (твёрдость $H_{г} = 250-300$ )	1200

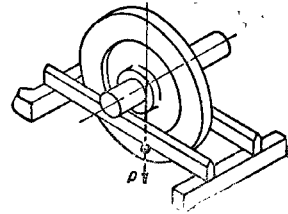
### БАЛАНСИРОВКА ВАЛОВ

Следует различать два случая балансировки:

а) статическую балансировку коротких валов с насаженными на них деталями;

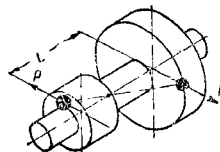
б) динамическую балансировку валов с насаженными на них несколькими деталями.

В первом случае бывает достаточно балансировать вал с насаженной деталью на ножках, как это показано на фиг. 67. Этим методом нетрудно найти количество избыточного или недостающего металла на сторонах детали и сверлением или добавкой балансировать деталь до тех пор, пока деталь не будет в статическом равновесии во всех положениях.

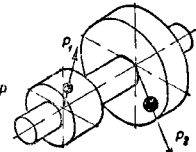


Фиг. 67. Статическая балансировка детали

Если вал с насаженными на него деталями имеет некоторую протяжённость по длине, то статической балансировки недостаточно. В этом случае несбалансированные массы могут находиться на разном расстоянии от опор, и, не выявляясь в состоянии покоя, они создадут на валу дополнительный изгибающий момент при вращении (фиг. 68).



Фиг. 68. Динамическая балансировка детали



Фиг. 69. Общий случай балансировки

Общий случай несбалансированного вала дан на фиг. 69. Две (или более) различные несбалансированные массы находятся в различных сечениях по длине вала. Балансировка в данном случае сводится к добавке (или

удалению) двух масс в различных сечениях, создающих уравновешивающий момент. Определение величины и положения масс уравновешивающего момента производится на специальных балансировочных машинах.

У горизонтальных валов вес деталей и вала является той неуравновешенной силой, которая выводит вал из спокойного вращения и приводит к вибрациям. Момент, когда период вибрирующего вала совпадает с периодом собственных колебаний вала, приводит к резонансу и может повести к поломке вала.

Чтобы избежать этой опасности, все быстроходные валы должны быть проверены на критическое число оборотов, которое

должно быть больше максимально возможного числа оборотов вала.

Для вала постоянного сечения с незащемлёнными концами критическое число оборотов будет

$$n_{кр} = 10\,250\,000 \frac{d}{L^2} \text{ об/мин.},$$

для вала с защемлёнными концами

$$n_{кр} = 23\,000\,000 \frac{d}{L^2} \text{ об/мин.},$$

где  $d$  — диаметр вала в см;

$L$  — длина вала в см.

## ПОДШИПНИКИ

### ПОДШИПНИКИ СКОЛЬЖЕНИЯ

#### Трение в подшипниках скольжения

До 200 об/мин. применяют бронзовые подшипники с густой смазкой; от 200 до 1500 об/мин. обычно применяют также бронзовые подшипники с кольцевой смазкой, больше 1500 об/мин. применяют баббитовые и бронзовые подшипники при смазке под давлением.

В зависимости от окружной скорости в цапфе подшипника трение между валом и вкладышем может подчиняться одному из следующих законов:

а) для тихоходных цапф

$$M = f r P,$$

где  $M$  — момент трения в кгсм;

$f$  — коэффициент трения;

$r$  — радиус цапфы в см;

$P$  — давление на цапфу в кг;

б) для быстроходных цапф, согласно гидродинамической теории смазки Н. П. Петрова (1883 г.), момент трения

$$M = \mu \cdot r \cdot F \frac{v}{\delta},$$

где  $\mu$  — абсолютная вязкость жидкости в  $\frac{\text{кг сек}}{\text{м}^2}$ ;

$r$  — радиус цапфы в см;

$F$  — поверхность, смоченная смазкой, в  $\text{см}^2$ ;

$v$  — окружная скорость в  $\text{см/сек}$ ;

$\delta$  — толщина смазочного слоя, или разность между радиусами цапфы и вкладыша подшипника, в см.

Первый из этих законов имеет место в случаях сухого или полусухого трения; второй закон имеет место при жидкостном трении, к которому необходимо стремиться при проектировании подшипников.

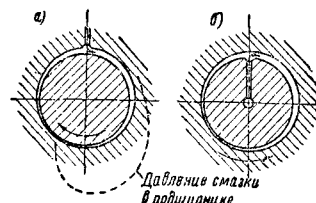
Основной причиной выхода подшипников из строя являются задиры валов и вкладышей подшипников, с которыми можно бороться двумя путями: обеспечением жидкостного трения и увеличением твёрдости шейки вала.

Для получения жидкостного трения:

а) необходимо иметь достаточно большую поверхность вкладышей при невысоком удельном давлении;

б) размеры вкладыша и вала должны быть таковы, чтобы имел место гарантированный зазор, обеспечивающий поступление смазки на опорную поверхность;

в) опорная поверхность должна быть гладкой, без углублений — смазочных канавок, понижающих давление смазки под валом (схема подачи смазки на нерабочую поверхность дана на фиг. 70);



Фиг. 70. Давление в скользящем подшипнике

г) окружная скорость цапфы должна быть значительной, чтобы имело место затягивание масла в серповидную щель между вкладышем и валом и создавалось в этой щели повышенное давление смазки;

д) вязкость смазки должна быть значительна при рабочей температуре вкладыша.

Соблюдение этих условий может привести к чисто жидкостному трению, которое характеризуется очень низким коэффициентом трения и полным отсутствием износа вала и вкладыша.

В большинстве практических случаев добиться такого результата не удастся и имеет место полужидкостное или полусухое трение. В этом случае подшипник не гарантирован от износа.

Примерные значения удельных давлений даны в табл. 12 и 13. Ориентировочные значения коэффициентов трения скользящих подшипников даны в табл. 14.

Величины зазоров во вкладышах должны быть тем выше, чем больше скорость: для валов, вращающихся со скоростью до 600 об/мин., можно давать зазор по ходовой посадке второго класса  $H$ , для больших скоростей необходимо давать посадку  $H_3$ .

Наличие сухого и полусухого трения может привести валы из сырой стали к задирам, особенно при повышении удельного давления. Избежать их можно повышением твёрдости шейки вала до  $H_B = 250 - 300$ . При работе по бронзе рекомендуется доводить твёрдость шейки до  $H_5 = 400$ , а лучше до 500 и более.

Материалом для вкладышей служат различные антифрикционные сплавы (антифрикционный чугун, оловянистые бронзы марок Бр.ОС, Бр.О10, Бр.О15, баббиты марок Б16; БС и др.).

Таблица 12

Допускаемое удельное давление на подшипники скольжения

Условия работы, тип цапф и материал	Удельное давление в $\text{кг/см}^2$
Для работы стальных азотированных цапф по таким же вкладышам твердостью 82—84 по Шору при обильной смазке	150—250
Для работы стальных цементированных цапф твердостью 54—56 $R_c$ по бронзе при обильной смазке	90—150
Для работы стальных улучшенных цапф твердостью 250—300 $H_B$ :	
по бронзе при обильной смазке	60—90
по баббиту	30—50
Для работы сырых стальных цапф:	
по бронзе	30—50
по антифрикционному чугуну	15—25
по серому чугуну	6—10
При работе сырой стали*	
по бронзе	15—30
по чугуну	1—7

Расчёт подшипников скольжения (фиг. 71)

$$P = \frac{Q}{dl} \leq P_0,$$

где  $P$  — удельное давление в подшипнике в  $\text{кг/см}^2$ ;

$Q$  — давление на подшипник в кг;

$d$  — диаметр вала в см;

$l$  — длина вкладышей в см;

$P_0$  — допустимое удельное давление в подшипнике в  $\text{кг/см}^2$ .

Кроме того, подшипники скользящего трения рекомендуется рассчитать на нагрев по формуле

$$Pv = \frac{Qn}{1900l} < [P_0v]_{\text{доп}},$$

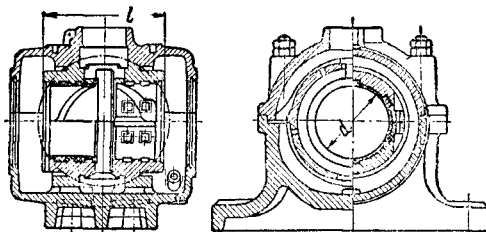
Таблица 13

Допускаемое удельное давление на подшипники скольжения

Тип подшипника	$P_0$ удельное давление в $\text{кг/см}^2$	$P_0v$ в $\frac{\text{кгм}}{\text{см}^2 \text{сек}}$
Трансмиссионные самоустанавливающиеся подшипники с чугунными вкладышами	6—8	18—15
Трансмиссионные самоустанавливающиеся подшипники с вкладышами, залитыми баббитом	8—10	18—15
Подшипники станков с чугунными вкладышами	15—20	25—20
То же бронзовые вкладыши	25—30	40—25
Подшипники электромоторов	3—5	25—20
Подшипники коренных валов стационарных паровых машин	15—25	20—15

\* В случаях, когда не может быть гарантировано отсутствие перекосов цапф и вкладыша, например, в отдельно стоящих самоустанавливающихся разъемных подшипниках.

где  $Pv$  — произведение удельного давления на скорость в  $\frac{\text{кгм}}{\text{см}^2 \text{сек}}$  практически не должно превосходить величин, данных в табл. 13.



Фиг. 71. Подшипник скольжения

Таблица 14

Коэффициенты трения в подшипниках скольжения

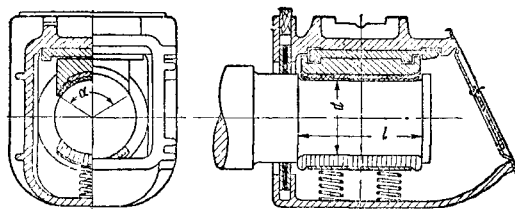
Условия работы			
Материалы цапфы и вкладыша	Жидкостное трение. Невысокие удельные давления. Обильная смазка	Полужидкостное трение. Значительные удельные давления. Обильная смазка	Полусухое трение. Плохие условия смазки
Сталь по стали	0,002—0,005	0,03—0,08	—
Сталь по чугуну	0,002—0,005	0,05—0,10	0,10—0,15
Сталь по бронзе	0,002—0,005	0,03—0,05	0,08—0,12
Сталь по баббиту	0,002—0,005	0,02—0,03	0,05—0,10

Примечание. Цапфы шлифованы из твердой стали (см. табл. 12).

Расчёт железнодорожных букс производится теми же методами, но в соответствии с конструктивными формами по формуле

$$P = \frac{Q}{dl \sin \frac{\alpha}{2}} \leq P_0,$$

где  $\alpha$  — угол охвата шейки подшипника (фиг. 72).



Фиг. 72. Железнодорожная букса

Расчёт на нагрев:

$$P \leq \frac{190000l}{n},$$

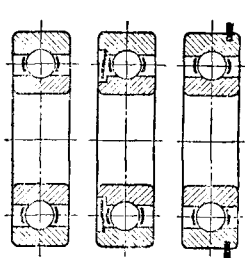
где  $l$  — длина подшипника в см;

$n$  — число оборотов вала в мин.

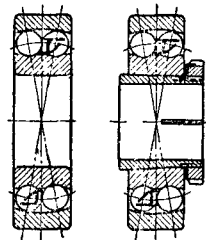
### ПОДШИПНИКИ КАЧЕНИЯ

В настоящее время имеют распространение следующие типы подшипников качения:

а) шариковый радиальный однорядный (фиг. 73), самый распространённый подшипник; хорошо работает при комбинациях радиальных и осевых нагрузок (серии 200, 300, 400 ГОСТ 6121-39 и др.). Имеются спе-



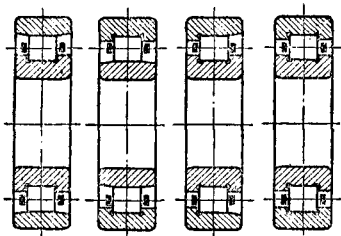
Фиг. 73. Шариковый однорядный радиальный подшипник



Фиг. 74. Шариковые самоустанавливающиеся подшипники

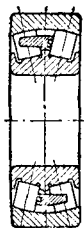
циальные подшипники с приспособлениями для защиты от попадания в шарики грязи (серии 60000, 80000 ГОСТ-26022), а также с закрепительными кольцами ГОСТ 2893-45 (серии 50000);

б) шариковый радиальный сферический подшипник (фиг. 74) применяется в тех случаях, когда возможны перекосы опоры по отношению к оси вала. Допускает наличие незначительных осевых нагрузок (серии 1200, 1300, 1600 ГОСТ 6266-39).



Фиг. 75. Роликоподшипники с короткими роликами

Этот тип подшипников выполняется также с коническими втулками для закрепления на гладких валах (серии 11200, 11300, 11600 ГОСТ 7634-39);



Фиг. 76

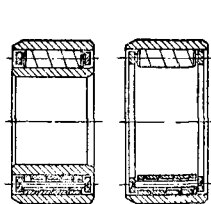
в) роликоподшипники радиальные с короткими роликами (фиг. 75) выполняются без реборда на одной из обойм (наружной или внутренней) или с ребордами (серии 2200, 2300, 2400, 32000, 42000, 52000, 62000, 92000, 102000 ГОСТ 294-41 и ГОСТ 5377-50);

г) роликоподшипники радиальные сферические с бочковидными роликами (фиг. 76). Эти подшипники отличаются большой грузоподъемностью, допуская перекосы осей валов и опор (серии 3000, 13000 ГОСТ 6771-39);

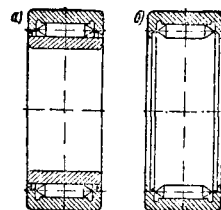
д) роликоподшипники радиальные с витыми роликами (фиг. 77) допускают сравни-

тельно небольшие радиальные нагрузки, но хорошо работают при ударных нагрузках (серии 5000, 35000, 65000 ГОСТ 26005);

е) игольчатые подшипники (фиг. 78, а) исполняются как со специальными обоймами,



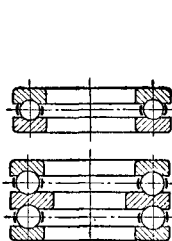
Фиг. 77. Роликоподшипники с витыми роликами



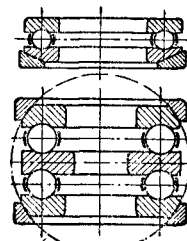
Фиг. 78. Игольчатые подшипники

так и в виде наборов, работающих по закалённым цапфам и опорам (фиг. 78, б) (серии 74000, 84000 ОСТ 26073; иголки по ГОСТ 8200-40);

ж) шариковые опорные однорядные и двухрядные (фиг. 79). Эти подшипники воспринимают только осевые нагрузки (серии 8000, 38000 ГОСТ 7219-39, 7221-39);



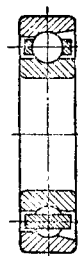
Фиг. 79. Опорные шарикоподшипники с плоскими шайбами



Фиг. 80. Опорные шарикоподшипники со сферическими шайбами

з) шариковые опорные однорядные и двухрядные (фиг. 80) подшипники со сферическими подкладными шайбами — только для осевых нагрузок; допускают перекосы осей валов и опор (нестандартные);

и) шариковые радиально-упорные подшипники (фиг. 81), воспринимающие хорошо



Фиг. 81



Фиг. 82

как радиальные, так и осевые нагрузки (серии 36000, 46000 ГОСТ 831-41, 832-41);

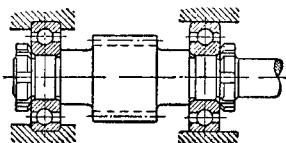
к) роликовые радиально-упорные подшипники (фиг. 82) с коническими роликами



отличаются высокой грузоподъемностью, хорошо работая при значительных осевых нагрузках (ГОСТ 5379-50 и 5380-50).

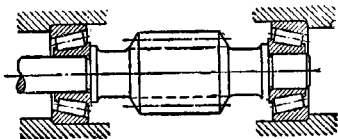
#### Установка подшипников качения

Подшипники качения должны устанавливаться и закрепляться на валах и в опорах таким образом, чтобы ни при монтаже, ни при работе в них не возникали вредные внутренние напряжения.



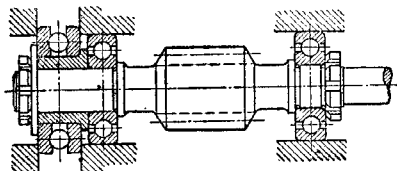
Фиг. 83. Установка однорядных радиальных подшипников

Типовым методом является закрепление по валу и в опоре одного из подшипников, остальным подшипникам даётся возможность осевого перемещения (фиг. 83).



Фиг. 84. Установка конических подшипников

Короткие двухопорные валы можно устанавливать в двух радиально-упорных подшипниках, оставляя незначительные осевые зазоры (фиг. 84) для термических расширений. При относительно небольших осевых усилиях можно устанавливать однорядные шариковые подшипники.



Фиг. 85. Установка с упорным подшипником

При наличии упорного подшипника на валу все остальные должны иметь возможность перемещаться вдоль оси (фиг. 85).

#### Расчёт подшипников качения

Шарико- и роликоподшипники выбирают в зависимости от: направления нагрузки ( $R$  радиальная — перпендикулярная к оси,  $A$  осевая — вдоль оси, комбинированная — наклонная к оси); необходимости самоустановливания подшипника (при возможных прогибах и перекосах вала); необходимости посадки подшипника непосредственно на вал или на закрепительную коническую втулку; необходимости обеспечения осевого перемещения вала при температурных удлинениях последнего; необходимости регулировки подшипников; условий эксплуатации механизма; величины и характера нагрузки на подшипник (постоянная, переменная, ударная); чи-

сла оборотов вращающегося кольца подшипника в минуту; диаметра пада под подшипник; экономически целесообразного рабочего срока службы подшипника (долговечность в часах).

Под долговечностью подшипника качения понимается время (в рабочих часах), в течение которого должны нормально проработать не менее 90% испытываемых подшипников без появления признаков усталости материала.

Зависимость между долговечностью подшипника, нагрузкой и числом оборотов внутреннего или наружного кольца выражается в общем виде следующими эмпирическими формулами:

для радиальных и радиально-упорных подшипников

$$Q(nh)^{0,3} = C;$$

для упорных подшипников

$$A(nh)^{0,3} = C,$$

где  $Q$  — условная нагрузка на подшипник в кг, подсчитываемая по фактической радиальной  $R$  и осевой  $A$  нагрузкам с учётом поправочного коэффициента  $m$  (см. ниже);

$n$  — число оборотов подшипника в минуту;

$h$  — требуемая рабочая долговечность в часах;

$C$  — постоянная, называемая коэффициентом работоспособности подшипника, зависящая от конструкции, внутренних размеров и качества материала подшипника; величины коэффициентов работоспособности для различных типов и размеров указаны в таблицах характеристик подшипников.

Величина условной радиальной нагрузки

$$Q = (R + mA) K_6 \cdot K_K,$$

где  $R$  — фактическая радиальная нагрузка на подшипник в кг;

$A$  — фактическая осевая нагрузка на подшипник в кг;

$m$  — коэффициент, учитывающий неодинаковое влияние радиальных и осевых нагрузок на долговечность подшипника (см. табл. 15);

$K_6$  — коэффициент, учитывающий характер нагрузки на подшипник (см. табл. 16);

$K_K$  — коэффициент, учитывающий изменение долговечности подшипника в зависимости от того, вращается ли внутреннее или наружное кольцо (табл. 17).

Величина коэффициента  $m$  зависит от выбранной долговечности подшипника, возрастающей при увеличении продолжительности работы подшипника. Данные табл. 15 соответствуют работе подшипника до износа при  $10^6$  оборотов.

Для роликоподшипников с короткими цилиндрическими роликами при подсчёте условной нагрузки осевые усилия в расчёт не принимаются. При этом осевые усилия, воспринимаемые бортами на кольцах подшипника, не должны превышать:

Для постоянной осевой нагрузки . 0,0016С кг  
 » непостоянной, но часто действующей . 0,0022С »  
 » редко действующей осевой нагрузки . 0,0043С »

С — коэффициент работоспособности, берут из таблиц подшипников.

Таблица 15  
Значения коэффициента  $m$

Обозначение серии подшипника	Наименование подшипника	$m$
200, 300, 400 1000, 1200	Однорядные . . . . .	1,5
	Сферические лёгкой серии диаметром до:	
	17 мм . . . . .	2,5
	20—40 мм . . . . .	3,5
	45 мм и более . . . . .	4,5
11200	То же на закрепительных втулках лёгкой серии диаметром до:	
	35 мм . . . . .	3,5
	40 мм и более . . . . .	4,5
1300	Сферические средней серии диаметром до:	
	30 мм . . . . .	3,0
	35 мм и более . . . . .	4,0
11300	То же на закрепительных втулках средней серии диаметром до:	
	25 мм . . . . .	3,0
	30 мм и более . . . . .	4,0
1500	Сферические лёгкой широкой серии . . . . .	2,5
11500	То же, на закрепительных втулках . . . . .	2,5
1600	Сферические средней широкой серии . . . . .	2,0
11600	То же на закрепительных втулках . . . . .	2,0

Под действием радиальной нагрузки на радиально-упорные шариковые и роликовые подшипники, вследствие наклонного положения поверхностей качения относительно оси подшипника, образуется направленная вдоль оси составляющая от радиальной нагрузки, разгружающая эти подшипники в осевом направлении. В некоторых случаях, при определённых соотношениях радиальных нагрузок на два радиально-упорных подшипника, смонтированных на концах вала, эти осевые составляющие могут взаимно уравновешиваться и, следовательно, не приниматься во внимание при определении условной радиальной нагрузки на подшипник. Если же осевые составляющие от радиальных нагрузок не уравновешиваются, они должны быть учтены при определении условной радиальной нагрузки.

Величина осевой составляющей

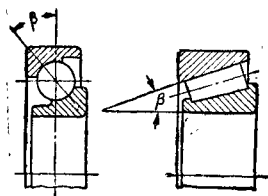
$$S \approx 1,2 R \operatorname{tg} \beta,$$

где  $S$  — осевая составляющая от радиальной нагрузки  $R$  в кг;

$R$  — радиальная нагрузка в кг;

$\beta$  — угол между прямой, проходящей через точки контакта шариков с дорожками (фиг. 86) качения колец, и плоскостью, проходящей через центры шариков, равный: для серии 36 000  $\beta = 12^\circ$  и для серии 46 000  $\beta = 26^\circ$ . Аналогично для конических подшипников угол конуса наружного кольца при нормальном угле конуса  $\beta = 12 - 15^\circ$ , при большом угле конуса  $\beta = 25 - 30^\circ$ .

Для подшипниковых узлов, где нагрузка и числа оборотов изменяются (опоры валов коробок скоростей, редукторов, шатунных механизмов и пр.), выбор подшипников производится по эквивалентным нагрузкам  $Q_{экс}$  и условному числу оборотов  $N_{усл}$ , при которых расчётная долговечность подшипника подразумевается равной долговечности того же подшипника, работающего на переменных режимах работы в данных конкретных условиях.



Фиг. 86. Углы контактов радиально-упорных подшипников

Таблица 16  
Примерные значения коэффициента  $K_b$

Характер нагрузки на подшипник	$K_b$
Спокойная нагрузка — толчки отсутствуют . . . . .	1,0
Лёгкие толчки (пульсация нагрузки); кратковременные перегрузки до 125% от расчётной нагрузки . . . . .	1,0—1,2
Умеренные толчки. Кратковременная перегрузка до 150% от расчётной . . . . .	1,3—1,5
Вибрационные нагрузки . . . . .	1,5—1,8
Нагрузки со значительными толчками и вибрациями. Кратковременные перегрузки до 200% от нормальной нагрузки . . . . .	1,8—2,0
Ударные нагрузки . . . . .	2,0—2,5
Нагрузки с сильными ударами. Кратковременные перегрузки до 300%. Плохие условия работы. Повышенная температура . . . . .	2,5—3,0

Таблица 17  
Значение коэффициента  $K_k$

Характер вращения кольца	$K_k$
Внутреннее . . . . .	1,0
Наружное для сферических подшипников . . . . .	1,1
Наружное для всех прочих . . . . .	1,45

Если подшипник работает при чередующихся по времени нагрузках  $Q_1, Q_2, Q_3, \dots, Q_n$ , соответствующих числах оборотов  $n_1, n_2, n_3, \dots, n_n$ , в течение соответствующих отрезков времени  $t_1, t_2, t_3, \dots, t_n$  и периоде работы подшипника  $T = t_1 + t_2 + t_3 + \dots + t_n$ , то приведённая эквивалентная нагрузка будет

$$Q_{экс} = \sqrt[3,33]{\frac{t_1}{T} \cdot \frac{n_1}{N_{усл}} Q_1^{3,33} + \frac{t_2}{T} \cdot \frac{n_2}{N_{усл}} Q_2^{3,33} + \dots + \frac{t_n}{T} \cdot \frac{n_n}{N_{усл}} Q_n^{3,33}}$$

По этой эквивалентной нагрузке при скорости вращения  $N_{усл}$  (условное число оборо-

Таблица 18

## Условные нагрузки на шарикоподшипники

Коэффициент работоспо- собности $C$ в тыс.	Число оборотов подшипника в мин.											
	10	25	50	100	250	500	750	1 000	1 500	2 500	5 000	10 000
	Условная нагрузка в кг при долговечности 5 000 час.											
2,0	78	60	48	39	30	24	21	19	17	15	12	9
3,0	117	89	73	58	45	36	32	30	26	22	16	15
4,0	158	118	96	78	54	48	45	39	35	29	24	19
6,0	234	177	144	117	88	72	63	58	52	44	36	29
8,0	312	236	192	156	118	96	85	78	70	59	48	39
10	390	294	240	195	147	120	106	98	87	74	60	49
12,5	490	370	300	245	185	150	133	123	108	93	75	62
15	585	440	360	292	220	180	160	146	130	110	90	72
20	780	590	480	390	295	245	215	195	175	148	123	98
25	970	740	600	485	370	300	270	245	220	185	150	122
30	1 180	890	720	590	445	360	320	295	265	223	180	148
35	1 360	1 030	840	680	515	420	370	340	305	255	210	170
40	1 560	1 180	960	780	590	480	425	390	350	295	240	195
45	1 760	1 330	1 080	880	665	540	480	440	395	335	270	220
50	1 950	1 470	1 200	975	735	600	530	485	430	370	300	243
60	2 340	1 770	1 440	1 170	885	720	640	585	520	445	360	290
70	2 700	2 060	1 680	1 360	1 030	840	740	680	610	515	420	340
80	3 110	2 350	1 920	1 550	1 170	960	850	775	690	585	480	390
90	3 500	2 650	2 160	1 750	1 320	1 080	960	870	780	660	540	435
100	3 890	2 940	2 400	1 940	1 470	1 200	1 060	970	870	730	600	485
120	4 680	3 530	2 880	2 340	1 760	1 440	1 280	1 170	1 040	880	720	580
140	5 450	4 120	3 350	2 720	2 060	1 680	1 490	1 360	1 220	1 030	840	680
170	6 620	5 000	4 080	3 310	2 500	2 040	1 810	1 650	1 480	1 250	1 020	820
200	7 780	5 880	4 800	3 890	2 940	2 400	2 130	1 950	1 740	1 470	1 200	970
250	9 700	7 350	6 000	4 850	3 670	3 000	2 660	2 430	2 170	1 830	1 500	1 220
300	11 700	8 840	7 200	5 850	4 420	3 600	3 190	2 920	2 600	2 210	1 800	1 460
350	13 600	10 300	8 370	6 800	5 150	4 180	3 730	3 400	3 050	2 570	2 090	1 700
400	15 600	11 800	9 600	7 800	5 900	4 800	4 260	3 900	3 480	2 950	2 400	1 950
500	19 500	14 700	12 000	9 750	7 350	6 000	5 320	4 870	4 350	3 650	3 000	2 430
600	23 700	18 000	14 600	11 850	9 000	7 200	6 490	5 920	5 300	4 500	3 650	2 960

Таблица 19

Переводные коэффициенты  $K$  для перехода от долговечности в 5 000 час., указанной в табл. 18, к необходимой долговечности подшипника

Необходимая долговечность в часах . . . . .	500	750	1 000	1 500	2 000	3 000	5 000	7 500	10 000	15 000	25 000	50 000
Переводный коэффициент	0,50	0,58	0,62	0,70	0,78	0,83	1,00	1,12	1,24	1,40	1,65	2,00

тов обычно берётся равным числу оборотов преобладающего режима) и коэффициентам  $m$ ,  $K_b$  и  $K_k$  производится окончательный выбор подшипника.

Для упрощения расчётов в табл. 18 даны допускаемые на подшипник нагрузки в зависимости от величины его коэффициента работоспособности  $C$  и числа оборотов, при долговечности 5 000 час.

## Расчёт игольчатых подшипников

Величина передаваемого давления зависит от твёрдости рабочих поверхностей цапфы, опоры и роликов.

Твёрдость роликов  $R_c = 56-60$ . Твёрдость цапф и опоры  $R_c = 58-60$ . При твёрдости рабочих поверхностей, меньших, чем указано, расчётная нагрузка на подшипник должна быть уменьшена согласно табл. 20.

Допустимая нагрузка на подшипник

$$Q = 2230 \frac{d + D}{3} \frac{1}{n},$$

где  $Q$  — допустимая безопасная нагрузка на подшипник в кг;

$D$  — диаметр цапфы вала в см;

$d$  — диаметр иголок в см;

$l$  — эффективная длина иголок в см;

$n$  — число оборотов вала в об/мин.

(Для неподвижных, качающихся и тому подобных валов принимать  $n=8$  об/мин.)

Иголки укладываются в гнезда с зазором, который выбирается в зависимости от отношения  $\frac{D}{d}$ , начиная от 0,5  $d$  при  $\frac{D}{d} = 5$  до

0,9  $d$  при  $\frac{D}{d} = 14$ .

Таблица 20

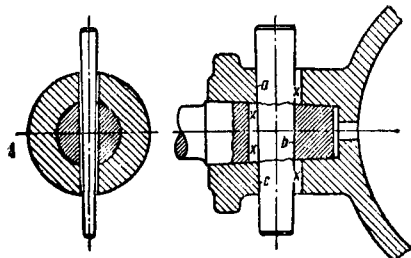
Коэффициенты уменьшения нагрузки на игольчатые подшипники при понижении твёрдости

Твёрдость вала и обоймы по Роквеллу $R_c$ .	60	58	56	54	52	50
Коэффициент уменьшения нагрузки $K$ . . .	1,00	0,96	0,91	0,81	0,70	0,50

## КЛИНОВЫЕ, ШПОНОЧНЫЕ И ШЛИЦЕВЫЕ СОЕДИНЕНИЯ

### КЛИНОВЫЕ СОЕДИНЕНИЯ

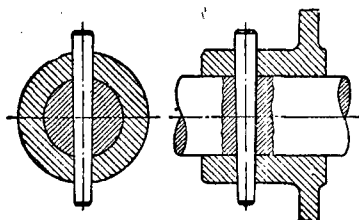
Соединение круглого стержня со ступицей при помощи поперечного клина (фиг. 87) требует очень точной подгонки опорных поверхностей клина *a*, *c* и *b*, которые обычно припиливаются по месту. При таком соеди-



Фиг. 87. Соединение поперечным клином

нении также ослабляются сечения стержня и ступицы. Эти недостатки сильно сокращают область применения этого типа соединений.

Более широкое применение имеют конические штифты (фиг. 88), забиваемые в от-



Фиг. 88. Соединение коническим штифтом

верстия, развёрнутые совместно. Последняя операция сильно облегчает изготовление, но исключает возможность создания натяга вдоль оси и, кроме того, ещё сильнее, чем плоский клин, ослабляет сечение. Такое соединение обычно применяется для небольших слабо нагруженных деталей.

Расчёт этих соединений производится:

- а) на срез по плоскостям *xx*;
- б) на смятие поверхностей *a*, *c* и *b*.

Если стержень работает на изгиб, кручение, сжатие или растяжение, то он проверяется в ослабленном месте на соответствующее напряжение.

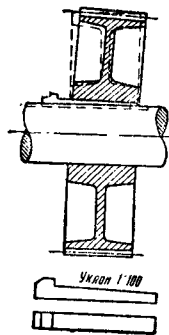
### ШПОНОЧНЫЕ СОЕДИНЕНИЯ

#### Клиновые шпонки

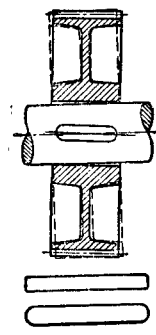
Конструкцию соединения клиновой шпонкой см. на фиг. 89. Клин и паз в ступице делаются с уклоном 1/100; клин забивается в гнездо. В результате этого ступица деформируется и деталь перекашивается на валу. Этот недостаток клина исключает возможность его применения для многих элементов машин, в особенности в тех случаях, когда требуется бесшумность работы.

#### Призматические шпонки

Призматическая шпонка не вызывает искусственного перекоса на валу, но он вполне возможен в результате перекосов пазов в валу и ступице (фиг. 90). Это также сильно ограничивает область применения призматической шпонки.



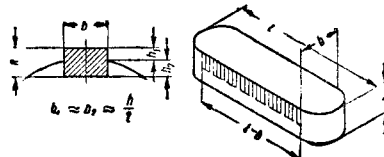
Фиг. 89. Клиновая шпонка



Фиг. 90. Призматическая шпонка

Размеры шпонок различных типов см. ОСТ/НKM 4078 до 90.

Расчёт шпонки производится на срез и на смятие (фиг. 91).



Фиг. 91. К расчёту шпонок

Пусть  $M_{кр}$  — крутящий момент, передаваемый валом, в кгсм;

$r$  — радиус участка вала, на котором установлена шпонка, в см;

$Q$  — усилие на шпонке в кг;

$l$  — полная длина шпонки в см;

$b$  — ширина шпонки в см;

$h$  — полная высота шпонки в см;

$\sigma_{см}$  — напряжение на боковой поверхности шпонки от смятия в кг/см<sup>2</sup>;

$\tau_{ср}$  — напряжение в шпонке от среза в кг/см<sup>2</sup>.

Тогда

$$Q = \frac{M_{кр}}{r}, \quad \sigma_{см} = \frac{2Q}{h(l-b)} \leq R_{см};$$

$$\tau_{ср} = \frac{Q}{(l-b)b + \frac{\pi b^2}{4}} \leq R_{ср}.$$

Шпонки обычно изготавливаются из высокоуглеродистой стали Ст. 45 (Ст. 6) или У8. Допускаемые напряжения на шпонки см. табл. 21.

Таблица 21  
Допускаемые напряжения на шпонки

Материал	Допускаемые напряжения	
	на смятие $R_{см}$ в кг/см <sup>2</sup>	на срез $R_{ср}$ в кг/см <sup>2</sup>
Ст. 45 (или Ст. 6)	1 000	600
Ст. У8	2 000	1 000

### Конические концы валов

Конический конец вала с призматической шпонкой (фиг. 92) в отличие от цилиндрического даёт хорошую центровку насаженной детали (без перекосов). Шпонка в этом случае закладывается свободно, без натяга по боковым сторонам. Конусность вала, равная обычно  $\frac{D-d}{l} = 1/10$ , гарантирует прочную посадку и передачу момента. Размеры конических концов — см. табл. 22.

Таблица 22  
Конические концы валов в мм

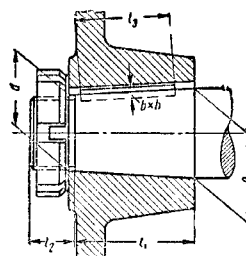
$D$	$l_1$	$l_2$	Резьба	$b \times h$	$l_3$
20	36	17	12×1,25	6×6	30
25	42		16×1,5	8×7	35
30	58	18	20×1,5		50
35			22×1,5	10×8	
40			27×1,5	12×8	
45	82	20	30×1,5	14×9	70
50			36×1,5	16×10	
55			39×1,5		
60			42×1,5	18×11	
65	105	22	45×1,5		90
70			48×1,5	20×12	
75			52×1,5		
80	130	24	50×1,5	24×14	110
90			64×1,5		
100	165	26	76×1,5	28×16	140
110			85×1,5		
120	185	28	95×1,5	32×18	160
130	200		100×1,5	36×20	180

### Сегментные шпонки

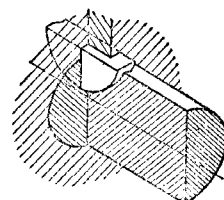
Сегментные шпонки (фиг. 93) применяются обычно для передачи небольших моментов.

Размеры см. ОСТ/НКС 4091 и 92.

Сегментная шпонка выполняется по плотной посадке в пазу вала, где она прочно удерживается от выпадания, что представляет собой большое удобство при монтаже, и этим она выгодно отличается от призматической шпонки. Паз в ступице делается несколько шире, что исключает возможность перекосов детали на валу.



Фиг. 92. Конический конец вала

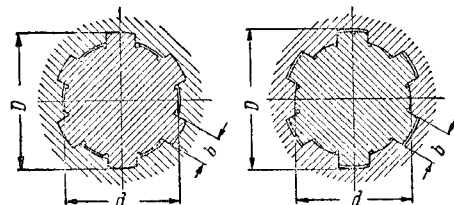


Фиг. 93. Сегментная шпонка

### Шлицевые соединения

Детали, насаживаемые на шлицы (фиг. 94), не перекашиваются, и это является основной причиной их распространения.

Размеры шлицев см. ГОСТ 1139-41.



Фиг. 94. Призматические шлицы

Распространёнными видами центровки шлицевых соединений являются:

- а) центровка по наружному диаметру;
- б) центровка по внутреннему диаметру.

Центровка по наружному диаметру  $D$  является основным видом центровки деталей, не подвергающихся термообработке после чистовой обработки в массовом производстве.

При необходимости закалки детали с отверстием после протяжки с последующей расшлифовкой отверстия центровку приходится переносить на внутренний диаметр  $d$ .

Центровка по внутреннему диаметру применяется также при исполнении шлицевых соединений на универсальных станках в штучном и мелкосерийном производстве.

Пусть  $M_{кр}$  — крутящий момент, передаваемый валом, в кгсм;

$D$  — наружный диаметр шлицев в см;

$d$  — внутренний диаметр шлицев в см;

$b$  — ширина шлица в см;

$l$  — рабочая длина втулки в см;

$Q$  — усилие на шлицы на среднем диаметре в кг;

$i$  — число шлицев;

$\sigma_{см}$  — напряжение на смятие боковых сторон шлица в кг/см<sup>2</sup>;

$\tau_{ср}$  — напряжение среза в шлицах в кг/см<sup>2</sup>.

Тогда

$$Q = \frac{4M_{кр}}{D+d}, \quad \sigma_{см} = \frac{2Q}{i \cdot l \cdot (D-d)}, \quad \tau_{ср} = \frac{P}{i \cdot l \cdot b}.$$

## МУФТЫ

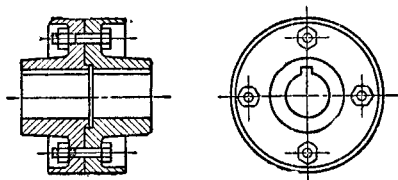
## СОЕДИНИТЕЛЬНЫЕ МУФТЫ

Соединительные муфты различных типов служат для передачи крутящего момента от вала к валу. Они устанавливаются в том случае, когда выключения не требуется. Эти муфты можно разбить на три класса:

а) жёсткие муфты, требующие абсолютно точной взаимной центровки соединяемых валов;

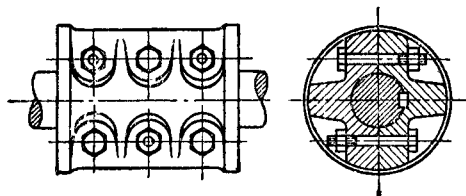
б) эластичные муфты, допускающие несовпадение центров валов в пределах десятых долей миллиметра;

в) муфты с промежуточными деталями (валиками), допускающие значительные расхождения центров.



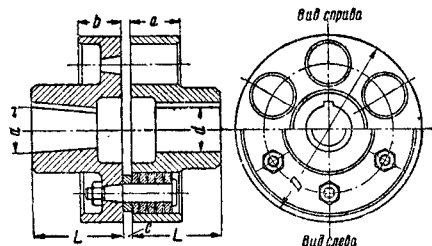
Фиг. 95. Дисковая муфта

Наиболее распространёнными типами жёстких муфт являются дисковая (фиг. 95) и продольно-свёртная (фиг. 96); обе они не допускают расцентровки валов и, следовательно, применимы только в тех случаях, когда центры валов точно совпадают или когда они сами являются средством центровки валов, например, при соединении концов длинных трансмиссионных валов.



Фиг. 96. Продольно-свёртная муфта

Постановка таких муфт недопустима, когда взаимная центровка валов не гарантирована или центровка производится при монтаже с помощью иглы подбором подкладок под устанавливаемые механизмы.



Фиг. 97. Эластичная муфта с резиновыми шайбами

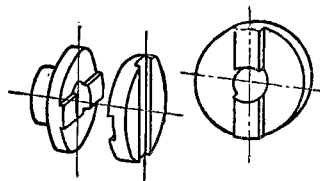
В этом случае лучшим и наиболее простым типом муфт являются дисковые эластичные муфты с кожаными или резиновыми шайбами (ГОСТ 2229-43, фиг. 97 и табл. 23). Эти

муфты допускают расцентровку валов на несколько десятых долей миллиметра, — точность, которую можно достигнуть на монтаже иглой и подкладками.

Таблица 23  
Размеры эластичных муфт в мм

Момент, передаваемый валом, в кгс·м	$d$ (наименьший, наибольший)	$D$	$L$	$a$	$b$	Монтажный зазор $C$ около	Диаметр резиновых шайб
3,6	12—18	90	42	24	22	2	20
6,3	16—22	100	52	24	22	2	20
13,3	19—28	120	62	30	35	2,5	28
23,6	24—38	140	82	30	35	2,5	28
42	30—48	160	82	40	45	3	36
72	35—55	190	112	40	45	3	36
135	40—65	225	112	55	55	4	46
207	50—75	260	142	55	55	4	46
288	60—85	295	142	70	70	5	58
482	70—95	330	175	70	70	5	58
580	80—105	365	175	82	90	6	72
840	90—120	405	215	82	90	6	72

При изготовлении этих муфт, в особенности когда они вращаются с числом оборотов более 1000 в минуту, особое внимание должно быть обращено на их балансировку. Самым простым методом балансировки является обточка кругом. При посадке их на



Фиг. 98. Дисковая муфта с перпендикулярными пазами

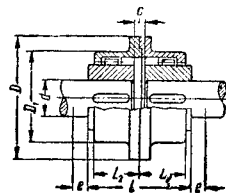
валы необходимо следить за тем, чтобы шпонка не вызвала значительных перекосов.

Местом, подверженным сильному износу, являются сопряжения пальцев с дисками; лучшим видом соединения является в данном случае конус.

В тех случаях, когда ни при монтаже, ни при работе нельзя гарантировать определённую точность центровки, приходится применять муфты с промежуточными деталями.

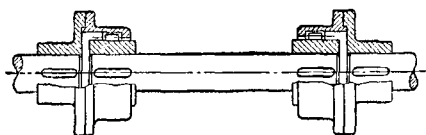
Наиболее простой, пригодной для малого числа оборотов, является дисковая муфта с перпендикулярными пазами (фиг. 98); она хорошо передаёт большие крутящие моменты, но не годится для значительного числа оборотов, так как средний диск не может быть балансирован.

Любые числа оборотов и любые моменты могут передаваться через зубчатые муфты (фиг. 99, табл. 24), но в виде, изображённом на фиг. 99, они требуют сравнительно точ-



Фиг. 99. Зубчатая муфта

ной центровки валов. Коренным решением вопроса в данном случае является применение удлиненных зубчатых муфт с промежуточными валликами (фиг. 100). Несовпадение



Фиг. 100. Удлиненная зубчатая муфта

центров соединяемых валов может доходить до нескольких миллиметров, причём хорошая работа соединения гарантирована и при большом числе оборотов, при условии соответствующей балансировки муфты.

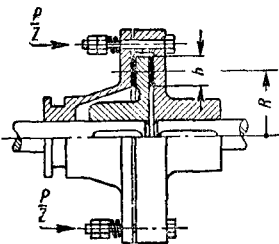
Таблица 24  
Размеры зубчатых муфт в мм (фиг. 99)

Момент на валу в кгс	$d$ (наименьший, наибольший)	$D$	$D_1$	$L$	$L_1$	$L_2$	$c$	$e$	Зубья модуль $m$	число $z$
72	20—40	160	95	115	55	50	5	10	2,5	30
180	25—50	185	120	135	65	60	5	10	2,5	38
360	30—60	220	145	165	80	75	5	10	3	40
570	40—75	245	170	195	95	90	5	15	3	48
930	60—90	290	200	230	110	105	10	15	3	56
1 430	70—100	320	230	250	120	115	10	20	4	48
2 000	80—120	350	260	280	135	130	10	25	4	56
2 700	100—140	390	290	320	155	150	10	25	4	62

### ФРИКЦИОННЫЕ МУФТЫ

Фрикционные муфты применяются при периодической передаче крутящего момента от вала к валу, т. е. при необходимости включения дополнительных механизмов без остановки двигателя.

Основными видами фрикционных муфт являются дисковые и конические (см. схемы фиг. 101 и 102). Конструктивное оформление



Фиг. 101. Дисковая фрикционная муфта

этих муфт бывает очень различно. Ввиду того что отход дисков или конуса измеряется долями миллиметра, точность относительного расположения ведомого и ведущего валов имеет решающее значение для работы муфты; взаимная центровка валов для хорошей работы муфты обязательна.

#### Расчёт дисковой муфты (фиг. 101)

Момент сцепления в дисках

$$M_c = i \cdot P \cdot f \cdot R.$$

Сила нажатия

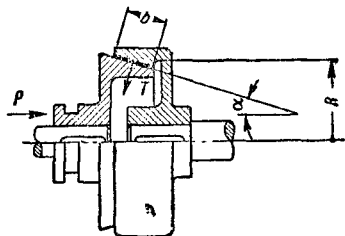
$$P = \frac{M_c}{i \cdot f \cdot R}.$$

Удельное давление на диски

$$P_0 = \frac{M_c}{2\pi i \cdot f \cdot R^2 \cdot b}.$$

Здесь  $M_c$  — момент сцепления—момент трения между дисками в кгс $\cdot$ м;  
 $f$  — коэффициент трения, который при применении фрикционных прокладок может быть практически принят равным 0,25;  
 $i$  — число трущихся поверхностей;  
 $R$  — средний радиус дисков в см;  
 $P$  — сила нажатия на диски в кг;  
 $z$  — число нажимающих пружин, см. фиг. 101;  
 $b$  — ширина дисков в см;  
 $P_0$  — удельное давление на диски в кг/см $^2$ .

Для надёжной работы фрикционных прокладок необходимо, чтобы удельное давление было не более 2—2,5 кг/см $^2$ .



Фиг. 102. Конусная фрикционная муфта

Зная величину передаваемого муфтой крутящего момента

$$M_{кр} = 71\,620 \frac{N}{n} \text{ (кгс}\cdot\text{м)},$$

где  $N$  — передаваемая мощность в л. с.;  
 $n$  — число оборотов в минуту,  
определяют момент сцепления, задавшись коэффициентом запаса  $\beta = 1,2—1,5$ ,

$$M_c = \beta \cdot M_{кр}.$$

Далее по приведённым формулам можно сделать подсчёт основных величин, характеризующих муфту.

#### Расчёт конической муфты (фиг. 102).

Пусть добавочно к вышеприведённым обозначениям:

$\alpha$  — половина угла при вершине конуса;  
 $2T$  — суммарная реакция конической поверхности действию нажимающей силы  $P$  в кг.

Тогда

$$M_c = \frac{JPR}{\sin \alpha}.$$

Сила нажатия

$$P = \frac{M_c \sin \alpha}{J R}.$$

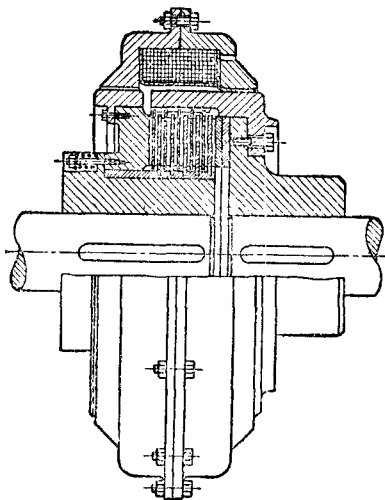
Удельное давление

$$P_0 = \frac{M_c}{2\pi b J R^2}.$$

Коэффициент запаса и допустимое удельное давление для конической муфты берутся те же, что и для дисковой муфты.

### ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ МУФТЫ

Электромагнитные муфты (фиг. 102а) обычно применяются в силовых установках значительной мощности, источником энергии



Фиг. 102а. Электромагнитная муфта

которых являются двигатели внутреннего сгорания. Эти муфты требуют для своего включения ток и поэтому не заменяют фрикционных сцеплений, применяющихся в автопромышленности.

Основные преимущества этих муфт:

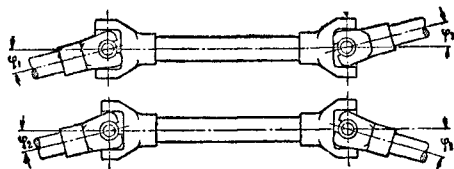
- а) возможность включения с любого места при помощи кнопки;
- б) возможность регулировки силы сцепления;
- в) отсутствие осевых усилий в валах муфты.

### КАРДАНЫЕ ВАЛЫ

Карданные валы применяются для передачи вращения между валами, оси которых не являются продолжением одна другой.

Один кардан может быть установлен только в том случае, когда оси имеют общую точку — точку пересечения. Если оси валов не пересекаются, то необходима постановка двух карданов с промежуточным валиком.

Обыкновенное карданное сочленение обладает тем недостатком, что передаёт вращение от ведущего вала к ведомому неравномерно. При равномерном вращении ведущего вала скорость ведомого вала колеблется, и, при значительных углах между осями, неравномерность вращения может достигнуть 10 — 13 процентов.



Фиг. 103. Карданные валы

При постановке двух карданов второй кардан может компенсировать неравномерность вращения, возникшую в первом, и дать равномерное вращение ведомого вала (промежуточный валик будет вращаться неравномерно).

Это будет иметь место в тех случаях, когда углы между ведущими и промежуточными валами  $\varphi_1$  (фиг. 103) и промежуточным и ведомым  $\varphi_2$  равны.

## ПРИВОДЫ

### СОСТАВНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ ПРИВодОВ

Привод от двигателя к рабочей машине состоит из передач тех или иных типов, передающих мощность от одного вала к другому; опорами валов являются подшипники различных типов.

### РАСЧЁТ ПРИВодОВ

**Передаточное число привода.** Передачным числом передачи называется отношение числа оборотов предыдущего вала к последующему в направлении силового потока.

Для замедляющей передачи (привода) передачное число больше единицы:  $i > 1$ .

Для ускоряющей передачи (привода)  $i < 1$ .

Передачное число всего привода равно произведению передачных чисел всех звеньев привода:

$$i = i_I \cdot i_{II} \cdot i_{III} \cdot \dots \cdot i_N.$$

Для промежуточного вала, например, для вала  $K$  (фиг. 104), передачное число может

быть найдено, как произведение передаточных чисел предыдущих звеньев:

$$i_K = i_1 \cdot i_2 \cdot i_3 \cdot \dots \cdot i_{K-1}.$$

**Коэффициент полезного действия привода.** Коэффициент полезного действия всего привода равен произведению коэффициентов полезного действия, составляющих привод звеньев (см. табл. 25 и 26).

$$\eta_{общ} = \eta_I \cdot \eta_{II} \cdot \eta_{III} \cdot \dots \cdot \eta_N.$$

Коэффициент полезного действия всех звеньев до вала  $K$  будет

$$\eta_K = \eta_I \cdot \eta_{II} \cdot \dots \cdot \eta_{K-1}.$$

### Числа оборотов валов привода

$$n_n = \frac{n_1}{i_{общ}}; \quad n_K = \frac{n_1}{i_{K-1}}.$$

**Вращающие моменты на валах** могут быть найдены, исходя из мощности и числа оборотов вала:

$$M_K = 71\,620 \frac{N}{n_{K-1}} \eta_{K-1} \quad (\text{в кгсм}).$$

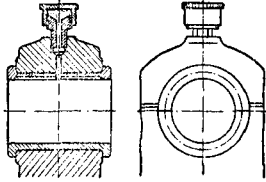
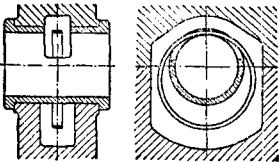



Таблица 25

## Характеристики передач приводов

Наименование передачи	Схема	Передаточное число $i$	Коэффициент полезного действия $\eta$
Цилиндрическая с прямыми зубьями		$\frac{z_2}{z_1} = \frac{D_2}{D_1} = \frac{n_1}{n_2}$	0,99
Цилиндрическая с косыми или шевронными зубьями		$\frac{z_2}{z_1} = \frac{D_2}{D_1} = \frac{n_1}{n_2}$	0,99
Цилиндрическая с внутренними зубьями		$\frac{z_2}{z_1} = \frac{D_2}{D_1} = \frac{n_1}{n_2}$	0,99
Коническая с прямыми зубьями		$\frac{z_2}{z_1} = \frac{D_2}{D_1} = \frac{n_1}{n_2}$	0,99
Коническая с косыми и спиральными зубьями		$\frac{z_2}{z_1} = \frac{D_2}{D_1} = \frac{n_1}{n_2}$	0,99
Червячная с эвольвентным или трапецидальным червяком		$\frac{z_w}{a}$	(См. табл. 61)
Червячная глобоидальная ( $z_w$ — число зубьев, $a$ — число ходов червяка)		$\frac{z_w}{a}$	(приближенно, как и для эвольвентного червяка)
Винтовая		$\frac{z_2}{z_1}$	(не применяется для передачи мощности)
Ременная с плоским ремнём		$0,98 \frac{D_2}{D_1}$	0,95—0,96
Ременная с клиновидным ремнём		$\frac{D_2}{D_1}$	0,95—0,96
Цепная с роликовой или бесшумной цепью		$\frac{z_2}{z_1}$	0,96—0,97
Планетарная простая с прямым или косым зубом		См. табл. 55	0,98
Планетарная двухступенчатая с прямым или косым зубом		См. табл. 56	0,98

Таблица 26  
Коэффициент полезного действия подшипников  
в приводах

Вид подшипников и схема	К. п. д.
Скольжения с густой смазкой . . . . . 	0,96
Скольжения с жидкостной смазкой кольцом (или под давлением) . . . . . 	0,97
Шариковые и роликовые подшипники 	0,99

Если известен момент на первом валу, то момент на  $K$ -ом валу

$$M_K = M_1 i_{K-1} \eta_{K-1}$$

и соответственно для выходного вала

$$M_n = M_1 i_{\text{общ}} \eta_{\text{общ}}$$

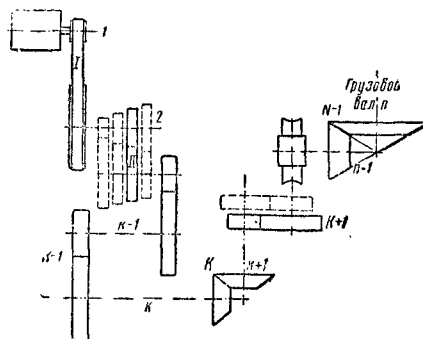
Усилия в передачах могут быть найдены делением момента на валу, несущего данную деталь (шестерню, шкив), на радиус начальной окружности детали:

$$P_K = \frac{M_K}{R_K}$$

В большинстве случаев усилия в двух сопряженных деталях равны (если не учитывать к.п.д. данной передачи):

$$P_K = \frac{M_{K+1}}{r_{K+1}}$$

В передачах со скрепляющимися осями (червячных, винтовых) усилия, найденные таким образом, могут значительно отличаться.



Фиг. 104. Привод

- $N$  — мощность двигателя, сообщаемая приводу, в л. с.;  
 $n_1, n_2, n_3, \dots, n_n$  — число оборотов валов в об/мин;  
 $i_I, i_{II}, i_{III}, \dots, i_{N-1}$  — передаточные числа передач;  
 $\eta_I, \eta_{II}, \eta_{III}, \dots, \eta_{N-1}$  — коэффициенты полезного действия передач, включая потери в опорах;  
 $M_1, M_2, M_3, \dots, M_n$  — моменты на валах в кгсм;  
 $P_I, P_{II}, P_{III}, \dots, P_{N-1}$  — усилия в передачах — окружные усилия на зубе — рабочее натяжение ремня и пр. в кг;  
 $v_I, v_{II}, v_{III}, \dots, v_{N-1}$  — окружные скорости в передачах в м/сек;  
 $r_I, r_{II}, r_{III}, \dots, r_N, r_{N-1}$  — радиусы начальных окружностей элементов передач в см.

Окружные скорости могут быть найдены, исходя из числа оборотов вала (об/мин) и радиуса насаженной детали ( $m$ ):

$$v_k = \frac{2\pi r n}{60} \text{ (м/сек.)}$$

Для передач с пересекающимися осями окружные скорости сопряженных элементов могут быть не равны.

## РЕМЁННАЯ ПЕРЕДАЧА

В настоящее время применяются ремённые передачи с плоским и клиновидным ремнём, причём основным типом ремня в обоих случаях является прорезиненный ремень на текстильной основе.

Применение кожаных ремней (ОСТ 5773/НКЛП 176) ограничено.

Хлопчатобумажные (ОСТ 3155-37, 3156-37, ГОСТ 10082-39) и шерстяные ремни, как имеющие низшие, в сравнении с прорезинен-

ными ремнями, эксплуатационные качества, имеют также ограниченное применение.

### ПЕРЕДАЧА ПЛОСКИМ РЕМНЁМ

Прорезиненные плоские ремни изготавливаются трёх основных типов (ГОСТ 101-41): а) нарезные; б) послойно завёрнутые; в) спирально завёрнутые.

Ширину изготавливающих ремней см. в табл. 27, толщину ремней — в табл. 28.

Т а б л и ц а 27  
Ширина плоских прорезиненных ремней в мм

Тип ремня			Рекомен- дуемое число прокладок
нарезной	послойно завёрнутый	спирально завёрнутый	
—	20 25 30 (35)40	—	2
—	—	20 25 30 (35)40	3
50 60 70	—	50 60 70	3—5
80 100 (115)	—	80 100 (115)	3—6
125 150 175	175	125 150 175	4—6
200 225	200 225	200 225	4—6
250 300	250 300	250 300	4—7
350 400 450	350 400 450	350 400 450	5—8
500	500	500	5—9

Примечание. Ремни, размеры которых указаны в скобках, изготавливаются по заказу только для существующих передач. Ремни шириной больше 500 мм изготавливаются по специальным заказам, причём ширина должна быть кратной 100.

Т а б л и ц а 28

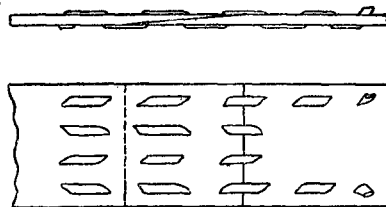
Толщина плоских ремней в мм									
Тип ремня	Толщина ремней при числе прокладок								
	2	3	4	5	6	7	8	9	
Нарезные при $b < 300$ при $b > 300$	—	4,5	6,0	7,5	9,0	10,5	—	—	—
	—	—	—	8,0	9,6	11,2	12,8	14,4	—
Завёрнутые при $b < 300$ при $b > 300$	2,5	3,75	5,0	6,25	7,5	8,75	—	—	—
	—	—	—	6,75	8,1	9,45	10,8	12,15	—

Примечание.  $b$  — ширина ремня в мм.

Прорезиненные ремни без обкладок пригодны для работы в сухих и пыльных помещениях даже при высокой температуре. Для влажных помещений с воздухом, содержащим пары воды и кислот, рекомендуются ремни с двусторонней резиновой обкладкой. Прорезиненные ремни следует оберегать от попадания масел и жиров, бензина и щелочей. Особенно опасны для них минеральные масла.

Прорезиненные ремни хуже, чем другие виды ремней, переносят колебание нагрузки и в особенности перегрузку.

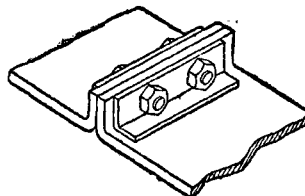
Прорезиненные ремни лучше текстильных ремней, но хуже кожаных, работают с переключениями на холостой шкив (отводками) и на ступенчатых шкивах.



Фиг. 105. Сшивка кожаных ремней

Для неравномерной ударной нагрузки рекомендуется применять шерстяные ремни, которые мало чувствительны к внешним условиям работы, но обладают меньшей тяговой способностью.

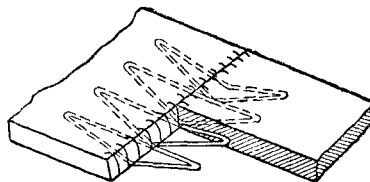
Лучшей сшивкой кожаных ремней является сшивка скошенных концов сыромятным ремешком (фиг. 105). Для прорезинен-



Фиг. 106. Сшивка прорезиненных ремней планками

ных ремней может быть рекомендована сшивка стальными планками и болтами (фиг. 106), когда это допускают габариты близлежащих деталей.

Хорошие результаты при отсутствии сыромяти даёт сшивка прорезиненных ремней струной из кишок, как это показано на фиг. 107.



Фиг. 107. Сшивка прорезиненных ремней струной

Для хорошей работы ременной передачи необходимо соблюдение ряда отношений и размеров, основные из которых следующие:

а) диаметр меньшего шкива выбирается исходя из толщины ремня, причём отношение  $\frac{d}{\delta}$  должно быть не менее указанного

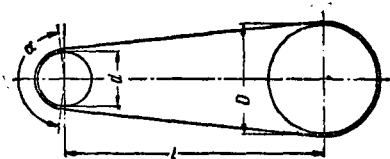
в табл. 29;

Таблица 29

Диаметры шкивов для плоских ремней

Вид ремня	Отношение $d$ (наименьший диаметр шкива) $\delta$ (толщина ремня)	
	допустимо	рекомендуемо
Кожаный . . . . .	25	35
Прорезиненный		
$b < 300$ . . . . .	30	40
$b > 300$ . . . . .	40	50
Хлопчатобумажный		
штытый . . . . .	45	50
тканый . . . . .	25	30
Шерстяной тканый .	25	30

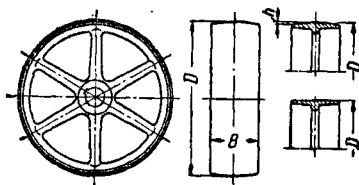
б) угол обхвата меньшего шкива (фиг. 108)  $\alpha$  должен быть не менее  $150^\circ$ , при меньших углах обхвата необходима постановка натяжного ролика;



Фиг. 108. Схема ремённой передачи

в) расстояние между центрами шкивов  $l$  должно быть не менее  $l = 2(D + d)$ . Нежелательно вертикальное расположение шкивов и расстояние между центрами, превосходящее 10 м;

г) передаточное число плоскоремённых передач не должно превышать: для открытых передач — 5, для перекрёстных — 6.



Фиг. 109. Ремённый шкив

Для передач с натяжными устройствами передаточное число допускается: при подвижном вале — до 8, при натяжных роликах — до 10;

д) во избежание соскакивания ремня ободы шкивов делаются выпуклыми с размерами согласно фиг. 109 и табл. 30 (СТ 1655).

Материал шкивов для окружных скоростей, меньших 20 м/сек, — чугун СЧ-12-28, до 25 м/сек — чугун СЧ-15-32.

Для больших окружных скоростей шкивы должны изготавливаться из стального литья, допускающего применение окружных скоростей до 40 м/сек.

Таблица 30

Размеры шкивов для плоских ремней (СТ 1655) в мм

Ширина $B$	Допуск	Стрелка $h$	Применять при ширине ремня
40 50 60	-2	1	30 40 50
70 85			60 (70) 75
100			80, 85, 90
125 150	-4	2	100 125
175 200 225			150 175 200
250 300 350	-8	3	225 250, 275 300
400			350
450 500 600	-10	4	400 450 500, 550

Таблица 30а

Размеры шкивов для плоских ремней (СТ 1655) в мм

Диаметр $D$	Допуск	Диаметр $D$	Допуск
50 63 80	±1	560 630 710	±4
90 100		800 900	
112 125 140		1 000 1 120	
160 180 200	±2	1 250 1 400 1 600	±6
225 250		2 000 2 250	
280 320 360		2 500 2 800 3 200	
400 450 500	±3	3 600 4 000	±8

## Расчёт плоскоремённых передач

Современный расчёт ремённых передач по кривым скольжения состоит в подсчёте того усилия, которое может быть передано передачей без скольжения — боксования ремня по шкиву. Некоторое упругое скольжение ремня по шкиву имеет место всегда и вызывает известную потерю окружной скорости, вследствие чего передаточное число ремённой передачи не равно отношению диаметров шкивов, а несколько меньше:

$$i = \frac{n_1}{n_2} = 0,98 \frac{D_2}{d_1},$$

где  $i$  — передаточное число передачи;  
 $n_1, n_2$  — число оборотов шкивов;  
 $d_1$  и  $D_2$  — диаметры шкивов.

Величина усилия, которая может быть передана данным ремнём, определяется по формуле

$$P = C_0 C_1 C_2 C_3 K_0 F [\text{кг}],$$

где  $F$  — площадь сечения ремня  $b \times \delta$  в  $\text{см}^2$ ;  
 $K_0$  — полезное напряжение ремня (табл. 31) или удельное окружное усилие в  $\text{кг}/\text{см}^2$ ;

$C_0$  — по табл. 32;  $C_2$  — по табл. 34;  
 $C_1$  — по табл. 33;  $C_3$  — по табл. 35.

Натяжение ремня неработающей передачи при установившемся режиме передачи может быть принято  $18 \text{ кг}/\text{см}^2$ . Опыты показывают, что при больших натяжениях ремни очень быстро вытягиваются и при  $18 \text{ кг}/\text{см}^2$  наступает некоторое довольно продолжительное равновесие, которое соответствует наилучшим условиям работы ремня. При этих условиях ремни разных материалов передают (без боксования) различные полезные нагрузки  $K_0$ , величина которых может быть взята из табл. 31, для окружной скорости

Таблица 31

Допускаемые полезные напряжения  $K_0$  для плоских приводных ремней при натяжении 18 кг/см<sup>2</sup>

Тип ремня	При отношении $\frac{D \text{ (диаметр шкива)}}{b \text{ (толщина ремня)}}$									
	20	25	30	35	40	45	50	60	75	100
	$K_0$ в кг/см <sup>2</sup>									
Кожанный . . . . .	(14,0)	17,0	19,0	20,4	21,5	22,3	23,0	24,0	25,0	26,0
Прорезиненный (при $b < 300 \text{ мм}$ ) . . . . .	—	(21,0)	21,7	22,1	22,5	22,8	23,0	23,3	23,7	24,0
Прорезиненный (при $b > 300 \text{ мм}$ ) . . . . .	—	—	—	—	(20,5)	20,8	21,0	21,3	21,7	22,0
Хлопчатобумажный шитый	—	—	—	—	(18,0)	18,5	19,0	19,7	20,3	21,0
Хлопчатобумажный тканый	(13,5)	15,0	16,0	16,7	17,2	17,7	18,0	18,5	19,0	19,5
Шерстяной тканый . . . . .	(10,5)	12,0	13,0	13,7	14,2	14,7	15,0	15,5	16,0	16,5

10 м/мин, угла обхвата 180° и спокойном режиме работы.

Для вычисления усилий при других условиях работы вводятся коэффициенты  $C_0$ ,  $C_1$ ,  $C_2$ .  
 $C_0$  — коэффициент, зависящий от рода передачи (табл. 32);

Таблица 32

Значения коэффициента  $C_0$ 

Род передачи	$C_0$
Обыкновенная открытая с натяжным валом, с натяжным роликом и простая с направляющими роликами . . . . .	1,00
Перекрытая передача . . . . .	0,80
Полуперекрытая и угловая с направляющими роликами . . . . .	0,75

$C_1$  — геометрический коэффициент, зависящий от угла обхвата (табл. 33);

Таблица 33

Коэффициент угла обхвата

Угол обхвата $\alpha$	150°	160°	170°	180°	190°	200°	210°	220°	230°	240°
Коэффициент $C_1$	0,91	0,94	0,97	1,00	1,03	1,06	1,09	1,12	1,15	1,18

$C_2$  — скоростной коэффициент, учитывающий влияние скорости (табл. 34);

Таблица 34

Коэффициент скорости  $C_2$ 

Окружная скорость $v$ в м/сек	1	5	10	15	20	25	(30)
Коэффициент $C_2$	1,04	1,03	1,00	0,95	0,88	0,79	0,68

$C_3$  — коэффициент режима, учитывающий характер и продолжительность работы передачи (табл. 35).

Величина угла обхвата может быть подсчитана по формуле для обыкновенной передачи:

$$\alpha \approx 180^\circ - \frac{D-d}{l} \cdot 60.$$

Для перекрёстной передачи соответственно

$$\alpha \approx 180^\circ + \frac{D+d}{l} \cdot 60,$$

где  $D$  и  $d$  — диаметры большого и малого шкивов передачи в м;

$l$  — межцентровое расстояние в м.

Окружная скорость

$$v = \frac{\pi D n}{60},$$

где  $v$  — окружная скорость в м/сек;

$D$  — диаметр шкива в м;

$n$  — число оборотов шкива в об/мин.

Зная величину усилия, передаваемого ремнём, и окружную скорость, можно подсчитать:

а) передаваемую мощность

$$N = \frac{P \cdot v}{75},$$

где  $N$  — мощность, передаваемая передачей, в л. с.;

$P$  — рабочее усилие на ремне в кг;

$v$  — окружная скорость в м/сек;

б) давление на вал со стороны шкива. Приблизительно это давление будет равно  $3P$ , где  $P$  — рабочее усилие на ремне.

## КЛИНОРЕМЁННАЯ ПЕРЕДАЧА

Клиновыми ремнями называются резиноканевые ремни, имеющие в поперечном сечении форму трапеции, боковые поверхности которой являются рабочими (фиг. 110 и табл. 36, ГОСТ 1284-45).

Эти ремни применяются в тех случаях, когда габариты передачи должны быть наименьшими, когда передаточное число велико ( $i=7-10$ ), мал угол обхвата шкива, передача имеет вертикальное или близкое к нему расположение. Широкое распространение полу-

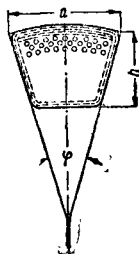
Таблица 35

Коэффициент режима работы  $C_p$ 

Характер нагрузки	Наименование машины	Двигатели на ведущем валу					
		Электромоторы: постоянного тока, переменного тока однофазные и асинхронные с короткозамкнутым ротором. Турбины водяные и паровые			Электромоторы переменного тока синхронные и асинхронные с контактными кольцами; двигатели внутреннего сгорания, паровые машины		
		Число смен работы					
		1	2	3	1	2	3
Лёгкая пусковая нагрузка до 125% нормальной. Почти постоянная рабочая нагрузка	Небольшие вентиляторы и воздушодувки; насосы и компрессоры, центробежные ротационные; токарные, сверлильные и шлифовальные станки, динамомашины, ленточные транспортеры и т. д.	1,0	0,9	0,8	0,9	0,8	0,7
Пусковая нагрузка до 150% нормальной. Незначительные колебания рабочей нагрузки	Лёгкие трансмиссионные приводы, станки фрезерные, зуборезные, револьверные и автоматы; поршневые насосы и компрессоры с относительно тяжёлым маховиком; пластинчатые транспортеры и т. п.	0,9	0,8	0,7	0,8	0,7	0,6
Пусковая нагрузка до 200% нормальной. Значительные колебания рабочей нагрузки	Реверсивные приводы: станки строгальные, долбежные, зубодолбежные, поршневые насосы и компрессоры с относительно лёгкими маховиками, транспортеры скребковые и элеваторы; винтовые и эксцентриковые прессы с относительно тяжёлыми маховиками и т. д.	0,8	0,7	0,6	0,7	0,6	0,5
Пусковая нагрузка до 300% нормальной. Весьма неравномерная и ударная рабочая нагрузка	Подъемники, экскаваторы, бегуны; глиномаялки; лесопильные рамы; мельницы жерновые, шаровые, вальцовые; эксцентриковые и винтовые прессы с относительно лёгкими маховиками; ножницы; молотковые дробилки и т. п.	0,7	0,6	0,5	0,6	0,5	0,4

чили эти ремни у индивидуальных приводов от электромоторов.

Клиновые ремни изготавливаются в виде замкнутых колец стандартной длины (табл. 37). Расчётная длина ремня соответствует длине ремня по нейтральной оси, проходящей через центры тяжести поперечных сечений ремня. Эта длина применяется для нахождения межцентрового расстояния шкивов. Внутренняя длина ремня соответствует длине ремня по внутренней его окружности.



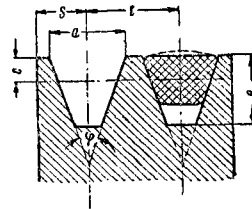
Фиг. 110

Таблица 36

Размеры клиновидных ремней

Обозначения ремня	в мм		$\varphi$ в °	Площадь сечения ремня в см²
	a	b		
О	10	6	40	0,47
А	13	8	40	0,81
Б	17	10,5	40	1,38
В	22	13,5	40	2,30
Г	32	19	40	4,76
Д	38	23,5	40	6,92
Е	50	30	40	11,70

Конструкция и размеры шкивов даны на фиг. 111 и в табл. 38. Диаметры минимальных и рекомендуемых шкивов для ремней различных сечений даны в табл. 39. Угол клина канавок шкива для плотного прилегания боковых сторон ремня должен быть несколько меньше угла клина ремня (значения соответствующих углов канавок шкива даны в табл. 38 в зависимости от диаметра шкива). За расчётный диаметр шкива принимают диаметр, представляющий собой отрезок прямой, соединяющий две противоположные точки нейтральной оси ремня, огибающего шкив.



Фиг. 111. Сечение шкива для клиновых ремней

### Расчёт клиноремённых передач

Расчёт клиноремённых передач преследует две цели:

а) определение мощности, которую может передать существующая передача, или определение числа ремней, которые необходимы для проектируемой передачи;

б) определение необходимой длины ремня (табл. 37) при заданном расстоянии между центрами или нахождение расстояния между центрами при заданной длине ремня.

Таблица 37  
Длины клиновых ремней по ГОСТ 1284-45

Внутренняя длина ремней в мм	Профиль ремней						
	О	А	Б	В	Г	Д	Е
	Длина ремней расчётная в мм						
500	519	525	—	—	—	—	—
560	579	585	—	—	—	—	—
630	649	655	663	—	—	—	—
710	729	785	743	—	—	—	—
800	819	825	833	—	—	—	—
900	919	925	933	—	—	—	—
1 000	1 019	1 025	1 033	—	—	—	—
1 120	1 139	1 145	1 153	—	—	—	—
1 250	1 269	1 275	1 283	—	—	—	—
1 400	1 419	1 425	1 433	—	—	—	—
1 600	1 619	1 625	1 633	—	—	—	—
1 800	1 819	1 825	1 833	1 844	—	—	—
1 900	—	—	—	1 943	—	—	—
2 000	2 019	2 025	2 033	2 044	—	—	—
2 120	—	—	—	2 164	—	—	—
2 240	2 259	2 265	2 273	2 284	—	—	—
2 360	—	—	—	2 404	—	—	—
2 500	2 519	2 525	2 533	2 544	—	—	—
2 650	—	—	—	2 634	—	—	—
2 800	—	2 825	2 833	2 844	—	—	—
3 150	—	3 175	3 183	3 194	3 210	—	—
3 550	—	3 575	3 583	3 594	3 610	—	—
4 000	—	4 025	4 033	4 044	4 060	—	—
4 500	—	—	4 533	4 544	4 560	4 574	—
5 000	—	—	5 033	5 044	5 060	5 074	—
5 600	—	—	5 633	5 644	5 660	5 674	—
6 300	—	—	6 333	6 344	6 360	6 374	6 385
7 100	—	—	—	7 144	7 160	7 174	7 195
8 000	—	—	—	8 044	8 060	8 074	8 095
9 000	—	—	—	9 044	9 060	9 074	9 095
10 000	—	—	—	—	10 060	10 074	10 095
11 200	—	—	—	—	11 260	12 274	11 295
12 500	—	—	—	—	—	12 574	12 595
14 000	—	—	—	—	—	14 074	14 095

Таблица 38

Размеры шкивов для клиновидных ремней

Обозначение размеров	Профиль ремней						
	О	А	Б	В	Г	Д	Е
	Размеры в мм						
а	10	13	17	22	32	38	50
с	3	4	5	7	9	12	16
е	10	13	17	22	30	36	48
г	12	16	21	27	33	44	58
в	9	12	15	18	23	26	32

Подсчёт числа ремней может быть произведён на основании табл. 40 и 41 и по формулам:

$$z = \frac{N}{C_1 C_3 N_0}$$

(округляется до ближайшего целого числа)

$$P = C_1 C_2 C_3 z K F,$$

где  $N$  — мощность, передаваемая передачей, в л. с.;

$N_0$  — мощность, передаваемая одним ремнём, при заданной окружной скорости из табл. 41, в л. с.;

$z$  — число ремней;

$P$  — окружное усилие, приходящееся на все ремни, в кг;

$F$  — поперечное сечение ремня (из табл. 36) в см<sup>2</sup>;

$K$  — допускаемое полезное напряжение на ремень (из табл. 42) в кг/см<sup>2</sup>;

$C_1$  — коэффициент, учитывающий угол обхвата (из табл. 33);

$C_2$  — коэффициент скорости (из табл. 34);

$C_3$  — коэффициент режима работы (из табл. 35).

Если окружное усилие  $P$ , то передаваемая мощность

$$N = \frac{P \cdot v}{75},$$

где  $v$  — окружная скорость в м/сек.

Давление на вал может быть принято равным  $2,5 P$  (кг).

Длина ремня при известных размерах передачи (фиг. 108)

$$L = 2l + 1,57(D + d) + \frac{(D - d)^2}{4l},$$

где  $D$  — диаметр большого шкива в мм;

$d$  — диаметр малого шкива в мм;

$l$  — расстояние между центрами шкивов в мм.

Таблица 39

Минимальные и рекомендуемые диаметры шкивов клиноремённых передач в мм

Профиль ремней							Угол ф-лоба шкива в °
О	А	Б	В	Г	Д	Е	
70	100	140	200	320	500	800	34
90	125	180	250	400	630	1 090	36
112	160	225	315	500	800	1 250	38
140	200	280	400	630	1 000	1 600	40
и более							40

Таблица 40

Выбор сечения ремня в зависимости от передаваемой мощности

Передаваемая мощность в л. с.	Рекомендуемое сечение ремней
От 0,5 до 1	О
Свыше 1 » 3	ОА
» 3 » 5	ОАБ
» 5 » 10	АБ
» 10 » 25	БВ
» 25 » 50	ВГ
» 50 » 100	ГД
» 100 » 200	ДЕ
» 200	Е

На основании полученного результата выбирают из табл. 37 ремень и после этого вычисляют действительное точное расстояние между центрами по формуле

$$l = A + \sqrt{A^2 - B},$$

где  $A = 0,25 L - 0,393 (D + d)$ ;

$$B = 0,125 (D - d)^2.$$

Таблица 41

Мощности, передаваемые клиновыми ремнями

Окружная скорость ремня $v$ в м/сек	Профиль ремня						
	О	А	Б	В	Г	Д	Е
	Мощность $N_0$ , передаваемая одним ремнём данного сечения, в л. с.						
1	0,1	0,2	0,3	0,5	1,1	1,6	2,8
2	0,2	0,4	0,7	1,1	2,3	3,3	5,5
3	0,3	0,6	1,0	1,6	3,4	4,9	8,3
4	0,4	0,8	1,3	2,2	4,4	6,4	10,9
5	0,5	1,0	1,6	2,7	5,5	8,0	13,6
6	0,6	1,1	1,9	3,2	6,6	9,6	16,3
7	0,7	1,3	2,2	3,7	7,6	11,1	18,8
8	0,8	1,5	2,5	4,2	8,6	12,5	21,2
9	0,9	1,6	2,8	4,7	9,6	14,0	23,5
10	1,0	1,8	3,1	5,2	10,6	15,4	25,7
11	1,1	2,0	3,3	5,6	11,5	16,7	27,9
12	1,2	2,1	3,6	6,0	12,4	18,0	30,3
13	1,3	2,2	3,8	6,4	13,3	19,2	32,5
14	1,4	2,4	4,0	6,7	14,0	20,3	34,3
15	1,4	2,5	4,3	7,1	14,7	21,3	36,0
16	1,5	2,6	4,4	7,4	15,3	22,1	37,4
17	1,6	2,7	4,6	7,7	16,0	23,1	38,9
18	1,6	2,8	4,8	8,0	16,6	23,9	40,5
19	1,7	2,9	4,9	8,2	16,9	24,5	41,5
20	1,7	3,0	5,0	8,4	17,4	25,2	42,7
21	1,7	3,0	5,1	8,7	17,8	26,0	44,1
22	1,8	3,1	5,2	8,7	18,0	26,2	44,4
23	1,8	3,1	5,2	8,8	18,2	26,2	44,8
24	1,8	3,1	5,3	8,8	18,2	26,2	44,8
25	1,8	3,1	5,3	8,8	18,2	26,2	44,8

Таблица 42

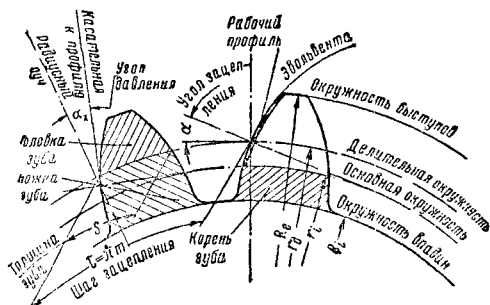
Допускаемое напряжение на клиновидные ремни

Профиль ремня	Диаметр малого шкива в мм	Допускаемое полезное напряжение $K$ в кг/см <sup>2</sup>
О	70	16,7
	80	17,4
	90 и более	18,0
А	100	16,7
	112	18,0
	125 и более	19,1
Б	140	16,7
	160	18,8
	180 и более	20,5
В	200	16,7
	225	18,9
	250	20,7
	280 и более	22,4
Г	320	16,7
	360	19,3
	400	21,6
	450 и более	23,6
Д	500	16,7
	560	19,3
	630	21,8
	710 и более	24,0
Е	800	16,7
	900	19,5
	1 000	21,8
	1 120 и более	24,0

## ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ ПЕРЕДАЧИ С ПРЯМЫМ ЗУБОМ

## ЭВОЛЬВЕНТНОЕ ЗАЦЕПЛЕНИЕ

Боковым рабочим профилем современного зуба шестерни является эвольвента (фиг. 112). Эвольвентный зуб передаёт вращение от ведущей к ведомой шестерне с постоянной угловой скоростью.



Фиг. 112. Элементы эвольвентного зуба

## Определение элементов эвольвентного зуба

Рабочий профиль зуба — участок эвольвенты, посредством которого осуществляется передача вращения; это передний по направлению вращения профиль ведущего колеса и задний профиль ведомого.

Делительная окружность  $r_d$  зубчатого колеса — окружность, на которой шаг и угол зацепления изделия равны шагу и углу зацепления основной рейки (см. ниже).

Окружность выступов  $R_e$  — окружность, описанная вокруг центра колеса и ограничивающая вершины его головок.

Окружность впадин  $R_i$  — окружность, описанная вокруг центра колеса и ограничивающая его впадины со стороны тела колеса.

Головка зуба  $h'$  — часть его, выступающая за делительную окружность, т. е. лежащая вне её — в колёсах внешнего зацепления и внутри неё — в колёсах внутреннего зацепления.

Ножка зуба  $h''$  — часть его, лежащая между телом колеса и делительной окружностью.

Корень зуба — нерабочая часть его ножки.

Основная окружность  $r_o$  — описанная вокруг центра колеса окружность, по которой качением производящей линии получаются профили зубьев.

Угол давления  $\alpha$  — угол между касательной к профилю зуба в произвольной точке и радиальным лучом, проведённым к той же точке из центра колеса. В эвольвентном зацеплении этот угол является также и углом



между производящей линией в данной точке и перпендикуляром к проходящему через неё радиальному лучу. Угол давления в точке пересечения делительной окружности и эвольвенты равен углу зацепления  $\alpha$  основной рейки (см. ниже).

Шаг зацепления  $t$  — расстояние между одноимёнными (т. е. обращёнными в одну сторону, например двумя левыми или двумя правыми) профилями двух смежных зубьев колеса, взятое, если нет специальных оговорок, по дуге делительной окружности.

Толщина зуба  $s$  — длина дуги окружности между двумя разноимёнными профилями одного и того же зуба. При отсутствии специальных оговорок толщина зуба даётся по делительной окружности.

Измерение толщины зуба (см. стр. 41) производится на уровне делительной окружности по хорде  $s_x$  (фиг. 116); эта величина несколько отличается от величины  $s$ .

Модуль зацепления  $m$  — длина, приходящаяся по диаметру делительной окружности на один зуб колеса.

Модуль  $m$  берётся всегда в миллиметрах и равен частному от деления шага зацепления (по делительной окружности) на  $\pi$ :

$$m = \frac{t}{\pi}.$$

Современным наиболее совершенным методом изготовления шестерён является метод обкатки, при котором фрезеруемая шестерня обкатывается по инструменту, произведённого из основной рейки (ОСТ/ВКС 6922).

На фиг. 113 даны две основные рейки — нормальная и укороченная.

Нормальный зуб подлежит применению во всех случаях, как основной профиль зуба.

Укороченный зуб более прочен на изгиб и несколько лучше работает на износ; уменьшенная длина зацепления (см. ниже) ограничивает применение этого профиля шестерёнными парами с небольшими передаточными отношениями.

При сцеплении двух шестерён появляются допол-

нительные элементы (фиг. 114).

Линия центров  $O_1O_2$  в колёсных парах зубчатых передач — прямая, соединяющая центры  $O_1$  и  $O_2$  двух сопряжённых зубчатых колёс.

Межцентровое (межосевое) расстояние  $A$  — длина отрезка линии центров между центрами.

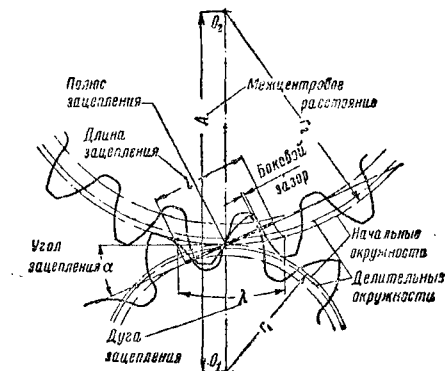
Линия зацепления — линия, неподвижная относительно  $O_1O_2$ , по которой перемещается при работе точка касания сопряжённых элементов. В эвольвентном зацеплении это прямая линия, касательная к основным окружностям.

Полюс зацепления — точка пересечения линии зацепления с линией центров.

Угол зацепления  $\alpha$  — угол между линией зацепления и перпендикуляром к линии центров.

Начальная окружность  $r_1, r_2$  — окружность, описанная около центра зубчатого колеса и проходящая через полюс; при работе зубчатой пары начальные окружности перекатываются друг по другу без скольжения.

В нормальном некоррегированном зацеплении начальные окружности совпадают с делительными. В скоррегированном зацеплении начальные окружности могут не совпадать с делительными.



Фиг. 114. Элементы сцепления двух шестерён

Дуга зацепления — путь по начальной окружности, проходимый профилем зуба за время его фактического зацепления.

Длиной линии зацепления  $l$  называется активная часть линии зацепления.

Коэффициент перекрытия — продолжительность зацепления  $\epsilon$  — отношение дуги зацепления к шагу, измеренному по той же окружности, что и дуга, т. е. по начальной окружности.

Передаточное число  $i$  — отношение числа оборотов ведущего вала к числу оборотов ведомого, т. е. передаточное отношение в направлении силового потока.

Боковой зазор — расстояние между нерабочими профилями двух следующих друг за другом, но не касающихся между собой зубьев сопряжённой пары, измеренное по нормали к профилю или по начальной окружности.

Интерференция зубьев — всякое неправильное касание профилей вне активного участка линии зацепления.

Подрез зуба — утопление его ножки против теоретически правильного очертания; при нарезании методом обкатки подрез профиля является результатом интерференции зуба и инструмента.

## ОСНОВНЫЕ РАЗМЕРЫ ШЕСТЕРЁН

Пусть  $m$  — модуль зацепления в мм;

$t$  — шаг зацепления в мм;

$z_1, z_2$  — число зубьев;

$r_{d1}, r_{d2}$  — радиус делительной окружности в мм;

$R_{e1}, R_{e2}$  — радиус окружности выступов в мм;

$r_{o1}, r_{o2}$  — радиус основной окружности в мм;  
 $\alpha$  — угол зацепления основной рейки;  
 $A$  — межцентровое расстояние в мм;  
 $n_1, n_2$  — число оборотов шестерён в об/мин.;  
 $i$  — передаточное число.

Тогда:

$$t = \pi m, \quad 2r_d = zm,$$

для нормального зуба

$$R_e = r_d + m,$$

для укороченного зуба

$$R_e = r_d + 0,8 m,$$

$$A = \frac{z_1 + z_2}{2} m, \quad r_o = r_d \cdot \cos \alpha,$$

$$i = \frac{n_1}{n_2} = \frac{r_{d2}}{r_{d1}}.$$

Величиной, определяющей размер зуба, является модуль, который выбирается по ОСТ 1597 (табл. 43).

Таблица 43

Нормальный ряд модулей в мм

0,3	1	2,5	4	6,5	12	20	33
0,4	1,25	(2,75)	(4,25)	7	13	22	36
0,5	1,5	3	4,5	8	14	24	39
0,6	1,75	(3,25)	5	9	15	26	42
0,7	2	3,5	5,5	10	16	28	45
0,8	2,25	(3,75)	6	11	18	30	50

Как указано на стр. 269, основным методом изготовления шестерён является метод обкатки на специальных зуборезных станках. Изготовление вполне качественных, но несколько менее точных шестерён возможно на горизонтальных фрезерных станках дисковыми модульными фрезами (табл. 42), комплектуемых по 8 шт.

Таблица 44

Модульные фрезы

№ фрезы	Число нарезаемых зубьев на шестерне	№ фрезы	Число нарезаемых зубьев на шестерне
1	12—13	5	26—34
2	14—16	6	35—54
3	17—20	7	55—134
4	21—25	8	135— рейка

## ИЗМЕРЕНИЕ И ПРИЁМКА ШЕСТЕРЁН

Элементарным, но вполне достаточным при изготовлении шестерён обычного качества методом приёмки шестерён является следующий:

- измерение наружного диаметра;
- измерение толщины зуба зубомером или штангенциркулем;
- проверка биения профиля зуба.

Измерение толщины зуба зубомером дано на фиг. 115. Для этого измерения на чертеже должны быть даны толщина зуба по хорде

на уровне делительной окружности  $s_x$  и установка зубомера  $q$ .

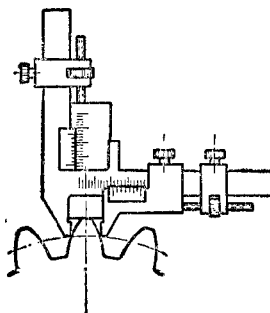
Пусть  $s_x$  — толщина зуба по хорде в мм;  
 $r_d$  — радиус делительной окружности в мм;

$R_e$  — радиус окружности выступов в мм;

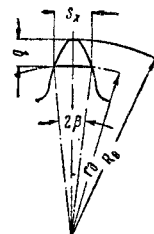
$q$  — высота головки, считая от середины хорды, в мм;

$2\beta$  — центральный угол, под которым видна хорда;

$z$  — число зубьев.



Фиг. 115. Измерение зуба зубомером



Фиг. 116

Тогда:

$$\beta = \frac{90^\circ}{z}, \quad s = 2r_d \sin \beta, \quad q = R_e - r_d \cos \beta.$$

Величины  $s_x$  и  $q$  для нормального зуба при  $m = 1$  даны в табл. 45.

Таблица 45

Толщина зуба шестерни (умножать на модуль)

Число зубьев z	Установка зубомера q	Толщина зуба по хорде sx	Число зубьев z	Установка зубомера q	Толщина зуба по хорде sx
14	1,0441	1,5674	34	1,0182	1,5702
15	1,0411	1,5679	36	1,0172	1,5703
16	1,0385	1,5682	38	1,0162	1,5703
17	1,0363	1,5685	40	1,0154	1,5704
18	1,0342	1,5688	42	1,0146	1,5704
19	1,0324	1,5690	44	1,0141	1,5704
20	1,0308	1,5692	46	1,0134	1,5705
21	1,0293	1,5693	48	1,0128	1,5706
22	1,0281	1,5694	50	1,0123	1,5707
23	1,0268	1,5695	55	1,0112	1,5707
24	1,0257	1,5696	60	1,0103	1,5708
25	1,0246	1,5697	70	1,0088	1,5708
26	1,0237	1,5697	80	1,0077	1,5708
27	1,0228	1,5698	97	1,0064	1,5708
28	1,0221	1,5699	127	1,0053	1,5708
29	1,0212	1,5700	135	1,0045	1,5708
30	1,0206	1,5700	Рейка	1,0000	1,5708
32	1,0192	1,5701			

Если зуб коррегирован (величина окружности выступов более или менее нормальной, а глубина захода фрезы в заготовку менее или более требующейся при фрезеровке нормального зуба), то толщина его на уровне делительной окружности отличается от нормальной и центральный угол  $\beta$  не может быть вычислен по приведенным выше формулам и должен быть найден следующим образом (фиг. 117).

Пусть  $t$  — шаг основной рейки в мм;

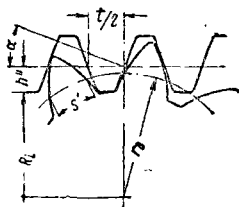
$\alpha$  — угол зацепления рейки;

$h''$  — высота головки рейки — высота ножки зуба в мм;

$R_i$  — радиус окружности впадин в мм;  
 $s$  — толщина зуба по дуге делительной окружности.

Тогда длина дуги

$$s = \frac{t}{2} + 2(R_i + h'' - r_d) \operatorname{tg} \alpha.$$



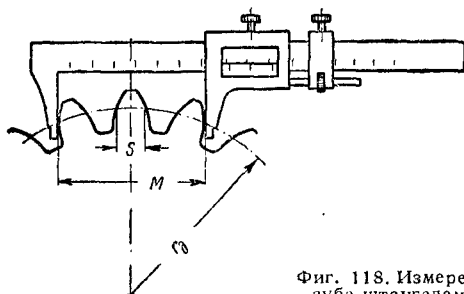
Фиг. 117

Длину хорды и установку зубомера  $s_x$  можно найти по тем же формулам, что для нормального зуба, если подставить угол  $\beta$ , который может быть найден из выражений:

$$\cup \beta = \frac{s}{2r_d} \text{ (радиан);}$$

$$\angle \beta^\circ = 57,2958 \cdot \cup \beta.$$

При отсутствии зубомера определение величины зуба может быть произведено штангелем с нониусом 1/50 (фиг. 118).



Фиг. 118. Измерение зуба штангелем

В этом случае

$$M = r_d \cos 20^\circ \left( \frac{s}{r_d} + \frac{2\pi x}{z} + 0,029808 \right),$$

где  $r_d$  — радиус делительной окружности в мм;

$\alpha = 20^\circ$  — угол зацепления рейки ( $\cos 20^\circ = 0,939$ );

$s$  — толщина зуба по дуге на уровне делительной окружности в мм;

$z$  — число зубьев на шестерне;

$x$  — число впадин между зубьями, охватываемых штангелем (табл. 46).

Таблица 46

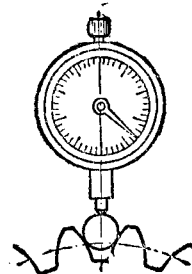
Число впадин между зубьями при измерении штангелем ( $\alpha = 20^\circ$ )

Число зубьев $z$	Число впадин $x$	Число зубьев $z$	Число впадин $x$
12—18	1	46—54	5
19—27	2	55—63	6
28—36	3	64—72	7
37—45	4	73—81	8

Измерение величины биения профиля зуба производится индикатором и скалкой как указано на фиг. 119.

При окружных скоростях 3 — 5 м/сек биение не должно превосходить нескольких сотых долей миллиметра (см. табл. 52)—это даст работу передачи, удовлетворительную с точки зрения бесшумности. О влиянии биения на долговечность шестерни см. стр. 274 «Расчёт зуба на износ».

Вышеприведённые расчёты даны для случая сцепления шестерён без бокового зазора. Для получения бокового зазора зуб большей шестерни делают несколько тоньше теоретического соответственно табл. 47.



Фиг. 119. Измерение биения зуба

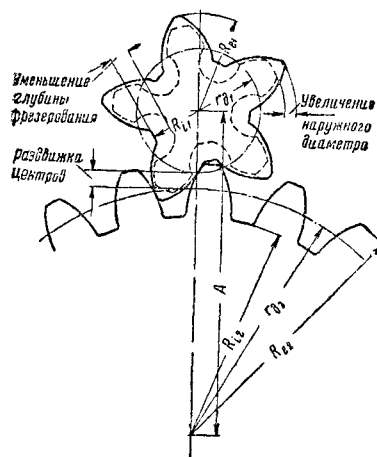
Таблица 47

Зазоры между зубьями

Модуль	Зазор между зубьями в мм	Модуль	Зазор между зубьями в мм	Модуль	Зазор между зубьями в мм
1	0,08	8	0,3	16	0,7
2	0,10	10	0,4	18	0,8
3	0,12	12	0,5	20	0,9
4	0,16	14	0,6	22	1,0
6	0,2				

## ШЕСТЕРНИ С МАЛЫМ ЧИСЛОМ ЗУБЬЕВ

При фрезеровке шестерён с малым числом зубьев методом обкатки неизбежна подрезка ножки зуба (фиг. 120), уменьшающая его



Фиг. 120. Шестерня с малым числом зубьев

прочность и уменьшающая продолжительность зацепления.

Чтобы уничтожить это явление, вводят коррекцию, состоящую из:

- а) увеличения диаметра выступов шестерни;
- б) фрезеровки на глубину, меньшую, чем это необходимо для нормальной шестерни;
- в) раздвижки центров.

**Т а б л и ц а 48**  
**Размеры зуба при фрезеровке червячным**  
**фрезером 20°**  
 (умножать на модуль)

Число зубцов	Радиус начальной окружност	Радиус наружной окружност головки	Радиус дна впа- дин	Радиус основной окружност
$z$	$r$	$R_e$	$R_i$	$r_o$
5	2,50	3,958	2,0506	2,34923
6	3,00	4,509	2,4720	2,81908
7	3,50	5,019	2,8934	3,28892
8	4,00	5,472	3,3147	3,75877
9	4,50	5,893	3,7361	4,22862
10	5,00	6,314	4,1575	4,69846
11	5,50	6,736	4,5789	5,16831
12	6,00	7,157	5,0002	5,63816
13	6,50	7,578	5,4216	6,10800
14	7,00	8,000	5,8430	6,57785

Величины, необходимые для подсчёта размеров зубьев и расстояний между центрами, даны в табл. 48 и 49.

Толщина зуба для зубомера подсчитывается, как указано выше на стр. 271, причём зуб малой шестерни исполняется полной толщины; весь боковой зазор относится на шестерню с большим числом зубьев.

### ШЕСТЕРНИ С ВНУТРЕННИМ ЗАЦЕПЛЕНИЕМ

Профиль зуба шестерни с внутренним зацеплением теоретически ничем не отличается от такового у шестерён с наружным зацеплением и является производным от тех же реек (фиг. 113). Отличием является то, что при внутреннем зацеплении могут иметь место три

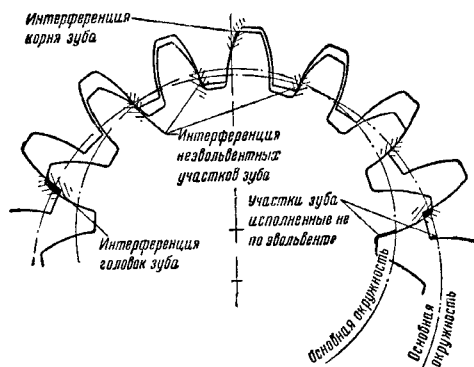
**Т а б л и ц а 49**  
**Увеличение расстояния между центрами для шестерён с числом зубьев меньше 14**

Число зубьев	м а л о й ш е с т е р н и								
	большой шестерни	5	6	7	8	9	10	11	12
14	—	—	—	—	—	—	—	0,222	0,151
15	—	—	—	—	—	—	0,291	0,222	0,151
16	—	—	—	—	—	0,358	0,291	0,223	0,151
17	—	—	—	—	0,423	0,359	0,292	0,223	0,151
18	—	—	—	0,487	0,425	0,360	0,293	0,224	0,152
19	—	—	0,549	0,488	0,426	0,361	0,294	0,224	0,152
20	0,610	0,551	0,490	0,427	0,362	0,294	0,225	0,152	0,077
21	0,613	0,553	0,492	0,428	0,363	0,295	0,225	0,152	0,077
22	0,615	0,555	0,493	0,429	0,364	0,295	0,225	0,152	0,077
23	0,617	0,557	0,495	0,430	0,364	0,296	0,226	0,152	0,077
24	0,620	0,559	0,496	0,431	0,365	0,296	0,226	0,152	0,077
25	0,622	0,560	0,497	0,432	0,366	0,297	0,226	0,153	0,077
26	0,624	0,562	0,499	0,433	0,367	0,297	0,226	0,153	0,077
27	0,626	0,563	0,500	0,434	0,368	0,298	0,227	0,153	0,077
28	0,627	0,565	0,501	0,435	0,368	0,298	0,227	0,153	0,077
29	0,629	0,566	0,502	0,436	0,369	0,299	0,227	0,153	0,078
30	0,631	0,568	0,503	0,437	0,369	0,299	0,227	0,153	0,078
32	0,633	0,570	0,505	0,439	0,370	0,300	0,228	0,153	0,078
34	0,636	0,572	0,507	0,440	0,371	0,300	0,228	0,153	0,078
36	0,639	0,574	0,508	0,441	0,372	0,301	0,228	0,153	0,078
38	0,642	0,577	0,510	0,442	0,373	0,301	0,228	0,154	0,078
40	0,644	0,578	0,511	0,443	0,373	0,301	0,228	0,154	0,078
42	0,646	0,580	0,513	0,444	0,374	0,302	0,229	0,154	0,078
44	0,648	0,582	0,514	0,445	0,375	0,302	0,229	0,154	0,078
46	0,650	0,583	0,515	0,446	0,375	0,303	0,229	0,154	0,078
48	0,651	0,585	0,516	0,447	0,376	0,303	0,229	0,154	0,078
50	0,653	0,586	0,517	0,448	0,376	0,303	0,230	0,154	0,078
55	0,657	0,589	0,519	0,449	0,377	0,304	0,230	0,154	0,078
60	0,660	0,591	0,521	0,450	0,378	0,304	0,230	0,154	0,078
65	0,663	0,594	0,523	0,451	0,379	0,305	0,231	0,154	0,078
70	0,665	0,596	0,525	0,452	0,380	0,305	0,231	0,154	0,078
75	0,668	0,597	0,526	0,453	0,381	0,306	0,232	0,154	0,078
80	0,669	0,599	0,527	0,454	0,381	0,306	0,232	0,154	0,078
85	0,671	0,600	0,528	0,455	0,382	0,307	0,232	0,155	0,078
90	0,673	0,602	0,529	0,456	0,382	0,307	0,232	0,155	0,078
95	0,674	0,603	0,530	0,457	0,383	0,308	0,233	0,155	0,078
100	0,676	0,604	0,531	0,457	0,383	0,308	0,233	0,155	0,078
120	0,680	0,607	0,533	0,459	0,384	0,309	0,233	0,155	0,079
140	0,683	0,609	0,535	0,461	0,385	0,310	0,233	0,156	0,079
160	0,686	0,611	0,537	0,462	0,386	0,310	0,234	0,156	0,079
180	0,688	0,613	0,539	0,463	0,387	0,311	0,234	0,156	0,079
200	0,690	0,615	0,540	0,464	0,387	0,311	0,234	0,156	0,079
250	0,693	0,618	0,542	0,466	0,388	0,312	0,234	0,156	0,079
300	0,695	0,620	0,543	0,467	0,389	0,312	0,234	0,157	0,079
400	0,698	0,622	0,546	0,469	0,390	0,313	0,234	0,158	0,079
500	0,700	0,624	0,547	0,469	0,391	0,313	0,234	0,158	0,079

**П р и м е ч а н и е.** Увеличение расстояния между центрами умножать на модуль и добавлять к стандартному расстоянию между центрами.

вида интерференции (фиг. 121), не имеющих места у шестерён с наружным зацеплением.

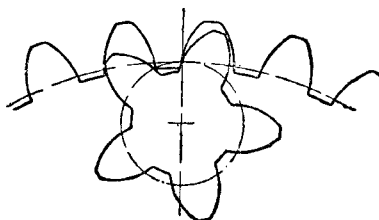
а) Интерференция на эвольвентных участках зуба: головка зуба венца в том случае, если ока выступает за основную окружность, оказывается оформленной не по эвольвенте и, следовательно, не должна участвовать в зацеплении. Диаметр выступов венца не должен быть меньше диаметра основной окружности.



Фиг. 121. Интерференция зубьев при внутреннем зацеплении

б) Интерференция головок зубьев, имеющая место при входе и выходе из зацепления зуба. Для избежания этого вида интерференции разность между числом зубьев венца и малой шестерни должна быть значительной.

в) Интерференция корня зуба имеет место тогда, когда головка зуба одной из шестерён приходит в сцепление с корнем зуба, оформленным не по эвольвенте, другой шестерни. Соответствующим выбором размеров зубьев можно избежать этого вида интерференции.



Фиг. 122. Шестерни внутреннего зацепления с малым числом зубьев

Кроме того, необходимо иметь в виду, что сборка шестерён с внутренним зацеплением иногда бывает затруднена. При шестернях, мало отличающихся друг от друга по числу зубьев, сборка бывает возможна только вдвижением вдоль оси. Это должно быть учтено при проектировании.

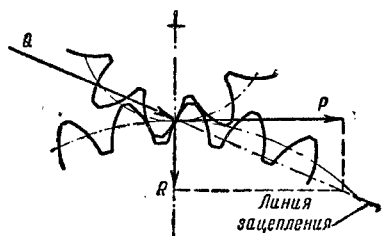
Современным методом изготовления шестерён с внутренним зацеплением является изготовление их на зубодолбежных станках. При наладке станка необходимо следить за числом зубьев долбяка, которое не должно быть слишком велико, так как может иметь место повреждение профиля из-за интерференции долбяка с венцом (подобно случаю «б» —

интерференция головок). С другой стороны, число зубьев на долбяке не должно быть слишком мало, так как в этом случае может получиться дефектный профиль зуба.

При числе зубьев на малой шестерне меньше 16 (фиг. 122) качественное зацепление шестерни и венца может быть также получено. Размеры шестерён внутреннего зацепления для всех чисел зубьев, начиная от 5, могут быть взяты из таблиц, помещённых в «Руководстве по проектированию зубчатых передач» Е. Бакингема, ч. II, Машгиз, 1948.

### УСИЛИЯ В ЗУБЬЯХ

При работе зубчатой пары давление между зубьями направлено перпендикулярно к профилям в точке их касания (фиг. 123) и в эвольвентном профиле действует вдоль линии за-



Фиг. 123. Усилия в эвольвентном зацеплении

цепления. Это суммарное давление  $Q$  разлагается на две составляющие:

$P$  — касательную к начальной окружности — окружное усилие, создающее крутящий момент;

$R$  — нормальную к начальной окружности, распирающую валы шестерён.

Соотношения между этими силами:

$$Q = \frac{P}{\cos \alpha}, \quad R = P \operatorname{tg} \alpha,$$

где  $\alpha$  — угол зацепления.

### РАСЧЁТ ПРЯМОЗУБЫХ ШЕСТЕРЁН

Способность зуба передавать нагрузку может быть ограничена или прочностью зуба на изгиб или пределом усталости поверхностного слоя металла. Расчёт на изгиб гарантирует зуб от возможных поломок; долговечность зуба может быть выявлена при расчёте на износ.

Расчёт зуба на изгиб производится по формуле

$$P_{изг} = ytbR_{изг},$$

где  $y$  — фактор зуба, зависящий от формы зуба (табл. 50);

$t$  — шаг зуба по начальной окружности в мм;

$b$  — ширина зуба в мм;

$R_{изг}$  — допускаемое напряжение на металл зуба в зависимости от его твёрдости (равное пределу усталости металла на изгиб, табл. 51) в кг/мм<sup>2</sup>;

$P_{изг}$  — нагрузка, допустимая на зуб с точки зрения прочности на изгиб, в кг.

Таблица 50  
Фактор зуба  $u$  при расчёте на изгиб

Число зубьев на шестерне $z$	Профиль зуба				
	нормальный 20°		укороченный 20°	внутреннее зацепление 20°	
	некоррегированный	коррегированный при малом числе зубьев		шестерня	венец
5	—	0,102	—	0,102	—
6	—	0,096	—	0,102	—
7	—	0,090	—	0,102	—
8	—	0,084	—	0,103	—
9	—	0,084	—	0,103	—
10	—	0,084	—	0,103	—
11	—	0,084	—	0,104	—
12	0,078	0,084	0,099	0,104	—
13	0,083	0,086	0,103	0,104	—
14	0,088	0,088	0,108	0,105	—
15	0,092	—	0,111	0,105	—
16	0,094	—	0,115	0,106	—
17	0,096	—	0,117	0,109	—
18	0,098	—	0,120	0,111	—
19	0,100	—	0,123	0,114	—
20	0,102	—	0,125	0,116	—
21	0,104	—	0,127	0,118	—
22	0,105	—	0,129	0,119	—
24	0,107	—	0,132	0,122	—
26	0,110	—	0,135	0,125	—
28	0,112	—	0,137	0,127	0,220
30	0,114	—	0,139	0,129	0,216
34	0,118	—	0,142	0,132	0,210
38	0,122	—	0,145	0,135	0,205
43	0,126	—	0,147	0,137	0,200
50	0,130	—	0,151	0,139	0,195
60	0,134	—	0,154	0,142	0,190
75	0,138	—	0,158	0,144	0,185
100	0,142	—	0,161	0,147	0,180
150	0,146	—	0,165	0,149	0,175
300	0,150	—	0,170	0,152	0,170
Рейка	0,154	—	0,175	—	—

$s$  — фактор деформации зуба, зависящий от точности исполнения зуба и от металла зуба. Величина этого фактора может быть выбрана из табл. 52 после установления биения профиля зуба по методу стр. 271.

Расчёт зуба на износ:

$$P_{изн} = DbK \frac{2z_2}{z_2 \pm z_1},$$

где  $P_{изн}$  — нагрузка, допустимая на износ, в кг;

$D$  — диаметр меньшей шестерни в см;

$b$  — ширина зуба в см;

$z_1$  — число зубьев на малой шестерне;

$z_2$  — число зубьев на большой шестерне и венце (знак + для шестерён с наружным зацеплением, знак — для шестерён с внутренним зацеплением);

$K$  — фактор, зависящий от твёрдости поверхности зуба шестерни (табл. 53).

Таблица 52  
Фактор деформации зуба  $s$

Зуб	Биение профиля зуба по индикатору и скалке (фиг. 119) в мм					
	0,03	0,06	0,12	0,20	0,25	0,30
20° нормальный	148	296	590	890	1185	1480
20° укороченный	153	306	612	926	1125	1530

Величина допустимой нагрузки на износ  $P_{изн}$  должна быть не меньше динамической нагрузки:

$$P_{изн} > P_{дин}.$$

Таблица 53  
Фактор  $K$  при расчёте зуба на износ

Твёрдость стальной шестерни по Бринеллю $H_B$			$K$	Твёрдость стальной шестерни по Бринеллю $H_B$		
малая шестерня	большая шестерня			малая шестерня	большая шестерня	$K$
150	150	2,82		350	350	19,0
200	150	4,05		400	350	22,1
250	150	5,52		450	350	23,8
200	200	5,52		400	400	25,3
250	200	7,2		500	400	27,0
300	200	9,1		600	400	28,8
250	250	9,1		450	450	32,5
300	250	11,2		600	450	34,5
350	250	13,6				
300	300	13,6		500	500	40,6
350	300	16,3		600	600	59,5
400	300	17,7				

Таблица 51  
Допускаемые напряжения при расчёте зуба на изгиб

Материал	Твёрдость материала $H_B$	$R_{изг} = \sigma_{\psi}$ в кг/мм <sup>2</sup>	Материал	Твёрдость материала $H_B$	$R_{изг} = \sigma_{\psi}$ в кг/мм <sup>2</sup>
Чугун	160	8,4	Сталь	320	56,0
Фосфористая бронза	100	16,8	"	360	63,0
"	"	"	"	400	70,0
Сталь	150	26,3	"	440	77,0
"	200	35,0	"	480	84,0
"	240	42,0	"	520	91,0
"	280	49,0	"	560	98,0
			"	600	105
			"	640	112

Эта нагрузка, допускаемая на изгиб, должна быть больше, чем динамическая нагрузка:

$$P_{изг} > P_{дин}.$$

Запас прочности обычно принимают равным 2 и более. Динамическая нагрузка на зуб

$$P_{дин} = \frac{v (bc + P)}{v + 0,151 \sqrt{bc + P}} + P,$$

где  $v$  — окружная скорость зацепления в м/сек;

$b$  — ширина зуба в см;

$P$  — окружное усилие на зуб (статическое) в кг;

Приведённые методы расчёта дают размеры шестерён, не подверженных износу, что соответствует современным требованиям эксплуатации, а также современным возможностям производства. Этими методами следует рассчитывать термообработанные шестерни твёрдостью  $H_B = 250$  и более. Расчёт этими методами сырых шестерён твёрдостью

$H_B < 200$  даёт для них большие размеры, которые редко выдерживаются на практике.

При изготовлении сырых шестерён из литой или ковanej стали до сих пор применяют старый метод расчёта только на изгиб: шестерни при этом получаются меньше, чем при расчёте на износ, но гарантии долговечности не получается. Шестерни изнашиваются, и их периодически приходится заменять новыми. Этот метод не отличается от приведённого на стр. 273 без учёта динамики, но допускаемое напряжение  $R_{изг}$  выбирается из табл. 54 в зависимости от окружной скорости и с учётом запаса прочности.

Этот метод расчёта не следует применять для термически обработанных шестерён.

Таблица 54

Допускаемые напряжения на изгиб зуба шестерён

Окружная скорость в м/сек	Допускаемые напряжения $R_{изг}$ в кг/см <sup>2</sup>		Окружная скорость в м/сек	Допускаемые напряжения $R_{изг}$ в кг/см <sup>2</sup>	
	чугун	Ст. 5 кованая		чугун	Ст. 5 кованая
0	500	1000	3	250	500
0,5	430	860	4,5	200	400
1	375	750	6	170	330
1,5	330	660	9	125	250
2	300	600	12	100	200

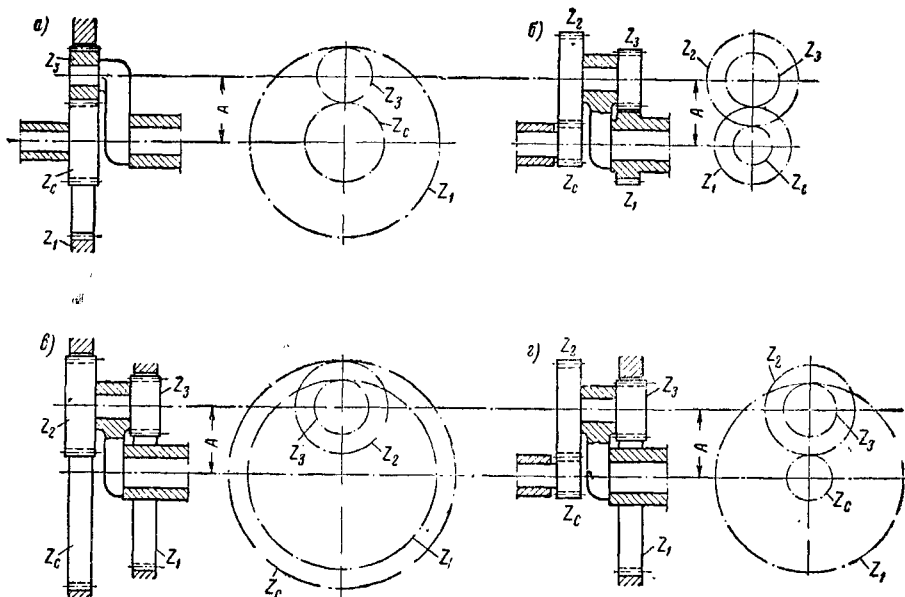
## ПЛАНЕТАРНЫЕ ПЕРЕДАЧИ

### ТИПЫ ПЛАНЕТАРНЫХ ПЕРЕДАЧ

Используя шестерни с наружным и внутренним зацеплением, можно осуществить четыре типа планетарных передач (фиг. 124). С точки зрения эксплуатации эти передачи

### ПРОСТАЯ ПЛАНЕТАРНАЯ ПЕРЕДАЧА

Эта передача применяется для передаточных чисел не более 8—10. Наличие венца с внутренним зацеплением требует обязательного коррегирования зуба. При коррегиро-



Фиг. 124. Типы планетарных передач: а — простая планетарная передача; б — передача с наружными зацеплениями; в — передача с внутренними зацеплениями; г — смешанная планетарная передача

будут неодинаковы. Простая планетарная передача а и двухступенчатая планетарная передача г с наружным и внутренним зацеплением будут иметь высокий коэффициент полезного действия. Передача с двумя парами шестерён наружного зацепления б, благодаря неудачному распределению реактивных усилий, потребует увеличенных размеров шестерён и в эксплуатации даст низкий коэффициент полезного действия. Эта передача не может быть рекомендована для передачи мощности. Выгодной с точки зрения передаточного числа является передача с двумя парами внутреннего зацепления в, но её также не следует применять для передачи мощности.

При диаметре сателлита  $z_3$  несколько увеличивается, что приводит к тому, что сцепление сателлита с солнечной шестерней  $z_1$  оказывается невозможным. С целью получения удовлетворительного сцепления число зубьев на солнечной шестерне приходится уменьшать, выкидывая один или два зуба, в зависимости от числа зубьев на сателлите.

Число зубьев на солнечной шестерне должно быть:

при  $z > 16$

$$z_1 = 2 \frac{A}{m} - (z_3 + 1);$$

Таблица 55  
Расчётные формулы простой планетарной передачи

Неподвижное звено	A	A
Ведущее звено	$z_c$	$z_1$
Ведомое звено	$z_1$	$z_c$
Передаточное число	$\frac{z_c}{z_1}$	$\frac{z_1}{z_c}$
Число оборотов в минуту	A	0
	$z_c$	$n \left( \frac{z_1}{z_c} \right)$
	$z_s$	$n \left( \frac{z_c}{z_s} \right)$
	$z_1$	$n \left( \frac{z_c}{z_s} \right)$
Скорости в м/сек	$v$	$\frac{\pi n A}{3000} \left( \frac{z_c}{z_c + z_s} \right)$
	$v_c$	$\frac{\pi n A}{3000} \left( \frac{z_c}{z_c + z_s} \right)$
	$v_A$	0
	$v_1$	$\frac{\pi n A}{3000} \left( \frac{z_1}{z_1 - z_s} \right)$
Нагрузки в кг	P	$\frac{75 N}{v} \text{ или } \frac{M}{A} \left( \frac{z_1 - z_s}{z_1} \right)$
	$P_c$	$P \left( \frac{z_c + z_s}{z_1 - z_s} \right)$
	$P_A$	$P \left( \frac{z_c + z_1}{z_c + z_s} \right)$
	$P_1$	$P \left( \frac{z_1 - z_s}{z_c + z_s} \right)$

Продолжение табл. 55

Неподвижное звено	$z_1$	$z_c$
Ведущее звено	A	A
Ведомое звено	$z_c$	$z_1$
Передаточное число	$\frac{z_1 + z_c}{z_c}$	$\frac{z_1 + z_c}{z_1}$
Число оборотов в минуту	n	n
	$z_c$	$n \left( \frac{z_1 + z_c}{z_c} \right)$
	$z_s$	$n \left( \frac{z_1}{z_s} \right)$
	$z_1$	$n \left( \frac{z_1 + z_c}{z_1} \right)$
Скорости в м/сек	$v$	$\frac{\pi n A}{3000}$
	$v_c$	$\frac{\pi n A}{3000} \left( \frac{z_1}{z_c + z_s} \right)$
	$v_A$	$\frac{\pi n A}{3000}$
	$v_1$	$\frac{\pi n A}{3000} \left( \frac{z_1}{z_1 - z_s} \right)$
Нагрузки в кг	P	$\frac{75 N}{v} \text{ или } \frac{M}{A}$
	$P_c$	$P \left( \frac{z_c + z_s}{z_1 + z_c} \right)$
	$P_A$	P
	$P_1$	$P \left( \frac{z_1 - z_s}{z_1 + z_c} \right)$



Таблица 56  
Расчётные формулы двухступенчатой планетарной передачи

Неподвижное звено	A	A
Ведущее звено	$z_c$	$z_1$
Ведомое звено	$z_1$	$z_c$
Передаточное число	$\frac{z_c z_1}{z_1 z_c}$	$\frac{z_1 z_1}{z_1 z_c}$
Число оборотов в минуту	A	0
	$z_c$	$n \left( \frac{z_1 z_c}{z_1 z_c} \right)$
	$z_1$ и $z_3$	$n \left( \frac{z_c}{z_1} \right)$
	$z_1$	$n \left( \frac{z_c z_3}{z_1 z_1} \right)$
Скорости в м/сек	v	$\frac{\pi n A}{3000} \left( \frac{z_c}{z_c + z_1} \right)$
	$v_c$	$\frac{\pi n A}{3000} \left( \frac{z_c}{z_c + z_1} \right)$
	$v_A$	0
	$v_1$	$\frac{\pi n A}{3000} \left( \frac{z_c}{z_1 - z_3} \right) \frac{z_1}{z_2}$
Напряжения в кг	P	$\frac{75 N}{v} \text{ или } \frac{M}{A} \left( \frac{z_c + z_1}{z_c} \right)$
	$P_c$	P
	$P_A$	$P \left( \frac{z_c + z_1}{z_1 - z_3} \right)$
	$P_1$	$P \left( \frac{z_1 - z_3}{z_c + z_1} \right) \frac{z_1}{z_2}$

Продолжение табл. 55

Неподвижное звено	$z_1$	$z_c$
Ведущее звено	$z_c$	$z_1$
Ведомое звено	A	A
Передаточное число	$\frac{z_c}{z_1 + z_c}$	$\frac{z_1}{z_1 + z_c}$
Число оборотов в минуту	A	$n \left( \frac{z_1}{z_1 + z_c} \right)$
	$z_c$	0
	$z_1$	$n \left( \frac{z_c}{z_1} \right) \left( \frac{z_1}{z_1 + z_c} \right)$
	$z_1$	n
Скорости в м/сек	v	$\frac{\pi n A}{3000} \left( \frac{z_c}{z_c + z_1} \right)$
	$v_c$	$\frac{\pi n A}{3000} \left( \frac{z_c}{z_c + z_1} \right) \left( \frac{z_1}{z_1 + z_c} \right)$
	$v_A$	$\frac{\pi n A}{3000} \left( \frac{z_c}{z_1 - z_3} \right) \left( \frac{z_1}{z_1 + z_c} \right)$
	$v_1$	$\frac{\pi n A}{3000} \left( \frac{z_1}{z_1 - z_3} \right) \left( \frac{z_c}{z_1 + z_c} \right)$
Напряжения в кг	P	$\frac{75 N}{v} \text{ или } \frac{M}{A} \left( \frac{z_1 - z_3}{z_1} \right)$
	$P_c$	P
	$P_A$	$P \left( \frac{z_1 + z_c}{z_c + z_1} \right)$
	$P_1$	$P \left( \frac{z_1 - z_3}{z_c + z_1} \right)$

Продолжение табл. 56

Неподвижное звено	$z_1$	$z_c$
Ведущее звено	$A$	$A$
Ведомое звено	$z_c$	$z_1$
Передаточное число	$\frac{z_1 z_c + z_1 z_1}{z_1 z_c}$	$\frac{z_1 z_c + z_1 z_1}{z_1 z_c}$
Число оборотов в минуту	$n$	$n$
	$n \left( \frac{z_1 z_c + z_1 z_1}{z_1 z_c} \right)$	$0$
	$n \left( \frac{z_1}{z_1} \right)$	$n \left( \frac{z_c}{z_1} \right)$
	$0$	$n \left( \frac{z_1 z_c + z_1 z_1}{z_1 z_c} \right)$
Скорости в м/сек	$\frac{\pi n A}{3000}$	$\frac{\pi n A}{3000}$
	$\frac{\pi n A}{3000} \left( \frac{z_1 z_1}{z_c z_1 + z_1 z_1} \right)$	$\frac{\pi n A}{3000} \left( \frac{z_c}{z_c + z_1} \right)$
	$\frac{\pi n A}{3000}$	$\frac{\pi n A}{3000}$
	$\frac{\pi n A}{3000} \left( \frac{z_1}{z_1 - z_1} \right)$	$\frac{\pi n A}{3000} \left( \frac{z_1 z_c}{z_1 z_1 - z_1 z_1} \right)$
Напряжения в кг	$\frac{75 N}{v}$ или $\frac{M}{A}$	$\frac{75 N}{v}$ или $\frac{M}{A}$
	$P \left( \frac{z_1 z_c + z_1 z_1}{z_1 z_c + z_1 z_1} \right)$	$P \left( \frac{z_1 z_c + z_1 z_1}{z_1 z_c + z_1 z_1} \right)$
	$P$	$P$
	$P \left( \frac{z_1 z_1 - z_1 z_1}{z_1 z_c + z_1 z_1} \right)$	$P \left( \frac{z_1 z_1 - z_1 z_1}{z_1 z_c + z_1 z_1} \right)$

Продолжение табл. 56

Неподвижное звено	$z_1$	$z_c$
Ведущее звено	$z_c$	$z_1$
Ведомое звено	$A$	$A$
Передаточное число	$\frac{z_1 z_c + z_1 z_1}{z_1 z_c + z_1 z_1}$	$\frac{z_1 z_c + z_1 z_1}{z_1 z_c + z_1 z_1}$
Число оборотов в минуту	$A$	$n \left( \frac{z_1 z_c}{z_1 z_c + z_1 z_1} \right)$
	$z_c$	$n$
	$z_1$ и $z_1$	$n \left( \frac{z_1 z_c}{z_1 z_c + z_1 z_1} \right)$
	$z_1$	$n$
Скорости в м/сек	$v$	$\frac{\pi n A}{3000} \left( \frac{z_c}{z_c + z_1} \right)$
	$v_c$	$\frac{\pi n A}{3000} \left( \frac{z_1 z_1}{z_1 z_c + z_1 z_1} \right) \left( \frac{z_c}{z_c + z_1} \right)$
	$v_A$	$\frac{\pi n A}{3000} \left( \frac{z_1 z_c}{z_1 z_c + z_1 z_1} \right)$
	$v_1$	$\frac{\pi n A}{3000} \left( \frac{z_1 z_c}{z_1 z_c + z_1 z_1} \right) \left( \frac{z_1}{z_1 - z_1} \right)$
Напряжения в кг	$P$	$\frac{75 N}{v}$ или $\frac{M}{A} \left( \frac{z_c + z_1}{z_c} \right)$
	$P_c$	$P$
	$P_A$	$P \left( \frac{z_1 z_c + z_1 z_1}{z_1 z_c + z_1 z_1} \right)$
	$P_1$	$P \left( \frac{z_1 z_1 - z_1 z_1}{z_1 z_c + z_1 z_1} \right)$

при  $z < 16$

$$z_c = 2 \frac{A}{m} - (z_3 + 2),$$

где  $z_3$  — число зубьев на сателлите;

$z_c$  — число зубьев на солнечной шестерне;

$A$  — радиус водила в мм;

$m$  — модуль зуба в мм.

Выбранное таким образом число зубьев должно удовлетворять условию сцепляемости соответственно числу сателлитов: сумма чисел зубьев солнечной шестерни и венца ( $z_1 + z_c$ ) должна делиться на число сателлитов без остатка.

Передаточные числа, скорости, давления в зубьях зависят от того, который из элементов передачи является ведущим, ведомым и неподвижным: венец, водило с сателлитами, солнечная шестерня могут исполнять роль любого звена. В табл. 55 даны формулы для нахождения всех расчётных величин данной планетарной передачи.

В этой таблице:

$z_1$  — число зубьев венца;

$z_3$  — число зубьев сателлита;

$z_c$  — число зубьев солнечной шестерни;

$A$  — расстояние между центром сателлита и солнечной шестерни в см;

$v$  — окружная скорость передаваемого усилия, т. е. окружная скорость ведущего звена на радиусе точки приложения силы  $P$  в м/сек;

$v_1$  — относительная окружная скорость в зацеплении сателлита с венцом в м/сек;

$v_c$  — относительная окружная скорость зацепления сателлита с солнечной шестерней в м/сек;

$v_a$  — скорость центра сателлита в м/сек;

$n$  — число оборотов ведущего звена в об/мин;

$P$  — передаваемое ведущим звеном усилие в кг;

$P_1$  — давление на зуб венца в кг;

$P_c$  — давление на зуб солнечной шестерни в кг;

$P_A$  — давление на водило на радиусе  $A$  оси сателлитов в кг;

$M$  — момент на ведущем звене в кгсм;

$N$  — передаваемая мощность в л. с.

Передаваемая мощность равна произведению усилия  $P$  на скорость ведущего звена  $v$ :

$$N = P \cdot v.$$

Эта мощность не равна  $P_1 v_1$  или  $P_c v_c$  — мощности в зацеплениях, которая носит название скрытой, или потенциальной, мощности <sup>1</sup>.

В табл. 57 даны наименьшие числа зубьев простых планетарных передач (с учётом коррекции), которые при исполнении не будут иметь сильной подрезки и при сцеплении дают достаточный коэффициент перекрытия.

Таблица 57

Наименьшее число зубьев в простой планетарной передаче

$z_3$	$z_1$	$z_c$	$z_3$	$z_1$	$z_c$	$z_3$	$z_1$	$z_c$
5	50	38	14	42	12	23	59	12
6	40	26	15	44	12	24	61	12
7	40	24	16	45	12	25	63	12
8	40	22	17	47	12	26	65	12
9	40	20	18	49	12	27	67	12
10	40	18	19	51	12	28	69	12
11	40	16	20	53	12	29	71	12
12	40	14	21	55	12	31	73	12
13	40	12	22	57	12			

## ДВУХСТУПЕНЧАТАЯ ПЛАНЕТАРНАЯ ПЕРЕДАЧА

Двухступенчатая планетарная передача с наружным и внутренним зацеплением состоит из пары шестерён с наружным и пары с внутренним зацеплением, которые ничем не отличаются от обычных передач.

Расчётные параметры этой передачи даны в табл. 56, во всём подобной табл. 55.

Конструктивно эти планетарные передачи применяются для передаточных чисел, не превосходящих 10.

## ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ ПЕРЕДАЧИ С КОСЫМ ЗУБОМ

### ОСНОВНЫЕ РАЗМЕРЫ, ПАРАМЕТРЫ И ТЕРМИНОЛОГИЯ

Профиль косо́го зуба ничем не отличается от прямого и является производным той же основной рейки (фиг. 113).

В связи с косым расположением зуба введены следующие дополнительные (см. стр. 268 и др.) термины (фиг. 125).

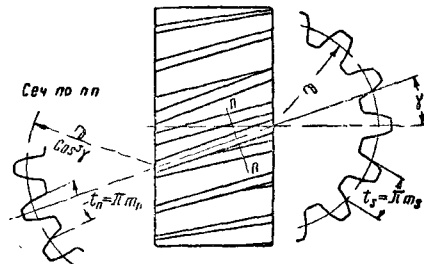
Нормальный шаг  $t_n$  в непрямоугольных колёсах — шаг в нормальной к направлению зуба плоскости.

Торцевой шаг  $t_s$  — шаг, который в колёсах непрямоугольных измеряется по торцевой поверхности.

В соответствии с шагом различают нормальный модуль  $m_n$  и торцевой модуль  $m_s$ .

Приведённое число зубьев  $z_n$  — число зубьев нормального модуля, которое

может быть расположено на окружности, радиус которой равен радиусу делительной



Фиг. 125. Шестерня с косым зубом

<sup>1</sup> У некоторых типов планетарных передач (см. стр. 275) потенциальная мощность в несколько раз превосходит передаваемую, чем и объясняется неудовлетворительность их работы.

окружности колеса, делённому на куб косинуса угла спирали  $\gamma$ . При фрезеровке шестерни дисковой фрезой номер фрезера должен выбираться согласно этому числу зубьев.

Угол спирали  $\gamma$  — угол между касательной к зубу на делительной окружности и осью шестерни.

Угол подъёма ( $90^\circ - \gamma$ ) — угол между касательной к зубу на делительной окружности и плоскостью вращения шестерни.

Математические зависимости между элементами косозубого колеса будут:

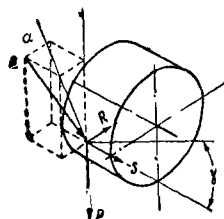
$$t_n = t_s \cos \gamma, \quad m_n = m_s \cos \gamma,$$

$$t_n = \pi m_n, \quad t_s = \pi m_s,$$

$$r_o = \frac{m_s z}{2}, \quad z_n = \frac{z}{\cos^3 \gamma}.$$

### УСИЛИЯ В ЗУБЬЯХ

Между косозубыми шестернями действует усилие  $Q$ , которое может быть разложено на три составляющих (фиг. 126):



Фиг. 126

$P$  — касательную к начальной окружности — окружное усилие, создающее момент вращения;  
 $R$  — нормальную к начальной окружности — усилие, распирающее валы шестерён;  
 $S$  — параллельную валам — осевое давление на опоры.

Соотношения между этими силами будут:

$$R = \frac{P \operatorname{tg} \alpha}{\cos \gamma};$$

$$S = P \operatorname{tg} \gamma,$$

где  $\alpha$  — угол зацепления;  
 $\gamma$  — угол спирали.

### РАСЧЁТ КОСОГО ЗУБА

Динамическая нагрузка (размерность см. стр. 274).

$$P_{дин} = \frac{v(P + bc \cos^2 \gamma) \cos \gamma}{v + 0,151 \sqrt{bc \cos^2 \gamma} + P} + P.$$

Эта нагрузка должна быть менее, чем прочность зуба на изгиб с коэффициентом запаса 2 и более. Прочность зуба на изгиб

$$P = y \cdot b \cdot t \cdot R_{изг},$$

причём величину фактора зуба  $y$  нужно брать по приведённому числу зубьев (табл. 50).

Расчётная формула на износ

$$P_{изн} = \frac{DbK}{\cos^2 \gamma} \cdot \frac{2z_2}{z_2 \pm z_1}.$$

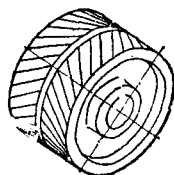
Величина допустимой нагрузки на износ должна быть не менее динамической нагрузки.

### ШЕВРОННЫЕ ШЕСТЕРНИ

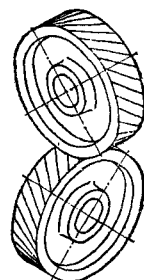
Шевронные шестерни (фиг. 127) — это спаренные шестерни с косым зубом, но отличаются от последних тем, что не создают осевого давления на опоры. Расчёт шевронных шестерён ничем не отличается от расчёта косозубых.

### ВИНТОВЫЕ ШЕСТЕРНИ

В тех случаях, когда оси косозубых шестерён непараллельны, контакт между зубьями происходит не по линии, а в точке. Пара таких винтовых (фиг. 128) шестерён не может передавать значительные усилия и мощность, и должна применяться только для передачи незначительных крутящих моментов.



Фиг. 127. Шевронная шестерня



Фиг. 128. Винтовые шестерни

Величина усилия, передаваемого винтовой парой, может быть найдена из расчёта на износ, причём решающим моментом в работе шестерни является качество приработки пары при монтаже.

Хорошая приработка значительно увеличивает допустимую нагрузку и срок работы шестерён.

Пусть  $P$  — статическая нагрузка, передаваемая на зуб, в кг;

$P_{дин}$  — динамическая нагрузка на зуб в кг;

$v$  — окружная скорость на начальной окружности ведомой шестерни в плоскости вращения в м/сек;

$d$  — диаметр начальной окружности ведущей шестерни в см;

$D$  — диаметр начальной окружности ведомой шестерни в см;

$K$  — фактор нагрузки;

$C$  — коэффициент передаточного числа;

$P_{изн}$  — допустимая нагрузка на износ в кг.

Тогда

$$P_{дин} = \frac{6 + v}{6} P;$$

$$P_{изн} = d^2 CK; C = \left( \frac{2D}{D + d} \right)^2.$$

Величина коэффициента  $K$  дана в табл. 58.

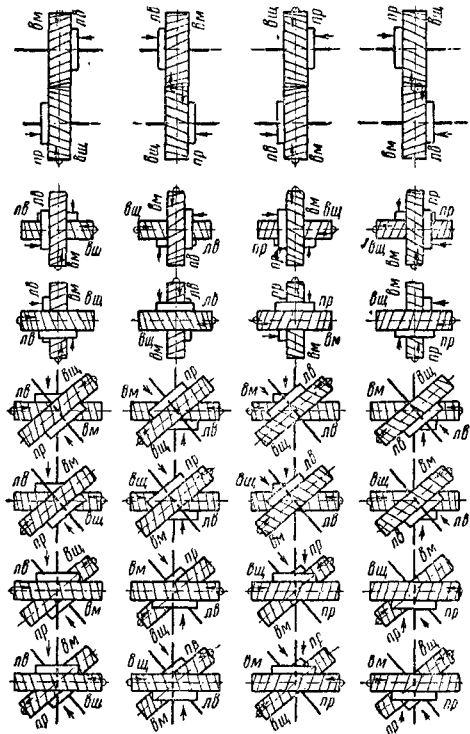
Ввиду того что диаметры винтовых шестерён не пропорциональны числу зубьев, передаточное число их должно вычисляться как частное от числа зубьев, а не как отношение диаметров. Направление вращения ведущей шестерни зависит от направления спиралей и может быть найдено при помощи фиг. 129.

Угол спирали выбирается в зависимости от угла между осями. Для параллельных

Таблица 58

Фактор нагрузки  $K$  винтовых шестерён

Материал шестерён	После короткой приработки	После хорошей приработки
Сталь ( $H_B=250$ ) по стали ( $H_B=250$ ) . . . . .	0,14	0,35
Сталь ( $H_B=250$ ) по бронзе . . . . .	0,28	0,85
Сталь ( $H_B=500$ ) по бронзе . . . . .	0,35	1,40
Сталь ( $H_B=500$ ) по чугуну . . . . .	0,42	1,40
Сталь ( $H_B=500$ ) по стали ( $H_B=500$ ) . . . . .	0,50	1,05
Чугун по чугуну . . . . .	0,56	1,40
Неметаллические шестерни по стали и чугуну . . . . .	0,70	1,75



Фиг. 129. Направления вращения и усилия в винтовых шестернях

Обозначения.  $пр$ —правая спираль;  $вш$ —ведущая шестерня;  $лв$ —левая спираль;  $вм$ —ведомая шестерня;  $\rightarrow$ —направление опорной реакции

осей не рекомендуется брать более  $20^\circ$  по избежание значительного осевого давления; с другой стороны, желательно, чтобы всегда было в одновременном сцеплении не менее двух зубьев.

Для осей, пересекающихся под любыми углами, имеет место следующее правило.

Если каждый из углов спирали меньше, чем угол скрещивания осей, то сумма углов спиралей равна углу скрещивания и спирали обоих колёс имеют одинаковые направления.

Если угол спирали одной из шестерён больше угла скрещивания, то разность между углами спирали должна быть равна углу скрещивания; спирали же шестерни имеют разные направления.

## КОНИЧЕСКИЕ ЗУБЧАТЫЕ ПЕРЕДАЧИ

### ОСНОВНЫЕ ПАРАМЕТРЫ И ТЕРМИНОЛОГИЯ

Конические шестерни служат для передачи вращения между пересекающимися осями. В соответствии с формой шестерни, представляющей собой усечённый конус, применяются следующие термины (фиг. 130).

Начальный конус — конус, основанием которого является начальная (делительная) окружность шестерни, а вершиной — точка пересечения осей.

Наружный конус — конус, основанием которого является окружность выступов, а вершиной — точка пересечения осей.

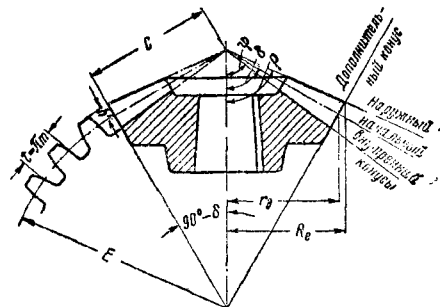
Внутренний конус — конус, основанием которого является окружность впадин, а вершиной — точка пересечения осей.

Дополнительный конус — конус, основанием которого является начальная окружность, а образующей — линия, перпендикулярная к образующей начального конуса.

Углы при вершинах конусов  $\rho$ ,  $\delta$ ,  $\varphi$  — углы между осью конуса и образующими наружного, начального и внутреннего конусов.

Профиль зуба конической шестерни теоретически не отличается от такового для цилиндрических шестерён и является производным основных реек (фиг. 113), если его

вычертить на развёртке дополнительного конуса (фиг. 130). Теоретические размеры зуба (модуль), высота ножки головки и  $пр$ . относятся всегда к этому профилю, он и является определяющим размером шестерни. Определения элементов зацепления и термины см. стр. 268.



Фиг. 130. Коническая шестерня

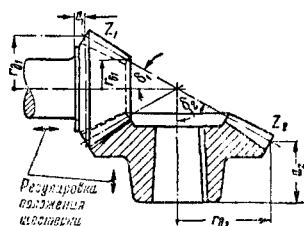
Приведённое число зубьев  $z$  — число зубьев номинального модуля, которое может располагаться на окружности радиуса, равного образующей  $E$  дополнительного конуса.

Основные соотношения между элементами конической шестерни следующие (фиг. 130):

$$t = \pi m, \quad 2r_\partial = mz,$$

$$R_e = r_\partial + h' \cos \delta, \quad C = \frac{r_\partial}{\sin \delta}, \quad E = C \cdot \operatorname{tg} \delta.$$

Взаимная точность расположения конических шестерён — совпадение вершин конусов — для хорошей работы передачи обязательна. Ввиду того что выдержать с достаточной точностью (фиг. 131) размер  $a$  (от начального



Фиг. 131. Сопряжённые конические шестерни

диаметра до опорной поверхности — базы шестерни) трудно, при проектировании передачи необходимо предусматривать возможность осевого смещения — регулировки положения одной из шестерён.

Аналогично сказанному на стр. 270 для двух сцепляющихся шестерён (фиг. 131)

$$i = \frac{z_2}{z_1} = \frac{r_{\partial 2}}{r_{\partial 1}} = \frac{n_1}{n_2}, \quad \operatorname{tg} \delta = \frac{r_{\partial 2}}{r_{\partial 1}}.$$

### УСИЛИЯ В ЗУБЬЯХ

Усилие, действующее между зубьями конической передачи, лежит в плоскости (фиг. 132), перпендикулярной к образующей начальных конусов, и наклонено к общей касательной начальных окружностей под углом  $\alpha$  — углом зацепления.

Раскладывая это усилие на три взаимно перпендикулярные силы, получаем:

$P$  — касательную к начальным окружностям — окружное усилие, создающее момент вращения, в кг;

$R$  — нормальную к оси шестерни — усилие, изгибающее вал шестерни, в кг;

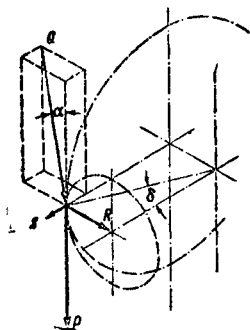
$S$  — параллельную оси шестерни — осевое давление на опоры шестерни в кг.

На сопряжённую шестерню будут действовать реакции этих трёх усилий, причём усилия  $R$  и  $S$  поменяются своими значениями.

Соотношения между этими силами будут:

$$Q = \frac{P}{\cos \alpha}, \quad R = P \operatorname{tg} \alpha \cos \delta,$$

$$S = P \operatorname{tg} \alpha \sin \delta.$$



Фиг. 132. Усилия в конической передаче

### РАСЧЁТ КОНИЧЕСКИХ ШЕСТЕРЁН

Принципы расчёта конических шестерён те же, что цилиндрических (см. стр. 273), и всё сказанное на стр. 275 может быть отнесено также и к коническим шестерням.

Формулы, применяющиеся для расчёта, несколько отличны.

Прочность зуба на изгиб

$$P_{изг} = y b t R_{изг} \frac{r_{\delta 1}}{r_{\delta 1}},$$

где  $r_{\delta 1}$  — радиус малой окружности шестерни (фиг. 131);

$y$  — фактор зуба, выбираемый по той же табл. 50, но в зависимости от приведённого числа зубьев  $z_n$ .

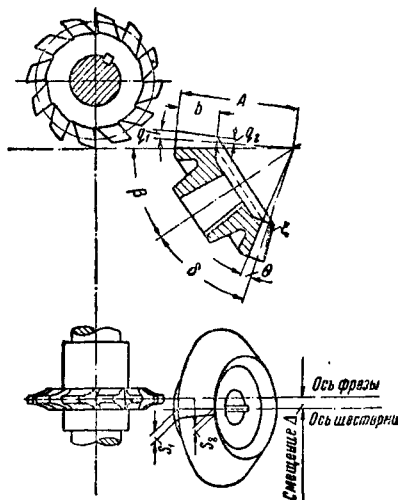
Прочность зуба на износ, для шестерён, оси которых пересекаются под прямым углом,

$$P = \frac{D b K C}{\cos \delta_1}.$$

Прочность зуба на изгиб (включая запас прочности) и прочность зуба на износ должны быть не меньше динамической нагрузки, найденной по формуле, данной на стр. 271.

### ФРЕЗЕРОВКА КОНИЧЕСКИХ ШЕСТЕРЁН

Изготовление точных конических шестерён производится на специальных зубострогальных станках. Шестерни пониженной точности могут быть изготовлены фрезеровкой модуль-



Фиг. 133. К фрезеровке конических шестерён

ными фрезами на фрезерных станках с следующей небольшой опиловкой и приработкой шестерён на месте.

При фрезеровке конических шестерён дисковой фрезой необходимо сделать два прохода в каждой спадине между зубьями. Для получения профиля, возможно лучше приближающегося к теоретическому коническому зубу, заготовку шестерни необходимо несколько сместить от центра фрезы сначала в одну, потом в другую сторону (фиг. 133), причём перед вторым проходом заготовка

Таблица 59  
Фактор смещения заготовки конической шестерни при фрезеровке модульной фрезой

№ фрезы	Отношение длины образующей начального конуса к длине зуба $A/b$												
	$\frac{3}{1}$	$\frac{3^{1/4}}{1}$	$\frac{3^{1/2}}{1}$	$\frac{3^{3/4}}{1}$	$\frac{4}{1}$	$\frac{4^{1/4}}{1}$	$\frac{4^{1/2}}{1}$	$\frac{4^{3/4}}{1}$	$\frac{5}{1}$	$\frac{5^{1/4}}{1}$	$\frac{6}{1}$	$\frac{7}{1}$	$\frac{8}{1}$
Фактор смещения $F$													
8	0,254	0,254	0,255	0,256	0,257	0,257	0,257	0,258	0,258	0,259	0,260	0,262	0,264
7	0,266	0,268	0,271	0,272	0,273	0,274	0,274	0,275	0,277	0,279	0,280	0,283	0,284
6	0,266	0,268	0,271	0,273	0,275	0,278	0,280	0,282	0,283	0,286	0,287	0,290	0,292
5	0,275	0,280	0,285	0,287	0,291	0,293	0,296	0,298	0,298	0,302	0,305	0,308	0,311
4	0,280	0,285	0,290	0,293	0,295	0,296	0,298	0,300	0,302	0,307	0,309	0,313	0,315
3	0,311	0,318	0,323	0,328	0,330	0,334	0,337	0,340	0,343	0,348	0,352	0,356	0,362
2	0,289	0,298	0,308	0,316	0,324	0,329	0,334	0,338	0,343	0,350	0,340	0,370	0,376
1	0,275	0,286	0,296	0,309	0,319	0,331	0,338	0,344	0,352	0,361	0,368	0,380	0,386

для получения хорошего профиля должна быть повернута на соответствующий угол.

Шестерня устанавливается на станок на оправке в шпинделе делительной головки под углом  $\beta = \delta - \theta$  (фиг. 133).

Смещение заготовки или фрезы от центра может быть подсчитано по табл. 59, причём последовательность будет следующей:

1) найти отношение длины образующей начального конуса к длине зуба  $\frac{A}{b}$ ;

2) определить (можно непосредственным измерением зубомером) толщину зуба фрезы на делительной окружности— $T$  (номер фрезы должен быть выбран по табл. 60). Установка зубомера при этом может быть принята равной  $1,157 m = q$ ;

3) из табл. 59 берут значения фактора смещения  $F$  соответственно найденным  $\frac{A}{b}$  и номер фрезы;

4) найти смещение по формуле

$$\Delta = \frac{T}{2} - Fm,$$

где  $\Delta$  — смещение заготовки или фрезера в мм;

$T$  — толщина зуба фрезы в мм;

$F$  — фактор из таблицы;

$m$  — модуль в мм;

5) выбирают фрезу согласно табл. 60, составленной для шестерни с перпендикулярными осями; в таблице первая цифра — номер фрезы для большой шестерни, вторая — для малой.

После того как найдено смещение и шестерня установлена соответственно в бок от фрезера, производится фрезерование одной стороны впадины для всех зубьев шестерни. Затем шестерня смещается от центра фрезы в другую сторону на ту же величину вычисленного выше смещения. Окончательная установка шестерни производится по узкому концу зуба: шестерня

поворачивается и устанавливается так, что на узком конце впадина как раз приходится против фрезы. При этом необходимо следить за тем, чтобы фреза не была шире теоретического размера впадины на узкой стороне зуба; это обычно имеет место в том случае, когда длина зуба не больше  $\frac{1}{3}$  образующей начального конуса. В таком положении делается пробный проход, фрезеруется другая сторона, причём зуб получится несколько полнее. Толщина зуба может быть доведена до требуемой поворотом шестерни, при этом необходимо следить за точностью смещения шестерни от фрезы. Измерение зуба производится зубомером (стр. 271), причём зуб необходимо измерять на толстом и тонком концах. Если на толстом конце установка зубомера будет  $q_1$  и толщина зуба  $s_1$ , то (фиг. 133) на тонком конце она будет соответственно

$$q_2 = q_1 \frac{A - b}{A}, \quad s_2 = s_1 \frac{A - b}{A}.$$

При таком измерении зуба могут выявиться три ошибки:

а) оба отсчёта более теоретических значений толщины зуба — необходимо довертывать шестерню на фрезу до тех пор, пока будет получен требуемый размер;

б) если толстый конец зуба исполнен в размер, а тонкий получился несколько больше теоретического — смещение шестерни велико, необходимо несколько переместить шестерню по направлению к фрезе;

в) если тонкий конец получился в размер, а толстый несколько более теоретического, шестерню надо отодвинуть от фрезы.

У изготовленной таким образом шестерни приближённого профиля необходимо несколько спилить верхнюю часть зуба (площадь  $E$ ), как указано на фиг. 133. После этого рекомендуется изготовленную пару шестерён подвергнуть приработке с маслом в течение нескольких часов.

Таблица 60

## Выбор номеров модульных фрез при фрезеровке конических шестерён

Числа зубьев	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
12	2-2																
13	3-2	3-3															
14	4-2	3-3	3-3														
15	4-2	4-3	4-3	4-4													
16	5-2	4-2	4-3	4-3	4-4												
17	5-2	5-2	5-3	4-3	4-4	4-4											
18	5-2	5-2	5-3	5-3	5-4	5-4	4-4										
19	6-2	5-2	5-3	5-3	5-3	5-4	5-4	5-5									
20	6-2	6-2	5-3	5-3	5-3	5-4	5-4	5-5	5-5								
21	6-1	6-2	6-2	6-3	5-3	5-4	5-4	5-4	5-5	5-5							
22	6-1	6-2	6-2	6-3	6-3	6-4	5-4	5-4	5-5	5-5	5-5						
23	6-1	6-2	6-2	6-3	6-3	6-4	6-4	6-4	6-5	5-5	5-5	5-5					
24	6-1	6-2	6-2	6-3	6-3	6-3	6-4	6-4	6-5	6-5	6-5	6-5	5-5				
25	7-1	7-2	6-2	6-3	6-3	6-3	6-4	6-4	6-4	6-5	6-5	6-5	6-5	5-5	6-6		
26	7-1	7-2	6-2	6-3	6-3	6-3	6-4	6-4	6-4	6-5	6-5	6-5	6-5	6-5	6-6	6-6	
27	7-1	7-2	7-2	7-3	6-3	6-3	6-4	6-4	6-4	6-5	6-5	6-5	6-5	6-5	6-6	6-6	6-6
28	7-1	7-2	7-2	7-3	7-3	6-3	6-4	6-4	6-4	6-5	6-5	6-5	6-5	6-5	6-6	6-6	6-6
29	7-1	7-2	7-2	7-3	7-3	7-3	6-4	6-4	6-4	6-5	6-5	6-5	6-5	6-5	6-6	6-6	6-6
30	7-1	7-2	7-2	7-3	7-3	7-3	7-4	6-4	6-4	6-4	6-5	6-5	6-5	6-5	6-6	6-6	6-6
31	7-1	7-2	7-2	7-3	7-3	7-3	7-3	7-4	7-4	7-4	7-5	6-5	6-5	6-5	6-6	6-6	6-6
32	7-1	7-2	7-2	7-3	7-3	7-3	7-3	7-4	7-4	7-4	7-5	7-5	6-5	6-5	6-6	6-6	6-6
33	7-1	7-1	7-2	7-2	7-3	7-3	7-3	7-4	7-4	7-4	7-5	7-5	7-5	6-5	6-6	6-6	6-6
34	7-1	7-1	7-2	7-2	7-3	7-3	7-3	7-4	7-4	7-4	7-5	7-5	7-5	7-5	6-6	6-6	6-6
35	7-1	7-1	7-2	7-2	7-3	7-3	7-3	7-4	7-4	7-4	7-5	7-5	7-5	7-5	7-5	7-5	7-5
36	7-1	7-1	7-2	7-2	7-3	7-3	7-3	7-4	7-4	7-4	7-5	7-5	7-5	7-5	7-5	7-5	7-5
37	7-1	7-1	7-2	7-2	7-3	7-3	7-3	7-4	7-4	7-4	7-5	7-5	7-5	7-5	7-5	7-5	7-5
38	7-1	7-1	7-2	7-2	7-3	7-3	7-3	7-4	7-4	7-4	7-5	7-5	7-5	7-5	7-5	7-5	7-5
39	7-1	7-1	7-2	7-2	7-3	7-3	7-3	7-4	7-4	7-4	7-5	7-5	7-5	7-5	7-5	7-5	7-5
40	8-1	7-1	7-2	7-2	7-3	7-3	7-3	7-4	7-4	7-4	7-5	7-5	7-5	7-5	7-5	7-5	7-5
41	8-1	8-1	7-2	7-2	7-3	7-3	7-3	7-4	7-4	7-4	7-5	7-5	7-5	7-5	7-5	7-5	7-5
42	8-1	8-1	7-2	7-2	7-3	7-3	7-3	7-4	7-4	7-4	7-5	7-5	7-5	7-5	7-5	7-5	7-5
43	8-1	8-1	8-2	7-2	7-3	7-3	7-3	7-4	7-4	7-4	7-5	7-5	7-5	7-5	7-5	7-5	7-5
44	8-1	8-1	8-2	8-2	7-3	7-3	7-3	7-4	7-4	7-4	7-5	7-5	7-5	7-5	7-5	7-5	7-5
45	8-1	8-1	8-2	8-2	8-3	7-3	7-3	7-4	7-4	7-4	7-5	7-5	7-5	7-5	7-5	7-5	7-5
46	8-1	8-1	8-2	8-2	8-3	7-3	7-3	7-4	7-4	7-4	7-5	7-5	7-5	7-5	7-5	7-5	7-5
47	8-1	8-1	8-2	8-2	8-3	7-3	7-3	7-4	7-4	7-4	7-5	7-5	7-5	7-5	7-5	7-5	7-5
48	8-1	8-1	8-2	8-2	8-3	8-3	7-3	7-4	7-4	7-4	7-5	7-5	7-5	7-5	7-5	7-5	7-5
49	8-1	8-1	8-2	8-2	8-3	8-3	8-3	7-4	7-4	7-4	7-5	7-5	7-5	7-5	7-5	7-5	7-5
50	8-1	8-1	8-2	8-2	8-3	8-3	8-3	7-4	7-4	7-4	7-5	7-5	7-5	7-5	7-5	7-5	7-5
51	8-1	8-1	8-2	8-2	8-3	8-3	8-3	8-4	7-4	7-4	7-5	7-5	7-5	7-5	7-5	7-5	7-5
52	8-1	8-1	8-2	8-2	8-3	8-3	8-3	8-4	8-4	7-4	7-5	7-5	7-5	7-5	7-5	7-5	7-5
53	8-1	8-1	8-2	8-2	8-3	8-3	8-3	8-4	8-4	8-4	7-5	7-5	7-5	7-5	7-5	7-5	7-5
54	8-1	8-1	8-2	8-2	8-3	8-3	8-3	8-4	8-4	8-4	7-5	7-5	7-5	7-5	7-5	7-5	7-5
55	8-1	8-1	8-2	8-2	8-3	8-3	8-3	8-4	8-4	8-4	7-5	7-5	7-5	7-5	7-5	7-5	7-5
56	8-1	8-1	8-2	8-2	8-3	8-3	8-3	8-4	8-4	8-4	8-5	8-5	8-5	8-5	8-5	8-5	8-5
57	8-1	8-1	8-2	8-2	8-3	8-3	8-3	8-4	8-4	8-4	8-5	8-5	8-5	8-5	8-5	8-5	8-5
58	8-1	8-1	8-2	8-2	8-3	8-3	8-3	8-4	8-4	8-4	8-5	8-5	8-5	8-5	8-5	8-5	8-5
59	8-1	8-1	8-2	8-2	8-3	8-3	8-3	8-4	8-4	8-4	8-5	8-5	8-5	8-5	8-5	8-5	8-5
60	8-1	8-1	8-2	8-2	8-3	8-3	8-3	8-4	8-4	8-4	8-5	8-5	8-5	8-5	8-5	8-5	8-5
61	8-1	8-1	8-2	8-2	8-3	8-3	8-3	8-4	8-4	8-4	8-5	8-5	8-5	8-5	8-5	8-5	8-5
62	8-1	8-1	8-2	8-2	8-3	8-3	8-3	8-4	8-4	8-4	8-5	8-5	8-5	8-5	8-5	8-5	8-5
63	8-1	8-1	8-2	8-2	8-3	8-3	8-3	8-4	8-4	8-4	8-5	8-5	8-5	8-5	8-5	8-5	8-5
64	8-1	8-1	8-2	8-2	8-3	8-3	8-3	8-4	8-4	8-4	8-5	8-5	8-5	8-5	8-5	8-5	8-5
65	8-1	8-1	8-2	8-2	8-3	8-3	8-3	8-4	8-4	8-4	8-5	8-5	8-5	8-5	8-5	8-5	8-5
100	8-1	8-1	8-2	8-2	8-3	8-3	8-3	8-4	8-4	8-4	8-5	8-5	8-5	8-5	8-5	8-5	8-5

## ЧЕРВЯЧНЫЕ ПЕРЕДАЧИ

## ТИПЫ ЧЕРВЯЧНЫХ ПЕРЕДАЧ

При кустарном изготовлении червяка нарезкой резцом на токарном винторезном станке получается профиль, который в нормальном сечении даёт спираль Архимеда, если в осевом сечении был выдержан трапециoidalный профиль (фиг. 134). Основным недостатком этого профиля является то, что он не поддаётся шлифовке плоским камнем. Вследствие этого получить хороший профиль и избежать при эксплуатации значительного износа бронзовой шестерни не удаётся.

Более современным является эвольвентный профиль (фиг. 134, б), допускающий шлифовку червяка плоским камнем, но требующий для изготовления червяка и шестерни специальной группы станков. Повышенное качество рабо-

чей поверхности червяка даёт возможность повышать нагрузку на передачу в сравнении с нагрузками на трапециoidalный червяк.

Ещё более высокие нагрузки передаёт так называемая глобоидальная червячная передача (фиг. 135), изготовление которой требует также ряда специальных станков.

## ТЕРМИНОЛОГИЯ И ОСНОВНЫЕ РАЗМЕРЫ

Червячная передача состоит из червяка и червячной шестерни со взаимно перпендикулярными осями.

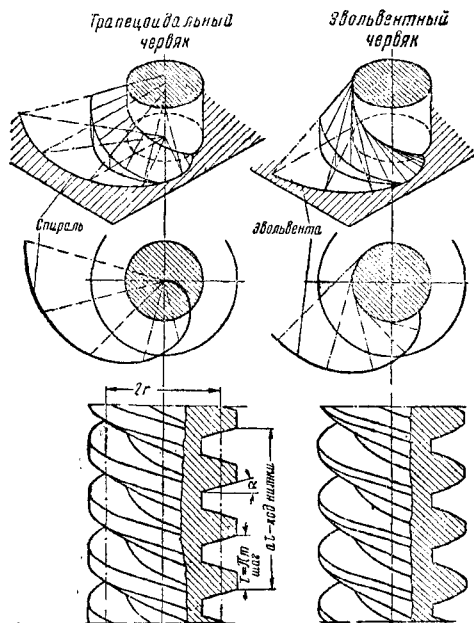
В зависимости от числа ниток на червяке различают одно-, двух- и многоходовые червяки.

Шаг червяка  $t$  — расстояние между двумя ближайшими одноимёнными профилями



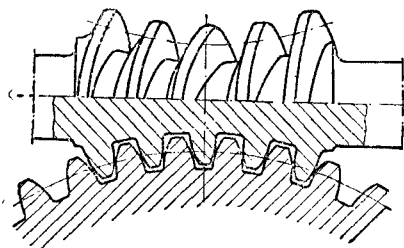
червяка в осевом сечении, измеренное параллельно оси червяка (фиг. 134).

Ход червяка  $at$  — расстояние между двумя одноимёнными профилями одной нитки червяка в том же сечении.



Фиг. 134. Эвольвентный и трапецидальный профили червяков

Начальная окружность червячной шестерни  $r_{ш}$  — окружность, на которой шаг и угол зацепления равны шагу и углу зацепления червяка.



Фиг. 135. Глобоидальная червячная передача

Начальная окружность червяка  $r_ч$  — окружность, имеющая общую точку касания с начальной окружностью шестерни.

Угол подъёма нитки червяка  $\beta$  — угол между касательной к профилю червяка на уровне начальной окружности и перпендикуляром к оси червяка.

Межцентровое расстояние  $A$  — наименьшее расстояние между осями червяка и шестерни.

Передаточное число  $i$  — отношение числа зубьев на шестерне к числу ниток на червяке.

Коэффициент полезного действия передачи  $\eta$  — отношение мощности на червячной шестерне к мощности на червяке (табл. 61).

Таблица 61

Коэффициенты полезного действия червячных зацеплений

Скорость скольжения или окружная скорость червяка в м/сек	Угол подъёма нитки червяка $\beta$					
	5°	10°	15°	25°	35°	45°
Коэффициент полезного действия						
0,025	0,37	0,53	0,62	0,71	0,74	0,75
0,05	0,42	0,59	0,68	0,76	0,79	0,79
0,10	0,49	0,65	0,73	0,80	0,83	0,83
0,20	0,55	0,71	0,78	0,84	0,86	0,87
0,40	0,61	0,76	0,82	0,87	0,89	0,90
0,50	0,63	0,77	0,83	0,88	0,90	0,90
0,75	0,65	0,79	0,85	0,89	0,91	0,91
1,0	0,67	0,80	0,85	0,90	0,91	0,92
1,5	0,68	0,81	0,86	0,90	0,92	0,92
2,0	0,71	0,92	0,87	0,91	0,93	0,93
2,5	0,72	0,84	0,88	0,92	0,93	0,94
3,75	0,71	0,82	0,87	0,91	0,93	0,93
5,0	0,68	0,80	0,86	0,90	0,92	0,92
6,25	0,65	0,79	0,84	0,89	0,91	0,91
7,5	0,63	0,77	0,83	0,88	0,90	0,90
8,75	0,61	0,76	0,82	0,87	0,89	0,90
10	0,60	0,74	0,81	0,86	0,88	0,88
12,5	0,57	0,72	0,79	0,85	0,87	0,88

Основные размеры передачи могут быть найдены на основании следующих формул:

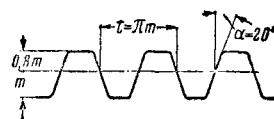
$$r_{ш} = \frac{mz}{2}, \quad A = r_{ш} + r_ч,$$

$$i = \frac{z}{a}, \quad t = \pi m,$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{at}{2\pi r_ч} = \frac{ma}{2r_ч},$$

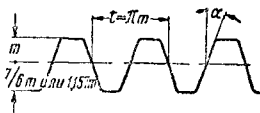
$$\eta = \frac{\cos \alpha - f \cdot \operatorname{tg} \beta}{\cos \alpha + f \cdot \operatorname{ctg} \beta},$$

где  $\alpha$  — угол зацепления;  
 $\beta$  — угол подъёма нитки червяка;  
 $f$  — коэффициент трения в зацеплении.



Фиг. 136. Сечение трапецидального червяка по оси

Профиль осевого сечения трапецидального червяка дан на фиг. 136. Угол наклона боковых граней трапеции принимается обычно равным  $20^\circ$ .



Фиг. 137. Основная рейка эвольвентного червяка

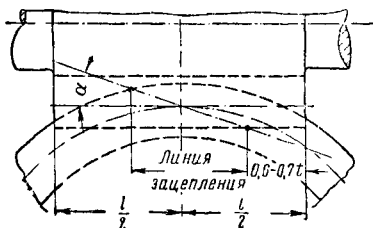
Для эвольвентного зацепления угол наклона на граней основной рейки принимается (фиг. 137) различным в зависимости от угла подъёма нитки червяка (табл. 62).

Т а б л и ц а 62

Углы зацепления основных реек эвольвентных червячных передач

Угол подъема нитки червяка	до 15°	до 25°	до 35°	до 45°
Угол зацепления рейки $\alpha$ . . . . .	15°	20°	25°	30°

Длину червяка нет смысла делать значительной; вполне достаточно, кроме участка червяка (фиг. 138), находящегося в непо-

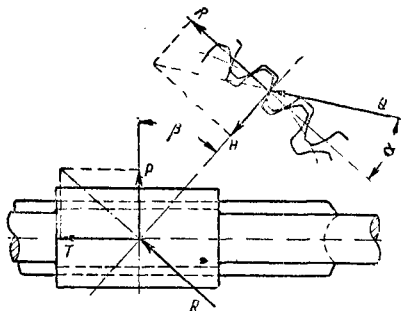


Фиг. 138. К определению длины червяка

средственном сцеплении, добавить с каждой стороны по 0,6—0,7*t*.

### УСИЛИЯ В ЧЕРВЯЧНОМ ЗАЦЕПЛЕНИИ

Суммарное давление между зубьями передачи расположено в плоскости, перпендикулярной к нитке червяка в точке касания под углом зацепления к оси червяка (фиг. 139).



Фиг. 139. Усилия в червячном зацеплении

Эта сила *Q* может быть разложена на три составляющие:

- T* — сила, направленная параллельно оси червяка; эта сила вращает шестерню и на неё должен быть рассчитан упорный подшипник червяка;
- R* — сила, действующая параллельно оси червячной шестерни; эта сила представляет собой силу сопротивления вращению червяка;
- H* — сила, действующая вдоль линии, соединяющей центр шестерни и центр червяка (вдоль линии центров); эта сила изгибает валы червяка и червячной шестерни.

Расчёт червячной передачи обычно удобно вести, исходя из мощности или момента на валу червяка:

$$M = 71\,620 \frac{N}{n},$$

где *M* — момент на валу в кгсм;

*N* — передаваемая мощность в л. с.;

*n* — число оборотов вала в об/мин.

Тогда сила *P* на окружности червяка

$$P = \frac{M}{r_c},$$

где *r<sub>c</sub>* — радиус начальной окружности червяка в см, и далее:

$$T = P \cdot \frac{\cos \alpha - f \operatorname{tg} \beta}{\cos \alpha \operatorname{tg} \beta + f};$$

$$H = P \frac{\sin \alpha}{\cos \beta (\cos \alpha \operatorname{tg} \beta + f)}.$$

### РАСЧЁТ ЧЕРВЯЧНОЙ ПЕРЕДАЧИ

Косой зуб червячной шестерни практически не может быть изломан благодаря своей вогнутой форме. Зуб шестерни фактически работает только на износ, но надёжного расчёта на износ до сих пор нет. Различная гладкость трапециoidalного и эвольвентного шлифованного червяков приводит к разнице в нагрузках, передаваемых той или другой передачей: эвольвентный шлифованный червяк передаёт мощности значительно более высокие, чем червячный.

Расчёт трапециoidalной червячной передачи производится по формуле

$$T = ybtR_{изг}$$

подобно формуле для расчёта прямого зуба на изгиб, но в данном случае являющейся чисто эмпирической.

В этой формуле:

*T* — усилие, вращающее шестерню (см. выше), в кг;

*y* — фактор зуба (табл. 63);

*b* — ширина обода червячной шестерни;

*t* — шаг зуба шестерни, равный  $\pi m$ , в мм;

*R<sub>изг</sub>* — допускаемое напряжение на зуб не более 600 кг/см<sup>2</sup>.

Расчёт эвольвентной передачи. Величина зуба эвольвентной передачи выбирается меньше, чем для трапециoidalной, из условного расчёта на изгиб по той же формуле. Значения *y* и *R<sub>изг</sub>* выбираются по табл. 63 и 64.

Величина допустимой нагрузки на изгиб должна быть больше действительной динамической, последняя может быть найдена по формуле

$$T_{дин} = T \frac{6 + v}{6},$$

где *T<sub>дин</sub>* — динамическая нагрузка, действующая в зацеплении, в кг;

*T* — усилие на зубе шестерни (см. выше) в кг;

*v* — окружная скорость шестерни в м/сек.

Зависимость между допустимой и динамической нагрузкой должна быть:

для спокойной нагрузки  $T_{изг} > 1,25 T_{дин}$ ;

для ударной нагрузки  $T_{изг} > 1,50 T_{дин}$ .

Для эвольвентной передачи зуб шестерни не следует брать большим, чем по расчёту.

Таблица 63

Фактор зуба у червячной передачи

Угол грани $\alpha$ режущего инструмента	15°	20°	25°	30°
Фактор $y$ . . . . .	0,100	0,125	0,150	0,175

Таблица 64

Допускаемое напряжение на изгиб зуба эвольвентной червячной передачи

Материал	$R_{изг}$ в кг/см <sup>2</sup>
Серый чугун . . . . .	850
Сталитый чугун . . . . .	1 200
Пластмассы . . . . .	400
Бронза марганцовистая . . . . .	1 200
Бронза фосфористая . . . . .	1 700

Таблица 65

Коэффициент износа зуба червячной передачи  $K$

Материал	$K$ в кг/см <sup>2</sup>
Серый чугун . . . . .	3,5
Сталитый чугун . . . . .	3,5
Пластмассы . . . . .	8,8
Бронза марганцовистая . . . . .	5,6
Бронза фосфористая . . . . .	7,0

Выбранный зуб по модулю и ширине должен быть проверен на износ по формуле

$$T_{изн} = DbK,$$

где  $T_{изн}$  — допустимая нагрузка на износ в кг;

$b$  — ширина обода шестерни в см;

$D$  — диаметр начальной окружности в см;

$K$  — коэффициент износа зуба (табл. 65).

Допускаемая нагрузка на износ должна быть не меньше усилия  $T_{дин}$ , вращающего шестерню.

### ПРОВЕРКА ПЕРЕДАЧИ НА НАГРЕВ

Энергия, теряемая в червячной передаче, превращается в тепло, которое отдаётся окружающей поверхности боковой поверхностью редуктора (фиг. 140).

Температура  $(t - t_0)$  червячной передачи может быть найдена по формулам

$$L = 632 (1 - \eta) N \cdot \xi,$$

$$L = K \cdot F (t - t_0),$$

где  $L$  — количество тепла, выделяемое передачей, в кал/ч;

$\eta$  — коэффициент полезного действия передачи;

$N$  — передаваемая мощность в л. с.;

$\xi$  — относительное время работы передачи =  $\frac{\text{время работы}}{\text{время работы} + \text{время простоев}}$ ;

$K$  — коэффициент теплоотдачи:

для передач с плохой циркуляцией воздуха вокруг

$$K = 6 - 10,$$

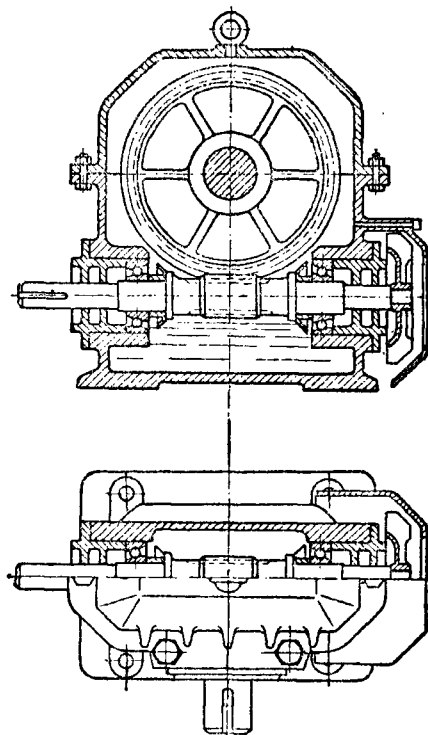
для передач без обдува

$$K = 10 - 12,$$

для передач с обдувом

$$K = 15 - 20.$$

Найдя из первой формулы  $L$ , подставляют её значение во вторую и находят разность температур, которая не должна превосходить 50 — 70°, так как при высоких температурах вязкость масла сильно падает. При невозможности избежать высоких температур нагрева передачи необходимо для смазки применять тяжёлые машинные масла.



Фиг. 140. Червячный редуктор

### МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ ЧЕРВЯЧНЫХ ПЕРЕДАЧ

Материалом червяка обычно является углеродистая сталь марок Ст. 45 или Ст. 6, вполне удовлетворяющая требованиям прочности и твёрдости.

Желательна её закалка до твёрдости  $H_B > 250$  перед чистовой обработкой. Лучшим материалом для шестерён является фосфористая бронза марки БРФ-10. Для небольших нагрузок и небыстроходных передач можно применять хороший нетвёрдый серый чугун марки СЧ-12-28. Вполне допустимо применение специальных сортов бронзы. При этом необходимо отметить, что повышенные физические свойства материала, как, например, повышенная его прочность, не являются

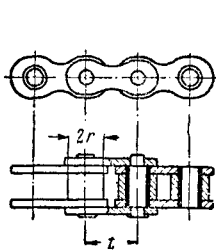
неоспоримым достоинством. Обязательным требованием к материалу червячной шестерни является его способность прирабатываться к

червяку — свойство, которым отличается фосфористая бронза, являющаяся пока незаменимым материалом.

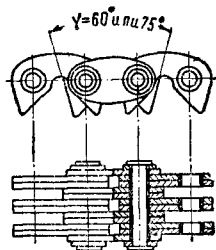
## ЦЕПНЫЕ ПЕРЕДАЧИ

Для передачи мощности от вала к валу применяются два типа цепей:

- роликовые — ГОСТ 191-41 (фиг. 141);
- зубчатые бесшумные (фиг. 142).



Фиг. 141. Роликовая цепь



Фиг. 142. Бесшумная цепь

Области распространения указанных цепей по скоростям и усилиям одинаковые. Роликовые цепи легче, дешевле и распространены больше, чем зубчатые, несмотря на больший шум при работе.

Применение цепей возможно при скоростях до 8 м/сек и более.

### РАСЧЁТ ЦЕПЕЙ

Цепи рассчитываются по полезному натяжению, действующему на цепь:

$$P = \frac{75N}{v},$$

где  $P$  — полезное натяжение на цепи в кг;  
 $N$  — передаваемая мощность в л. с.;  
 $v$  — окружная скорость в м/сек.

Это усилие, умноженное на запас прочности, должно быть не более разрушающей цепь нагрузки:

$$P \cdot n \leq P_p,$$

где  $P_p$  — нагрузка, разрушающая цепь, в кг;  
 $n$  — запас прочности (см. табл. 66).

### ЦЕПНЫЕ ЗВЁЗДОЧКИ

Чем меньше число зубьев на звёздочке, тем больше износ цепи; следовательно, не допустимо без необходимости уменьшать число зубьев. Наименьшее число зубьев можно

считать равным:

для роликовых цепей  $z_{\min} = 9$ ;

для зубчатых цепей

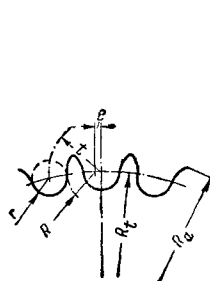
$$(\gamma = 60^\circ) z_{\min} = 15,$$

где  $\gamma$  — угол между опорными плоскостями звена (фиг. 142).

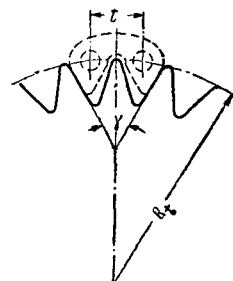
Диаметр начальной окружности цепной звёздочки

$$D = \frac{t}{\sin \frac{180^\circ}{z}},$$

где  $D$  — диаметр начальной окружности в мм;  
 $t$  — шаг цепи в мм;  
 $z$  — число зубьев на звёздочке.



Фиг. 143. Профиль зуба звёздочки роликовой цепи



Фиг. 144. Профиль зуба звёздочки бесшумной цепи

Профили цепных звёздочек для роликовых и зубчатых цепей даны на фиг. 143 и 144.

Таблица 66  
Запасы прочности цепей

Шаг цепи	Тип цепи	
	роликовая	зубчатая
10	100—80	75
12	80—70	65
15	70—60	60
20	60—50	55
25	50—40	50
30—35	35	45
40	30	40
45	25	35
50	20	30
60	15	25
75	12	20

## ДЕТАЛИ И ПРИВОДЫ ГРУЗОПОДЪЁМНЫХ МЕХАНИЗМОВ

### ДЕТАЛИ ГРУЗОПОДЪЁМНЫХ МАШИН

Детали грузоподъёмных машин, являющиеся общими с другими отраслями машиностроения, изложены в предыдущих главах этого раздела.

Описание конструкций и расчёт деталей, применяющихся только в подъёмно-транспортном машиностроении, приведены ниже.

### Канаты

Основным типом каната, наиболее пригодным для кранов, является канат с шестью прядями по 19 проволок при одной пеньковой сердцевине ( $6 \times 19 + 1$ ) (ГОСТ ВКС 3070-46). Канат  $6 \times 37 + 1$  (ГОСТ ВКС 3071-46) более гибок и допускает применение барабанов меньшего диаметра, но бла-

Таблица 67

## Стальные канаты для подъема грузов

Канаты 6×19=114 проволок и 1 органический сердечник						Канат 6×37=222 проволоки и 1 органический сердечник					
диаметр		площадь сечения всех проволок	вес пог. м каната	разрывное усилие при прочности 150 кг/мм²		диаметр		площадь сечения всех проволок	вес пог. м каната	разрывное усилие при прочности 150 кг/мм²	
каната	проволок			суммарное в канате	каната в целом	каната	проволок			суммарное в канате	каната в целом
мм		мм²	кг	кг не менее		мм		мм²	кг	кг не менее	
6,2	0,4	14	0,13	100	1 790	8,8	0,4	28	0,24	4 200	3 430
7,7	0,5	22	0,2	3 300	2 800	11	0,5	44	0,38	6 600	5 330
9,2	0,6	32	0,29	4 800	4 070	13	0,6	63	0,57	9 450	7 760
11	0,7	44	0,4	6 600	5 600	15,5	0,7	85	0,77	12 750	10 500
12,5	0,8	57	0,52	8 550	7 250	17,5	0,8	112	1,00	16 800	13 700
14	0,9	73	0,65	10 900	9 250	19,5	0,9	141	1,2	21 200	17 300
15,5	1,0	90	0,81	13 500	11 400	21,5	1,0	174	1,6	26 100	21 400
17	1,1	108	0,92	16 200	13 800	24	1,1	201	1,8	31 600	25 900
18,5	1,2	129	1,2	19 300	16 400	26	1,2	251	2,3	37 600	30 800
20	1,3	151	1,3	22 700	19 300	28	1,3	295	2,6	44 200	36 200
21,5	1,4	176	1,6	26 400	22 400	30	1,4	342	3,1	51 200	42 000
23	1,5	202	1,8	30 200	25 700	32,5	1,5	392	3,6	58 800	48 200
25	1,6	229	2,1	34 400	29 200	34,5	1,6	446	4,1	66 900	54 800

Примечание. При прочности проволоки, не равной 150 кг/мм², разрывное усилие каната приблизительно пропорционально отношению прочностей проволок.

годаря тому, что проволоки его тоньше и более чувствительны к истиранию, применение этого каната может быть рекомендовано в чистых помещениях при отсутствии абразивной пыли и грязи. То же самое ещё в большей степени относится к канату 6×61+1.

Характеристику стальных канатов см. в табл. 67.

Решающее значение для срока службы каната имеет диаметр барабана и роликов, по которым проходит канат. С этой точки зрения различают категории диаметров:

а) критический диаметр барабана и роликов, когда при огибании их канатом ещё не происходит перемещения одной пряди по отношению к другой; срок службы каната в таких условиях незначителен;

б) экономический диаметр — тот диаметр, который обеспечивает значительный срок службы каната при соответствующих условиях эксплуатации; применяется в тех случаях, когда габариты и вес лебёдки ограничены;

в) желательный диаметр, гарантирующий большой срок службы каната при тяжёлых условиях работы; применяется в тех случаях, когда предъявляются особые условия с точки зрения безопасности работы.

Значения этих диаметров для крановых канатов широкого потребления даны в табл. 68.

Следовательно, выбор диаметра барабана производится в соответствии с ожидаемыми условиями эксплуатации.

Критические диаметры выбираются для гладких барабанов на механизмах, вес и габарит которых имеют решающее значение, работающих с короткими концами канатов, не имеющими большой ценности (например, лебёдки на автомобилях, тракторах и пр.).

Таблица 68  
Диаметры барабанов для стальных канатов

Тип каната	6 × 19 + 1	6 × 37 + 1
	$\frac{D}{d}$	
Критический диаметр . . .	16	14
Экономический диаметр . . .	24	16
Желательный диаметр . . .	45	27

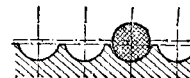
Примечания. 1.  $D$  — диаметр барабана;  $d$  — диаметр каната.

2. Данные отношения  $\frac{D}{d}$  применимы для канатов с пределом прочности проволоки около 130 кг/мм², для канатов с проволокой с пределом прочности 140 кг/мм² диаметр барабана увеличивать на 10% и далее:

150 кг/мм² . . . . .	+ 15%
160   "   . . . . .	+ 25%
170   "   . . . . .	+ 35%

Экономические диаметры выбираются при проектировании механизмов заводского оборудования, рассчитанных на многолетнюю работу. Барабаны в этом случае делаются желобчатыми (фиг. 145), канат укладывается в один ряд, что обеспечивает значительный срок работы. Примером является большинство кранов, для которых диаметр барабана обычно берётся равным  $30d$ , где  $d$  — диаметр каната.

Желательный диаметр барабана выбирается, например, при подъёме людей, иногда



Фиг. 145. Профиль желобков барабана

для кранов, перемещающих горячий металл.

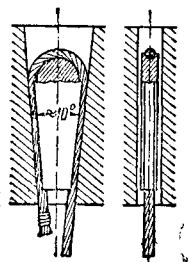
Закрепление конца каната в настоящее время производится тремя методами:

а) клином (фиг. 146)—этот метод необходимо признать наилучшим, гарантирующим 100%-ную прочность каната при малых габаритах;

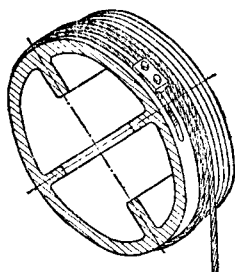
б) планкой (фиг. 147)—в этом случае планка является элементом, только придерживающим канат; прочность закрепления каната создаётся за счёт первых витков барабана, которые не должны считаться рабочими;

г) коушем (фиг. 148)—вполне качественное закрепление каната, но требующее высокой квалификации рабочего при заплётке и трудно исполнимое при канатах больших диаметров.

В последнем случае вместо заплётки применяются болтовые стяжки, как указано на фиг. 149. Прочность этих закреплений несколько ниже, чем прочность каната, так как



Фиг. 146. Закрепление каната с помощью клина



Фиг. 147. Закрепление каната на барабане

проволоки каната в этих случаях деформируются. Число болтовых стяжек должно быть не менее 5 шт.

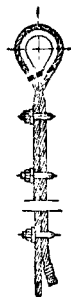
Расчёт канатов. При огибании каната вокруг барабана в нём возникают дополнительные напряжения, вредно отзывающиеся на его службе. Величина этих напряжений не поддается учёту, и они в расчёт не вводятся.

Расчёт каната производится по формуле

$$\frac{P}{Q} < K,$$



Фиг. 148. Заплётка коуша на конус каната



Фиг. 149. Закрепления коуша винтовыми стяжками

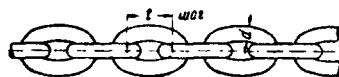
где  $P$  — прочность целого каната на разрыв (из таблиц стандартов) в кг;

$Q$  — нагрузка на канат в кг;

$K$  — запас прочности. При лёгком режиме работы (монтажные краны)  $K = 6$ , при среднем режиме работы (фабрично-заводские и перегрузочные краны)  $K = 8$  и при тяжёлом режиме работы (краны, работающие с горячим металлом)  $K = 10$ .

## Цепи

Как грузоподъёмный орган цепи встречаются в настоящее время только в ручных механизмах. В этом случае применяются



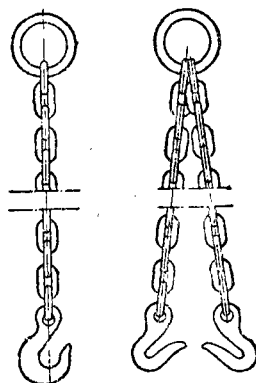
Фиг. 150. Грузовая цепь

круглозвенные калиброванные по шагу цепи (фиг. 150). Пластинчатые цепи, в виду того что они обладают свободой, гибки только в одной плоскости, применяются для подъёма грузов в исключительных случаях.

Для зачалоных приспособлений широко применяются некалиброванные круглозвенные цепи

$$\left( \frac{\text{ОСТ}}{\text{НКТП}} 2740 \right)$$

(фиг. 151).



Фиг. 151. Зачалоные цепи

Усилие в зачалоных цепях (фиг. 151а)

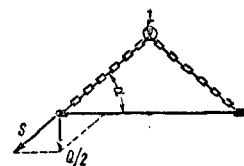
$$S = \frac{Q}{2 \cdot \sin \alpha},$$

где  $S$  — усилие в цепи в кг;

$Q$  — вес груза в кг;

$\alpha$  — угол наклона цепи к горизонту.

Допускаемая нагрузка на цепи дана в табл. 69 для случая зачалки одним концом и двумя концами под различными углами.



Фиг. 151а. Усилия в зачалоных цепях

Таблица 69

Нагрузка на зачалоные цепи некалиброванные

Размер цепи $d$ в мм	Одна вертикальная цепь	Угол наклона цепей к горизонту				
		60°	45°	30°	20°	10°
		Допускаемая нагрузка в т				
	на одну цепь	на две цепи				
7	0,50	0,87	0,71	0,50	0,34	0,17
8	0,73	1,27	1,03	0,73	0,48	0,25
9,5	1,05	1,83	1,49	1,05	0,72	0,37
11	1,45	2,5	2,05	1,45	0,99	0,50
13	2,2	3,8	3,1	2,2	1,50	0,77
16	3,4	5,9	4,8	3,4	2,3	1,18
20	5,3	9,2	7,5	5,3	3,6	1,84
23	7,0	12,2	9,9	7,0	4,8	2,4
28	10,5	18,3	14,9	10,5	7,3	3,7
32	13,5	23,5	19,1	13,5	9,2	4,7

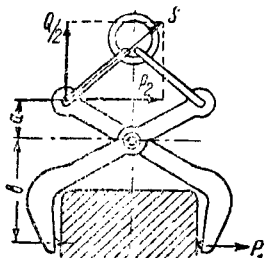
### Клещи

Клещи применяются весьма часто при перегрузке штучных грузов.

Усилия в клещах будут равны (фиг. 152):

$$P_2 = \frac{Q}{2} \operatorname{ctg} \alpha; \quad S = \frac{Q}{2 \sin \alpha};$$

$$P_1 = P_2 \cdot \frac{a}{b}; \quad P_0 = P_2 + P_1,$$



Фиг. 152. Грузовые клещи

где  $Q$  — вес груза в кг;

$\alpha$  — угол наклона стяжек к горизонту;

$P_1$  — усилие, сжимающее груз, в кг; это усилие бывает значительно больше веса груза  $Q$ , и, следовательно, клещи могут применяться в том случае, если груз не повреждается этим усилием;

$P_0$  — усилия в шарнирах в кг;

$P_2$  — усилие, сжимающее клещи, в кг;

$S$  — усилие на тросах в кг.

### Крюки

Крюки являются теми стандартными захватывающими приспособлениями, которыми снабжаются все краны.

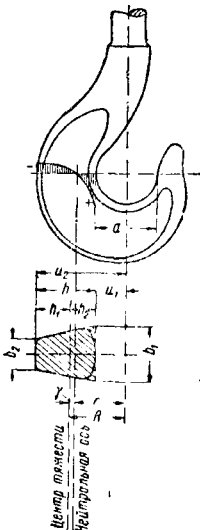
Размеры крюков см. ОСТ/НКТМ 20234-40 и 20235-40.

Зевы стандартных крюков (фиг. 153) рассчитаны на применение пеньковых канатов как зачаливающих органов и значительны по величине. Для специальных крановых устройств, работающих с приспособлениями для захвата грузов, могут применяться крюки с меньшим зевом при условии проверки напряжений.

Расчёт крюка производится, как расчёт кривого бруса трапециодального сечения (фиг. 153). Пусть

$\sigma_{\max}$  — максимальное растягивающее напряжение на внутренней грани опасного сечения крюка в кг/см<sup>2</sup>;

$\sigma_{\min}$  — минимальное сжимающее напряжение на наружной грани опасного сечения крюка в кг/см<sup>2</sup>;



Фиг. 153. К расчёту крюка

$r$  — расстояние от центра зева (точки приложения внешней силы к крюку) до нейтральной оси в см;

$\gamma$  — расстояние от нейтральной оси до центра тяжести в см;

$b_1, b_2, h_1, h_2, h, u_1, u_2$  — см. фиг. 153;

$M$  — момент, изгибающий опасное сечение крюка, равный  $QR$ , в кгсм;

$Q$  — груз, подвешенный к крюку, в кг;

$R$  — расстояние от центра зева до центра тяжести опасного сечения в см;

$S$  — статический момент сечения относительно нейтральной линии в см<sup>3</sup>;

$F$  — площадь опасного сечения в см<sup>2</sup>.

Тогда

$$\sigma_{\max} = + \frac{M}{S} \cdot \frac{h_1}{r - h_1}; \quad \sigma_{\min} = - \frac{M}{S} \frac{h_2}{r + h_2}.$$

Для вычисления величины  $S$  необходимо знать смещение нейтральной оси от центра сечения  $\gamma$ , или, что то же, величину  $r$ , тогда

$$\gamma = R - r.$$

Для трапециодального сечения

$$r = \frac{F}{\left[ b_2 + \frac{u_2 (b_1 - b_2)}{u_2 - u_1} \right] \ln \frac{u_2}{u_1} - (b_1 - b_2)};$$

для прямоугольного

$$r = \frac{h}{\ln \frac{u_2}{u_1}};$$

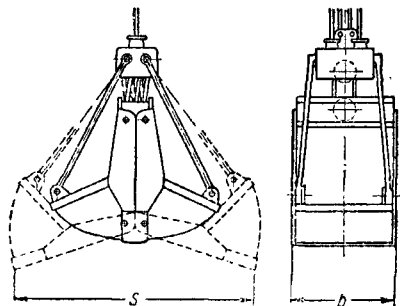
для круглого

$$r = \frac{16 R^3}{16 R^2 + d^2},$$

где  $d$  — диаметр опасного сечения крюка в см.

### Грейферы

Грейферы (фиг. 154) по конструкции и назначению можно разбить на следующие группы:



Фиг. 154. Грейфер

а) грейферы общего назначения, не приспособленные для специальных работ, но удовлетворительно работающие со многими грузами. Вес средний, сила закусывания средняя, челюсти обычно гладкие;

б) перегрузочные грейферы — подобны грейферам общего назначения, но легче их, рассчитаны на работу с подготовленными разрыхлёнными грузами;

в) подгребающие грейферы — видоизмененные перегрузочные, применяются в тех случаях, когда груз рассыпан по большой поверхности (например палуба, баржи); отличаются большим зевом  $s$  и шириной  $b$ , малым весом;

г) экскавационные грейферы — предназначены для работы в целом грунте; тяжёлые грейферы с небольшой шириной  $b$  челюстей, снабжённых зубьями, при большой силе закусывания;

д) рудные грейферы — специальной конструкции тяжёлые грейферы, рассчитанные на работу с кусковым материалом большого удельного веса.

Количество зачерпываемого грейфером материала зависит от типа, веса и размеров грейфера. Работа недостаточно тяжёлого грейфера будет неэкономичной.

Веса грейферов общего назначения даны в табл. 70. Они являются основными для подсчёта веса грейферов всех типов, а также количества захватываемого грейфером материала.

В первой графе таблицы дана ёмкость грейфера, представляющая собой объём полости закрытого грейфера по контуру боковых щёк.

Выбор размеров (или проверка веса имеющегося грейфера) производится по табл. 71.

Определив из табл. 70 вес грейфера общего назначения, умножают его на фактор веса (табл. 71) и получают вес необходимого грейфера.

Умножив вес грейфера общего назначения (табл. 70) на фактор веса материала (табл. 71) и на фактор наполнения из той же табл. 70, получают вес зачерпнутого грейфером материала.

Таблица 70

Вес грейферов общего назначения

Номинальная ёмкость грейфера в м <sup>3</sup>	Вес грейфера в кг	Фактор наполнения	Номинальная ёмкость грейфера в м <sup>3</sup>	Вес грейфера в кг	Фактор наполнения
0,5	1 100	0,96	5	8 600	1,16
0,75	1 700	1,00	6	10 000	1,18
1	2 200	1,03	7	11 500	1,19
1,5	3 100	1,06	8	13 000	1,20
2	3 900	1,09	10	16 000	1,23
2,5	4 700	1,11	12	19 000	1,25
3	5 700	1,13	15	23 000	1,27
4	7 200	1,15			

Для ориентировочного определения номинальной ёмкости грейфера можно пользоваться следующим указанием: ширина грейфера  $b$  общего назначения обычно равна корню кубическому из его ёмкости. Перегрузочные грейферы делаются шире на 10—15%, подгребающие — шире на 20—25%, экскавационные — уже на 10—15%.

### Тормозы

Основные расчётные положения. В настоящее время в краностроении применяются три типа тормозов: а) колодочный с наружными колодками (фиг. 155); б) колодочный с

Таблица 71

Типы и параметры грейферов

Насыпной вес в т/м <sup>3</sup>	Материал	Тип грейфера	Фактор веса	
			пустого грейфера	материала нетто
1,05	Суперфосфат, известь, алебастр, гранулированный шлак . . . . .	Общего назначения	1,00	0,42
0,53	Зола и пепел . . . . .	Перегрузочный	0,63	0,35
1,36	Цементный клинкер . . . . .	Подгребающий	0,70	0,86
1,45	Глина твёрдая . . . . .	Экскавационный зубчатый	1,75	0,60
1,80	Глина пластичная . . . . .	Экскавационный зубчатый	1,32	1,06
0,80	Уголь мелкий . . . . .	Лёгкий перегрузочный	0,50	0,50
0,80	Уголь несортированный . . . . .	Подгребающий	0,70	0,44
0,53	Кокс мелкий . . . . .	Лёгкий перегрузочный	0,50	0,34
0,48	Кокс средний . . . . .	Подгребающий	0,70	0,30
1,50	Экскавация земли . . . . .	Общего назначения зубчатый	1,08	0,66
1,50	Гравий до 20 мм . . . . .	Экскавационный	1,32	0,70
1,45	Известняк 150—200 мм . . . . .	Подгребающий	0,70	0,75
1,20	Торф под водой . . . . .	Рудный лёгкий	1,14	0,53
1,75	Ил . . . . .	Подгребающий	0,70	0,84
	Ил (экскавация) . . . . .	Общего назначения	1,00	1,35
1,60	Селитра . . . . .	Экскавационный тяжёлый зубчатый	1,75	1,40
2,40	Железная руда . . . . .	Общего назначения	1,00	0,75
2,65	Марганцевая руда . . . . .	Рудный	1,38	1,19
0,96	Фосфаты в кусках до 75 мм . . . . .	Тяжёлый рудный	1,78	0,87
2,65	Пириты до 6 мм . . . . .	Общего назначения	1,00	0,36
1,60	Песок — перегрузка . . . . .	Общего назначения	1,00	1,56
1,70	Песок под водой . . . . .	Подгребающий	0,70	0,98
0,56	Снег . . . . .	Общего назначения	1,00	1,05
1,45	Камни: до 30 мм дроблёные . . . . .	Экскавационный	1,24	0,82
	до 30 мм дроблёные . . . . .	Особо лёгкий перегрузочный	0,42	0,32
1,35	до 100—150 мм . . . . .	Подгребающий	0,70	0,73
1,20	до 40 кг весом . . . . .	Общего назначения	1,00	0,67
2,50	глыбы . . . . .	Средний экскавационный зубчатый	1,60	0,37
0,64	Свхарная свёкла . . . . .	Тяжёлый экскавационный зубчатый	1,75	0,16
		Средний экскавационный зубчатый	1,60	2,40
		Лёгкий общего назначения	0,75	0,43

внутренними колодками (фиг. 156); в) дисковый автоматический (фиг. 157).

Колодочные тормоза могут иметь привод от электромагнита, гидравлический или ножной.

Дисковые винтовые тормоза работают без какого-либо источника силы.

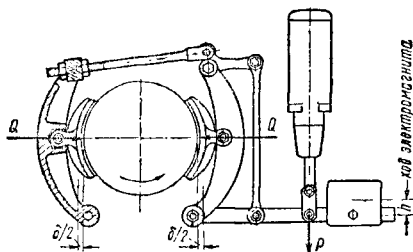
Основным расчётным уравнением тормоза является условное уравнение работ:

$$P \cdot h \cdot \tau = Q \delta,$$



где  $P$  — рабочее усилие — вес груза и сердечника электромагнита, давление на педаль и пр. в кг;  
 $h$  — ход рабочего усилия, ход электромагнита, ход педали в см;  
 $\eta$  — коэффициент полезного действия системы рычагов тормоза, равный 0,95;  
 $Q$  — давление на колодку в кг;  
 $\delta$  — отход середины обеих колодок в см.  
 Давление на колодку

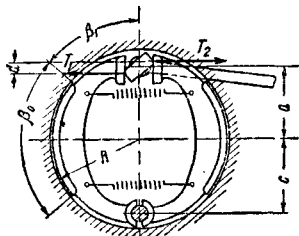
$$Q = 1,5 \frac{M_6 \cdot \eta}{i \cdot R \cdot f}$$



Фиг. 155. Колодочный тормоз с наружными колодками

где  $M_6$  — грузовой момент на барабане в кг см;  
 $i$  — передаточное число передач, находящихся между барабаном и валом тормозного диска;  
 $\eta$  — к. п. д. передач между барабаном и тормозом;  
 $f$  — коэффициент трения тормозной обкладки о диск, равный 0,25 для фериодо;  
 $R$  — радиус тормозного диска в см;  
 1,5 — запас тормоза.

Основной величиной, характеризующей тормоз, является отход колодок, необходимый для его полного открытия. Чем меньше



Фиг. 156. Колодочный тормоз с внутренними колодками

будет отход колодок  $\delta$ , необходимый для открытия тормоза, тем меньше будет размер требуемого электромагнита, тем легче будет торможение ногой и т. д.

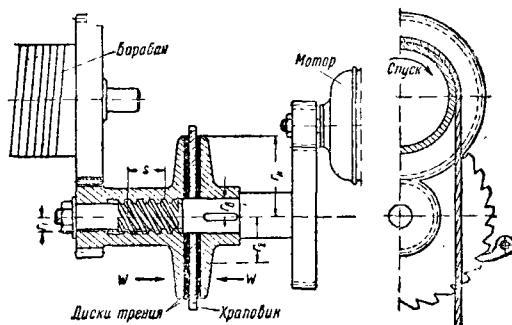
Величины наименьшего необходимого отхода колодок  $\delta$  зависят от конструкции тормоза:

колодочный тормоз с наружными колодками (фиг. 158), рычаги из полосового железа, валики точёные, отверстия из-под сверла:  $\delta_{\min} = 5 \text{ мм}$ ;

то же, колодки массивные из стального литья (фиг. 155), шарниры исполнены по скользящей посадке 2-го класса; тормоз жё-

стко укреплен к корпусу механизма, несущему тормозной шкив:  $\delta_{\min} = 2 \text{ мм}$ ;

колодочный тормоз с внутренними колодками:  $\delta_{\min} = 0,5 \text{ мм}$ .



Фиг. 157. Автоматический тормоз

Тормоз с наружными колодками. Усилия, воспринимаемые каждой колодкой, различные (фиг. 158):

$$T_1 + T_2 = T;$$

$$Q = T_1 \left( \frac{1}{f} + \frac{c}{b} \right); \quad Q = T_2 \left( \frac{1}{f} - \frac{c}{b} \right),$$

где  $T$  — касательное усилие на шкиве — усилие торможения в кг;

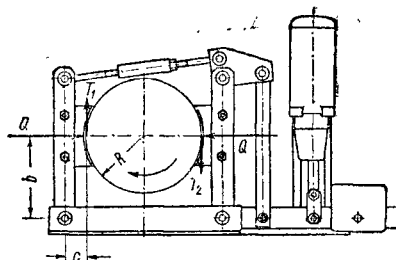
$$T = \frac{M}{R} \text{ (кг)};$$

$T_1$  и  $T_2$  — касательные усилия на каждую из колодок в кг;

$Q$  — давления на колодки в кг;

$f$  — коэффициент трения между колодкой и шкивом (для фериодо по стали или чугуна равный 0,25);

$c$  и  $b$  — см. фиг. 158.



Фиг. 158. Колодочный тормоз с наружными колодками и жёсткими рычагами

Тормоз с внутренними колодками. Работа колодок также неодинакова, но при расчёте тормоза выявлять работу каждой колодки нет необходимости. Пусть (фиг. 156):

$M$  — тормозной момент, включая запас тормоза, в кг см;

$T_1$  и  $T_2$  — усилия на кулачке в кг;

$R$  — радиус тормозного диска в см;

$a$ ,  $c$ ,  $\beta_0$ ,  $\beta_1$  — см. фиг. 156;

$f$  — коэффициент трения;

$b$  — ширина колодок в см;

$p$  — удельное давление на колодку в кг/см<sup>2</sup>.

$$T_1 + T_2 = \frac{2 c M \cdot \cos \beta_1}{(a + c) f \cdot R \cdot \beta_0} \text{ (кг)};$$

$$p = \frac{(T_1 + T_2)(a + c)}{4 b R c \cos \beta_1} \quad (\text{кг/см}^2).$$

Величина удельного давления  $p$  на феродо должна быть не более  $6-8 \text{ кг/см}^2$ .

Привод к тормозу может быть рассчитан из выражения

$$M_T = (T_1 + T_2) \cdot \frac{d}{2},$$

где  $M_T$  — момент на валу кулачка в  $\text{кг см}$ ;

$d$  — расстояние между точками приложения сил  $T_1$  и  $T_2$  (см. фиг. 156) в  $\text{см}$ .

**Автоматический тормоз.** Работа тормоза (фиг. 157) состоит в следующем:

а) груз висит под тормозом — грузовой момент со стороны барабана навинчивает гайку на винт и стягивает тормозные диски. Привод удерживается от вращения собачкой;

б) подъем груза — грузовой момент навинчивает гайку на винт, момент от мотора действует с обратной стороны, но также затягивает резьбу, диски сжаты, но вращение имеет место в сторону подъема, собачка храповика скользит по зубьям;

в) спуск груза — грузовой момент навинчивает гайку на винт и затягивает тормозные диски; моторный момент, напротив, старается свернуть гайку с винта и освободить диски. В тот момент, когда влияние момента мотора пересиливает влияние груза, начинается спуск груза. Диски в это время остаются сжатыми, но менее, чем в предыдущих случаях, и начинают под влиянием двух моментов проскальзывать. Собачка закрыта.

Энергия опускающегося груза и энергия мотора, развиваемая при спуске, поглощаются трением тормозных дисков, и механическая энергия переходит в тепло.

$w_n$  — давление на диске при подъеме в  $\text{кг}$ :

$$w_n = \frac{T r_1}{r_1 \left( \frac{s + 2 \pi f_1 r_1}{2 \pi r_1 - f_1 s} \right) + f r_2};$$

$w_c$  — то же при спуске в  $\text{кг}$ :

$$w_c = \frac{T r_1}{r_1 \left( \frac{2 \pi f_1 r_1 - s}{2 \pi r_1 + f_1 s} \right) + f r_2},$$

где  $r_1$  — средний радиус резьбы в  $\text{см}$ ;

$r_2$  — средний радиус дисков трения в  $\text{см}$ ;

$s$  — шаг резьбы в  $\text{см}$ ;

$f$  — коэффициент трения в дисках; при работе бронзы по чугуну или стали  $f = 0,10$ ; при наличии фрикционных прокладок  $f = 0,25$ ;

$f_1$  — коэффициент трения в резьбе;  $f_1 = 0,12$  для квадратной резьбы; для трапециoidalной резьбы надо учитывать угол наклона грани витка  $\beta = 15^\circ$

$$f_1 = \frac{f_1}{\sin \beta},$$

$T$  — сила от груза, действующая на среднем радиусе резьбы;

$T r_1$  — момент со стороны груза на тормозном валу.

Удельное давление в дисках трения при спуске

$$P = \frac{w_c}{2 \pi (r_n^2 - r_s^2)} \quad (\text{кг/см}^2),$$

где  $r_n$  — наружный радиус дисков трения в  $\text{см}$ ;

$r_s$  — внутренний радиус дисков трения в  $\text{см}$ .

Удельное давление не должно превосходить  $6-8 \text{ кг/см}^2$  для дисков с фрикционными обкладками и  $10-14 \text{ кг/см}^2$  для бронзовых дисков.

Угол подъема резьбы должен быть, во избежание защемления тормоза, не меньше угла трения в резьбе.

Для надёжной работы тормоза необходимо, чтобы момент трения в дисках был больше, чем момент груза, включая запас  $1,25-1,5$ :

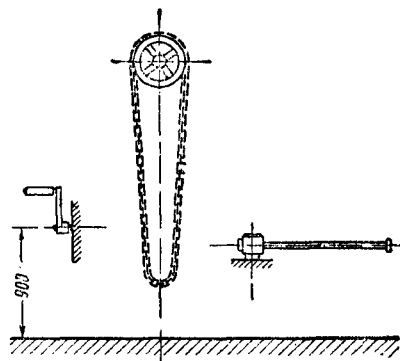
$$i \cdot w_n \cdot p \cdot r_2 > T r_1,$$

где  $p$  — число трущихся поверхностей.

## ПРИВОДЫ МЕХАНИЗМОВ КРАНОВ

### Ручной привод

Ручной привод выполняется в трёх видах: рукоятка, тяговая цепь и рычаг (фиг. 159). При работе с ними один человек средней силы может развить ограниченную мощность, указанную в табл. 72, при работе двух человек на одном приводе развиваемая ими мощность на  $20-30\%$  меньше удвоенных табличных значений.



Фиг. 159. Схемы ручных приводов

Размеры рукоятки имеют влияние на развиваемое усилие и число оборотов; руководящие данные могут быть взяты из табл. 73.

Таблица 72

Мощность, развиваемая человеком при подъеме и перемещении грузов

Условия работы одного человека	Развиваемое усилие в $\text{кг}$	Скорость в $\text{м/сек}$	Мощность в $\frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{сек}}$
У рукоятки . . .	10 15	0,80 0,45	8,0 6,7
У тяговой цепи	20 30	0,60 0,35	12,0 10,5
У рычага . . . .	12	0,5	6,0

Таблица 73

Зависимость усилия у рукоятки от её длины

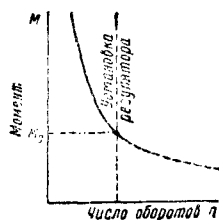
Условие работы человека	Длина рукоятки в мм	Число оборотов в мин.	Усилие на рукоятке в кг
Работа одной рукой . . . . .	200 300	65 55	6 8
Работа двумя руками . . . .	300 400	45 35	10 12

Высота рукоятки над рабочей площадкой должна быть 900 мм, но не выше 1000 мм. Положение коротких рукояток может колебаться более.

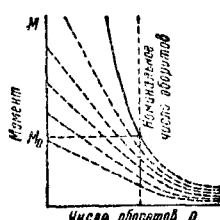
Тяговой цепью, удобной для захвата руками, является калиброванная цепь с диаметром железа 6 мм.

### Привод от паровой машины

Характеристика паровой машины в координатах  $M-n$  дана на фиг. 160. Способность паровой машины развивать большой момент при малом числе оборотов делает паровую машину одним из лучших источников мощно-



Фиг. 160. Характеристика паровой машины



Фиг. 161. Характеристика серийного электродвигателя

сти для подъема грузов. Индикаторная мощность паровой машины при её номинальном числе оборотов может быть принята за расчетную мощность при установившемся движении. Ускорение механизма и грузов происходит за счёт повышенного момента при малом числе оборотов.

### Привод от серийного электродвигателя постоянного тока

Характеристика серийного электродвигателя, данная на фиг. 161, является круто падающей с сильным возрастанием момента при понижении числа оборотов. Введение сопротивления в цепь при различных положениях пускового контроллера не изменяет характера кривых (пунктирные линии), но даёт возможность взять груз с места без рывка. В результате этого серийный электродвигатель легко берёт груз с места, и вся его номинальная мощность может быть использована при установившемся движении. Для кранов изготавливаются электродвигатели типа КП, отличающиеся, помимо большого пускового момента, способностью выдерживать большое число включений в час. Мощность этих электродвигателей зависит от относительной напряжённости их работы во время эксплуатации и даётся в каталогах для 15, 25 и 40% ПР (период работы):

$$\text{ПР}\% = \frac{\text{продолжительность включения}}{\text{продолжительность включения} + \text{пауза}} \cdot 100.$$

Величины мощностей выводятся из условий нагревания электродвигателя при работе с полным номинальным грузом.

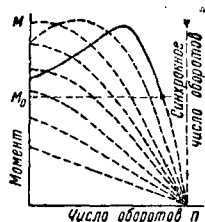
### Привод от асинхронного электродвигателя трёхфазного тока

Характеристика асинхронных электродвигателей дана на фиг. 162. Сплошной линией дана характеристика кранового мотора типа КТ при выключенном сопротивлении, пунктирные линии при различных положениях контроллера. Отличительными особенностями этих электродвигателей являются высокий пусковой момент при относительно низком к.п.д. Это последнее делает нецелесообразным применение электродвигателей типа КТ для непрерывной работы, оставляя за ними повторно-кратковременный режим (ПР-15, 25, 40%) при обслуживании крановых устройств.

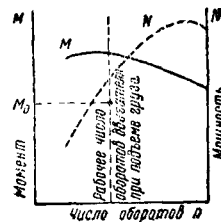
Применение асинхронных электродвигателей общего назначения для кранов нецелесообразно, так как они не в состоянии взять груз с места благодаря низкому пусковому моменту. В случае необходимости они могут быть использованы для подъёма грузов, причём мощность их должна быть выбрана с запасом 30—40% против расчётной, и число включений в час не должно быть значительным.

### Привод от двигателя внутреннего сгорания

Двигатель внутреннего сгорания, вследствие того что величина момента при изменении числа оборотов почти не меняется (см. характеристику фиг. 163), является наименее пригодным источником мощности для подъёма грузов. Он не имеет запаса момента, который мог бы быть израсходован вначале как пусковой момент. Кроме того, номинальная его мощность не может быть достигнута при кратковременной стационарной работе. Используемой мощностью для подъёма может считаться его мощность на так называемом экономическом режиме работы при пониженном числе оборотов. Эта мощность обычно



Фиг. 162. Характеристика асинхронного электродвигателя



Фиг. 163. Характеристика двигателя внутреннего сгорания

составляет 60—70% от номинальной и соответствует приблизительно максимальному моменту двигателя.

Для подсчёта скорости подъёма при установившемся движении может быть взята только часть этой мощности, так как имеющийся момент должен покрыть и пусковой момент механизма, необходимый для приведения во вращение деталей механизма и сообщения ускорения грузу.

Принимая во внимание, что в начальный момент подъёма двигатель уже работает и включение подъёмного механизма производится через сцепление, на ускорение механизма и груза достаточно оставлять 25–35% мощности экономического режима.

Таким образом, при расчёте привода от двигателя внутреннего сгорания на установившийся режим работы подъёма или перемещения можно использовать не более  $1/2$  номинальной мощности при пониженном числе оборотов.

Для кранов следует рекомендовать применение более тяжёлых тракторных двигателей — дизелей. Срок службы автомобильных двигателей на кранах бывает обычно незначительным.

## РАСЧЁТЫ КРАНОВЫХ МЕХАНИЗМОВ

### Механизм подъёма груза

При расчёте основных параметров подъёмного механизма могут встретиться задачи двух родов.

**Задача 1.** Даны вес поднимаемого груза и мощность, которая может быть использована на подъёме (ручной привод, привод от двигателя внутреннего сгорания). Найти скорость подъёма.

**Решение.** Пусть  $N$  — мощность, имеющаяся в распоряжении для подъёма при установившейся скорости, в л. с.;

$\eta$  — коэффициент полезного действия механизма;

$G$  — вес захватывающих приспособлений в кг;

$v$  — скорость подъёма при установившемся движении в м/мин;

$Q$  — вес поднимаемого груза в кг.

Тогда

$$v = \frac{4500 \eta N}{Q + G} \text{ (м/мин)}.$$

Для ручного привода мощность следует брать из табл. 72.

При расчёте ручного механизма можно исходить из усилия на рукоятке и её длины. Пусть  $P$  — усилие на рукоятке (см. табл. 73) в кг;

$L$  — длина рукоятки в см;

$n$  — число оборотов рукоятки в минуту;

$i$  — передаточное число механизма;

$r$  — радиус барабана, цепной звёздочки и пр. в см.

Тогда

$$i = \frac{r(Q + G)}{PL\eta};$$

$$v = \frac{2 \cdot \pi \cdot r \cdot n}{100 \cdot i} \text{ (м/мин)}.$$

**Задача 2.** Дан вес поднимаемого груза и скорость его подъёма из условий эксплуатации. Найти мощность электродвигателя, который необходимо установить на кран.

**Решение.** (Обозначение см. в задаче 1).

$$N = \frac{(Q + G) \cdot v}{75 \cdot 60} \text{ (л. с.)};$$

$$N = \frac{(Q + G) \cdot v}{102 \cdot 60 \eta} \text{ (квт)}.$$

Подсчёты других параметров механизма в этом случае производятся следующим образом (фиг. 164).

Пусть  $n_m$  — число оборотов электродвигателя в минуту;

$n_g$  — число оборотов барабана в минуту;

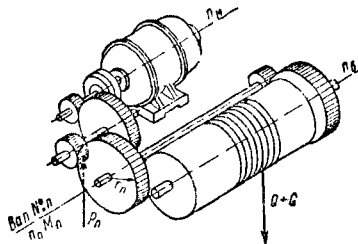
$i_1, i_2, \dots, i_n$  — передаточные числа передач механизма;

$r_n$  — радиус начальной окружности  $n$ -й шестерни в см;

$M_n$  — момент на  $n$ -ом валу передачи в кгсм;

$P_n$  — давление на зуб шестерни, насаженной на  $n$ -й вал, в кг;

$n_n$  — число оборотов  $n$ -го вала в минуту;



Фиг. 164. Схема подъёмного механизма

$\eta_n$  — коэффициент полезного действия передач, находящихся между мотором и  $n$ -й передачей;

$v_n$  — окружная скорость в зацеплении шестерни, насаженной на  $n$ -й вал, в м/сек.

Тогда момент на  $n$ -ом валу

$$M_n = 71\,620 \frac{N \cdot \eta_n}{n_n} \text{ (кгсм)}.$$

Давление на зуб  $n$ -й шестерни, насаженной на вал  $n$ ,

$$P_n = \frac{M_n}{r_n} \text{ (кг)}.$$

Окружная скорость на  $n$ -й шестерне

$$v_n = \frac{2 \cdot \pi \cdot r_n \cdot n_n}{60} \text{ (м/сек)}.$$

Общее передаточное число передачи

$$i = i_1 \cdot i_2 \dots = \frac{n_m}{n_g}.$$

Дополнительное усилие, которое нужно приложить к канату для сообщения ускорения грузу,

$$\Delta(Q + G) = \frac{Q + G}{g} \cdot \frac{v}{t} \text{ (кг)},$$

$\Delta(Q + G)$  — дополнительное усилие в кг;  
 $g$  — ускорение силы тяжести, равное 9,81 м/сек<sup>2</sup>;

$v$  — скорость подъёма груза при установившемся движении в м/сек;

$t$  — время пуска механизма в сек.

Время пуска механизма от момента включения двигателя до достижения механизмом полной скорости — величина, трудно поддающаяся определению. Для подъёмных меха-

низмов с электроприводом она может быть принята равной 3—5 сек.

В тех случаях, когда необходимо выявить и проверить пусковой момент механизма, для подъёма груза использует следующие формулы:

$$M_{\text{пуск}} = \frac{Qr}{i\eta} + \frac{Qvr}{60gti\eta} + \dots + \\ + I_3 \frac{2\pi n_3}{60t} \cdot \frac{1}{i_1 \cdot i_2 \cdot \eta_1 \cdot \eta_2} + I_2 \frac{2\pi n_2}{60t} \cdot \frac{1}{i_1 \eta_1} + \\ + I_1 \frac{2\pi n_1}{60t} + \frac{GD^2}{4g} \cdot \frac{2\pi n_1}{60t},$$

где  $Q$  — поднимаемый груз, включая вес захватывающих приспособлений, в кг;

$v$  — скорость подъёма груза в м/мин;

$r$  — радиус барабана в см;

$g$  — ускорение силы тяжести (9,81 м/сек<sup>2</sup>);

$t$  — пусковой период в сек.;

$I_1, I_2, I_3, \dots$  — моменты инерции валов и посаженных на них деталей, считая от электродвигателя, в кг·м·сек<sup>2</sup>;

$i$  — общее передаточное число передачи;

$i_1, i_2, i_3, \dots$  — передаточное число передач, начиная от электродвигателя;

$\eta$  — общий к.п.д. передачи;

$\eta_1, \eta_2, \dots$  — к.п.д. передач, начиная от электродвигателя;

$n_1$  — число оборотов электродвигателя в минуту;

$n_2, n_3, \dots$  — числа оборотов валов, считая от электродвигателя, в минуту;

$GD^2$  — маховый момент, принимаемый из каталогов крановых электродвигателей, в кг·м<sup>2</sup>.

С точностью, вполне достаточной для практики, можно пренебречь влиянием масс тихоходных валов и ограничиться одним первым валом, имеющим число оборотов, равное числу оборотов электродвигателя:

$$M_{\text{пуск}} = \frac{Q \cdot r}{i \cdot \eta} + \frac{2\pi n_1}{60t} \left( I_1 + \frac{GD^2}{4g} \right).$$

### Механизмы передвижения

Сопротивление движению крана или тележки, катящейся на колёсах (фиг. 165):

$$w = \frac{Q}{R} (f_k + f_y r),$$

где  $w$  — сопротивление качению на ободе колёс в кг;

$Q$  — нагрузка на все колёса механизма в кг;

$f_k = 0,003 - 0,005$  см — коэффициент трения качения колеса по рельсу — плечо качения;

$f_y = 0,08 - 0,12$  — коэффициент трения скольжения в цапфе оси колеса; для шариковых подшипников он может быть принят условно равным 0,002—0,003;

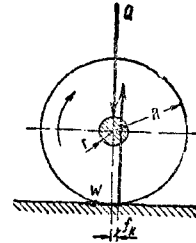
$r$  — радиус цапфы оси в см;

$R$  — радиус обода колеса в см.

Момент, который необходимо приложить к валу ведущих колёс, будет

$$M_1 = wR = Q (f_k + f_y r).$$

Полное сопротивление движению крана может быть подсчитано, при учёте перекосов и ветровых нагрузок, следующим методом.



Фиг. 165. Усилия в катящемся колесе

Пусть для мостового крана:

$Q$  — вес груза, перемещаемого краном, в кг;

$E$  — собственный вес моста крана, включая вес механизма передвижения, в кг;

$G$  — вес тележки в кг;

$R$  — радиус ходовых колёс в см;

$r_1$  — радиус цапфы оси ходового колеса в см;

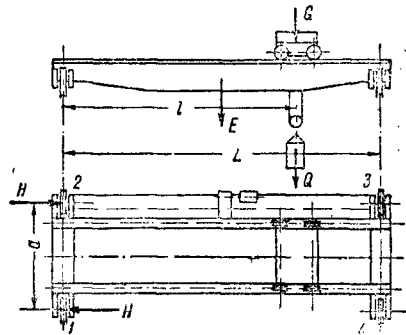
$f_k$  — коэффициент трения качения колеса о рельс (плечо качения) в см (см. выше);

$f_p$  — коэффициент трения торцов ступицы и реборд колеса о рельс, равный 0,12—0,15;

$f_y$  — коэффициент трения скольжения в цапфе оси (см. выше);

$L, l, a$  — (см. фиг. 166) в см;

$P_1, P_2, P_3, P_4$  — вертикальные давления на колёса в кг;



Фиг. 166. Усилия перекосов в мостовом кране

$H_1, H_2$  — давление перекосов на реборды крана в кг.

Тогда давления на колёса будут:

$$P_1 = P_2 = \frac{E}{4} + \frac{1}{2} (Q + G) \frac{L-l}{L};$$

$$P_3 = P_4 = \frac{E}{4} + \frac{1}{2} (Q + G) \frac{l}{L}.$$

Усилия перекосов, если ведут колёса 1 и 2,

$$H_1 = P_4 \cdot f_p \cdot \frac{L}{a}$$

если ведут колёса 3 и 4,

$$H_2 = P_2 \cdot f_p \cdot \frac{L}{a}.$$

Момент сопротивления трения качения

$$M_k = \left[ -\frac{E}{2} + (Q + G) \cdot \frac{l}{L} + 2 \sqrt{P_1^2 + H_1^2} \right] \cdot f_k.$$

Момент трения ступиц

$$M_c = 2H_1 \cdot f_c \cdot 1,5 \cdot r_1.$$

Момент трения в цапфах

$$M_u = (E + G + Q) \cdot f_u \cdot r_1.$$

Сопротивление движению крану будет равно

$$W_T = (M_k + M_c + M_u) \cdot \frac{1}{R} \text{ (кг)}.$$

Если кран работает на открытом месте, то необходимо принять во внимание давление ветра  $W_a$  на боковую поверхность крана. Поверхность решётчатых ферм принимать равной 40% общей поверхности фермы по контуру.

Тогда

$$W_a = F \cdot P \text{ (кг)},$$

где  $F$  — расчётная боковая поверхность крана в  $m^2$ ;

$P = 100 \text{ кг/м}^2$  — давление ветра для расчёта механизма передвижения.

Примечание. Противоугонные устройства на кранах должны быть рассчитаны на давление ветра 200—250  $кг/м^2$  (ураган).

Таким образом, мощность мотора должна быть рассчитана на сопротивление передвижению, равное

$$W = W_T + W_a.$$

Если  $v$  — скорость передвижения крана в  $m/min$ ;  $\eta$  — коэффициент полезного действия механизма передвижения, то мощность электродвигателя при установившемся движении будет

$$N = \frac{W \cdot v}{75 \cdot 60 \cdot \eta}.$$

Момент на валу электродвигателя, необходимый для приведения крана в движение,

$$M_{пуск} = \frac{W \cdot R}{i \cdot \eta} + \frac{Q + E + G}{g} \cdot \frac{v}{60 \cdot t \cdot i \cdot \eta} + \frac{2 \pi \cdot n_1}{60t} \left( I_1 + \frac{GD^2}{4g} \right) \text{ (кгсм)},$$

где  $i$  — общее передаточное число механизма;  
 $g$  — ускорение силы тяжести (9,81  $m/сек^2$ );  
 $t$  — период пуска в сек. — эта величина трудно поддаётся выявлению и вносит значительную неопределённость в расчёт: для небольших кранов она может быть принята равной 5—8 сек., для перегрузочных мостов — 10—20 сек.;

$W$  — сопротивление движению крана с грузом в кг;

$n_1$  — число оборотов электродвигателя в минуту;

$GD^2$  — маховой момент электродвигателя в  $кгм^2$ ;

$I_1$  — момент инерции первого вала и деталей, насаженных на него, в  $кг \cdot м \cdot сек^2$ .

Подсчёт сопротивления качению тележки в том случае, когда давления на колёса распределены более или менее равномерно, может быть произведён по формуле

$$W_T = (Q + E) [f_k + f_u r_1 (0,75 \cdot f_p + 1)] \cdot \frac{1}{R},$$

где  $W_T$  — сопротивление движению тележки на ободе ходового колеса в кг;

$Q$  — вес перемещаемого груза в кг;

$E$  — собственный вес тележки в кг;

$r_1$  — радиус цапфы оси колеса в см;

$f_u$  — коэффициент трения скольжения в цапфе;

$f_p$  — коэффициент трения скольжения торцов ступицы и реборд о рельс;

$f_k$  — коэффициент трения качения колеса о рельс (плечо качения) в см;

$R$  — радиус обода колеса в см.

Учёт ветровой нагрузки, если это необходимо, производится так же, как это указано выше для механизма передвижения крана. Пусковой момент может быть подсчитан по формуле, приведённой там же, причём время разгона тележки может быть принято 4—5 сек.

#### Механизм вращения

Момент сопротивления вращения крана обычно велик в сравнении с моментом, который необходимо приложить в начальный момент при приведении крана во вращение. С другой стороны, время, необходимое для достижения вращающимися массами постоянной скорости, значительно (см. ниже). Следовательно, основная нагрузка на двигатель приходится в периоды пуска; продолжительность этих периодов такова, что кран часто не успевает достигнуть номинальной скорости до выключения двигателя и остановки. Таким образом, фактической рабочей мощностью является пусковая мощность, на которую мотор должен быть рассчитан.

У кранов, стоящих на открытом месте, добавочной нагрузкой является давление ветра, которое при несимметричных обдуваемых поверхностях создаёт значительные крутящие моменты.

Давление ветра для подсчётов можно принимать равным 100  $кг/м^2$ . Устойчивость крана должна быть гарантирована при давлении ветра 200—250  $кг/м^2$  (ураган).

Сопротивление вращению крана равно

$$M = M_T + M_B + M_I,$$

где  $M$  — суммарный момент сопротивления вращению крана в  $кгм$ ;

$M_I$  — момент, необходимый для приведения во вращение крана с грузом, а также быстро вращающихся валов механизма;

$M_T$  — момент сопротивления вращению от трения в опорах в  $кгм$ ;

$M_B$  — момент сопротивления, создаваемый ветром, в  $кгм$ .

Если кран на колонне, то трение в опорах равно

$$M_T = Q \cdot f \cdot r,$$




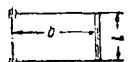

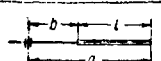
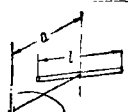
где  $Q$  — давление на опору, равное реакции опоры, в кг;

$f$  — коэффициент трения, который для скользящих подшипников может быть принят равным 0,08—0,10, для подшипников качения — 0,002—0,003 (условно);  
 $r$  — радиус поверхности трения в м.

Таблица 74

Моменты инерции вращающихся тел

$$M \left[ \frac{\text{кг} \cdot \text{сек}^2}{\text{см}} \right] = \frac{G}{g}; I [\text{кг} \cdot \text{м} \cdot \text{сек}^2]; R, r [\text{см}].$$

	$I = \frac{M}{2} r^2$
	$I = \frac{M}{2} (R^2 + r^2)$
	$I = \frac{3}{10} M r^2$
	$I = M b^2$
	$I = \frac{M}{3} (a^2 + ab + b^2)$
	$I = \frac{M}{3} \cdot \frac{a^2 - b^2}{l}$
	$I = \frac{M}{3} \left( \frac{l}{2} \right)^2 + M a^2$

Если кран опирается катками на опорное кольцо, то

$$M_T = W \cdot R,$$

где  $W$  — сопротивление качению в кг (см. стр. 297);

$R$  — радиус опорного кольца в м.

Момент от давления ветра:

$$M_B = F \cdot P \cdot e,$$

где  $F$  — разность боковых поверхностей крана, находящихся по правую и левую сторону от оси вращения, в м<sup>2</sup>;

$e$  — расстояние от оси крана до центра тяжести обдуваемой площади в м;

$P = 100 \text{ кг/м}^2$  — расчётное давление ветра на боковую поверхность крана.

Для кранов решётчатой конструкции расчётная площадь может быть принята равной 40% от боковой площади по контуру крана.

$$M_I = \frac{\pi}{30 \cdot t} \left[ n_1 \cdot \left( I_1 + \frac{GD^2}{4g} \right) + I \cdot n \right] (\text{кгм}),$$

где  $n$  — число оборотов крана в минуту;

$n_1$  — число оборотов вала электродвигателя и первого вала привода в минуту;

$GD^2$  — маховой момент электродвигателя в кг/м<sup>2</sup>;

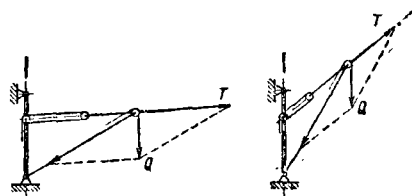
$I_1$  — момент инерции первого вала и деталей, насаженных на первый вал, в кг·м·сек<sup>2</sup>;

$I$  — момент инерции вращающихся масс крана относительно оси вращения (кг·м·сек<sup>2</sup>) (см. табл. 74);

$t$  — период пуска; для небольших кранов со стрелой эта величина может быть принята равной 5—8 сек., для больших башенных кранов — 10—20 сек.

### Механизм подъёма стрелы

Механизм подъёма стрелы отличается от подъёмного механизма только тем, что натяжение каната, наматываемого на барабан, непостоянно: оно зависит от положения стрелы (фиг. 67).



Фиг. 67. Усилия в механизме подъёма стрелы

Расчёт этого механизма можно производить по формулам, приведённым на стр. 297, исходя из максимального натяжения каната в крайнем положении стрелы. Ввиду того что скорость подъёма и опускания стрелы бывает очень незначительной, ускорением масс стрелы и груза при подсчёте пускового момента обычно можно пренебречь. В случае необходимости оно может быть подсчитано по методу, данному для поворотного механизма, считая период пуска  $t = 3$ —5 сек.

### Коэффициенты полезного действия механизмов

Общий коэффициент полезного действия привода равен произведению к.п.д. элементов привода, передающих и воспринимающих мощность — моменты — усилия:

$$\eta = \eta_1 \cdot \eta_2 \cdot \eta_3 \cdot \dots \cdot \eta_n.$$

В подъёмно-транспортном машиностроении величины к.п.д. могут быть приняты следующие:

$\eta_1$  — к.п.д. полиспаста в зависимости от числа несущих концов каната (см. табл. 75);

$\eta_2$  — к.п.д. шестерённых передач, цилиндрической и конической с прямым или косым зубом, равный 0,93;

$\eta_3$  — к.п.д. червячной передачи (см. раздел «Детали машин»);

$\eta_4$  — к.п.д. подшипников, в зависимости от типа равный: для шариковых подшипников—0,99, для роликовых подшипников—0,98, для подшипников скользящего трения — 0,96.

При канатных роликах, установленных на шариковые подшипники, к.п.д. полиспаста может быть принят больше на 0,03.

Таблица 75

Коэффициенты полезного действия полиспастов

Число концов полиспаста	2	4	6	8	10	12	16
Коэффициент полезного действия $\eta_1$	0,93	0,89	0,86	0,82	0,79	0,76	0,72

## ЛИТЕРАТУРА И ИСТОЧНИКИ

1. Бакингом Е. Руководство по проектированию зубчатых колёс. М.—Л., Машгиз, 1946—1948, т. 1—3.
2. Беляев В. Н. Нормы и методы расчёта ременных передач, ч. I и II. ЦНИИТМАШ, 1941.
3. Беляев В. Н. Ремённые передачи. Иностранные стандарты и нормы с приложением стандартов СССР. М.—Л., Каталогиздат, 1938, 236 с.
4. Воробьёв Н. В. Цепные передачи. М., Машгиз, 1946.
5. Исследования металлических конструкций. Под ред. Н. С. Стрелецкого. М.—Л., Стройиздат, 1940, 156 с.
6. Кремель Р. Проектирование кранов. Л., ОНТИ, 1936, 422 с.
7. Машиностроение. Энциклопедический справочник. Том II, М., Машгиз, 1948.
8. Николаев Г. А., Гельман А. С. Сварные конструкции и соединения. М., Машгиз, 1947.
9. Прокофьев И. П. Обработка, сборка и установка металлических мостов. М. — Л., ГНТИ, 1931, 383 с.
10. Расчёт винтовых соединений. Руководящие материалы ЭНИМС (составил Д. Н. Решетов). № 49, 1944.
11. Чудakov Е. А. Расчёт автомобиля. М., Машгиз, 1947, 587 с.



# ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ МАШИНЫ



## КЛАССИФИКАЦИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ МАШИН

### Классификация электрических машин по их назначению

По роду тока электрические машины делятся на машины постоянного и машины переменного тока. В зависимости от числа фаз машины переменного тока делятся на однофазные, трёхфазные, шестифазные и т. д.

Генератором (электрическим) называется машина, преобразующая механическую энергию в электрическую.

Электродвигателем, или мотором (электрическим), называется машина, преобразующая электрическую энергию в механическую.

Мотор-генератором называется агрегат, состоящий из двух или нескольких машин, служащих для преобразования одного рода электрического тока в другой.

Преобразователем одноякорным называется машина, служащая для преобразования в одном якоре переменного тока в постоянный или обратно.

Преобразователем частоты называется машина или агрегат из двух машин, превращающий электрическую энергию переменного тока одной частоты в электрическую энергию переменного тока другой частоты.

Возбудителем называется генератор, служащий для питания током обмоток возбуждения других машин.

Вольтодобавочной машиной называется генератор, включаемый последовательно в какую-либо цепь для изменения её напряжения.

### Классификация электрических машин по способу возбуждения

Машиной с независимым возбуждением называется машина, которая получает возбуждающий ток от независимого отдельного источника тока.

Машиной с самовозбуждением называется машина, которая возбуждается током, индуцированным в ней самой.

Машиной с параллельным (шунтовым) возбуждением называется машина, у которой обмотка возбуждения присоединяется параллельно к обмотке якоря.

Машиной с последовательным (серийным) возбуждением назы-

вается машина, у которой обмотка возбуждения включена последовательно с обмоткой якоря.

Машиной со смешанным возбуждением называется машина, у которой имеются две обмотки возбуждения: параллельная и последовательная.

### Классификация электрических машин по способу охлаждения

Машиной с естественным охлаждением называется машина, у которой не имеется никаких специальных приспособлений для охлаждения.

Машиной с самовентиляцией называется машина, охлаждение активных частей которой достигается вентилятором или каким-нибудь специальным приспособлением, составляющим с вращающейся частью машины одно целое.

Машиной с посторонним охлаждением называется машина, в которой охлаждающая среда (газообразная или жидкая) подаётся специальным приспособлением (вентилятором или насосом), помещённым вне машины.

### Классификация электрических машин по способу защиты

Машиной открытой называется машина, у которой все вращающиеся и токопроводящие части не имеют специальных защитных приспособлений.

Машиной защищённой называется машина, у которой имеются специальные защитные приспособления от проникновения внутрь машины посторонних тел. Против пыли, влаги и газов этот тип машины является незащищённым.

Машиной закрытой называется машина, закрытая со всех сторон (не герметически плотно) от проникновения наружного воздуха.

Машиной, защищённой против взрыва, называется машина, которая должна противостоять взрывам газа внутри машины и не передавать пламени воспламеняющемуся газу вне её и наоборот.

Машиной герметически закрытой называется машина, имеющая плотно закрытый корпус, не допускающий проникновения влаги внутрь машины при полном погружении её в воду в течение четырёх часов.

### Изоляционные материалы

Изоляционные материалы, применяемые в электромашиностроении, имеют различную теплостойкость, в зависимости от чего может быть допущен различный наибольший нагрев обмоток. По теплостойкости различают 5 классов изоляции:

Класс А — материалы органического происхождения, пропитанные лаками или погруженные в масло, а также покрытые эмалью, применяемой при изготовлении эмалированной проволоки; допускаемый нагрев до 105° С.

Класс В — препараты из слюды и асбеста, в которых изоляционные материалы класса А служат только в качестве связующих, не влияющих на диэлектрическую прочность обмотки; качество такой изоляции не должно меняться при воздействии температуры в 125° С, допускаемой для класса В.

Класс ВС — слюда, асбест, стеклянная пряжа на теплостойких лаках; допускаемая температура 140° С.

Класс СВ — изделия из слюды, стеклянной пряжи и асбеста на теплостойких лаках без применения изолирующих материалов класса А; предел допускаемой температуры повышается по сравнению с классом В соответственно повышению теплостойкости лаков.

Класс С — слюда, асбест, фарфор, кварц, стекло и т. п. без связывающих веществ класса А; допускаемая температура нагрева не устанавливается.

Для изоляции и охлаждения трансформаторных обмоток применяется трансформаторное масло с температурой вспышки 140° С, вязкостью 1,3 по Энглеру при температуре 50° с наименьшим пробивным напряжением 25 кВ при расстоянии между стандартными электродами 2,5 мм. Основным недостатком трансформаторного масла является его горючесть, поэтому в последние годы появились полноценные негорючие заменители масла, обладающие даже лучшей теплопроводностью. К числу таких синтетических заменителей принадлежат совтол и пиранол.

## ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ МАШИНЫ ПОСТОЯННОГО ТОКА

### Основные элементы

**Якорь** — вращающаяся часть машины, в современных типах машин выполняется зубчатым.

Для уменьшения магнитных потерь якорь выполняется из листовой стали марок ЕС1 и ЕС1А, а для машин специального назначения — марки ЕС1АА.

**Коллектор** выполняется из медных пластин трапециoidalной формы, изолированных друг от друга и от корпуса. Коллекторные пластины закрепляются на «ласточковых хвостах» и образуют строго цилиндрическую поверхность.

**Щёточный аппарат** состоит из щёток, щёткодержателей, щёточных пальцев, щёточной траверсы и токособирающих шин. В современных нормальных машинах постоянного тока применяются графитные, для тяговых и крановых двигателей — угольно-графитные и электрографитированные щётки.

Для машин низкого напряжения применяются медно-графитные щётки.

**Магнитная система** состоит из станины и прикреплённых к ней основных и добавочных полюсов. Обычно основные полюсы выполняются из листовой стали толщиной 0,5—1 мм.

**Подшипники** в машинах малой и средней мощности, а в тяговых двигателях до мощности 400 кВт применяются роликовые и шариковые, в остальных случаях применяются подшипники с бронзовыми и баббитовыми вкладышами.

**Электродвижущая сила, индуктированная в витке**, по закону электромагнитной индукции равна изменению магнитного потока по времени

$$e = - \frac{d\Phi}{dt}.$$

Применительно к машинам постоянного тока э. д. с., индуктированная в якоре, будет

$$E = \frac{p}{a} \Phi N \frac{n}{60} (\text{в}),$$

где  $p$  — число пар полюсов;

$a$  — число пар параллельных цепей якоря;

$\Phi$  — магнитный поток пары полюсов;

$N$  — число активных проводников якоря;

$n$  — число оборотов якоря в минуту.

Если магнитный поток  $\Phi$  выражен в максвеллах, то

$$E = \frac{p}{a} \Phi N \frac{n}{60} 10^{-8} (\text{в}).$$

**Обмотки машин.** Условия получения замкнутой барабанной обмотки машин постоянного тока:

а) число активных проводников должно быть числом чётным;

б) результирующий шаг обмотки должен быть чётным;

в) частичные шаги должны быть нечётными;

г) в однократно замкнутых обмотках число коллекторных пластин и шаг по коллектору не должны иметь общего делителя.

Если число коллекторных пластин и шаг по коллектору имеют общий делитель  $g$ , то обмотка получается  $g$ -кратнозамкнутой.

**Параллельная обмотка** (петлевая).

Результирующий шаг

$$y = y_1 - y_2 = \pm 2,$$

где  $y_1$  и  $y_2$  — частичные шаги.

Шаг по коллектору

$$y_k = \frac{y}{2} = \pm 1.$$

Частичные шаги равны:

$$y_1 = \frac{s \pm a}{2p}; \quad y_2 = \frac{s + a}{2p} \pm 2,$$

где  $s$  — число секционных сторон;

$a$  — произвольное целое число, делающее  $y$  целым и нечётным;

$2p$  — число полюсов.

Последовательная обмотка (волновая).

Результирующий шаг

$$y = \frac{s \pm 2}{p} = y_1 + y_2.$$

Шаг по коллектору

$$y_x = \frac{y}{2} = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Число коллекторных пластин

$$K = \frac{s}{2}.$$

Число коллекторных пластин  $K$  и шаг по коллектору не должны иметь общего делителя.

**Уравнительные соединения.** Вследствие несимметричности магнитной системы и эксцентричного положения якоря относительно полюсов и других причин э. д. с. в отдельных параллельных цепях якоря получаются различные. В силу этого в обмотке появляются уравнительные токи, вызывающие искрение под щётками. Во избежание этого машины снабжаются уравнительными соединениями, т. е. проводниками, соединяющими точки равного потенциала. Расстояние между двумя равнопотенциальными точками называется шагом уравнительных соединений, или потенциальным шагом.

Для простой параллельной обмотки этот шаг равен

$$y_p = \frac{K}{a}$$

и является целым числом.

**Плотность тока** в медных проводниках якоря допускается в зависимости от сечения проводников и от условий вентиляции (табл. 1).

Таблица 1

Плотность тока в проводниках якоря

Сечение проводника в мм <sup>2</sup>	0,5÷1	1,5÷4	4÷10	10÷20	20÷60	60÷120
Плотность тока $j = a / \text{мм}^2$	7÷6	5,5÷4,5	4,5÷4	4÷3,5	3,5÷3	3÷2,5

Для обмотки электромагнитов плотность тока не должна превосходить 1,5—2,5 а/мм<sup>2</sup>. При очень хорошей вентиляции плотность тока в обмотке электромагнитов может быть допущена 3,5 а/мм<sup>2</sup>.

Величина магнитного потока машины

$$\Phi = \frac{60}{\pi n} \cdot \frac{a}{N} E \cdot 10^8 \text{ (мкс)}$$

(здесь все обозначения те же, что и при подсчёте э. д. с. якоря).

Магнитная индукция в воздушном зазоре выбирается в зависимости от мощности машины согласно табл. 2.

Таблица 2

Магнитная индукция в воздушном зазоре

Мощность машины в квт	0÷10	10÷100	100÷1 000
Магнитная индукция $B_g$ (гс)	4 000÷7 000	7 000÷9 000	9 000÷11 000

Магнитная индукция в стали якоря в зависимости от числа циклов перемагничивания выбирается согласно табл. 3.

Таблица 3

Магнитная индукция в стали якоря

Число циклов перемагничивания $f = \frac{Pn}{60}$	10÷20	20÷30	30÷40	40÷50
Магнитная индукция в якоря $B_d$ (гс)	11 000÷12 000	12 000÷13 000	13 000÷14 000	14 000÷15 000

Магнитную индукцию в полюсных сердечниках и в станине можно брать по табл. 4.

Таблица 4

Магнитная индукция в полюсных сердечниках и в станине

Материал	Магнитная индукция в полюсных сердечниках $B_m$ (гс)	Магнитная индукция в станине $B_s$ (гс)
Чугун . . . . .	6 000÷8 000	5 000÷7 000
Литая сталь . . . . .	12 000÷15 000	12 000÷15 000

**Магнитное рассеяние.** Коэффициент магнитного рассеяния равен отношению магнитного потока, возбуждаемого в полюсах, к магнитному потоку якоря:

$$\sigma = \frac{\Phi_m}{\Phi}.$$

Значение коэффициента магнитного рассеяния для машин без добавочных полюсов может быть принято по табл. 5.

Таблица 5

Значения  $\sigma$ 

Мощность машины в квт . . . . .	1	5	10	100	500
Коэффициент рассеяния $\sigma$ . . . . .	1,3	1,25	1,18	1,13	1,1

При наличии добавочных полюсов коэффициент магнитного рассеяния увеличивается:

$$\sigma' = (1,05 \div 1,07) \sigma,$$

где  $\sigma'$  — коэффициент магнитного рассеяния у машин с добавочными полюсами;

$\sigma$  — то же, но у машин без добавочных полюсов.

**Реакция якоря.** Ток в проводниках якоря создаёт магнитный поток реакции якоря. Этот поток, суммируясь с магнитным потоком главных полюсов, вызывает искажение и ослабление основного поля магнитов.

В результате реакции якоря в машинах постоянного тока:

а) нейтраль в генераторе смещается по направлению вращения, а в двигателе—против направления вращения якоря;

б) происходит ослабление главного магнитного потока, вследствие чего в генераторе получается падение напряжения, а в двигателе—увеличение числа оборотов;

в) увеличивается рассеяние главного магнитного потока машины.

В случае сдвига щёток с геометрической нейтральной магнитный поток реакции якоря распадается на две составляющих:

а) продольный поток реакции якоря, направленный навстречу потоку главных полюсов;

б) поперечный магнитный поток, направленный перпендикулярно главному потоку; этот поток вызывает искажение главного потока, ослабляя в генераторе магнитную индукцию на набегающем конце и усиливая на сбегающем (в двигателе наоборот).

Условия получения хорошей коммутации и безыскровой работы электрической машины постоянного тока:

а) отдельные проводники, относящиеся к одному и тому же коммутационному пучку, не должны занимать в магнитном поле слишком разлнчное положение; в силу этого зона коммутации должна быть, по возможности, узкой; ширина щёток должна быть такой, чтобы они перекрывали от 2 до 3,5 коллекторных пластин и не больше;

б) щётки должны быть специально предназначены для данного типа машины;

в) создание коммутирующего поля с помощью дополнительных полюсов. Дополнительные полюса включаются последовательно с обмоткой якоря; они уничтожают поперечное поле якоря.

### Шунтовой генератор

**Характеристика холостого хода** показывает зависимость напряжения машины от изменения тока в обмотке возбуждения при постоянном числе оборотов якоря:

$$U = f(I_a); \quad n = \text{const}; \quad I_x = 0.$$

Характеристика холостого хода характеризует машину с точки зрения магнитных свойств и степени магнитного насыщения.

Характеристику холостого хода лучше снимать при независимом возбуждении, так как в этом случае  $I_x = 0$  и напряжение на зажимах якоря равно э. д. с. При самовозбуждении напряжение на зажимах якоря меньше э. д. с. на величину падения напряжения в якоря от тока возбуждения. Ток возбуждения составляет 1—3% от номинального тока, а потому падение напряжения в якоря от тока возбуждения сравнительно мало влияет на результаты измерения.

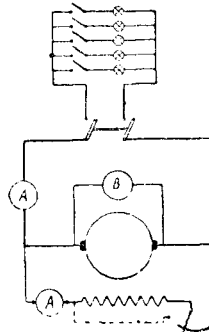
При получении характеристики холостого хода необходимо считаться с явлением гистерезиса и вести опыт при плавном повы-

шении или понижении тока в обмотке, ни в коем случае не допуская скачков тока то вверх, то вниз. В том случае, когда при опыте не удастся точно поддержать постоянным число оборотов генератора, отсчёт напряжения можно сделать при другом числе оборотов  $n$  и затем сделать пересчёт на нормальное число оборотов  $n_k$ :

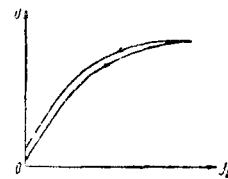
$$U_n = U \frac{n_k}{n}.$$

Схема соединения машины для получения характеристики холостого хода и нормальный вид характеристики холостого хода показаны на фиг. 1 и 2.

**Нагрузочная характеристика** показывает изменение напряжения



Фиг. 1. Схема соединения для исследования шунтового генератора с самовозбуждением



Фиг. 2. Характеристика холостого хода шунтового генератора

на зажимах генератора  $U$  в зависимости от изменения тока возбуждения  $I_a$  при постоянном числе оборотов  $n$  и некотором постоянном токе якоря  $I_x$ :

$$U = f(I_a); \quad n = \text{const}; \quad I_x = \text{const}.$$

Нагрузочные характеристики рекомендуются снимать для токов якоря, равных:

- а)  $1/4 I_n$ ; б)  $2/4 I_n$ ;  
в)  $3/4 I_n$ ; г)  $4/4 I_n$ ,

где  $I_n$  — номинальный ток.

Эти характеристики имеют вид, аналогичный характеристике холостого хода, но при нанесении на одну диаграмму располагаются ниже характеристики холостого хода. Это объясняется тем, что при нагрузке напряжение на зажимах якоря меньше э. д. с. при одном и том же токе возбуждения. Падение напряжения происходит по двум причинам:

а) вследствие падения напряжения в якоря в переходном контакте со щёток на коллектор;

б) вследствие воздействия реакции якоря на главное поле.

Из внешней нагрузочной характеристики можно получить внутреннюю нагрузочную характеристику, прибавляя к ординатам внешней нагрузочной характеристики падение напряжения в якоря.

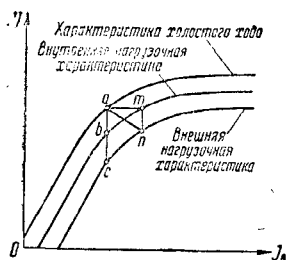
Изображая в одних осях координат (фиг. 3) характеристику холостого хода, внешнюю и внутреннюю нагрузочные характеристики, можно получить падение напряжения в сопротивлении якоря и от реакции якоря, а также ампервитка реакции якоря.

Отрезок  $ac$  представляет полное падение напряжения от тока якоря; отрезок  $ab$  — па-

дение напряжения от реакции якоря; отрезок  $bc$  — падение напряжения в сопротивлении якоря; отрезок  $am$  — ампервитки реакции якоря;  $\Delta am$  называется характеристикским треугольником.

Схема соединения генератора для получения нагрузочных характеристик показана на фиг. 1.

Внешняя характеристика (фиг. 4) представляет зависимость напряжения машины  $U$  от тока нагрузки  $I$  при постоянном числе оборотов  $n$  и постоянном токе возбуждения  $I_a$ .



Фиг. 3. Построение характеристического треугольника

Иногда внешнюю характеристику снимают не при постоянном токе  $I_a$ , а при постоянном сопротивлении цепи шунтовой обмотки  $r_m$ .

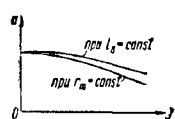
Внешняя характеристика позволяет определить как падение напряжения генератора при изменении нагрузки от нуля до определённой величины, так и повышение напряжения при разгрузке машины от нормального тока якоря до нуля.

Схема соединения генератора для получения внешней характеристики показана на фиг. 1.

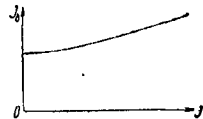
Регулировочная характеристика показывает, насколько надо изменить ток возбуждения  $I_a$ , чтобы с увеличением тока нагрузки  $I$  напряжение  $U$  на зажимах машины оставалось постоянным:

$$I_a = f(I); \quad U = \text{const}; \quad n = \text{const}.$$

Регулировочная характеристика имеет вид кривой, показанный на фиг. 5.



Фиг. 4. Внешняя характеристика шунтового генератора



Фиг. 5. Регулировочная характеристика

Схема соединений генератора для получения регулировочной характеристики показана на фиг. 1.

Характеристика короткого замыкания представляет зависимость изменения тока якоря от тока возбуждения при коротком замыкании якоря:

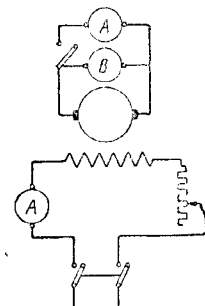
$$I_a = f(I_a); \quad n = \text{const}; \quad U = 0.$$

В силу остаточного магнетизма характеристика проходит несколько выше начала координат. Снимается характеристика по схеме фиг. 6 с независимым возбуждением.

Соединительные проводники должны иметь малое сопротивление. Реостат, включённый в обмотку возбуждения, должен иметь большое сопротивление, чтобы ток в якоре не превзошёл величины нормального тока якоря.

Одновременно с получением данных для характеристики короткого замыкания снимается и характеристика холостого хода для малых токов возбуждения. При разомкнутом рубильнике в цепи якоря вольтметр показывает э. д. с.; при замкнутом рубильнике амперметр учитывает ток короткого замыкания  $I_a$ .

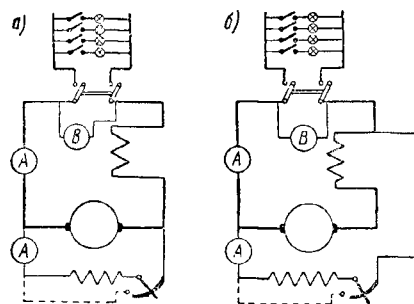
Характеристика холостого хода вместе с характеристикой короткого замыкания даёт возможность построить характеристический треугольник и по нему построить все характеристики машины.



Фиг. 6. Схема соединения для получения характеристики короткого замыкания

### Генератор со смешанным возбуждением (компаунд)

Схема соединений компаундного генератора со смешанным возбуждением представлена на фиг. 7. По способу присоединения шунтовой обмотки компаундного генератора различают два вида: а) с коротким шунтом (фиг. 7,а) и б) с длинным шунтом (фиг. 7,б). Вследствие незначительного сопротивления серийной обмотки существенной разницы между этими двумя видами компаундных генераторов не имеется.



Фиг. 7. Схема соединений для исследования компаундного генератора

Характеристика холостого хода аналогична характеристике холостого хода шунтового генератора, так как ток в обмотке последовательного возбуждения равен нулю.

Компаундный генератор обыкновенно работает при таком включении обмоток возбуждения, что магнитные потоки, создаваемые шунтовой и серийной обмотками, между собой складываются. При сравнительно большом числе витков серийной обмотки нагрузочные характеристики располагаются выше характеристики холостого хода.

Внешняя характеристика получается так же, как и у шунтового генератора. Подби-

рая число витков серийной обмотки, можно устроить так, что падение напряжения в якоре будет скомпенсировано наведённой э.д.с. от магнитного потока серийной обмотки. В этом случае напряжение на зажимах якоря машины будет приблизительно оставаться величиной постоянной при всех условиях нагрузки.

### Шунтовой электродвигатель

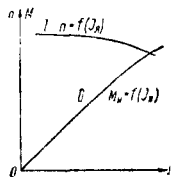
Число оборотов электродвигателя

$$n = c_1 \frac{U - I_a R_a}{\Phi}.$$

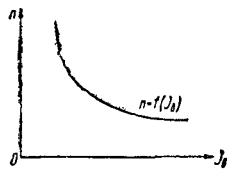
Вращающий момент электродвигателя

$$M = c_2 I_a \Phi.$$

Внешняя характеристика электродвигателя показывает изменение числа оборотов



Фиг. 8. Внешняя характеристика и кривая вращающего момента шунтового двигателя



Фиг. 9. Характеристика холостого хода шунтового двигателя

электродвигателя при изменении тока якоря, при постоянном напряжении на зажимах и постоянном токе возбуждения:

$$n = f(I_a); \quad U = \text{const}; \quad I_f = \text{const}.$$

Внешняя характеристика и кривая вращающего момента представлены на фиг. 8 (кривые I и II). Вращающий момент прямо пропорционален току якоря, так как магнитный поток является величиной почти постоянной.

Характеристика холостого хода электродвигателя представляет зависимость изменения числа оборотов якоря от тока возбуждения при холостом ходе:

$$n = f(I_f); \quad I_a = I_0; \quad U = \text{const}.$$

При малых насыщениях магнитный поток изменяется прямо пропорционально току возбуждения; изменение числа оборотов идёт по кривой, резко понижающейся (фиг. 9). При больших насыщениях магнитный поток увеличивается медленно и число оборотов снижается также сравнительно медленно. При получении этой характеристики обычно начинают с наибольшего тока возбуждения и постепенно затем его уменьшают, чем увеличивают число оборотов якоря. Согласно ГОСТ шунтовые двигатели испытываются в течение 2 мин. на повышение скорости на 20% выше номинальной.

Характеристики электродвигателя с последовательным возбуждением (серийс). В двигателе с последовательным возбуждением магнитный поток создаётся тем же током  $I_a$ , который проходит по якору. Поэтому при увеличении нагрузки магнитный

поток увеличивается и число оборотов резко падает.

При сбрасывании нагрузки число оборотов якоря может быть очень большим. Вследствие этого не рекомендуется никогда пускать серийный двигатель вхолостую под полным напряжением, а также применять ременную передачу.

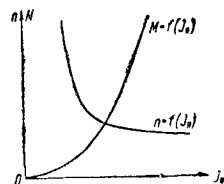
Зависимость изменения числа оборотов двигателя и вращающего момента от тока нагрузки показана на фиг. 10. Вращающий момент серийного двигателя при малых насыщениях пропорционален квадрату тока.

Регулирование числа оборотов серийных двигателей производят:

а) за счёт изменения тока в обмотке возбуждения путём параллельного присоединения к этой обмотке реостата;

б) за счёт изменения числа витков обмотки возбуждения;

в) за счёт изменения напряжения, подведённого к электродвигателю, что достигается или при помощи реостата, включаемого последовательно с якром, или при совместной работе нескольких двигателей путём параллельного или последовательного включения двигателей.



Фиг. 10. Характеристика электродвигателя с последовательным возбуждением

### Потери мощности в машинах постоянного тока

а) Потери на нагревание обмотки якоря:

$$P_a = I_a^2 R_a,$$

где  $R_a$  — сопротивление обмотки якоря и переходного контакта со щёток на коллектор.

б) Потери на нагревание в шунтовой цепи:

$$P'_a = I_a^2 (r_a + r_p) = U I_a,$$

где  $r_a$  — сопротивление шунтовой обмотки;  $r_p$  — то же шунтового реостата.

в) Потери на нагревание серийной обмотки и обмотки дополнительных полюсов:

$$P''_a = I_a^2 (r_s + r_{d,n}).$$

г) Потери на перемагничивание стали якоря (гистерезис) вызываются циклическим перемагничиванием, совершающимся с частотой

$$f = \frac{pn}{60},$$

где  $p$  — число пар полюсов;

$n$  — число оборотов якоря в минуту.

Потери на гистерезис подсчитываются по эмпирическим формулам (см. ТСЖ, т. I, Основы электротехники).

д) Потери на токи Фуко в стали якоря определяются при равномерном распределении магнитной индукции (см. ТСЖ, т. I, Основы электротехники).

е) Механические потери изменяются с изменением скорости. Для нормальных машин

механические потери составляют от 0,4 до 2% номинальной мощности машины. Минимальные потери относятся к машинам с окружной скоростью якоря 5 м/сек, а максимальные — для скорости 60 м/сек.

### Коэффициент полезного действия электрических машин

К.п.д. генераторов или электродвигателей представляет отношение полезной мощности  $P_{\text{полезн}}$  к затраченной мощности  $P_{\text{затр}}$ :

$$\eta = \frac{P_{\text{полезн}}}{P_{\text{затр}}}.$$

К.п.д. для генераторов

$$\eta = \frac{P_{\text{полезн}}}{P_{\text{полезн}} + \Sigma P_{\text{потерь}}};$$

для электродвигателей

$$\eta = \frac{P_{\text{затр}} - \Sigma P_{\text{потерь}}}{P_{\text{затр}}},$$

где  $\Sigma P$  — сумма всех потерь в машине.

Опытное определение к.п.д. производится: 1) методом механического торможения, 2) методом электрического торможения, 3) методом возвратной работы, 4) методом холостого хода.

## ТРАНСФОРМАТОРЫ

### Общие сведения

Трансформатором называется электромагнитный аппарат, при помощи которого электрическая энергия переменного тока определенной частоты и напряжения преобразуется в энергию переменного тока той же самой частоты, но другого напряжения.

Трансформатор был изобретен русским изобретателем И. Ф. Усагиным.

Сердечник трансформатора собирается из листовой стали марки ЕС4А, толщиной от 0,35 до 0,5 мм. Листы стали для уменьшения потерь на токи Фуко изолируются друг от друга прослойкой тонкой бумаги или нанесением слоя лака.

Кожухи трансформаторов выполняются из листовой стали сварными, причем поверхность кожухов для трансформаторов малой мощности делается гладкой, а для больших мощностей — волнистой, что увеличивает охлаждающую поверхность трансформатора.

Для передвижения трансформаторов применяются гладкие ролики, прикрепленные к нижней части кожуха.

Подъем трансформаторов производится за кольца, установленные на крышке трансформатора.

Вывод концов обмоток трансформаторов производится через проходные фарфоровые изоляторы.

Трансформаторы с масляным охлаждением снабжаются стальным расширительным сосудом, назначение которого состоит в том, чтобы дать выход нагревающемуся при работе трансформатора маслу и чтобы препятствовать конденсации влаги на поверхности масла трансформатора в кожухе.

Обмотка трансформатора, которая подключается к сети, питающей трансформатор,

называется первичной обмоткой. Обмотка, от которой электрическая энергия отводится к потребителю, называется вторичной обмоткой.

Коэффициентом трансформации называется отношение числа витков первичной обмотки  $w_1$  к числу витков вторичной обмотки  $w_2$ :

$$K = \frac{w_1}{w_2}.$$

При холостом ходе наведенные в обмотках э.д.с. прямо пропорциональны числу витков и очень мало отличаются от напряжений. Коэффициент трансформации по ГОСТ

$$K = \frac{w_1}{w_2} \approx \frac{U_1}{U_2}.$$

Схема соединения обмоток. На стороне высшего напряжения трёхфазные трансформаторы могут быть соединены звездой (условное обозначение  $\star$ ) и треугольником (условное обозначение  $\triangle$ ). На стороне низшего напряжения кроме этих схем применяется схема соединения зигзагом (условное обозначение  $Z$ ). Схему соединения обычно пишут в виде дроби, в числителе которой ставят условное обозначение схемы соединения обмоток высшего напряжения, а в знаменателе — схему соединения обмоток низшего напряжения.

В зависимости от схем соединения обмоток высшего и низшего напряжений трёхфазные трансформаторы разделяются на целый ряд групп. Из них в качестве нормальных рекомендуется:

$$\text{а) } \frac{Y}{Y_0} - 12; \text{ б) } \frac{Y}{\Delta} - 11; \text{ в) } \frac{Y_0}{\Delta} - 11.$$

Индекс 0 означает, что выведена нулевая точка.

Нормальный порядок следования векторов должен быть таков: вектор напряжения фазы В отстаёт на  $120^\circ$ , а вектор напряжения фазы С отстаёт на  $240^\circ$  от вектора напряжения фазы А.

Обозначение зажимов и ответвлений трансформатора. Начала обмоток высшего напряжения обозначаются буквами А, В, С, а их концы буквами X, Y, Z. Соответственно а, b, с — начала обмоток низшего напряжения, x, y, z — концы этих обмоток.

Выводы, соединённые вместе, обозначаются на высшем напряжении буквой О, а на низшем — буквой о.

Регулирование напряжения на  $\pm 5\%$  в трансформаторах мощностью до 5 600 кВА производится за счёт изменения числа витков обмотки высшего напряжения. Для этой цели имеются специальные выводы от обмоток как у понижающих, так и у повышающих трансформаторов. Переключение производится при отключённом трансформаторе.

Коэффициент полезного действия трансформатора при любом значении  $\cos \varphi_2$  определяется из соотношения:

$$\eta = \frac{a P_2 \cos \varphi_2}{a P_2 \cos \varphi_2 + P_0 + a^2 P_K},$$

где  $P_2$  — полезная мощность трансформатора в кВА;

10\*

$a$  — коэффициент нагрузки трансформатора по отношению к номинальной мощности;

$P_0$  — потери мощности холостого хода;

$P_k$  — потери при коротком замыкании.

Наиболее распространёнными методами определения к.п.д. являются метод холостого хода и короткого замыкания. При холостом ходе вся потребляемая трансформатором мощность расходуется на потери гистерезиса и токи Фуко, которые при всех условиях нагрузки остаются постоянными. Потери на нагревание обмоток при холостом ходе очень малы, и ими пренебрегают. Опыт короткого замыкания представляет такой режим работы трансформатора, при котором вторичная обмотка замыкается накоротко, а к первичной обмотке подводится такое пониженное напряжение, при котором в обмотках трансформатора протекает номинальный ток. Напряжение короткого замыкания обычно даётся на шитке трансформатора и составляет от 5 до 7% от номинального напряжения.

При коротком замыкании магнитная индукция очень мала, а потому потери на гистерезис и токи Фуко также малы. Поэтому вся мощность расходуется на нагревание обмоток.

На основании опытов холостого хода и короткого замыкания можно подсчитать значение к.п.д. для всех нагрузок и для любого значения  $\cos \varphi$ .

#### Параллельная работа трёхфазных трансформаторов

Для осуществления параллельной работы трансформаторов необходимо соблюдение следующих условий:

а) Напряжения обмоток высшего и низшего напряжений, указанных на заводских табличках трансформаторов, должны быть соответственно равны. Несоблюдение этого условия приводит к тому, что между параллельно работающими трансформаторами появятся уравнительные токи, которые загружают обмотки трансформаторов и не дают возможности полностью использовать мощность трансформатора.

б) Напряжения короткого замыкания  $U_k$ , указываемые на заводских табличках трансформаторов, должны быть одинаковыми: разница в  $U_k$  параллельно работающих трансформаторов не должна превосходить  $\pm 10\%$  от их среднего значения. При одинаковой мощности трансформаторов нагрузка распределяется между параллельно работающими трансформаторами обратно пропорционально напряжениям короткого замыкания.

в) Мощности параллельно работающих трансформаторов не должны отличаться друг от друга более чем в три раза. Несоблюдение этого условия может повести к большой перегрузке трансформатора малой мощности.

г) Схемы и группы соединений обмоток трансформаторов, предназначенных для параллельной работы, должны совпадать.

д) Фазы трансформаторов, приключённых для параллельной работы, должны совпадать, т. е. одинаково обозначенные выводы фаз должны быть присоединены к одной шине.

## СИНХРОННЫЕ МАШИНЫ

### Устройство синхронной машины

Синхронная машина состоит из двух основных частей: а) индуктора, служащего для создания магнитного поля, и б) якоря, в обмотке которого индуцируется э.д.с.

Синхронные генераторы выполняются двух типов: а) с неподвижным якорем и вращающимися магнитами и б) с неподвижными магнитами и вращающимся якорем.

Машины с неподвижным якорем (статором) и вращающимися магнитами (ротором) получили почти исключительное применение.

Обмотки якоря синхронной машины бывают катушечные и стержневые.

Сердечник статора выполняется из листовой стали. Ротор выполняется из литой стали, и полюсы его возбуждаются постоянным током от особого возбудителя.

Ротор может быть с явно выраженными полюсами (тихоходные машины) и с неявно выраженными полюсами (быстроходные машины).

Ток возбуждения подводится от возбудителя к катушкам полюсов посредством щёток, устанавливаемых на двух кольцах, укрепленных на валу машины. Кольца изолированы от вала и между собой, и к ним присоединяются концы обмотки возбуждения.

Частота переменной э.д.с., индуцированной в обмотке генератора,

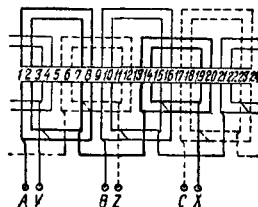
$$f = \frac{pn}{60},$$

где  $f$  — частота в  $гц$ ;

$p$  — число пар полюсов генератора;

$n$  — число оборотов генератора в минуту.

Катушечные обмотки машин трёхфазного переменного тока выполняются или в виде однослойной обмотки с одной активной стороной катушки в пазу или в виде двухслойной обмотки с двумя сторонами катушки в пазу.



Фиг. 11. Четырёхполюсная трёхфазная обмотка: два проводника на полюс и фазу

На фиг. 11 представлена четырёхполюсная трёхфазная обмотка с двумя пазами на полюс и фазу и несколькими проводниками в пазу. Фаза AX начерчена толстой сплошной линией, фаза BY — сплошной тонкой линией, фаза CZ — пунктирной. Начала фаз сдвинуты относительно друг друга на  $120^\circ$ . Каждая фаза имеет длинную и короткую катушки, которые включаются между собой последовательно.

Стержневые обмотки обычно выполняются в генераторах низкого напряжения и имеют по одному или по два стержня в пазу.



Одностержневые обмотки в виде катушек одинаковой ширины имеют лобовые соединения в виде вилок; двухстержневые обмотки — цилиндрические. Верхние и нижние обмотки соединяются друг с другом посредством хомутиков.

При выполнении обмоток генераторов необходимо особенно тщательно изолировать друг от друга отдельные катушки. При больших напряжениях между катушками прокладывается прослойка из прессшпана. Обмотки на напряжение свыше 4 000 в пропитывают асфальтовой массой.

### Величина индуктированной электродвижущей силы в генераторе

Если распределение магнитной индукции по окружности якоря имеет синусоидальную форму, а все витки обмотки сцеплены с одним и тем же магнитным потоком, равным магнитному потоку полюса, то эффективное значение э.д.с. в вольтах:

$$E = 4,44 f k \Phi,$$

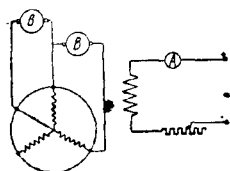
где  $k$  — обмоточный коэффициент;  
 $f$  — частота переменного тока в гц;  
 $w$  — число витков;  
 $\Phi$  — магнитный поток полюса.

### Характеристики синхронных машин

Характеристика холостого хода представляет зависимость фазного напряжения генератора  $U$  от тока возбуждения  $I_a$  при разомкнутой внешней цепи и постоянном числе оборотов:

$$U = f(I_a); \quad n = \text{const}; \quad I = 0.$$

Схема соединения генератора для получения характеристики холостого хода показана на фиг. 12. Схема дана для генератора низкого напряжения. В случае генератора высокого напряжения вольтметры должны быть включены через измерительные трансформаторы напряжения.



Фиг. 12. Схема соединения трёхфазного генератора для получения характеристики холостого хода

Характеристика холостого хода должна быть снята при намагничивании и размагничивании.

**Характеристика короткого замыкания.** Характеристика короткого замыкания представляет зависимость тока якоря  $I_a$  генератора от тока возбуждения  $I_a$  при внешнем сопротивлении, равном нулю, и при постоянном числе оборотов:

$$I_a = f(I_a); \quad n = \text{const}; \quad U = 0.$$

Незначительные изменения числа оборотов в период получения характеристики существенного значения не имеют, так как и э.д.с., и реактивное сопротивление якоря изменяются пропорционально числу оборотов.

При получении характеристики ток возбуждения увеличивают до тех пор, пока ток якоря не превысит приблизительно на 25% нормальный.

Машина при коротком замыкании работает в ненасыщенном состоянии, а потому характеристика представляет прямую линию.

Из-за остаточного магнетизма характеристика короткого замыкания не проходит через начало координат. Для того чтобы исключить влияние остаточного магнетизма, характеристику переносят параллельно в начало координат.

**Внешняя характеристика** представляет зависимость

$$U = f(I); \quad n = \text{const}; \quad \cos \varphi = \text{const}; \\ I_a = \text{const}.$$

Внешняя характеристика даёт возможность судить о величине падения напряжения в генераторе при разных нагрузках и обычно снимается для  $\cos \varphi = 1$  и  $\cos \varphi = 0,8$ .

Непосредственное определение опытным путём падения напряжения трудно выполнимо; поэтому чаще всего изменение напряжения определяется по характеристике холостого хода и короткого замыкания.

### Параллельное включение синхронных машин

Условия включения синхронных машин на параллельную работу:

- напряжение подключаемой машины должно равняться напряжению на шинах станции;
- частота присоединяемой машины должна равняться частоте работающих генераторов;
- напряжение подключаемого генератора должно быть в фазе с работающим генератором.

Для контроля выполнения последнего условия употребляют фазные лампы.

Для более точной фиксации момента включения параллельно к одной из ламп включается вольтметр. Момент включения приблизительно определяется по лампам и точно фиксируется вольтметром, когда он покажет нуль. На генераторах высокого напряжения лампы включаются через понизительные трансформаторы. В отдельных случаях для более точного определения момента включения применяется синхроскоп, который одновременно даёт возможность судить также и о том, идёт ли подключённый генератор медленно или слишком быстро.

Изменение тока возбуждения у одной из параллельно работающих машин не приводит к перераспределению нагрузки между генераторами, а вызывает лишь реактивный ток в этом генераторе. Распределение нагрузки между параллельно работающими генераторами и перевод нагрузки с одного генератора на другой могут быть произведены исключительно за счёт подводимой к генератору мощности от первичного двигателя.

Для перевода нагрузки с одного генератора на другой надо увеличить вращающий момент первичного двигателя того генератора, который стремятся нагрузить, и уменьшить вращающий момент первичного двигателя у генератора, который разгружают.

Изменение вращающего момента первичного двигателя осуществляется воздействием на регулятор первичного двигателя (напри-

мер изменением количества пара, поступающего в паротурбину или воды в гидротурбину).

Синхронный двигатель является обратным синхронным генератором. Если параллельно работающему генератору прекратить подачу энергии к первичному двигателю, то синхронный генератор обращается в синхронный двигатель.

Пуск синхронных двигателей может быть осуществлён путём асинхронного пуска или от вспомогательного двигателя.

Пуск синхронных двигателей в качестве асинхронных может быть осуществлён только в том случае, когда в полюсах двигателя имеется специальная пусковая короткозамкнутая обмотка в виде медных стержней (беличье колесо), уложенных через известные промежутки в полюсных наконечниках и замкнутых на торцевых концах кольцами. Пуск синхронных двигателей в качестве асинхронных должен производиться от пониженного напряжения (30—40% нормального).

Понижение напряжения достигается как путём включения через автотрансформатор, так и включения сопротивления в цепь статора.

Обмотка возбуждения при пуске должна быть замкнута через сопротивление во избежание появления в ней высокого напряжения. Замыкание обмотки накоротко не рекомендуется.

Пуск вспомогательным двигателем производится следующим образом: синхронный двигатель сцепляется с вспомогательным и доводится до синхронной скорости. После этого синхронный двигатель возбуждается как генератор до нормального напряжения, синхронизируется и включается на параллельную работу с сетью. Вспомогательный двигатель после этого отключается.

#### Синхронный электродвигатель как синхронный компенсатор

При определённом токе возбуждения синхронный двигатель потребляет только активный ток. Если ток возбуждения увеличить или уменьшить, то якорь должен потреблять реактивный ток, падение напряжения от которого восстановит равновесие. Если синхронный двигатель перевозбуждён, то якорь должен потреблять опережающий ток. Если синхронный двигатель недо возбуждён, то якорь должен потреблять отстающий ток.

Перевозбуждённый синхронный двигатель ведёт себя так же, как конденсатор, и вследствие этого может компенсировать действие индуктивности в сети от трансформаторов и асинхронных двигателей. Угол сдвига фаз между током и напряжением в синхронном двигателе зависит от величины тока возбуждения.

Для целей улучшения  $\cos \varphi$  синхронные двигатели обычно работают вхолостую. Величину реактивного тока синхронного двигателя устанавливают током возбуждения, не переходя за величину нормального тока, на который рассчитан генератор.

Синхронные двигатели, предназначенные для компенсации сдвига фаз, называют синхронными компенсаторами.

## ТРЕХФАЗНЫЕ АСИНХРОННЫЕ ДВИГАТЕЛИ

### Общие сведения

Асинхронный двигатель был изобретён в 1891 г. русским инженером М. О. Доливо-Добровольским.

Трёхфазный асинхронный двигатель состоит из неподвижной части статора и вращающейся части — ротора.

В статоре асинхронного двигателя заложены, как в генераторе трёхфазного тока, три одинаковые обмотки, сдвинутые относительно друг друга на угол 120 электрических градусов.

Если обмотки статора, соединённые звездой или треугольником, присоединить к сети трёхфазного тока, то они создают вращающееся магнитное поле с числом оборотов в минуту

$$n = \frac{60 f}{p},$$

где  $f$  — частота переменного тока в  $\text{Гц}$ ;  
 $p$  — число пар полюсов двигателя.

Это вращающееся магнитное поле пересекает проводники ротора, благодаря чему в обмотках ротора индуцируется э.д.с. Если цепь ротора будет замкнута, то в обмотках ротора появятся токи.

Взаимодействие вращающегося поля статора с токами ротора и будет вызывать вращение ротора по направлению вращения поля статора.

**Скольжение.** Ротор не может вращаться со скоростью, равной скорости вращающегося поля, так как если ротор приобрёл бы скорость вращения поля, то не происходило бы пересечения проводников магнитным полем, а следовательно, в проводниках ротора не было бы и тока.

Скорость вращения поля, зависящая от частоты и числа пар полюсов, называется синхронной скоростью. Скорость ротора всегда меньше синхронной скорости. Скольжение равно

$$s\% = \frac{n_1 - n_2}{n_1} \cdot 100,$$

где  $n_1$  — синхронное число оборотов;  
 $n_2$  — число оборотов ротора (асинхронное).

Величина скольжения в асинхронных электродвигателях трёхфазного тока колеблется от 1 до 5% в зависимости от нагрузки.

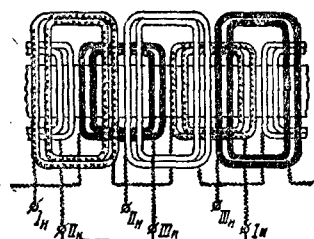
**Статорные обмотки** асинхронного двигателя обычно состоят из отдельных секций, выполненных в виде витков, соединённых последовательно. Число витков каждой катушки выбирают в зависимости от напряжения и мощности двигателя. Начала и концы отдельных катушек должны быть соединены между собой таким образом, чтобы э. д. с., индуцированные в отдельных проводниках, складывались между собой.

В катушечной обмотке число катушек в одной фазе равно числу пар полюсов. Полное число всех катушек в обмотке статора равно числу пар полюсов, умноженному на число фаз.

На фиг. 13 приведена схема трёхфазной катушечной обмотки с числом фаз  $m = 3$ , число пазов на полюс и фазу  $q = 2$ , число полюсов  $2p = 4$ , число катушек  $k = 6$ . Видоизменённые обмотки постоянного тока могут быть выполнены из обыкновенной барабанной обмотки. Для этой цели три точки барабанной обмотки, равноудалённые друг от друга на  $120^\circ$ , выводятся для присоединения к сети.

Обмотка такого рода имеет следующие недостатки: а) провода разных фаз будут находиться в одном пазу, б) неразрезные обмотки могут быть соединены только в схему треугольника, в) обмоточный коэффициент будет сравнительно мал.

Роторные обмотки могут выполняться в виде короткозамкнутой обмотки (беличьего колеса) или же в виде фазной об-



Фиг. 13. Схема соединения обмоток трёхфазного асинхронного электродвигателя

мотки по типу статорных обмоток. В отдельных случаях применяются комбинированные обмотки.

Выполнение асинхронных двигателей трёхфазного тока. Сердечники статора и ротора выполняются из листов стали толщиной от 0,35 до 0,5 мм, изолированных друг от друга прослойками бумаги или лаком.

Статор выполняется в виде полого цилиндра, на внутренней поверхности которого выполняются пазы для размещения обмотки статора.

Ротор также снабжается пазами для закладки обмотки, однако число пазов ротора не должно быть кратным произведению числа полюсов на число фаз, так как в противном случае ротор плохо трогается с места (мёртвые точки).

Число впадин на полюс и фазу бывает от 2 до 4.

В настоящее время в асинхронных двигателях применяются почти исключительно полуоткрытые пазы. Для таких пазов рассеяние практически бывает таким же, как и для открытых пазов, но распределение магнитной индукции в воздушном зазоре получается более равномерным. Ширина зазора таких впадин берётся от 2 до 5 мм и очень редко доходит до 7 мм.

Для двигателей с напряжением до 500 в изоляция пазов выполняется толщиной от 0,1 до 1 мм, причём обычно берут несколько слоёв прессшпана, свёртывая их в виде трубок. Для фазных напряжений до 250 в обычно достаточна толщина изоляции от 0,2 до 0,6 мм. Иногда, кроме прессшпана, кладут лакированную бумагу. Если в одной впадине лежат проводники нескольких фаз, то они отделяются друг от друга прессшпановой изоляцией

толщиной от 0,1 до 0,5 мм в зависимости от напряжения.

Полуоткрытые пазы статора для закрепления обмотки следует всегда закрывать деревянными или фибровыми клиньями.

В короткозамкнутых роторах впадины делаются круглыми. Медные стержни для этих роторов берутся на 0,2—0,3 мм меньше диаметра впадины и закладываются в пазы ротора без изоляции.

Концы медных стержней расклёпываются на торцевых поверхностях короткозамыкающих колец (из красной меди) или же припаиваются к ним. В двигателях от 1 до 12 кет большей частью ставятся нормальные контактные кольца. Моторы большей мощности предпочтительнее снабжать приспособлением для короткого замыкания колец и подъёма шёток. Благодаря этому приспособлению исключаются потери мощности на трение шёток.

Электродвижущие силы, индуцированные в обмотках асинхронного двигателя. Э. д. с., индуцированная в фазе обмотки статора в *вольтах*,

$$E_1 = 4,44 k_1 f_1 w_1 \Phi,$$

где  $k_1$  — обмоточный коэффициент обмотки статора;

$f_1$  — частота питающей сети в *гц*;

$w_1$  — число витков в одной фазе статора;

$\Phi$  — магнитный поток.

Э. д. с., индуцированная в обмотке ротора,

$$E_2 = 4,44 k_2 f_2 w_2 \Phi,$$

где  $k_2$  — обмоточный коэффициент обмотки ротора;

$f_2$  — частота тока в обмотке ротора в *гц*;

$w_2$  — число витков в одной фазе ротора.

Частота тока в роторе представляет переменную величину, зависящую от скольжения:

$$f_2 = s f_1,$$

где  $s$  — скольжение;

$f_1$  — частота тока в статоре.

При синхронной скорости ротора  $s = 0$ .

При неподвижном роторе  $s = 1$ .

Наибольшее значение индуцированной э. д. с. в роторе при пуске будет

$$E_2 = 4,44 k_2 f_1 w_2 \Phi.$$

Крутящий момент асинхронного двигателя в общем виде

$$M = C \Phi I_2 \cos \psi_2,$$

где  $\Phi$  — магнитный поток;

$I_2$  — ток в фазе ротора;

$\psi_2$  — угол сдвига фаз между током ротора и его э. д. с.

$$C = \frac{4,44 k_2 f_1 w_2 m_2}{9,81 \omega};$$

в последнем выражении

$m_2$  — число фаз ротора;

$k_2$  — обмоточный коэффициент обмотки ротора;

$w_2$  — число витков обмотки ротора;

$\omega$  — угловая скорость вращения потока;

иначе крутящий момент можно представить:

$$M = \frac{m_2 r_2 I_2^2}{s \omega_1},$$

где  $m_2$  — число фаз обмотки ротора;

$r_2$  — активное сопротивление одной фазы обмотки ротора;

$I_2$  — ток в обмотке ротора;

$s$  — скольжение;

$\omega_1$  — угловая частота тока в обмотке статора.

Это выражение показывает, что вращающий момент асинхронного двигателя пропорционален потерям на нагревание обмотки ротора.

**Пусковой вращающий момент асинхронного двигателя (при  $s = 1$ )**

$$M = \frac{m_2 r_2 I_2^2}{\omega_1}.$$

Из этого выражения следует, что для увеличения пускового вращающего момента необходимо увеличить сопротивление цепи ротора, что обычно достигается введением в цепь ротора активного сопротивления в виде пускового реостата. Следует иметь в виду, что, включая в цепь ротора сопротивление, тем самым уменьшают ток ротора. Поэтому увеличение пускового момента при увеличении активного сопротивления ротора происходит только до тех пор, пока увеличивается произведение  $m_2 r_2 I_2^2$ .

Наибольший пусковой вращающий момент получается тогда, когда индуктивное сопротивление цепи ротора равняется активному сопротивлению ротора. В силу этого подбор пускового сопротивления и отдельных ступеней должен быть сделан таким образом, чтобы в каждый отдельный момент активное сопротивление фазы ротора равнялось индуктивному сопротивлению фазы ротора.

**Максимальный момент.** При увеличении нагрузки двигателя скольжение увеличивается, а вместе с этим увеличивается и полное сопротивление обмоток ротора из-за увеличения частоты тока. Поэтому ток ротора перестаёт увеличиваться. Таким образом, существует некоторое значение скольжения, далее которого вращающий момент двигателя начинает уменьшаться и двигатель останавливается. Этот вращающий момент и называют максимальным, или опрокидывающим, моментом. В хорошо сконструированных асинхронных двигателях максимальный момент в несколько раз превосходит вращающий момент, соответствующий номинальной мощности.

**Круговая диаграмма асинхронного двигателя** даёт возможность произвести подробное исследование двигателя, не прибегая к нагрузке его.

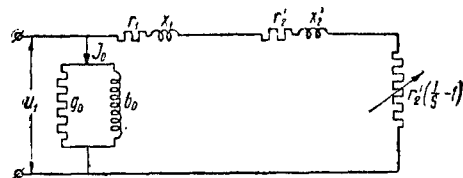
Простейшая круговая диаграмма основывается на эквивалентной схеме асинхронного двигателя (фиг. 14), где цепь с активной проводимостью  $g_0$  и реактивной проводимостью  $b_0$  обуславливают ток холостого тока  $I_0$ .

Если к этой цепи приложить постоянное по величине напряжение  $U_1$  и изменять активное сопротивление  $r_2$ , то геометрическим

местом векторов тока будет окружность. Для построения круговой диаграммы асинхронного двигателя достаточно двух опытов: а) опыта холостого хода и б) опыта короткого замыкания.

При опыте холостого хода определяют при нормальном напряжении  $U_1$  ток в статоре  $I_0$  и потребляемую мощность  $P_0$ . На основании этого

$$\cos \varphi_0 = \frac{P_0}{\sqrt{3} U_1 I_0}.$$



Фиг. 14. Схема замещения асинхронного двигателя

При опыте короткого замыкания необходимо затормозить двигатель полностью и при этом режиме измерить  $U_K$ ,  $I_K$ ,  $P_K$ . Отсюда

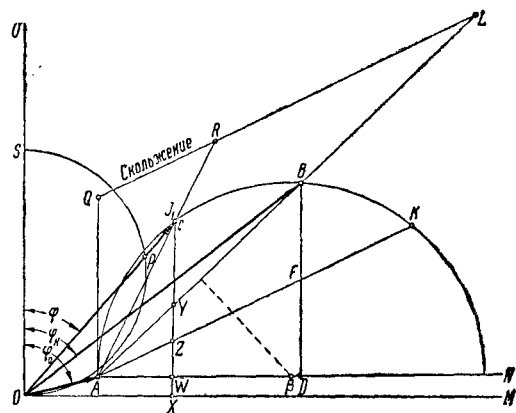
$$\cos \varphi_K = \frac{P_K}{\sqrt{3} U_K I_K}.$$

Для того чтобы при опыте короткого замыкания двигатель не перегружался, подведенное напряжение понижают так, чтобы

$$I_K \leq I_{\text{ном}}$$

Для построения диаграммы ток короткого замыкания надо пересчитать на нормальное напряжение  $U_K$ :

$$I'_K = I_K \frac{U_H}{U_K}.$$



Фиг. 15. Круговая диаграмма асинхронного электродвигателя

Построение круговой диаграммы производится следующим образом (фиг. 15). Задавшись направлением вектора напряжения  $\vec{OU}$ , строят под углом  $\varphi_0$  вектор тока холостого хода  $\vec{OA}$  и под углом  $\varphi_K$  — вектор тока  $\vec{I}'_K = \vec{OB}$ . Для нахождения центра окружности делят отрезок  $AB$  пополам и восстанавливают перпендикуляр. Пересечение

этого перпендикуляра с линией  $N$ , проведённой из точки  $A$ , перпендикулярно вектору  $OU$ , даёт точку  $\beta$ , которая и является центром искомой окружности.

Зная расположение окружности, можно выяснить расположение на круговой диаграмме: а) линии подведённой мощности  $OM$ , б) линии полезной мощности  $AB$ , в) линии вращающих моментов  $AK$ .

Линия полезной мощности получается путём соединения точек  $A$  и  $B$ .

Линии подведённой мощности  $OM$  получаются путём проведения из точки  $O$  прямой, перпендикулярной вектору  $OU$ .

Линия крутящих моментов  $AK$  может быть получена путём соединения между собой точек  $A$  и  $F$ , причём точку  $F$  находят делением отрезка  $BD$  на две части в отношении:

$$\frac{r_2}{r_1} = \frac{\text{сопротивление ротора}}{\text{сопротивление статора}}.$$

В большинстве случаев можно приближённо принять  $r_1 = r_2$ , тогда точку  $F$  можно найти путём деления пополам отрезка  $BD$ .

Определение отдельных величин, характеризующих работу асинхронного двигателя, производится следующим образом:

1. Подводимая активная мощность для какого-либо тока нагрузки  $I_1 = OC$  представится отрезком  $CX$ , так как  $CX$  — активная составляющая тока, пропорциональная мощности.

2. Полезная мощность при нагрузке двигателя током  $I_1$  будет представляться отрезком  $CY$ . Масштаб подводимой и полезной мощностей равен масштабу тока, умноженному на величину напряжения.

3. Крутящий момент при нагрузке двигателя током  $I_1$  представляется отрезком  $CZ$ .

4. Потери мощности при холостом ходе соответствуют отрезку  $XW$ .

5. Потери мощности на нагревание обмоток ротора соответствуют отрезку  $ZY$ .

6. Потери мощности на нагревание обмоток статора соответствуют отрезку  $ZW$ .

Для другого тока нагрузки все виды потерь мощности определяются аналогично.

Задаваясь целым рядом токов нагрузки, можно определить все величины, характеризующие работу асинхронного двигателя.

Для определения коэффициента мощности  $\cos \varphi$  на линии  $OS = 100$  мм, как на диаметре, строят окружность; отрезок  $OP$  будет соответствовать по числовой величине  $\cos \varphi$  для тока нагрузки  $I_1$ .

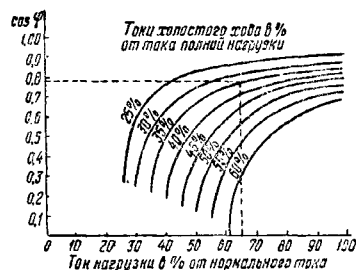
Для определения скольжения дополнительно нужно провести линию  $AQ \parallel OU$ , прямую  $QL$ , параллельную линии крутящих моментов  $AK$ . Если далее соединить конец вектора тока холостого хода с концом вектора тока  $I_1$  и продолжить эту линию до пересечения с линией  $QL$ , то скольжение будет равно:

$$s = \frac{QR}{QL}.$$

Если отрезок  $QL$  взять равным 100 единицам, то скольжение в процентах для каждой нагрузки будет представляться отрезком  $QR$ .

Опытное определение  $\cos \varphi$  при различных токах нагрузки двигателя наиболее просто производится по кривым (фиг. 16), где по оси ординат отложены значения  $\cos \varphi$ , а по оси абсцисс — ток нагрузки в процентах от нормального.

Каждая кривая построена для определённого процентного отношения тока холостого хода к нормальному току.



Фиг. 16. Кривые для опытного определения  $\cos \varphi$

Пример. Нормальный ток нагрузки электродвигателя равен 65 а, ток холостого хода равен 22 а, что составляет

$$\frac{22}{65} \cdot 100 = 34\%;$$

для нагрузки в 43 а, что составляет

$$\frac{43}{65} \cdot 100 = 63,4\%,$$

$\cos \varphi$  будет равен 0,78 (см. на оси ординат фиг. 16).

### Способы пуска асинхронных двигателей

Пуск в ход с переключателем со звезды на треугольник получил особо широкое распространение для двигателей сравнительно небольшой мощности, с короткозамкнутым ротором. Все три фазы статора сначала включаются звездой, после развёртывания двигателя статор пересоединяется переключателем в схему треугольник. При пуске с переключателем со звезды на треугольник пусковой ток двигателя при трогании с места уменьшается примерно в три раза.

Недостатком данной схемы является малый вращающий момент при трогании с места, так как

$$\frac{M_1}{M_1} = 3.$$

Пуск при помощи пускового реостата в цепи ротора является наиболее распространённым для моторов большой мощности. В этом случае ротор выполняется с фазной обмоткой; реостат через кольца включается последовательно в цепь роторной обмотки.

Величина пускового тока зависит от сопротивления реостата и может быть как угодно ограничена. Одновременно с этим увеличение активного сопротивления цепи ротора повышает начальный крутящий момент.

Пуск моторов через автотрансформатор даёт возможность уменьшить пусковой ток до каких угодно пределов. Благодаря применению автотрансформатора начальный момент уменьшается пропорционально линейному пусковому току, в то время как при поглощении части напряжения момент умень-

шается пропорционально квадрату пускового тока.

Асинхронный двигатель, имеющий ротор с двойной беличьей клеткой, имеет статор обычной конструкции. Ротор же этого двигателя имеет две короткозамкнутые обмотки, причём одна из них расположена на наружной поверхности, а другая внутри.

Наружная обмотка является пусковой обмоткой, а внутренняя — рабочей и имеет малое активное сопротивление.

При пуске в ход вращающееся магнитное поле с полной скоростью пересекает провода обеих обмоток. Магнитный поток при пуске в ход не заходит глубоко внутрь железа ротора, и при этих условиях работает главным образом наружная обмотка с большим активным сопротивлением. По мере раскручивания ротора частота и ток ротора уменьшаются, силовые линии магнитного потока заходят внутрь и начинают сильнее действовать на внутреннюю обмотку. Эти двигатели характеризуются пониженным пусковым током и повышенным пусковым моментом по сравнению с нормальными короткозамкнутыми двигателями. Двигатели с двойной беличьей клеткой часто неправильно называют двигателями Бушера, который предложил этот тип двигателей лишь в 1893 г. Первые ротор с двойной беличьей клеткой был предложен русским инженером М. О. Дольво-Добровольским в 1893 г.

### Одноякорные преобразователи

Устройство одноякорных преобразователей подобно устройству машин постоянного тока. Разница заключается только в том, что в машине постоянного тока обмотка якоря присоединена к коллектору, в одноякорном же преобразователе — к коллектору и к контактным кольцам. Одноякорный преобразователь обычно используется для преобразования переменного тока в постоянный и реже — наоборот.

Число контактных колец определяется числом фаз подводимого переменного тока. Полюсы одноякорного преобразователя возбуждаются постоянным током.

Соотношения между напряжениями и токами в одноякорном преобразователе. В одноякорном преобразователе постоянный ток отводится от той же самой обмотки, к которой подводится и переменный ток. Поэтому между величинами напряжения и тока, на сторонах постоянного и переменного тока, должны иметь место определённые соотношения.

Для  $m$ -фазного преобразователя эффективное значение переменной э.д.с. и значение э.д.с. постоянного тока находятся в следующем соотношении:

$$E_{\sim} = \frac{E}{\sqrt{2}} \sin \frac{\pi}{m},$$

где  $E_{\sim}$  — переменная э.д.с.;

$E$  — постоянная э.д.с.

Переменный ток (линейный) определяется:

$$I_{\sim} = \frac{2\sqrt{2}I}{m \cos \varphi}.$$

Таблица 6

Соотношения токов и напряжений в одноякорном преобразователе при  $\cos \varphi = 1$

Число фаз $m$	1	3	6	12
$\frac{E_{\sim}}{E}$	0,707	0,612	0,354	0,185
$\frac{I_{\sim}}{I}$	1,41	0,943	0,472	0,24

Регулирование напряжения одноякорного преобразователя не может быть произведено за счёт тока возбуждения, так как это вызывает лишь появление реактивного тока. Для изменения напряжения на стороне постоянного тока необходимо изменить подводимое напряжение к кольцам преобразователя. С этой целью могут быть использованы как включение дроссельной катушки, так и включение потенциал-регулятора.

Регулирование напряжения посредством дроссельной катушки основано на свойстве преобразователя работать с опережающим током при перевозбуждении и с отстающим током при недо возбуждении. Однако оно применимо тогда, когда пределы регулирования не слишком велики ( $\pm 8\%$ ), при больших пределах регулирования применяют потенциал-регулятор. Потенциал-регулятор представляет не что иное, как асинхронный двигатель с заторможенным ротором. Поворачивая ротор относительно статора, можно регулировать величину напряжения в очень широких пределах.

С изменением напряжения на кольцах преобразователя будет изменяться и напряжение на стороне постоянного тока.

Пуск и параллельная работа одноякорных преобразователей. Пуск одноякорных преобразователей может происходить как со стороны переменного, так и со стороны постоянного тока. Для пуска одноякорных преобразователей со стороны переменного тока в полюсные башмаки закладывается беличья клетка, при помощи которой одноякорный преобразователь пускается, как асинхронный двигатель с короткозамкнутым ротором. Для уменьшения пускового тока одноякорный преобразователь пускается через автотрансформатор. При асинхронном запуске одноякорного преобразователя обмотка возбуждения должна быть замкнута через сопротивление.

Одноякорный преобразователь может быть пущен со стороны постоянного тока (если он имеется), как шунтовой двигатель. При достижении синхронной скорости вращения он должен быть нормально синхронизирован с сетью.

### Ртутные выпрямители

Принцип действия ртутных выпрямителей. Действие ртутного выпрямителя основано на свойстве паров ртути, находящихся в разреженном пространстве, пропускать электрический ток между двумя электродами только в одном направлении, а именно от графитового электрода к ртутному. Графит является анодом, а ртуть — катодом.

Для ртутных выпрямителей малой мощности баллоны выполняются стеклянными, а для большой мощности — металлическими. Падение напряжения в выпрямителе колеблется от 13 до 30 в. Для того чтобы ртутный выпрямитель мог бесперебойно работать, необходимо, чтобы не прерывалось прохождение тока за оба полупериода. Поэтому при выпрямлении однофазного переменного тока выпрямитель снабжают двумя анодами, к которым и присоединяют переменное напряжение. При трёхфазном токе колбу снабжают тремя анодами, при шестифазном — шестью и т. д. Дуга устанавливается между общим катодом и тем анодом, который в данный момент имеет по отношению к катоду наибольшее напряжение. Чем больше число фаз, тем меньше колеблется напряжение выпрямленного тока.

Включение индуктивности в цепь выпрямленного тока сглаживает колебания тока и напряжения. Расстояние между анодами и катодом должно быть таково, чтобы между катодом и анодом не мог получиться обратный разряд за ту половину периода, когда катод имеет по отношению к аноду положительный потенциал и напряжение между ними равно отрицательному максимуму. Обратный разряд ведёт к образованию дуги между анодами, т. е. к короткому замыканию выпрямителя. Для избежания обратного зажигания необходимо: а) делать достаточно большое расстояние между анодами и между анодами и катодом и б) следить, чтобы анод не нагревался.

Надёжность действия выпрямителя зависит главным образом от степени разрежения пространства, в котором заключены электроды, и от температуры ртути и ртутных паров. Вакуум в рабочем пространстве вы-

жена конденсационная камера, где пары ртути конденсируются и свободно стекают обратно к катоду. Над поверхностью ртути к колбе приварены специальные стеклянные отростки (анодные рукава), и в них встроены графитовые цилиндрические аноды, имеющие, как и у катода, молибденовые выводы из колбы. Количество анодов зависит от числа фаз подводимого переменного тока. Длина анодных рукавов зависит от напряжения выпрямленного тока. Для того чтобы дуга в колбе не гасла даже в моменты прекращения потребления выпрямленного тока, колба снабжается, кроме рабочих, ещё двумя вспомогательными анодами (анодами независимого возбуждения), расположенными в специальных отростках. Для зажигания дуги в колбе устроен специальный отросток, который является анодом в момент зажигания выпрямителя. Этот анод зажигания имеет, как и другие аноды, молибденовый вывод и расположен таким образом, что при небольшом наклоне колбы ртуть из отростка частично переливается в чашку с ртутью катода и создаёт электрическую замкнутую цепь. В результате разрыва цепи, при возвращении колбы в первоначальное положение, образуется дуга, создающая пары ртути. Остаточное давление внутри колбы после откачки из неё воздуха составляет от 0,001 до 0,005 мм рт. ст.

Ртутные выпрямители в металлических сосудах строятся средних и больших мощностей и находят себе применение как в промышленных установках, так и для питания трамваев и электрифицированных железных дорог. Изготавливаемые заводами СССР металлические ртутные выпрямители (табл. 7 и 8) строятся для питания от сети трёхфазного тока.

Таблица 7

Ртутные выпрямители в металлических сосудах, изготавливаемые заводами СССР

Рабочее напряжение в в	РВ-5					РВ-10					РВ-20				
	выпрямленный ток в а	мощность трансформаторов в кка	Вес в кг			выпрямленный ток в а	мощность трансформаторов в кка	Вес в кг			выпрямленный ток в а	мощность трансформаторов в кка	Вес в кг		
			без воды	с водой				без воды	с водой				без воды	с водой	
230	600	165	995	1 070	1 100	305	1 100	1 175	2 000	565	2 030	2 280	2 030	2 280	
460	600	320	995	1 070	1 100	590	1 100	1 175	2 000	1 400	2 030	2 280	2 030	2 280	
600	500	345	995	1 070	1 000	560	1 100	1 175	2 000	1 400	2 030	2 280	2 030	2 280	
1 650	—	—	—	—	—	—	—	—	—	750	1 380	2 030	2 030	2 280	
3 300	—	—	—	—	—	—	—	—	—	500	1 870	2 030	2 030	2 280	

прямителей большой мощности создаётся и поддерживается за счёт вакуумных насосов, входящих в комплект устройства выпрямителя.

Нагревание ртути в начале действия выпрямителя с целью её испарения осуществляется при помощи вспомогательной электрической дуги.

Конструкция выпрямителей в стеклянных колбах. Стеклянная колба и вся аппаратура выпрямителя заключаются в металлический шкаф. Основной частью выпрямителя является стеклянная колба, нижняя узкая часть которой наполнена ртутью, служащей катодом. Над ртутью катода располо-

Для типов РВ-5 и РВ-10 это питание осуществляется через трансформатор, преобра-

Таблица 8

К. п. д. металлических ртутных выпрямителей в % при различных нагрузках

Напряжение в в	Нагрузка			
	1/4	2/4	3/4	4/4
230	85—87	87—89	87—89	85—87
460	88—89	90—92	90—92	89—91
600	90—92	92—94	92—94	91—93
1 650	92,5—94,5	94—96	94—96	93—95
3 300	93—95	94,5—96,5	94,5—96,5	94—96

зующий трёхфазный ток в шестифазный. Для типа РВ-20 применяется или такой же трансформатор с дополнительно включёнными в каждую фазу анодными реакторами или трансформатор, преобразующий трёхфазный ток в двенадцатифазный.

### МЕТОДЫ ИЗМЕРЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРЫ НАГРЕТЫХ ЧАСТЕЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ МАШИН

Нагревание электрических машин как при продолжительной, так и при повторно-кратковременной работе определяется разностью температур нагретой машины и охлаждающей среды.

Эта разность температур называется превышением температуры. Под температурой охлаждающей среды для машин с естественным охлаждением понимают температуру окружающего воздуха.

**Метод сопротивления.** Измеряются сопротивления холодной обмотки  $R_1$ , сопротивление обмотки, нагретой при работе,  $R_2$ , температура холодной машины  $t_1$ , температура охлаждающей среды  $t_a$ .

Превышение температуры в машинах, предназначенных для продолжительной работы, можно определить по формуле:

$$t = \frac{(R_2 - R_1)(235 + t_1)}{R_1} - (t_a - t_1).$$

Температура охлаждающей среды измеряется на расстоянии 1—2 м от машины на высоте середины машины.

**Метод термометра.** Измерение температуры посредством термометра должно производиться спиртовым термометром.

В тех случаях, когда появление токов Фуко в ртутном термометре исключено, можно пользоваться ртутным термометром.

Для лучшей теплопроводности шарик с ртутью обвёртывают станиолью и сверху прикрывают ватой или другим плохо проводящим тепло материалом.

Всякие покрытия и обкладки, имеющиеся на машинах в нормальных условиях работы, во время испытания на нагрев не должны сниматься.

Для измерения температур применяется по крайней мере два спиртовых термометра. Температура считается установившейся, если её повышение за 1 час не превосходит  $1^\circ\text{C}$ .

Пределы допускаемого превышения температуры частей машин при предельной допустимой температуре охлаждающего воздуха  $+35^\circ\text{C}$  (ГОСТ 183-41) приведены в табл. 9.

**Изоляция машин.** Перед пуском должны быть подвергнуты сушке все новые машины, а также машины, находящиеся долгое время в бездействии.

Машины мощностью до 50 квт и напряжением до 500 в могут быть включены без сушки, если сопротивление их изоляции удовлетворяет нормам табл. 10 и 11.

Таблица 9

Допускаемое превышение температуры частей электрических машин

Наименование частей машин	Изоляция класса				Наименование частей машин	Изоляция класса			
	А		В			А		В	
	Метод измерения температуры					Метод измерения температуры			
	термометром	по изменению сопротивления	термометром	по изменению сопротивления		термометром	по изменению сопротивления	термометром	по изменению сопротивления
в °C				в °C					
Обмотки машин переменного тока мощностью до 5 000 квт . . . . .	60	65	75	85	Неизолированные обмотки, непрерывно замкнутые на себя, железные сердечники и другие части, не соприкасающиеся с обмотками . . . . .  Железные сердечники и другие части, соприкасающиеся с обмотками . . . . .  Контактные кольца как защищенные, так и незащищенные . . . . . Коллекторы . . . . . Подшипники скольжения . . . . . Подшипники качения . . . . .	Превышение температур этих частей ни в коем случае не должно достигать величины, которая создавала бы возможность повреждения изолирующих или других смежных материалов  65° C, если изоляция обмоток принадлежит к классу А; 85° C, если изоляция обмоток принадлежит к классу В и при этом для изоляции листов активного железа применен соответствующий лак			
Обмотки возбуждения (многослойные) машин постоянного тока и переменного тока с возбуждением постоянным током .	60	65	75	85					
Якорные обмотки, соединенные с коллектором . . . . .	60	65	75	85					
Однорядные обмотки возбуждения, обмотки возбуждения трубогенераторов и стержневые обмотки роторов асинхронных машин при числе стержней не более двух .	—	70	—	95		70	—	90	—
Изолированные обмотки, непрерывно замкнутые на себя . . . . .	65	—	85	—		65	—	85	—
						45	—	45	—
						60	—	60	—



Испытание электрической прочности изоляции обмоток (по ГОСТ 183-41)

Таблица 10

Машина или её части	Действующее значение испытательного напряжения	Машина или её части	Действующее значение испытательного напряжения
Машина мощностью до 1 кВт или 1 кВа, а также все машины на номинальное напряжение, меньшее или равное 24 в	500 в+двойное номинальное напряжение	2. Если машина предназначена для пуска иным способом, чем со стороны многофазного тока:	
Машины мощностью от 1 кВт или 1 кВа до 3 кВт или 3 кВа включительно при номинальном напряжении свыше 24 в	1 000 в+двойное номинальное напряжение	а) синхронные двигатели, пускаемые пусковыми двигателями	10-кратное номинальное напряжение возбуждения, минимум 1 000 в 1 000 в+двойное номинальное напряжение возбуждения, минимум 1 500 в
Машины мощностью больше 3 кВт или 3 кВа при напряжении свыше 24 в	1 000 в+двойное номинальное напряжение, минимум 1 500 в	б) однокорные преобразователи, пускаемые пусковыми двигателями или со стороны постоянного тока	
Машины мощностью от 10 000 кВт или кВа и выше:		Возбудители для электрических машин всех типов	1 500 в+двойное номинальное напряжение, минимум 1 500 в
на номинальное напряжение до 3 000 в	1 000 в+двойное номинальное напряжение	Вторичные обмотки (ротор асинхронных двигателей), не находящиеся в непрерывном короткозамкнутом состоянии:	
свыше 3 000 до 6 000 в	2,5-кратное номинальное напряжение	а) для двигателей не-реверсивных	1 000 в+двукратное номинальное напряжение роторной обмотки
свыше 6 000 в	3 000 в+двойное номинальное напряжение	б) для двигателей реверсивных с применением торможения противовото-мом	1 000 в+четырёхкратное номинальное напряжение роторной обмотки
Обмотки возбуждения синхронных генераторов, у которых номинальное возбуждение не превышает 750 в	10-кратное номинальное напряжение возбуждения, минимум 1 500 в, максимум 3 500 в	Собранные в группы машины или аппараты	Если испытанию подвергается группа, собранная из нескольких новых, только что установленных и соединённых вместе аппаратов, из которых каждый проходил через соответствующее испытание электрической прочности, то испытательное напряжение не должно превышать 85% испытательного напряжения той машины или того аппарата, у которого это напряжение ниже всего
Обмотки возбуждения синхронных двигателей и однокорных преобразователей:		Крановые двигатели постоянного тока	1 000 в+тройное номинальное напряжение
1. Если машина предназначена для непосредственного пуска со стороны многофазного тока:			
а) с обмоткой возбуждения, замкнутой на сопротивление или на источник своего питания	10-кратное номинальное напряжение возбуждения, минимум 1 500 в		
б) с разомкнутой обмоткой возбуждения, подразделённой на секции	1 000 в+10-кратное номинальное напряжение возбуждения минимум 1 500 в		
в) с разомкнутой обмоткой возбуждения, не-секционированной	1 000 в+20-кратное номинальное напряжение возбуждения, минимум 1 500 в, максимум 8 000 в		

Наименьшие допустимые сопротивления изоляции машин<sup>1</sup>

Таблица 11

Наименование машин и их частей	После сушки при t=60° С	в эксплуатации <sup>2</sup>	Примечание
Машины постоянного тока . . . . .	1 мгом	0,1—0,25 мгом	Нормы завода «Электросила»
Статоры машин переменного тока при напряжении до 500 в включительно . .	1 в	0,5 мгом	То же
Статоры машин переменного тока при напряжении 2,3 и 6 кВ . . . . .	1 мгом/кВ	0,3 мгом/кВ	» »
Роторы асинхронных машин . . . . .	1 мгом/кВ, но не ниже 0,5 мгом	0,3 мгом/кВ, но не ниже 0,15 мгом	» »
Роторы синхронных машин . . . . .	0,5 мгом	0,15 мгом	» »
Статоры синхронных генераторов вместе с кабелями . . . . .	15—20 мгом	1 мгом/кВ	Правила технической эксплуатации электростанций и сетей, § 481 и 482
Роторы синхронных генераторов со всей цепью возбуждения . . . . .	1—2 мгом	0,5 мгом	

<sup>1</sup> Сопротивление изоляции обмоток машин напряжением менее 500 в замеряется меггером на 500 в, а обмоток напряжением 500 в и выше — меггером 1 000 в.

<sup>2</sup> В случае падения сопротивления изоляции обмотки в эксплуатации ниже допустимой величины необходимо: очистить обмотку от грязи, протереть бензином, толуолом или холодным четырёххлористым углеродом (CCl<sub>4</sub>), просушить и покрыть лаком.

## ТЕХНИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ МАШИН

Таблица 12

Машины постоянного тока, открытые с вентиляцией, типа ПН

Тип	Двигатель					Генератор				
	напряже- ние в в	полезная мощность в кв	потребляе- мая мощ- ность в кв	число об/мин.	Ток в а	напряже- ние в в	полезная мощность в кв	потреб- ляемая мощность в кв	число об/мин.	ток в а
ПН-10	110	1,0 1,47 2,0	1,33 1,94 2,55	1 410 2 000 2 825	12,1 17,6 23,2	115	1,25 1,82 —	1,65 2,35 —	2 000 2 800 —	10,9 15,8 —
	220	1,0 1,47 2,0	1,38 1,94 2,55	1 410 2 000 2 825	6,1 8,8 11,6	230	1,25 1,82 —	1,65 2,35 —	2 000 2 800 —	5,5 7,9 —
ПН-17,5	110	1,75 2,55	2,25 3,2	1 420 2 100	20,3 29,0	115	2,15 3,15	2,7 4,0	2 000 2 800	18,7 27,4
	220	1,75 2,55 3,5	2,25 3,2 4,35	1 420 2 100 2 850	10,1 14,5 19,7	230	2,15 3,15 —	2,7 4,0 —	2 000 2 800 —	9,95 13,7 —
ПН-28,5	110	2,85 4,2	3,6 5,25	1 420 2 100	32,8 47,5	115	3,45 4,8	4,3 5,8	2 000 2 800	30,0 41,7
	220	2,85 4,2 5,3	3,6 5,2 6,5	1 420 2 100 2 850	16,2 23,4 29,4	230	3,45 4,8 —	4,3 5,8 —	2 000 2 800 —	15,0 20,8 —
ПН-45	110	2,0	2,75	800	24,7	115 115/160 115	2,6	3,5	1 200 1 430 1 400	22,6 22,6/16,3 28,7
		2,5	3,3	980	29,9	115/160 115	3,3	4,3	1 650 2 000	28,7/20,6 47
		4,5	5,6	1 430	51	115	5,4	6,6	2 000	—
	220	4,5 6,6	5,5 8,0	1 430 2 100	25 36	230	5,4 7,5	6,6 9,0	2 000 2 800	23,5 32,6
ПН-68	220	6,8 10,0	8,2 11,8	1 440 2 100	37,2 53,5	230 —	8,0 —	9,6 —	2 000 —	34,8 —
ПН-65	220	10,6	12,3	1 440	56,0	230	12,5	15	2 000	54,4
ПН-100	110	4,0	5,5	460	50	— 115	— 8,3	— 10,6	— 980	— 72
		6,8	9,0	700	81,5	115/160 115	10,5	12,6	1 200 1 200	72/52 91
		8,7	11,0	850	100	115/160 115	12	14,3	1 440 1 300	91/66 104
		10	12,3	950	112	115/160	—	—	1 620	104/75
ПН-100	220	4,2	5,65	560	25,8	— 230	— 8,3	— 10,6	— 980	— 36
		6,8	8,9	700	40,5	230/320 230	10,5	12,6	1 200 1 200	36/22 45,5
		8,7	10,8	850	49	230/320 230	12	14,3	1 400 1 300	45,5/33 52
		10	12,2	950	55,5	230/320 230	19,4	22,7	1 620 1 830	52/37,5 84,5
		16,7	19,8	1 430	90	—	—	—	—	—
		—	—	—	—	—	—	—	—	—
ПН-145	110	6,0	7,9	480	72	— 115	— 12	— 14,7	— 950	— 104
		10	12,5	700	114	115/160	—	—	1 200	104,75
	220	6,0	7,8	480	35,5	—	—	—	—	—
		10,0	12,3	700	56	—	12	14,7	950	52
		13,0	15,6	870	71	230	15,6	18,6	1 200 1 200	52/37,5 68
		14,5	17,2	950	78	230/320	17	20	1 400 1 285	68/49 74
		23	26,6	1 430	121	—	27,5	31,7	1 600 1 810	74/53 120
		—	—	—	—	—	—	—	—	—
		—	—	—	—	—	—	—	—	—
		—	—	—	—	—	—	—	—	—
ПН-205	110	8	10,2	480	92,5	— 115	— 17	— 20,4	— 980	— 148
		14	16,8	715	153	115/160 115	22,5	26,5	1 220 1 200	148/106 196
		—	—	—	—	115/160	—	—	1 450	196/140
	220	8	10	480	46,6	—	—	—	—	—
		14	16,7	715	76	—	17	20,4	980 1 220 1 200	74 74/53 98
		14	—	—	—	—	22,5	26,5	1 450	98/70

Продолжение табл. 12

Тип	Двигатель					Генератор				
	напряже- ние в в	полезная мощность в кв	потреб- ляемая мощность в кв	число об/мин.	Ток в а	напряже- ние в в	полезная мощность в кв	потреб- ляемая мощность в кв	число об/мин.	Ток в а
ПН-205	220	20,5	25	950	109	230	24	28	1 265	104
						230/320			1 550	104/75
		26	29	1 150	126			35	1 450	132
		33,5	40	1 430	174	230		44	1 780	132/95
ПН-200	110	12	15	480	136	—	—	—	—	—
		19	22,5	715	205	115/160		27	970	200
									1 200	144
	220	12	14,7	480	67	—	—	—	—	—
		19	22,5	715	102	—		27	970	100
									1 200	72
		27	31,2	900	142	—	31,5	36,6	1 200	131
									1 450	98,5
		29	33,2	950	151	230/320	33	37,7	1 245	143
									1 540	103
		36	41	1 160	186	—	42	47,6	1 450	183
									1 780	131
		46,5	52,31	1 430	238	230	53	60,5	1 760	230

Таблица 13

## Трансформаторы

Тип транс- форматора	Номинальная мощность	Верхний пред- дел номи- нального на- пряжения обмоток		Потери		Коэффициент по- лезного действия при $\cos \varphi_1 = 1$		Изменение вто- ричного напря- жения при номи- нальной нагруз- ке и $\cos \varphi_2 = 1$	Напряжение ко- роткого замыка- ния в % от но- минального на- пряжения	Ток холостого хода в % от но- минального тока
		ВН	НН	холостого хода при номиналь- ном на- пряжении	короткого замыка- ния при номиналь- ной на- грузке	при номи- нальной нагрузке	при $\frac{1}{2}$ номи- нальной нагрузки			
						%	%			
кВа	кВ	кВ	вт	вт	%	%	%	%		
ТМ-10/6	10	6	0,400	105	335	95,79	96,36	3,45	5,5	10
ТМ-20/6		6	0,400	180	600	96,25	96,81	3,1	5,5	9
ТМ-20/10	20	10	0,400	220	600	96,06	96,43	3,1	5,5	10
ТМ-50/6		6,3	0,400	350	1 325	96,75	97,32	2,75	5,5	7
ТМ-50/10	50	10	0,400	440	1 325	96,59	97,01	2,75	5,5	8
ТМ-100/6		6,3	0,525	600	2 400	97,09	97,66	2,5	5,5	6,5
ТМ-100/10	100	10	0,525	730	2 400	96,96	97,41	2,5	5,5	7,5
ТМ-100/35		35	0,525	900	2 400	96,81	97,09	2,6	6,5	8
ТМ-180/6		6,3	0,525	1 000	4 000	97,30	97,83	2,35	5,5	6
ТМ-180/10	180	10	0,525	1 200	4 100	97,14	97,59	2,4	5,5	7
ТМ-180/35		35	0,400	1 500	4 100	96,97	97,27	2,45	6,5	8
ТМ-320/6		6,3	0,525	1 600	6 070	97,66	98,09	2,05	5,5	6
ТМ-320/10	320	10	0,525	1 900	6 200	97,54	97,89	2,05	5,5	7
ТМ-320/35		35	6,3	2 300	6 200	97,41	97,65	2,15	6,5	7,5
ТМ-560/10		10	0,525	2 500	9 400	97,87	98,19	1,8	5,5	6
ТМ-560/35	560	10	6,3	3 350	9 400	97,77	98,00	1,8	5,5	6,5
ТМ-560/35		35	10,5	3 350	9 400	97,77	98,00	1,85	6,5	6,5
ТМ-750/10	750	10	0,525	4 100	11 900	97,91	98,15	1,73	5,5	6
ТМ-1000/10		10	6,3	4 900	15 000	98,05	98,30	1,64	5,5	5
ТМ-1000/35	1 000	35	10,5	5 100	16 000	98,03	98,26	1,7	6,5	5,5
ТМ-1800/10		10	6,3	8 000	24 000	98,25	98,47	1,47	5,5	4,5
ТМ-1800/35	1 800	35	10,5	8 300	24 000	98,24	98,43	1,53	6,5	5
ТМ-3200/10		10	6,3	11 000	37 000	98,52	98,75	1,3	5,5	4
ТМ-3200/35	3 200	38,5	10,5	11 500	37 000	98,51	98,72	1,4	7,0	4,5
ТМ-5600/10		10	6,3	18 000	56 000	98,70	98,87	1,11	5,5	4
ТМ-5600/35	5 600	38,5	10,5	18 500	57 000	98,61	98,84	1,3	7,5	4,5

Таблица 14

## Синхронные генераторы серии МС-320

Тип	Напряжение в в	Мощность при $\cos \varphi = 0,8$ в кВт	Мощность в ккал	Ток статора в а	Скорость вращения в об/мин.	К. п. д. при $\cos \varphi = 0,8$ в %	Данные воз- буждения		Тип возбуди- теля
							$U_{\text{в}}$ в в	$I_{\text{в}}$ в а	
МС-321-6/6	3 150	640	860	147	1 000	93,9	40	328	МП-543-1/5
	6 300	600	750	69,0	1 000	93,4	40	328	МП-543-1/5
МС-321-7/6	3 150	740	925	170	1 000	94,2	40	345	МП-543-1/5
	6 300	720	900	83,0	1 000	94,0	40	345	МП-543-1/5
МС-321-8/6	3 150	880	1 100	202	1 000	94,7	40	365	МП-543-1/5
	6 300	840	1 050	96,4	1 000	94,5	40	365	МП-543-1/5
МС-321-10/6	3 150	1 120	1 400	257	1 000	95,2	40	425	МП-543-1/5
	6 300	1 040	1 300	120	1 000	94,9	40	425	МП-543-1/5
МС-321-5/8	3 150	400	500	91,9	750	92,6	55	197	МП-543-1/4
	6 300	350	435	39,8	750	91,6	55	197	МП-543-1/4
МС-321-6/8	3 150	480	600	110	750	93,3	55	225	МП-543-1/4
	6 300	420	525	48,1	750	92,7	55	225	МП-543-1/4
МС-321-7/8	3 150	560	700	128	750	93,6	55	237	МП-543-1/4
	6 300	490	610	56,0	750	93,0	55	237	МП-543-1/4
МС-321-8/8	3 150	640	800	147	750	94,1	55	248	МП-543-1/4
	6 300	560	700	64,4	750	93,7	55	248	МП-543-1/4
МС-321-5/10	3 150	310	385	79,5	600	92,0	55	213	МП-543-2/4
	6 300	310	385	85,3	600	91,6	55	213	МП-543-2/4
МС-321-6/10	3 150	360	450	82,5	600	92,4	55	217	МП-543-2/4
	6 300	360	450	41,3	600	92,2	55	217	МП-543-2/4
МС-321-7/10	3 150	415	520	95,5	600	92,9	55	226	МП-543-2/4
	6 300	415	520	47,8	600	92,7	55	226	МП-543-2/4
МС-321-8/10	3 150	500	625	115	600	93,4	55	240	МП-543-2/4
	6 300	500	625	57,4	600	93,1	55	240	МП-543-2/4
МС-321-5/12	3 150	240	300	55,0	500	91,2	55	187	МП-544-1/2
	6 300	300	375	68,7	500	92,0	55	195	МП-544-1/2
МС-321-6/12	3 150	300	375	34,4	500	91,5	55	195	МП-544-1/2
	6 300	350	440	80,7	500	92,4	55	206	МП-544-1/2
МС-321-7/12	3 150	350	440	40,4	500	92,0	55	206	МП-544-1/2
	6 300	400	500	91,7	500	92,7	55	244	МП-544-1/2
МС-321-8/12	3 150	400	500	45,9	500	92,4	55	244	МП-544-1/2
	6 300	400	500		500		55	244	МП-544-1/2
МС-321-4/16	525	144	180	198	375	88,8	65	123	МП-544-1/2
	3 150	144	180	33,0	375	88,8	65	123	МП-544-1/2
МС-321-5/16	525	180	225	245	375	89,9	65	126	МП-544-1/2
	3 150	180	225	41,3	375	89,9	65	126	МП-544-1/2
МС-321-6/16	525	220	275	302	375	90,7	65	145	МП-544-1/2
	3 150	220	275	50,5	375	90,7	65	145	МП-544-1/2

Таблица 15

## Взрывобезопасные рудничные асинхронные электродвигатели трёхфазного тока серии МА с фазовым ротором

Тип электродвигателя	Мощность на валу в кВт	При номинальной нагрузке			$E_{\text{ротора}}$ в в	$I_{\text{ротора}}$ в а	$M_{\text{макс}}$ $M_{\text{ном}}$	Вес без шки- ва в кг	Моховой мо- мент $CD^2$ в кг·м²
		об/мин.	К. п. д. в %	$\cos \varphi$					
МА-145-1/4	40	1 470	89,6	0,88	144	169	2,5	600	6,4
МА-145-2/4	53	1 475	91,0	0,88	187	172	2,5	655	17,4
МА-146-1/4	72	1 480	91,2	0,85	233	193	2,5	810	11,1
МА-146-2/4	95	1 480	92,2	0,87	287	200	2,5	920	13,0
МА-145-1/6	28,0	975	89,0	0,86	114	148	2,3	600	17,2
МА-145-2/6	33,0	975	90,0	0,87	146	157	2,3	655	8,5
МА-146-1/6	50,0	980	91,3	0,86	171	177	2,5	810	14,9
МА-146-2/6	65,0	980	92,0	0,86	220	180	2,5	920	17,7
МА-145-1/8	21,0	720	86,8	0,80	100	128	2,2	600	7,2
МА-145-2/8	28,0	730	88,3	0,79	133	123	2,5	650	8,5
МА-146-1/8	37,0	735	91,0	0,81	150	150	2,5	810	16,7
МА-146-2/8	50,0	735	92,0	0,80	199	152	2,5	920	20,1

Таблица 16

Взрывобезопасные рудничные асинхронные электродвигатели трёхфазного тока серии МА с короткозамкнутым ротором

Тип электродвигателя	Мощность на валу в кВт	При номинальной нагрузке			$I_{пуск}$ $I_{ном}$	$M_{пуск}$ $M_{ном}$	$M_{макс}$ $M_{ном}$	Вес без шкива в кг	Маховой момент $CD^2$ в кг·см <sup>2</sup>
		об/мин.	к. п. д. в %	cos φ					
МА-142-1/4	5,5	1455	86,0	0,84	5,5	2,0	2,3	138	0,31
МА-142-2/4	8,0	1465	88,7	0,84	6,5	2,0	2,5	158	0,39
МА-143-1/4	11,4	1470	88,1	0,85	5,5	2,0	2,1	213	1,07
МА-143-2/4	16,0	1475	90,0	0,85	6,0	2,2	2,4	248	1,41
МА-144-1/4	21,5	1475	90,4	0,85	6,5	2,2	2,2	310	2,77
МА-144-2/4	29,0	1480	91,3	0,85	7,0	2,4	2,2	370	3,42
МА-145-1/4	40,0	1470	89,8	0,865	6,0	1,7	2,0	510	5,00
МА-145-2/4	53,0	1475	91,0	0,87	6,5	1,7	2,2	565	6,00
МА-146-1/4	72,0	1485	91,3	0,83	6,5	2,1	2,1	720	9,4
МА-146-2/4	95,0	1485	92,4	0,845	6,5	2,1	2,1	820	11,4
МА-142-1/6	3,8	965	83,8	0,77	5,0	1,7	2,1	138	0,36
МА-142-2/6	5,5	970	86,6	0,78	5,6	1,7	2,2	158	0,46
МА-143-1/6	8,0	975	87,0	0,78	5,0	1,7	2,0	213	1,31
МА-143-2/6	11,0	980	89,2	0,78	5,5	1,9	2,1	248	1,67
МА-144-1/6	15,0	980	89,5	0,80	6,0	2,1	2,4	310	3,56
МА-144-2/6	20,5	985	90,7	0,80	6,0	2,2	2,5	370	4,54
МА-145-1/6	28,0	970	89,0	0,85	5,5	1,7	1,9	510	5,8
МА-145-2/6	38,0	975	90,2	0,85	5,5	1,7	2,0	565	7,0
МА-146-1/6	50,0	980	91,6	0,85	6,0	1,8	2,2	720	12,4
МА-146-2/6	65,0	985	92,0	0,85	6,0	2,0	2,3	820	15,2
МА-142-1/8	2,7	725	82,3	0,68	5,0	1,7	2,1	138	0,35
МА-142-2/8	4,0	725	85,0	0,70	5,0	1,7	2,1	158	0,43
МА-143-1/8	5,8	730	86,2	0,74	5,5	1,9	2,3	213	1,5
МА-143-2/8	8,0	730	88,0	0,75	6,0	2,0	2,5	248	1,95
МА-144-1/8	11,0	735	86,0	0,75	5,5	1,9	2,1	310	4,5
МА-144-2/8	15,0	735	88,2	0,74	6,0	2,2	2,3	370	5,84
МА-145-1/8	21,0	720	87,0	0,80	5,5	1,9	2,0	510	6,2
МА-145-2/8	28,0	725	88,3	0,79	6,0	2,0	2,2	565	7,5
МА-146-1/8	37,0	730	90,0	0,79	5,5	2,0	2,1	720	14,3
МА-146-2/8	50,0	735	91,4	0,79	5,5	2,0	2,1	820	17,7

Примечания. 1. Табличные значения рабочих и пусковых характеристик действительны с допуском по ГОСТ 20020.

2. Крутящий момент двигателей МА-140 в процессе разгона не ниже 0,7—0,75 начального пускового момента.

Асинхронные электродвигатели трёхфазного тока серий АД, АДФ, АДФЛ

Тип электродвигателя АД, АДФ и АДФЛ	Номинальная мощность на валу в кВт	скорость вращения в об/мин.	При номинальной нагрузке						Вес в кг	Маховой момент ротора в кг·см²	Тип электродвигателя АД, АДФ и АДФЛ	Номинальная мощность на валу в кВт	скорость вращения в об/мин.	При номинальной нагрузке						Вес в кг	Маховой момент ротора в кг·см²
			к. п. д. в %	cos φ	$I_{пуск}$ $I_{ном}$	$M_{пуск}$ $M_{ном}$	$M_{макс}$ $M_{ном}$	к. п. д. в %						cos φ	$I_{пуск}$ $I_{ном}$	$M_{пуск}$ $M_{ном}$	$M_{макс}$ $M_{ном}$				
21/2	1,6	2925	81,0	0,86	8,0	1,3	2,6	27	195	42/4	5,8	1445	86,0	0,85	7,0	1,2	2,0	65	1445		
22/2	2,2	2925	83,4	0,87	8,0	1,3	2,6	30	215	51/4	7,8	1455	86,0	0,86	7,5	1,2	2,5	78	2000		
31/2	3,2	2925	84,0	0,88	8,0	1,3	2,6	42,5	410	52/4	10,0	1455	87,0	0,86	8,0	1,2	2,5	88,5	2220		
32/2	4,2	2925	85,0	0,88	9,0	1,3	2,6	46	455	21/6	0,55	940	71,0	0,68	4,0	0,9	1,8	24	230		
41/2	5,1	2935	85,0	0,88	8,0	1,3	2,4	60	923	22/6	0,85	940	75,0	0,70	4,0	0,9	1,8	24,5	275		
42/2	7,2	2935	86,0	0,89	7,5	1,3	2,4	67,5	1030	31/6	1,2	930	78,0	0,73	5,0	0,9	1,8	35	635		
51/2	10,0	2935	86,0	0,89	7,5	1,3	2,2	86	1875	32/6	1,8	930	80,0	0,75	5,0	0,9	1,8	42,5	765		
52/2	12	2935	86,0	0,89	7,5	1,3	2,2	94	2015	41/6	2,7	960	82,0	0,77	5,0	0,9	2,0	56	1615		
21/4	1,0	1425	78,0	0,79	5,0	1,1	1,8	25	235	42/6	3,5	960	83,0	0,78	6,0	0,9	2,0	64	1875		
22/4	1,5	1425	80,0	0,81	5,0	1,1	1,8	29	280	51/6	5,0	970	84,0	0,80	6,0	0,9	2,0	79	3505		
31/4	2,2	1440	82,0	0,82	5,5	1,1	1,8	35	435	52/6	6,0	970	85,0	0,81	6,0	0,9	2,0	89	4010		
32/4	3,2	1440	84,5	0,83	6,0	1,1	1,8	41,5	530	51/8	2,8	720	80,0	0,71	4,0	1,0	1,8	79	3505		
41/4	4,3	1445	85,0	0,84	6,5	1,2	2,0	56	1175	52/8	3,5	720	81,0	0,73	4,0	1,0	1,8	88,5	4010		

Таблица 18

Асинхронные электродвигатели АМ-6  
Фазовый ротор 1 500 синхр. об/мин.

Тип электродвигателя	Номинальное напряжение в в	Номинальная мощность на валу в кел	При номинальной нагрузке					Данные ротора		Потребное количество охлаждающего воздуха в м³/сек	Маховой момент ротора в кг·м²	Вес двигателя без шкива и муфты в кг	Тип реостата для пуска под нагрузкой	
			скорость вращения в об/мин.	сила тока в статоре в а	к. п. д. в %	cos φ	$\frac{M_{\max}}{M_{\text{ном}}}$	напряжение в в	сила тока в а				1/2 от номинальной	1/1 от номинальной
АМ6-114-4	220/380	115	1 460	380/220	91	0,88	2,2	175	400	0,5	16	1 070	РМ-1651	РМ-1651
АМ6-115-4		135	1 470	410/255	92	0,88	2,2	214	390	0,55	18	1 180	РМ-1651	РМ-1651
АМ6-116-4		155	1 470	550/290	92,5	0,89	2,2	247	390	0,6	20	1 250	РМ-1651	РМ-1651
АМ6-117-4		180	1 470	335	92,5	0,89	2,2	280	405	0,65	22	1 330	РМ-1651	РМ-16761
АМ6-126-4	380	225	1 470	415	93	0,90	2,2	335	425	0,9	37	1 660	РМ-1651	РМ-1661
АМ6-127-4		260	1 480	480	93	0,90	2,2	335	425	1,0	40	1 760	РМ-1651	РМ-16761
АМ6-128-4		300	1 480	540	93,5	0,91	2,2	402	455	1,1	44	1 890	РМ-1651	РМ-16761
АМ6-114-4		115	1 480	170	91	0,88	2,2	175	400	0,5	16	1 070	РМ-16541	РМ-1651
АМ6-115-4	500	135	1 460	195	92	0,88	2,2	214	390	0,55	18	1 180	РМ-1651	РМ-1651
АМ6-116-4		155	1 470	220	92,5	0,89	2,2	247	390	0,6	20	1 250	РМ-16541	РМ-1651
АМ6-117-4		180	1 470	255	92,5	0,89	2,2	280	405	0,65	22	1 330	РМ-1651	РМ-16761
АМ6-126-4		225	1 470	315	93	0,90	2,2	320	445	0,9	37	1 660	РМ-1651	РМ-16761
АМ6-127-4	3 000	260	1 480	365	93	0,90	2,2	380	420	1,0	40	1 760	РМ-1651	РМ-16761
АМ6-128-4		300	1 480	410	95,5	0,91	2,3	405	450	1,1	44	1 890	РМ-1651	РМ-16761
АМ6-114-4		90	1 480	22,5	90	0,86	2,2	157	355	0,5	16	1 070	РМ-16541	РМ-1651
АМ6-115-4		110	1 460	27	90,5	0,87	2,2	191	350	0,55	18	1 180	РМ-16541	РМ-1651
АМ6-116-4	6 000	125	1 470	30,5	91	0,87	2,2	214	370	0,6	20	1 250	РМ-1651	РМ-1651
АМ6-117-4		150	1 470	36,5	91,5	0,87	2,2	265	365	0,65	22	1 330	РМ-16541	РМ-1651
АМ6-126-4		190	1 475	46	91,5	0,88	2,5	308	390	0,9	37	1 660	РМ-16541	РМ-16761
АМ6-127-4		230	1 480	55	91	0,88	2,5	365	395	1,0	40	1 760	РМ-1651	РМ-16761
АМ6-136-4	6 000	300	1 480	71	92,5	0,89	2,1	415	465	1,3	59	2 000	РМ-1651	РМ-16761
АМ6-137-4		350	1 480	83	92,5	0,89	2,2	475	475	1,4	63	2 200	РМ-1651	РМ-1671
АМ6-138-4		410	1 480	95	93	0,89	2,3	540	485	1,5	71	2 300	РМ-16761	РМ-1671
АМ6-136-4		210	1 485	26,5	90	0,88	2,5	395	340	1,3	59	2 110	РМ-1651	РМ-16761
АМ6-137-4	6 000	260	1 485	31	90,5	0,89	2,5	435	370	1,4	63	2 210	РМ-1651	РМ-16761
АМ6-138-4		300	1 485	34,5	91	0,90	2,4	475	390	1,5	71	2 320	РМ-1651	РМ-16761

Таблица 19

Асинхронные электродвигатели серий МАШ и МАШР  
Фазовый ротор. Напряжение 220/380, 380 и 500 в

Тип электродвигателей МАШ, МАШР	Номинальная мощность на валу в кат	При номинальной нагрузке				cos φ	Данные ротора		Вес электродвигателя без шкива в кг	Маховой момент ротора в кг·м²	Тип масляного пускового реостата для МАШ
		скорость вращения в об/мин.	к. п. д. в %		напряжение в в		сила тока в а				
			МАШ	МАШР							
Открытое исполнение — С											
64/4	135	1 460	91,4	90,6	0,89	1,8	310	280	860	19,3	ПР-170
74/4	195	1 470	92,1	91,5	0,89	1,8	360	345	1 060	25,7	ПР-330
74/6	140	975	91,2	90,4	0,86	1,8	385	275	1 060	31,8	ПР-170
83/6	195	970	91,9	91,3	0,87	1,8	385	325	1 280	56,8	ПР-330
85/6	240	980	92,2	91,7	0,87	1,8	520	305	1 420	81,0	ПР-330
64/8	80	725	89,3	87,8	0,83	1,8	210	255	860	21,0	ПР-90
74/8	105	725	89,7	88,7	0,84	1,8	250	280	1 060	37,2	ПР-170
83/8	135	725	90,9	90,1	0,85	1,8	295	305	1 280	63,8	ПР-170
85/8	180	730	91,5	90,9	0,85	1,8	390	305	1 420	86,8	ПР-330
83/10	110	580	89,7	88,7	0,80	1,8	250	285	1 280	68,8	ПР-170
85/10	150	585	91,0	90,2	0,81	1,8	345	285	1 420	96,7	ПР-170
Защищенное исполнение — Е											
64/4	120	1 470	91,0	90,0	0,89	1,8	310	250	960	20,5	ПР-170
74/4	170	1 475	91,9	91,3	0,89	1,8	360	345	1 170	27,5	ПР-170
64/6	95	970	89,6	88,1	0,85	1,8	270	230	960	22,2	ПР-170
84/6	120	980	90,7	89,7	0,86	1,8	315	250	1 170	33,6	ПР-170
83/6	160	975	91,5	90,9	0,87	1,8	385	270	1 410	60,0	ПР-170
64/8	65	725	88,7	86,7	0,83	1,8	200	220	960	22,2	ПР-90
74/8	95	730	89,4	87,9	0,84	1,8	250	250	1 170	39,0	ПР-170
83/8	120	730	90,4	89,4	0,84	1,8	295	270	1 410	67,0	ПР-170
85/8	155	730	91,5	90,6	0,85	1,8	390	260	1 550	90,0	ПР-170
83/10	95	580	89,1	87,6	0,79	1,8	230	275	1 410	72,0	ПР-170
85/10	125	585	90,5	89,5	0,80	1,8	325	245	1 550	100,0	ПР-170

# ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ОСВЕЩЕНИЕ



## ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ЕДИНИЦЫ ИЗМЕРЕНИЙ

**Световой энергией**  $W$  называется лучистая энергия, имеющая число колебаний  $4 \cdot 10^{14} \div 7 \cdot 10^{14}$  в секунду, что соответствует длинам волн от  $0,4 \div 0,75$  микрона, воспринимаемая глазом как световое ощущение. За единицу световой энергии принимается люмен-секунда или люмен-час (лм-ч).

**Световой поток**  $F$  является мерой световой мощности излучения источника. Под световым потоком понимают мощность лучистой энергии, оцениваемую по световому ощущению, которое она производит.

Единица светового потока называется люменом (лм).

**Силой света**  $I$  источника в данном направлении называют угловую плотность потока источника в этом направлении и определяют её как отношение светового потока  $dF$  к величине телесного угла  $d\omega$ , в котором этот поток распространяется. При равномерном распределении светового потока в телесном угле

$$I = \frac{F}{\omega}. \quad (1)$$

За единицу силы света принята международная свеча (мсв)  $\left( \frac{\text{люмен}}{\text{стерадиан}} \right)$ .

**Освещённостью**  $E$  поверхности называют отношение падающего светового потока  $dF$  к площади  $dS$  освещаемой поверхности. В случае равномерного распределения потока  $F$  на площади  $S$ , значение освещённости

$$E = \frac{F}{S}. \quad (2)$$

За единицу освещённости принимается люкс (лк), равный поверхностной плотности светового потока в 1 люмен, равномерно распределённого на площади 1 кв. метр. Если за единицу светового потока принять люмен, а за единицу площади кв. сантиметр, то освещённость будет иметь размерностью фот ( $\phi$ ):

$$1 \text{ фот} = 1 \frac{\text{люмен}}{\text{см}^2},$$

$$1 \text{ люкс} = 1 \frac{\text{люмен}}{\text{м}^2}.$$

**Яркостью**  $B$  светящейся поверхности в каком-либо направлении называется отношение силы света  $dI$ , испускаемой поверхностью в данном направлении, к проекции  $dS \cos \alpha$  светящейся поверхности на плоскость, перпендикулярную тому же направлению:

$$B = \frac{dI}{dS \cos \alpha}. \quad (3)$$

В этой формуле  $\alpha$  есть угол, образованный направлением зрения и нормалью к элементу светящейся поверхности. Единицей яркости служит стильб (сб), равный яркости равномерно светящейся поверхности в перпендикулярном ей направлении, испускающей в том же направлении свет силой в 1 свечу с 1 кв. сантиметра.

**Световая отдача источников света** определяет их экономичность и представляет отношение светового потока, испускаемого источником света, к потребляемой им мощности электрической энергии. Она выражается в люменах на 1 ватт.

**Коэффициентом отражения**  $\rho$  называется отношение светового потока  $F_\rho$ , отражённого телом, к световому потоку  $F_i$ , падающему на него:

$$\rho = \frac{F_\rho}{F_i}. \quad (4)$$

**Коэффициентом пропускания света**  $\tau$  называется отношение светового потока  $F_\tau$ , пропущенного телом, к световому потоку  $F_i$ , падающему на него:

$$\tau = \frac{F_\tau}{F_i}. \quad (5)$$

**Коэффициентом поглощения света**  $\alpha$  называется отношение светового потока  $F_\alpha$ , поглощённого телом, к световому потоку  $F_i$ , падающему на него:

$$\alpha = \frac{F_\alpha}{F_i}. \quad (6)$$

Общее соотношение коэффициентов отражения, пропускания и поглощения для данного тела таково:

$$\rho + \tau + \alpha = 1.$$

Характеристика световых коэффициентов некоторых материалов приведена в табл. 1.

Таблица 1  
Световые коэффициенты некоторых материалов в %

Наименование материалов	$\tau$	$\rho$	$\alpha$	Толщина в мм
Стекло:				
Прозрачное бесцветное	91—89	8	1—3	1—3
Узорчатое бесцветное	90—72	8—24	2—4	3,2—5,9
Матовое	85—72	12—15	3—13	1,8—4,4
Молочное	66—10	30—76	4—14	1,3—6,2
Пергамент тонкий белый	55—35	40—50	5—15	—
Бумага светлая	50—42	33—40	17—18	—
Бумага темная	45—30	40—50	15—20	—
Ткань хлопчатобу- мая белая	57	35	8	—
Шелк белый	60	35	5	—
Шелк желтый	54	19	27	—
Шелк светлокоричневый	36	17	47	—
Обои белые, белая по- краска	—	67—80	—	—
Покраска кремовая	—	50—72	—	—
Покраска желтая	—	44—59	—	—

### ИСТОЧНИКИ СВЕТА

Современные электрические источники света могут быть разделены на три группы. Первая группа — лампы накаливания, в которых электрическая энергия нагревает тело до высокой температуры; при этом тело испускает лучистую энергию, мощность и спектральный состав которой определяются законами температурного излучения. Вторая группа — газосветные лампы, в которых используется явление электролюминесценции — свечение электрического разряда в газах или парах металла. Третья группа — дуговые лампы, в которых русским учёным П. Н. Яблочковым впервые использована для освещения электрическая дуга В. В. Петрова.

Цвет света при изменении длины волны световых колебаний меняется. Длина волны световых колебаний от 0,75 до 0,605  $\mu$  вызывает ощущение красного цвета, при длинах волн от 0,605 до 0,585  $\mu$  — жёлтого с переходом к зелёному; от 0,585 до 0,505  $\mu$  — зелёного; от 0,505 до 0,485  $\mu$  — синезелёного; от 0,485 до 0,430  $\mu$  — синего и от 0,430 до 0,380  $\mu$  — фиолетового.

Лампы накаливания со стальной, а затем с угольной нитью впервые были изобретены русским учёным А. Н. Ладугиным. В настоящее время для целей освещения применяют только лампы накаливания с вольфрамовой нитью, обладающей достаточной механической прочностью и высокой температурой плавления  $T = 3660^\circ \text{К}$ . Нить лампы накаливается в вакууме или в атмосфере инертного газа (азот, аргон, ксенон, криптон). В первом случае лампа называется пустотной, во втором — газополной. Световая отдача лампы зависит от температуры нити накала. Температура нити накала пустотных ламп со сроком службы в 1000 час. не может быть больше  $2350—2450^\circ \text{К}$  из-за быстрого возрастания испарения вольфрама при повышенных температурах. В атмосфере инертного газа при давлении около 1 ат испарение вольфрама сильно уменьшается, что позволяет увеличить температуру нити и получить большую световую отдачу при сохранении того же

срока службы. При равных температурах нити накала световая отдача газополной лампы меньше, чем пустотной лампы. Это происходит из-за потери тепла нитью через теплопередачу и конвекцию газа, переносащего тепло от раскалённой нити с температурой  $2500—3000^\circ \text{К}$  к холодным стенкам стеклянного баллона с температурой  $373—400^\circ \text{К}$ . Относительные потери на теплопередачу уменьшаются с увеличением диаметра нити накала. Если свернуть нить накала в спираль с близко расположенными витками, то получается примерно такой же эффект уменьшения потерь на теплопередачу, как в случае толстой нити с диаметром, равным диаметру спирали. Из этого следует: а) у ламп на одно и то же рабочее напряжение световая отдача возрастает с увеличением мощности, б) у ламп равной мощности световая отдача возрастает с уменьшением номинального напряжения. С этой целью новые типы ламп изготавливаются с биспиральной нитью (нить накала свита в спираль, а из спирали свита новая спираль большего диаметра). Световая отдача биспиральных ламп на 10—20% больше световой отдачи нормальных ламп. Применение в качестве инертного газа вместо азота и аргона менее теплопроводного газа ксенона и криптона даёт также возможность повысить световую отдачу ламп на 10—25%.

Характеристики ламп приведены в табл. 2, 3, 4, 5, 6.

Таблица 2

Энергетический баланс различных ламп мощностью 100 вт при сроке службы 1000 час.

Конструкция лампы накаливания	Пустотная, прямая нить	Наполненная аргоном, однарель	Биспиральная, наполненная аргоном	С однарель спиралью, наполненная газом ксенона и криптона
Распределение энергии				
Видимое излучение в %	7	10	12	12
Невидимое излучение в %	86	68	74	77
Потери в держателях в %	7	3	2	2
Потери в газе в %	0	19	12	9

Таблица 3

Энергетический и зрительный коэффициент полезного действия отдельных видов ламп накаливания

Лампа	Температура в градусах Кельвина	Удельный расход мощности в вт на 1 свечу	Световая отдача в свечах на 1 вт	Энергетический к. п. д. в %	Зрительный к. п. д. в %
Угольная	2135	4,3	0,24	1,6	0,52
Вольфрамовая пустотная	2335	1,5	0,67	5,3	1,8
Вольфрамовая газополная	2745	0,66	1,5	9,2	3,4



Таблица 4

## Стандартные лампы накаливания (ГОСТ 2239-43)

Напряжение в в	Мощность в вт	Световой поток в люменах	Световая отдача в люменах на 1 вт	Диаметр колбы в мм	Полная длина лампы в мм	Высота светового центра в мм	Срок службы в час	Цоколь
110, 127	10	66	6,6	61	107	Не стандартуется	1 000 час.	E-27
	15	124	8,25	61	107			E-27
	25	225	9,00	61	107			E-27
	40	380	9,50	66	124			E-27
	60	645	10,75	76	159			E-27
	75	881	12,07	76	159			E-27
	100	1 275	12,75	76	159			E-27
	150	2 175	14,50	81	175			E-27
	200	3 050	15,25	97	205			E-27
	300	4 875	16,25	112	237			E-27
	500	8 725	17,45	132	242			E-40
220	750	13 690	18,25	152	336	Не стандартуется	1 000 час.	E-40
	1000	19 000	19,00	152	336			E-40
	15	95	6,33	61	107			E-27
	25	191	7,65	61	107			E-27
	40	336	8,40	61	124			E-27
	60	540	9,00	66	124			E-27
	75	671	9,10	76	159			E-27
	100	1 000	10,00	76	159			E-27
	150	1 710	11,41	81	175			E-27
	200	2 510	12,56	97	205			E-27
	300	4 100	13,65	112	237			E-27
	500	7 560	15,12	132	242			E-40
	750	12 230	16,31	152	336			E-40
	1000	17 200	17,20	152	336			E-40

Примечание. Цоколь E-27 нормальный; цоколь E-40 Галиаф.

Таблица 5

## Биспиральные лампы накаливания

Напряжение в в	Мощность в вт	Световой поток в люменах	Световая отдача в люменах на 1 вт	Диаметр колбы в мм	Полная длина лампы в мм	Высота светового центра в мм	Срок службы в час	Цоколь
120	55	650	11,8	60	110	80	1 000	E-27
	71	900	12,7	65	127	95		E-27
	96	1 300	13,5	65	127	95		E-27
220	82	900	11,0	65	127	95	1 000	E-27
	109	1 300	11,9	65	127	95		E-27

Таблица 6

## Низковольтные лампы накаливания

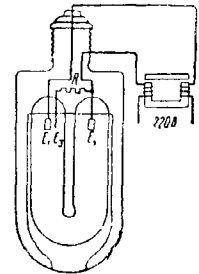
Напряжение в в	Мощность в вт	Световой поток в люменах	Световая отдача в люменах на 1 вт	Диаметр колбы в мм	Полная длина лампы в мм	Высота светового центра в мм	Срок службы в час	Цоколь
12	15	140	9,3	50	78	53	1 000	E-27
	25	250	10,0	50	78	53		E-27
	40	480	12,0	60	103	73		E-27
36	15	110	7,3	50	78	53	1 000	E-27
	25	200	8,0	50	78	53		E-27
	40	400	10,0	60	103	73		E-27

Газосветные лампы и трубки. При температурном излучении потребляемая источником света энергия превращается в излу-

чение весьма широкого спектрального диапазона. Видимое излучение при самых благоприятных условиях не превосходит 14% общей мощности температурного излучения, так как инфракрасное и ультрафиолетовое излучение бесполезно с точки зрения светотехники. При электролюминесценции можно создать такие условия, что источник света будет излучать только видимую часть спектра.

Лампы тлеющего разряда применяются как специальные лампы для контроля наличия напряжения, синхронизации машин и т. п. Разряд происходит в смеси неона и гелия при давлении в несколько миллиметров ртутного столба. Спектр лампы смешанный и состоит из линий гелия (жёлтый) и неона (красный). Электроды изготавливаются из стали. Для ламп на напряжение 110 в катоды покрываются бариевыми соединениями. Для ограничения силы тока в цоколе лампы устанавливается добавочное сопротивление. Мощности ламп при напряжении 220 в от двух до трёх ватт, при напряжении 110 в от одного до двух ватт. Продолжительность горения до 2 000 час. Лампы работают на постоянном и переменном токе.

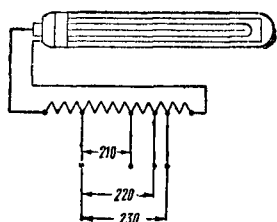
Рекламные трубки работают на переменном токе высокого напряжения порядка от 3 до 12 кв. Они представляют собой длинные (2—3 м) стеклянные трубки диаметром 19÷22 мм, изогнутые в виде букв и различных рисунков. По концам трубки имеются расширения, в которых помещаются электроды. Свет трубок зависит от состава наполнения и от цвета стекла. Наполнение неона даёт красный цвет, гелием—жёлтый, смесь неона и ртутных паров—синеватый, который при применении трубок из жёлтого и коричневого стекла переходит в зелёный. При применении люминофоров можно изменить цвет излучения и одновременно повысить световую отдачу. В момент зажигания трубки требуется напряжение на 25—30% выше рабочего. Продолжительность горения трубок доходит до 5 000 час., световая отдача 10—15 люмен на 1 ватт.



Фиг. 1. Натриевая лампа, включаемая в сеть с напряжением 220 в

Натриевые лампы относятся к лампам с дуговым разрядом, происходящим в парах натрия. Натриевые лампы изготавливаются двух различных типов, отличающихся устройством для зажигания. Внешний вид лампы первого типа показан на фиг. 1. Лампа включается на переменный ток с напряжением 220 в. Разрядная трубка, в которой укреплены оксидные катоды и зажигающее приспособление, имеет U-образную форму и запаяна в колбе, из которой откачан воздух. Для уменьшения потерь через излучение служит открытый с одной стороны овальный цилиндр. Лампа зажигается вследствие наличия разности потенциала между основным электродом  $E_1$  и вспомогательным

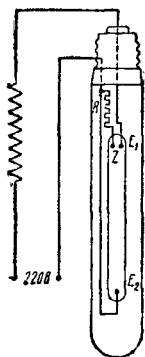
$E_2$ , между которыми возникает тлеющий разряд. Сила тока тлеющего разряда ограничивается сопротивлением  $R = 1\,000\ \text{ом}$ . Тлеющий разряд нагревает электрод  $E_1$  в несколько секунд до красного каления, возникает электронная эмиссия, и разряд переходит в дуговой между основными электродами  $E_1$  и  $E_2$ . Световой поток лампы достигает своей полной величины через 5—6 мин. после включения лампы. Добавочное сопротивление  $R$  помещается внутри колбы, так



Фиг. 2. Натриевая лампа, включаемая в сеть с напряжением 470 в

что из неё выходит только два проводника и для лампы может быть использован нормальный цоколь. Лампа приключается к сети через дроссель  $D$ , препятствующий возрастанию тока в лампе.

Второй тип натриевых ламп разработан для высокого напряжения и не требует специальных устройств для зажигания. Разрядная U-образная трубка (фиг. 2) закреплена в специальном цоколе; к последнему прикрепляется внешний вакуумный цилиндр. Лампа может гореть лишь в горизонтальном положении и требует специальных осветительных



Фиг. 3. Ртутная лампа высокого давления

ных арматур. Лампа зажигается через трансформатор на 470 в. Световая отдача натриевых ламп достигает 60 люменов на 1 вт. Натриевые лампы применяются для освещения автострад и открытых территорий железнодорожных станций, так как исправление цветности излучения натриевых ламп весьма затруднительно и примеси к парам натрия и кадмия улучшают цветность излучения, но резко снижают световую отдачу ламп.

Ртутные лампы используются двух видов: разряд при низком давлении (0,01—1 мм рт. ст.) и при высоком давлении (100 мм до нескольких десятков атмосфер). Лампы при низком давлении нашли применение для репродукционных целей, лампы высокого давления — для общего освещения. Световая отдача ламп при низком давлении достигает 20—30 люменов на 1 вт, а при высоком 40—50 люменов на 1 вт.

Ртутная лампа высокого давления показана на фиг. 3. Два оксидных электрода  $E_1$  и  $E_2$ , нагреваемые дугowym разрядом, запаяны

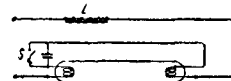
вместе с вспомогательным электродом  $Z$  в трубке из специального стекла или кварца. Вспомогательный электрод  $Z$  помещается вблизи электрода  $E_1$  и через специальное сопротивление  $R$  в несколько тысяч ом соединён с другим электродом  $E_2$ . Разрядная трубка помещена в колбе из прозрачного стекла, служащей для защиты разрядной трубки от воздействия внешней среды. Сопротивление помещено во внешней колбе или в цоколе, так что из лампы выходит только два проводника и может быть использован нормальный цоколь. Зажигание лампы происходит за счёт образования тлеющего разряда между вспомогательным электродом  $Z$  и основным  $E_1$ . Этот разряд прогревает катод, вызывает термоэлектронную эмиссию, испарение ртути и возникновение разряда в парах ртути между основными электродами  $E_1$  и  $E_2$ . Лампа разогревается в течение 4—5 мин. При зажигании лампа потребляет ток, превышающий нормальный на 70—80%. Световая отдача в 2—2,5 раза выше ламп накаливания. Срок службы ртутных ламп доходит до 2000 час. Сведения о некоторых газосветных лампах, изготавливаемых в СССР, приведены в табл. 7.

Таблица 7

Газосветные лампы

Наименование лампы	Световой поток в люменах	Мощность ламп в вт	Ток в а	Напряжение на лампе в в	Световая отдача в люмен на вт	Напряжение зажигания	Напряжение сети в в
Натриевая . . . .	4 400	110	0,65	140	40	420	220
Ртутная (Игар 2)	3 200	75	0,55	130	43	430	220
Ртутная (Игар 3)	16 000	500	4,4	125	32	—	220
Ртутная (Игар 3)	14 000	400	3,52	125	35	—	220
Ртутная (Игар 4)	7 000	250	2,2	125	28	—	220

Светящиеся вещества в газосветных лампах. Некоторые виды газосветных ламп дают значительное излучение в ультрафиолетовой части спектра. Преобразование этих излучений в видимые позволяет изменить цветность лампы и её световую отдачу. Для этой цели применяются люминесцирующие вещества. Явление люминесценции заключается в поглощении энергии падающих излучений электронами люминесцирующего вещества и испускании накопленной энергии в виде света при переходе электронов в нормальное состояние. Длина волны испускаемого света не может быть меньше длины падающих излучений, поэтому применение люминесцирующих веществ, называемых люминофорами, особо выгодно в лампах, дающих ультрафиолетовое излучение, к которым относятся неоновые и ртутные лампы. Применение люминофоров в неоновых лампах повышает световую отдачу на 20—50%, а в ртутных лампах до 100%. Такие лампы называются люминесцентными или флуоресцентными лампами. Схема включения лампы дана на фиг. 4.



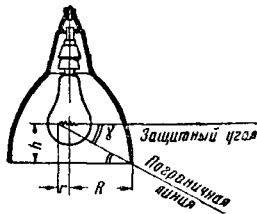
Фиг. 4. Схема включения флуоресцентной лампы

Для создания устойчивого горения последовательно с лампой включается дроссель  $L$ . Вольфрамовые электроды служат лишь для «пуска» лампы; при включении лампы под напряжение они накаливаются током и вызывают испарение ртути, после чего пусковая цепь лампы прерывается специальным рубильником  $S$ .

### ТИПЫ СВЕТИЛЬНИКОВ, ПРИМЕНЯЕМЫХ НА ЖЕЛЕЗНЫХ ДОРОГАХ СССР

Осветительные приборы подразделяются на:

- а) приборы ближнего действия не более 50 м — светильники, состоящие из источника света и осветительной арматуры;
- б) приборы дальнего действия — прожекторы, состоящие из источника света, оптической системы и кожуха.



Фиг. 5. Защитный угол светильника

Назначение осветительных арматур и оптических систем следующее:

- а) перераспределять световой поток источника света;
- б) защищать глаза работающих от слепящей яркости источника света;
- в) защищать источники света от атмосферных и механических воздействий.

Основными характеристиками светильника являются:

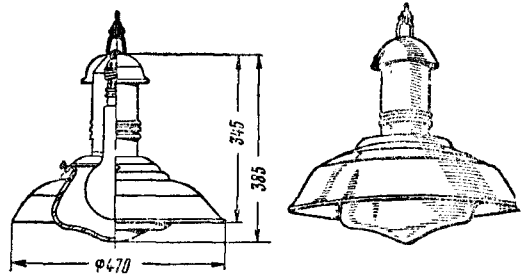
- а) опытная кривая распределения силы света, определяющая величину силы света от лампы в свечах по всем направлениям;
- б) защитный угол (фиг. 5), исчисляемый от пограничной линии пучка света до горизонтали, проходящей через центр светящегося тела;
- в) к. п. д., численно равный отношению светового потока, выходящего из светильника, к световому потоку, испускаемому лампой.

Все приводимые в дальнейшем кривые распределения силы света даны для условной лампы со световым потоком  $F_0 = 1\,000$  люменов. Для определения силы света от источника света со световым потоком  $F$  нужно помножить полученную по кривой величину силы света на  $0,001 F$ .

Светильник «Универсаль» представляет железный колпак, покрытый изнутри белой эмалью, снаружи — эмалью темных цветов. Для уменьшения блёсткости лампа закрывается матированным до уровня нити стеклянным колпаком — затенителем. Защитный угол светильника «Универсаль» без затенителя равен  $14 - 20^\circ$ .

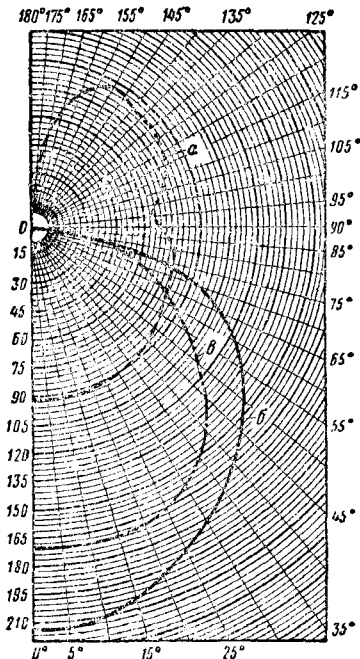
В низких помещениях применяют затенитель из молочного стекла (фиг. 6). Светиль-

ники выпускают двух типов — для ламп в  $100 - 200$  вт и для ламп в  $300 - 500$  вт. На фиг. 7 даны кривые распределения силы света: а) голой лампы, б) без затенителя, в) с затенителем; к. п. д. равен  $0,65 - 0,70$  (без затенителя) и  $0,55 - 0,60$  (с матированным затенителем).



Фиг. 6. Светильник «Универсаль»

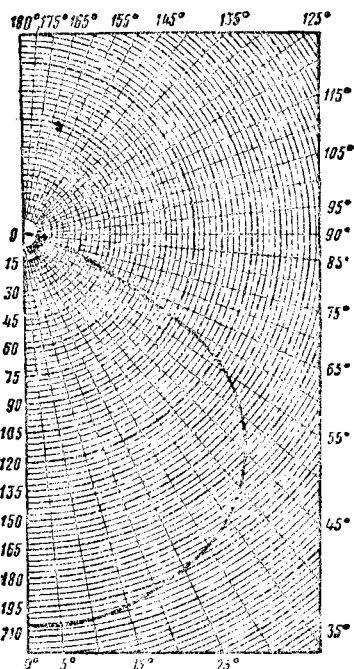
Светильник «Глубокоизлучатель» представляет глубокий эмалированный колпак. Выпускается двух типов: для ламп  $100 - 300$  вт и для ламп  $500$  вт. Кривая распределения силы света дана на фиг. 8; к. п. д. равен  $0,60 - 0,65$ . Защитный угол равен  $27 - 30^\circ$ .



Фиг. 7. Кривые распределения силы света светильника «Универсаль»

Светильник «Альфа». Употребляется для местного освещения и укрепляется обычно непосредственно на станке или верстаке при помощи шарнирной или гибкой стойки. Светильник изготавливается для ламп до  $60$  вт. Кривая распределения силы света показана на фиг. 8.

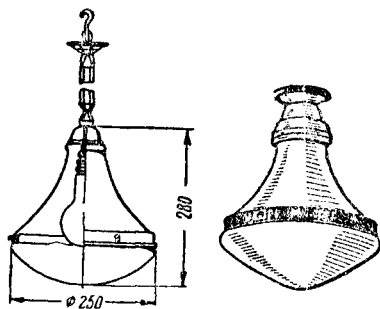
Светильник «Кососвет» — представляет косо срезанный эмалированный колпак. Светильник выпускается двух типов: для ламп до 300 вт и для ламп 500—1000 вт.



Фиг. 8. Кривая распределения силы света светильника «Глубокоизлучатель»

Зеркальный «Глубокоизлучатель» может работать с лампами 300—1000 вт; к. п. д. равен 0,8—0,82.

Зеркальный «Широкоизлучатель» с симметричным светораспределением может работать с лампами 100—500 вт.

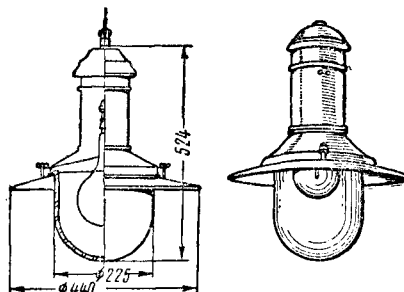


Фиг. 9. Светильник «Люцетта»

Светильники рассеянного света. Светильник «Люцетта» состоит из двух стёкол (фиг. 9). При верхнем матовом и нижнем молочном стекле получается светильник преимущественно отражённого света. При нижнем матовом и верхнем молочном стекле получается светильник преимущественно направленного света, к. п. д. равен 0,8.

Светильники с арматурой из молочного стекла в последнее время получили широкое

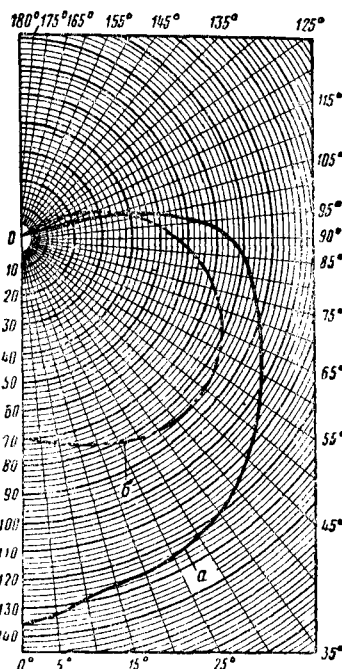
распространение. Форма арматур из молочного стекла может быть заказана самая разнообразная. Например, изготавливаются: а) шары  $D = 200$  мм для ламп до 60 вт; шары  $D = 350$  мм для ламп до 300 вт; шары  $D = 500$  мм для ламп до 500 вт; к. п. д. равен 0,77; б) плафоны  $D = 500$  мм для трёх ламп до



Фиг. 10. Светильник наружного освещения

150 вт; к. п. д. равен 0,57; плафоны  $D = 720$  мм для шести ламп по 150 вт; к. п. д. равен 0,55 и ряд других форм.

Светильник преимущественно прямого света и светильник наружного освещения сход-



Фиг. 11. Кривая распределения силы света светильника наружного освещения

ны между собой по конструкции и являются светильниками преимущественно направленного света.

К металлическому корпусу с маленьким рефлектором прикрепляется опаловое или прозрачное стекло (фиг. 10). Кривая распределения силы света для светильника наружного освещения дана на фиг. 11: а — с проз-

рачным<sup>а</sup> стеклом, б—с опаловым стеклом. Защитный угол этих светильников равен нулю.

**Водонепроницаемые светильники** имеют фарфоровый или металлический корпус, стеклянный колпак и эмалированный рефлектор. В настоящее время изготавливается два типа светильников: для ламп до 60 *вт* и для ламп до 200 *вт*.

**Пржекторы заливающего света** имеют металлические хромированные зеркала, состоящие из двух параболоидов и промежуточного сферического кольца.

Пржекторы заливающего света изготавливаются для работы с нормальными лампами накаливания. Характеристика их приведена в табл. 8.

Таблица 8

Пржекторы заливающего света

Тип пржектора	Диаметр отражателя в см	Основные данные лампы	
		мощность в <i>вт</i>	напряжение в <i>в</i>
ПЗ-35	35	300—500	110—127—220
ПЗ-45	45	750—1 000	110—127—220
ПЗ-60	60	1 500—2 000	110—127—220

Световые данные пржектора приведены в табл. 9.

Пржектор имеет стальной сварной кожух с вентиляцией. Конструкция пржектора должна допускать возможность наклона: в вертикальной плоскости — в пределах от  $-45^\circ$  и до  $+90^\circ$ , в горизонтальной плоскости — на  $360^\circ$ . Закрепление пржектора в любом положении должно быть вполне надёжным и не допускать ослабления во время эксплуатации. Для защиты отражателя и лампы от атмосферных влияний пржекторы должны иметь прозрачные теплостойкие стёкла. Для установки лампы в фокусе зеркала должно иметься фокусирующее приспособление, управление которым должно производиться снаружи кожуха. При смещении лампы из фокуса сила света пржектора резко уменьшается. Применяя матовые лампы или рассеивающие защитные стёкла, можно увеличить угол рассеяния за счёт уменьшения максимальной силы света.

## ПРОЕКТИРОВАНИЕ ОСВЕТИТЕЛЬНЫХ УСТАНОВОК

Проектирование должно производиться по следующим этапам: а) изучение рабочих процессов, оборудования и помещений, подлежащих освещению; б) выбор величины освещённости; в) выбор системы освещения и типа светильника; г) выбор расположения источников света относительно рабочих поверхностей и положения работающих; д) расчёт освещённости; е) расчёт питающей электрической сети.

**Выбор величины освещённости.** С точки зрения осветительной техники каждый производственный процесс характеризуется коэффициентом отражения фона поверхности, контрастом и размерами рассматриваемых деталей, интенсивностью работы и опасностью травматизма. На основании этих данных можно выбрать минимальную освещённость, согласно ГОСТ 3825-47 «Нормы искусственного освещения» (см. табл. 10, 11, 12). В их основу положен гигиенический минимум требований к освещению.

Правилами нормируется освещённость так называемой рабочей поверхности, на которую смотрит глаз во время работы.

Все виды работ классифицируются в ряды, требующие приблизительно одинаковой освещённости, в каждый ряд входят разнообразные производства и рабочие процессы, объединяемые по признаку одинаковой тонкости работы и одинакового контраста между рассматриваемой деталью и фоном рабочей поверхности.

**Блёткость.** Мерами снижения слепящего действия блёткости служат: применение арматур из рассеивающих свет материалов, общее повышение освещённости помещения, увеличение защитного угла, увеличение высоты подвеса светильников.

Установленная правилами и нормами наименьшая высота подвеса светильников приведена в табл. 13.

**Аварийное освещение.** При выключении основного освещения правилами предписывается устройство аварийного освещения для эвакуации людей из помещения, независимо от основного освещения, а в случаях взрывоопасных и огнеопасных работ—питае-

Таблица 9

Световая характеристика пржекторов

Тип пржектора	Данные лампы для нормальной работы пржектора		Максимальная сила света луча пржектора		Световой поток в пределах угла рассеяния		Угол рассеяния в пределах до 0,1 максимальной силы света в градусах			
	мощность в <i>вт</i>	напряжение в <i>в</i>	номинальное значение в свечах	допуск в %	номинальное значение в <i>лм</i>	допуск в %	в горизонтальной плоскости		в вертикальной плоскости	
							номинальное значение	допуск	номинальное значение	допуск
ПЗ-35	300	110—127—220	70 000	—10	3 200	—10	28	—4	17	—3
ПЗ-45	1 000	110—127—220	40 000		2 200		30		20	—4
ПЗ-60	2 000	110—127—220	200 000		7 000		28		17	—3
			130 000	—10	5 500	—10	25	—4	20	—4
			700 000		18 000		22		17	—3
			500 000		14 000		25		20	—4

Таблица 10

Нормы освещённости для работ, требующих различения мелких деталей, размером до 10 мм

Характеристика работ	Разряд работ	Под-разряд	Фон, на котором различается деталь	Контраст с фоном	Наименьшая освещённость в люксах	
					при системе местного освещения	при системе одного общего освещения
Требующие различения деталей размером менее 0,2 мм	I	а	Тёмный	Малый	500	Одно общее освещение не допускается
		б	Тёмный Светлый	Большой Малый	300	125
		в	Светлый	Большой	150	75
Требующие различения деталей от 0,2 до 1 мм	II	а	Тёмный	Малый	300	125
		б	Тёмный Светлый	Большой Малый	150	75
		в	Светлый	Большой	—	30
Требующие различения деталей от 1 до 10 мм	III	а	Тёмный	Малый	75	50
		б	Тёмный Светлый	Большой Малый	—	30
		в	Светлый	Большой	—	20

Таблица 11

Нормы освещённости для работ с самосветящимися предметами или материалами для грубых работ, требующих различения деталей размером более 10 мм и складских помещений

Характеристика работ	Разряд работ	Наименьшая освещённость при системе общего освещения в люксах
С самосветящимися предметами или материалами (например, в кузницах, литейных, мартеновских цехах) . . . . .	IV	50
Требующие различения предметов или деталей размером от 10 мм включительно до 100 мм . . . . .	V	20
Требующие различения предметов или деталей размером свыше 100 мм, а также требующие общего наблюдения за ходом производственного процесса . . . . .	VI	10
Работа в складах громоздких предметов и сыпучих тел . . . . .	VII	5

мого от отдельного источника энергии. Освещённость, создаваемая аварийным освещением по линии проходов, не должна быть менее 0,1 люкса.

Коэффициент запаса. Величина освещённости, указанная в нормах, относится к ра-

Таблица 12

Нормы освещённости административно-канторских, общественных и бытовых помещений, проходов в производственных помещениях, а также коридоров и лестниц

Наименование освещаемых площадей	Разряд работ	Наименьшая освещённость при системе общего освещения в люксах	Плоскость, к которой относится норма освещённости
Административно-канторские помещения, красные уголки, читальни, помещения общественных организаций . . . . .	VIII	50	Поверхность столов
Комнаты для приготовления пищи (столовые, кухни, буфеты) . . . . .	IX	50	То же
Душевые, умывальные, уборные, гардеробные . . . . .	X	15	Поверхность пола
Главные проходы в производственных помещениях, проезды для внутрицехового транспорта, внутрицеховые лестницы, площадки для обслуживания агрегатов, главные коридоры и лестницы . . . . .	XI	10	То же
Прочие проходы, коридоры, лестницы и тамбуры . . . . .	XII	5	•

бочему состоянию осветительной установки, т. е. когда светильники достигли известной степени загрязнения и старения, между тем

Таблица 13

## Высота подвеса светильников

Тип светильника	Рассеиватель	Колба лампы	Защитный угол	Мощность лампы в вт	
				до 200 вкл.	более 200
С эмалированными отражателями и светильники с зеркальными отражателями глубокого излучения	Нет	Прозрачная	10—30°	3,0	4,0
			Более 30°	2,0	3,0
	Нет	Матированная	10—90°	2,5	3,5
	Матированное стекло	Прозрачная	До 20°	3	3,5
			Более 20°	2,5	3
С зеркальными отражателями широкого излучения	Нет	Прозрачная	Любой	4,0	6,0
С рассеивателями без отражателей	Молочное стекло в зоне 0—90°	Прозрачная	—	2,0	3,0
	Молочное стекло в зоне 60—90°	Прозрачная	—	3,0	4,0
	Матированное стекло в зоне 0—90°	Прозрачная	—	3,0	4,0
Без отражателей и рассеивателей	Нет	Матированная	—	4,0	6,0

как применяемые в расчётах световые характеристики светильников относятся к новым незапылённым светильникам. Вследствие этого во все расчётные формулы необходимо вносить коэффициент запаса  $K$ , учитывающий загрязнение светильников и потерю светового потока в лампах (табл. 14).

Таблица 14

Рекомендуемые величины коэффициентов запаса для различных помещений согласно ГОСТ 3825-47

Характеристика помещения	Коэффициент запаса $K$	Периодичность очистки светильников
Помещения с незначительным производственным выделением пыли, копоти и дыма (конторы, школы, цехи механической обработки металла, инструментальные цехи и т. п.) . . . . .	1,3	2 раза в месяц
Помещения со значительным производственным выделением пыли, дыма, копоти (литейные, кузницы, цементные заводы, мельницы и т. п.) . . . . .	1,5	4 раза в месяц
Установки наружного освещения . . . . .	1,3	2 раза в год

Приведённые величины коэффициентов запаса действительны при указанных в табл. 14 сроках чистки светильников.

**Размещение светильников.** При общем освещении применяется размещение светильников в один или несколько рядов, причём светильники располагаются по вершинам квадрата или равностороннего треугольника. При определённой высоте подвеса ламп над рабочей поверхностью  $h$  и расстоянии между лампами  $l$  возможно найти для различных типов светильников наивыгоднейшее отношение  $l/h$  и соответствующее отношение  $Z = \frac{E_{ср}}{E_{наим}}$ ,

где  $E_{ср}$  — средняя освещённость,  $E_{наим}$  — наименьшая освещённость.

Наивыгоднейшее расположение светильников и отношение средней освещённости к минимальной приведены в табл. 15.

В табл. 16 даны указания по подбору типа светильников.

**Коэффициент использования.** Если на горизонтальную поверхность, находящуюся на некоторой высоте над полом, падает как от светильников непосредственно, так и от стен и потолков световой поток  $F_{полезн}$ , то отношение этого потока к световому потоку всех ламп называется коэффициентом использования:

$$\eta = \frac{F_{полезн}}{F_{лампы}}. \quad (8)$$

Таблица 15

Расположение светильников

Тип светильника	Расположение ламп				$Z = \frac{E_{\text{норм}}}{E_{\text{факт}}}$ для расположения по вершинам квадрата
	однорядное с расстоянием между лампами $l$	по вершинам квадрата со стороной $l$	по вершинам равно-сторон. треугольника со стороной $l$	отношение $l : h$	
Глубокоизлучатель эмалированный «Альфа»	1,9	1,35	1,65	1,2	
Глубокоизлучатель зеркальный «Универсаль» с затенителем	1,6	1,15	1,4	1,2	
Наружного освещения с молочным стеклом «Люцетта»	2	1,4	1,7	1,2	
целого молочн. стекла «Люцетта»	2,6	1,9	2,3	1,3	
преимущественно отражённого света	1,8	1,3	1,6	1,2	
	1,8	1,2	1,5	1	

Примечание.  $h$  — высота подвеса ламп над рабочей поверхностью.

Таблица 17

Коэффициенты использования осветительной установки для светильника «Универсаль» с полуматовым затенителем

Коэффициент отражения потолка	0,3		0,5		0,7			
Коэффициент отражения стен	0,1	0,3	0,1	0,3	0,5	0,1	0,3	0,5
Индекс помещения	Коэффициент использования в %							
0,5	18	19	18	20	23	18	20	23
0,6	23	24	23	26	28	23	26	29
0,7	27	28	27	29	31	27	29	32
0,8	30	31	30	31	34	30	32	36
0,9	32	33	32	34	36	32	34	37
1,0	34	35	34	35	37	34	35	38
1,1	35	36	35	37	38	35	37	39
1,25	36	37	36	38	40	36	38	41
1,5	38	40	38	40	42	38	41	43
1,75	40	41	40	42	44	40	42	45
2,0	42	43	42	44	46	42	44	46
2,25	44	45	44	45	47	44	46	48
2,5	45	46	45	47	49	45	47	50
3,0	46	47	46	48	50	46	49	51
3,5	47	48	47	49	51	47	50	52
4,0	48	49	49	50	52	49	51	53
5,0	49	50	50	51	53	50	52	54

Таблица 16

Выбор типа светильника

Тип светильника	Оценка типа	Сфера применения
Глубокоизлучатель зеркальный То же эмалированный	Малые потери светового потока по сторонам. Отсутствие длинных теней вследствие небольшого расстояния между светильниками. Малое значение вертикальной освещённости. Большое значение горизонтальной освещённости. Резкие тени	Высокие производственные помещения с тёмными стенами и потолком; локализованное освещение рабочих поверхностей, требующих большой горизонтальной освещённости
«Универсаль»	Удовлетворительное соотношение вертикальной и горизонтальной освещённости	Производственные помещения с высотой не более 10—13 м, с тёмными потолками и наличием пылевыделения, где требуется одновременно и вертикальная и горизонтальная освещённости
Зеркальные широкоизлучатели	Большие потери светового потока по сторонам. Большое значение вертикальной освещённости. Наличие длинных резких теней в цехах с громоздким оборудованием. Резкие тени	Открытые пространства; цехи с небольшой высотой и негромоздким оборудованием; локализованное освещение при требовании двусторонней вертикальной освещённости
«Люцетта» с нижним матовым стеклом. Светильники из молочного стекла	Отсутствие резких теней. Равномерное распределение освещённости за счёт отражённого потока от стен и потолка	Производственные и подсобные помещения со светлой окраской потолка и стен; школьные, конторские и прочие помещения.
«Люцетта» с нижним молочным стеклом. Светильник отражённого света	Большие потери светового потока и вследствие этого большой расход энергии. Очень мягкие тени. Равномерное распределение яркости в поле зрения. Хорошее соотношение вертикальной и горизонтальной освещённости	Помещения с гладкими белыми потолками и стенами, где основным требованием является отсутствие резких теней: клубы, фойе, чертёжные



Таблица 18

Коэффициенты использования осветительной установки для светильника «Люцетта» (сборная, преимущественно прямого света)

Коэффициент отражения потолка	0,1				0,3				0,5				0,7			
Коэффициент отражения стен	0,1	0,3	0,5	0,7	0,1	0,3	0,5	0,7	0,1	0,3	0,5	0,7	0,1	0,3	0,5	0,7
Индекс помещения	Коэффициент использования в %															
0,50	12	14	17	22	12	14	18	24	13	15	19	26	13	16	20	27
0,60	16	18	21	26	16	18	22	28	17	19	24	30	17	20	25	32
0,70	19	21	24	29	20	22	26	31	20	23	27	33	21	24	28	35
0,80	22	23	26	31	22	24	29	33	22	25	29	35	23	26	31	38
0,90	23	24	27	32	24	26	30	35	24	27	31	37	25	28	32	39
1,00	24	26	28	33	25	27	31	36	26	29	32	38	27	29	34	41
1,10	26	27	29	34	26	28	32	37	27	30	33	39	28	31	35	42
1,25	27	28	31	36	28	30	33	38	29	31	35	41	30	33	37	44
1,50	29	31	34	38	30	33	36	40	31	34	37	43	32	36	40	47
1,75	31	33	36	39	32	34	38	42	33	37	40	45	34	38	43	49
2,00	33	34	37	40	34	35	39	44	35	38	42	47	37	41	45	51
2,25	35	36	39	42	36	38	41	45	37	40	44	49	38	42	46	52
2,50	36	37	40	43	37	39	43	47	39	42	45	50	40	44	48	54
3,00	37	39	42	44	39	42	45	48	41	44	47	52	44	46	50	55
3,50	39	41	43	45	41	43	46	50	43	46	49	53	45	48	52	57
4,00	41	42	43	46	44	44	47	50	45	47	50	55	47	50	54	59
4,50	42	43	45	47	44	46	48	51	46	49	52	56	49	52	56	60

Коэффициент использования светильника (табл. 17, 18) зависит от арматуры, окраски стен и потолков, а также и индекса помещения. Индекс помещения для прямоугольных помещений

$$p = \frac{ab}{h(a+b)}, \quad (9)$$

где  $a$  — длина помещения;  
 $b$  — ширина помещения;  
 $h$  — высота подвеса светильника над рабочей поверхностью.

Для квадратного помещения со стороной  $a$

$$p = \frac{a}{2h}. \quad (10)$$

Расчёт освещения по световому потоку применяется главным образом для внутренних помещений. В соответствии с требованием норм, приведённых в табл. 10, 11 и 12, выбирается освещённость  $E$ , далее в зависимости от характера помещения выбирается по табл. 14 коэффициент запаса  $K$ , затем, принимая во внимание требования к освещению данного помещения, выбирается тип светильника. В зависимости от строительных особенностей помещения (высоты, длины и ширины расположения балок и колонн, световых проёмов и т. п.) выбирают размещение светильников.

Руководствуясь ранее приведёнными данными наиболее выгодного расположения светильников, определяют количество ламп  $n$ , индекс помещения  $p$  и выбирают по табл. 17 и 18 коэффициент использования установки  $\eta$ .

Расстояние ламп от стен выбирается равным половине расстояния между лампами, если у стен не производится работа, и одна треть от  $l$ , если у стен работа производится при свете,

$$F_{\text{л}} = \frac{ESK}{Z\eta n}, \quad (11)$$

где  $E$  — освещённость в люксах;  
 $S$  — площадь помещения в  $m^2$ ;

$K$  — коэффициент запаса;

$\eta$  — коэффициент использования установки;

$n$  — число ламп;

$Z$  — поправочный коэффициент на минимальную освещённость по табл. 15.

После того как определен световой поток одной лампы, по стандартам на лампы определяют мощность лампы.

Расчёт освещения по силе света (точный метод). В случае освещения горизонтальной поверхности освещённость от данного светильника в точке  $A$  определяется по формуле

$$E_z = \frac{I_A \cos^3 \alpha}{h_p^2 K}, \quad (12)$$

где  $E_z$  — горизонтальная освещённость;

$I_A$  — сила света светильника в направлении точки  $A$ , полученная из кривой распределения силы света;

$h_p$  — высота подвеса светильника над рабочей поверхностью;

$K$  — коэффициент запаса (по табл. 14);

$\alpha$  — угол между нормалью к освещаемой поверхности и световым лучом.

При наличии нескольких источников света освещённость в заданной точке определяется как сумма освещённостей, создаваемых каждым источником света.

### ОСОБЕННОСТИ ОСВЕЩЕНИЯ ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНЫХ ПРЕДПРИЯТИЙ

Освещение паровозо- и вагоноремонтных заводов. Для сборочных и котельных цехов применяется общее освещение при помощи глубоководных и местное — при помощи переносных ламп. При большой высоте подвеса (над мостовым краном) выгоднее применять зеркальные глубоководные. Для освещения внутренней котлов необходимо иметь сеть низкого напряжения, не выше 15 в, и ручные переносные лампы. В механических

цах наиболее рационально устройство комбинированного (общее плюс местное) освещения. Для создания общего освещения применяются светильники «Универсаль» с матовыми затенителями.

Для местного освещения к станкам прикрепляются шарнирные бра со светильниками типа «Альфа».

Ввиду выделения пыли, дыма и копоти в деревообделочных цехах, кузницах и литейных нормальные светильники очень быстро загрязняются и требуют частой чистки. Поэтому выгоднее применять уплотнённые светильники.

В конторских помещениях и кабинетах с белыми потолками устраивается полутражённое освещение. Чёртёжные лучше всего освещать отражённым светом.

**Освещение паровозных и вагонных депо.** Загрязнение воздуха паром и дымом заставляет применять в депо уплотнённые или герметические светильники, подвешенные над проходами между стойлами.

Для облегчения условий работы по осмотру ходовых частей смотровые ямы снабжаются специальными герметическими светильниками и переносными лампами.

**Освещение централизованных постов.** К освещению постов механической централизации и управления сортировочными горками предъявляются особые требования, вытекающие из необходимости наблюдать за менее освещённой станционной территорией из помещения. Чтобы сократить до минимума время, необходимое для перехода от адаптации на большие яркости внутри помещения к адаптации на меньшие яркости наружных пространств, приходится применять местное освещение при помощи специальных светильников.

Для устранения бликов на остеклении, мешающих наблюдению, применяют наклонные стёкла.

**Освещение складов.** Для освещения закрытых складов применяются светильники «Универсаль» с матовыми затенителями.

Общее освещение открытых складов, оборудованных порталным или мостовым краном, создаётся двумя группами прожекторов, расположенных с узкой стороны склада. Светильники типа «Глубокоизлучатель», подвешенные на кране, создают местное освещение при разгрузке и погрузке.

**Освещение вокзалов и перронов.** Осветительная установка вокзалов должна быть не только рациональна, но и декоративна. Для освещения существующих зданий наиболее подходят светильники из молочного стекла.

Для вновь строящихся вокзалов лучше всего предусмотреть при проектировании архитектурное освещение.

Декоративное освещение фасада осуществляется или газосветными трубками или прожекторами. Для выделения фасада его яркость должна быть больше яркости окружающего фона.

Прожекторы должны быть, по возможности, скрыты от зрителей. Они могут устанавливаться на противоположных зданиях, на колоннах и на уступах освещаемого здания.

Крытые перроны освещаются светильниками «Универсаль».

Открытые перроны освещаются глубокоизлучателями, подвешенными на цепной подвеске.

**Освещение станций.** На станциях должны освещаться все сооружения для обслуживания пассажиров, платформы, пути с постоянной маневровой работой, пассажирские пути, товарные дворы, склады, пункты ремонта, переезды через пути. Освещение должно обеспечивать безопасность движения поездов, охрану грузов и бесперебойную работу обслуживающего персонала. Для сортировочных станций лучше всего применять освещение при помощи несимметричных зеркальных светильников с защитным углом больше  $10^\circ$ .

Для механизированных горок лучше всего должны быть освещены вертикальные поверхности, перпендикулярные по взгляду оператора. Минимальная горизонтальная освещённость должна быть в пределах установки замедлителей не меньше пяти люксов.

В настоящее время применяются прожекторы типа ПЗ-45 с лампой в 1000 в. Высота мачт  $H = 20 \div 35$  м. Расстояние между мачтами вдоль путей — 200 — 500 м, поперёк путей — 30 — 60 м. Если рядом с мачтой в мёртвом пространстве необходимо создать освещённость, на мачте подвешивается глубокоизлучатель.

Ремонтные пути и въезды в депо освещаются глубокоизлучателями, которые подвешиваются между путями на высоте  $H = 5$  м.

Наиболее типичные конструкции прожекторных мачт:

а) при установке одного-двух прожекторов на высоте 6—10 м — деревянные или металлические столбы;

б) при больших высотах мачты — от 20 до 35 м обычно стальные решётчатые мачты, склёпанные или сваренные из уголков; внутри мачты имеются лестница и одна или две площадки; на вершине мачты имеется площадка для установки определённого числа прожекторов, от 6 до 20.

**Охранное освещение.** Для охраны мостов, складов и т. д. необходимо освещение, дающее возможность часовому наблюдать за полосою пространства, прилегающего к охраняемой территории. При этом он сам не должен освещаться, и источники света не должны его слепить. Эту задачу можно осуществить при помощи прожекторов, создающих в пределах охранной зоны по направлению взгляда часового вертикальную освещённость порядка 2 — 4 люкса.

**Освещение тоннелей.** Тоннели освещаются для облегчения осмотра и производства ремонтных работ. Устройство освещения в тоннелях с паровой тягой затрудняется наличием пара, дыма, особенно в верхней части сечения. В тоннеле можно применять только герметическую арматуру, установленную на высоте 1,5—2 м; расстояние между светильниками должно быть не больше 15 м. Наименьшая вертикальная освещённость — 2—4 люкса.

**Освещение строительных площадок и путевых работ.** Освещение устраивается только при механизации работ и при необходимости форсировать строительство. Место работы машин, экскаваторов и т. д. следует освещать прожекторами, установленными на машине. Общее освещение выемки (или карьера) производится прожекторами, установленными на краю выемки с противоположной стороны.

При взрывных работах прожекторы нужно отнести на расстояние, куда не попадают осколки и камни от взрывов. Для установки прожекторов рекомендуется применять передвижные мачты высотой 8—10 м или треноги 1,5—2 м.

Нормы освещенности железнодорожных территорий приведены в табл. 19.

Таблица 19

Нормы освещенности железнодорожных территорий

Наименование территории	Наименьшая освещенность в лк
Пассажирские платформы	2
Парки приема и отправления	0,5
Сортировочные и маневровые пути	0,3
Сортировочная горка	1—2
Угольный склад и пути экипировки	5,0
Пути около депо и вагоноремонтных пунктов	1,0
Поворотные круги	1,0
Пути в пределах станций	0,2
Места ремонта вагонов	15
Товарные платформы	1

## ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ОСВЕЩЕНИЕ ПАРОВОЗОВ

Электрическое освещение паровозов производится от турбогенераторов, устанавливаемых непосредственно на паровозном котле перед будкой машиниста. Турбогенератор состоит из паровой турбины и генератора постоянного тока (табл. 20).

Таблица 20

Основные технические характеристики применяемых на паровозах турбогенераторов

Характеристика	Тип турбогенератора		
	ТГ-0,5	ТГ-1-50	ТГ-5
Мощность в квт	0,5	1	5
Напряжение в в	50	50	50
Ток в а	10	20	100
Число оборотов в минуту	3 600	3 500	3 000
Расход пара при полной нагрузке в кг/час	90	110	340

Турбогенератор ТГ-1-50 принят как типовой для магистральных паровозов, а ТГ-5 для поездов местного и пригородного движения, так как в этих поездах от турбогенератора производится освещение паровоза и вагонов поезда.

Сигнальное освещение паровоза состоит из лобового прожектора и буферных фонарей. Лобовой прожектор снабжается специаль-

ной лампой мощностью 250 вт и отражателем. Буферные фонари имеют лампы мощностью 25 вт. К рабочему освещению паровоза относятся: освещение будки машиниста и приборов, движущего механизма, угольной ямы и машины стокера. Форма и исполнение светильников рабочего освещения зависит от их назначения и расположения. Проводка на паровозе выполняется двухпроводной сетью в металлических трубах для защиты от механических повреждений. Все лампы снабжаются специальными патронами, предохраняющими лампы от самоотвинчивания при тряске и толчках, и присоединяются к сети через штепсельные розетки.

## ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ОСВЕЩЕНИЕ ВАГОНОВ

Для целей электрического освещения вагонов поезда исключительное распространение получила система с осевым генератором, который приводится в движение ремённой передачей от оси вагона. В этом случае также необходима аккумуляторная батарея, которая снабжает вагоны электрической энергией на стоянках и при малых скоростях движения поезда. Наличие аккумуляторов и генератора вызывает необходимость иметь целый ряд автоматических приспособлений, обеспечивающих нормальную работу источников электрической энергии как на стоянках, так и при движении поезда.

Индивидуальная система электроснабжения вагонов, при которой каждый вагон имеет свой генератор и аккумуляторную батарею, применяется для служебных вагонов и в тех случаях, когда потребная электрическая мощность вагона достаточно велика (вагоны с кондиционированием воздуха, цельнометаллические вагоны).

Групповая система электроснабжения вагонов, при которой все вагоны поезда или группа вагонов поезда снабжаются электрической энергией от вагона-станции, имеющей свой генератор достаточной мощности и аккумуляторную батарею, применяется для большинства пассажирских поездов сети железных дорог СССР.

Светильники, применяемые для освещения вагонов, обычно выполняются в виде плафонов прямого света, что даёт экономично расхода электроэнергии. Для освещения вагонов применяются специальные лампы на напряжение 50 в с особым патроном, предохраняющим лампу от самоотвинчивания при тряске и толчках (табл. 21).

Таблица 21

Характеристика ламп для освещения вагонов

Тип ламп	Напряжение в в	Мощность в вт	Световой поток в лм	Световая отдача в лм/вт	Продолжительность горения в час.
Ж-10	50	10	70	7,0	1 000
Ж-5	50	15	123	8,2	1 000
Ж-7	50	25	220	8,8	1 000
Ж-8	50	50	550	11,0	1 000

Аккумуляторы (табл. 22) для вагонного освещения в настоящее время применяются типа ВП-400, положительные пластины которых выполняются панцирного ти-

па. Ранее применявшиеся аккумуляторы типа Ж-Х постепенно заменяются. Аккумуляторы типа ВП-400 легче аккумуляторов типа Ж-Х—однако срок службы положительных пластин ланцерного типа в 2—2,5 раза меньше.

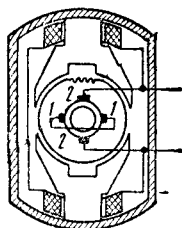
Таблица 22

Типы аккумуляторов

Время разряда в часах	Ёмкость в а-ч		Разрядный ток в а	
	Ж-Х	ВП-400	Ж-Х	ВП-400
3	270	300	90	100
5	300	350	60	70
7,5	330	375	45	50
10	370	400	37	40

Аккумуляторная батарея состоит из 26 последовательно соединённых аккумуляторных элементов и размещается под вагоном в специальных ящиках.

Генераторы, применяемые для освещения поездов, носят название генераторов поперечного поля.



Фиг. 12. Схема генератора поперечного поля

Якорь генератора по своему устройству ничем не отличается от якорей обычных машин постоянного тока, обмотка петлевая с двумя параллельными цепями.

На коллекторе фиг. 12 размещены две пары щёток, одна из которых 1-1 замкнута накоротко, а ко второй 2-2 присоединяется потребитель. На полюсах размещена обмотка, выполненная проводом малого сечения, и присоединяется к якорю параллельно. Для улучшения коммутации в середине

каждого полюса сделан вырез. Генератор поперечного поля благодаря наличию двух пар щёток обладает следующими свойствами:

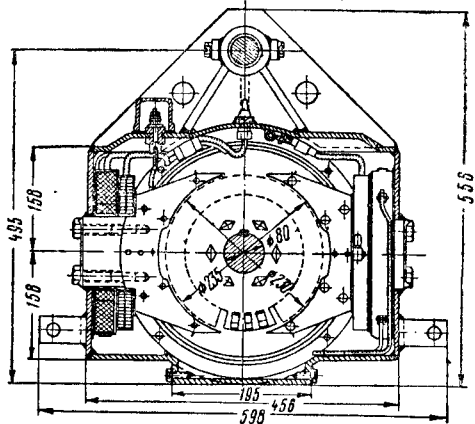
а) сила тока генератора остаётся постоянной при различном числе оборотов;

б) сила тока генератора остаётся постоянной при различных сопротивлениях внешней цепи. Изменение тока по внешней цепи достигается за счёт изменения тока в шунтовой обмотке;

в) поляриность генератора не изменяется при изменении направления вращения якоря.

На железных дорогах для освещения вагонов применяются генераторы типа РД-2 и РД-2Б, которые весьма незначительно отличаются друг от друга. На фиг. 13 показан поперечный разрез генератора РД-2 и его размеры.

Генератор РД-2 развивает мощность 4,9 кВт при токе 70 а, а РД-2Б—5,6 кВт при токе 80 а. Напряжение в обоих генераторах регулируется в пределах от 53 до 70 в. Вес каждого генератора около 350 кг.



Фиг. 13. Поперечный разрез генератора РД-2

Электрооборудование пассажирских вагонов-станций состоит из следующих элементов:

- 1) генератора поперечного поля с приводом от оси вагона;
- 2) аккумуляторной батареи;
- 3) распределительного щита с автоматами, обеспечивающими нормальную работу установок;
- 4) поездной электрической магистрали с концевыми коробками и межвагонными соединениями;
- 5) внутривагонной осветительной сети с осветительными арматурами и групповым щитком.

Вагоны, не имеющие станций, имеют оборудование, перечисленное в пунктах 4 и 5.

В вагонах применяется однопроводная система поездной магистрали, выполняемой изолированным проводом, сечением 25 мм<sup>2</sup>. Магистраль с целью защиты от механических повреждений прокладывается в стальных трубках. Обратным проводом являются металлические части вагона и рельсы. На обоих концах вагона устанавливаются концевые коробки для соединения магистрали между вагонами. Внутренняя проводка в вагонах выполняется двухпроводной, причём все лампы разбиваются на несколько групп. Сечение провода групповой магистрали 2,5 мм<sup>2</sup>, а ответвление к лампам выполняется проводом сечением 1,5 мм<sup>2</sup>. Проводка в металлических вагонах выполняется двухжильным проводом с резиновой изоляцией марки СРГ.

#### ЛИТЕРАТУРА И ИСТОЧНИКИ

1. Белькинд Л. Д. Электроосветительные приборы ближнего действия. М.—Л., Госэнергоиздат, 1945, 262 с.
2. Мешков В. В. Осветительные установки. М.—Л., Госэнергоиздат, 1947, 640 с.
3. Нормативы по проектированию электриче-

ского освещения на железнодорожном транспорте. М., 1948, 67 с. (Союзтранспроект).

4. Справочник по осветительной технике под ред. Л. Д. Белькинда. М.—Л., 1935.
5. Фёдоров В. Ф. Общий курс светотехники. Изд. 2-е. М.—Л., Госэнергоиздат, 1944, 208 с.